LAS FUNCIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

M. Bonacina; A. Haidar; M. Quiroga; E. Sorribas; C. Teti; Graciela Paván
Universidad Nacional de Rosario (U.N.R) - Argentina.
mbacuario@yahoo.com.ar

Resumen

En este trabajo presentamos algunas reflexiones y una propuesta acerca de la enseñanza por resolución de problemas, siendo el eje de esta última la aplicación y discusión del concepto de FUNCIÓN. En las carreras ´no matemáticas´ sin relegar el papel fundamental de la formación en lo teórico-conceptual los esfuerzos se desplazan hacia la aplicación de los métodos matemáticos en la resolución de problemas de las ciencias en general. Dado que el desarrollo mismo de la ciencia puede entenderse como resultado de la *búsqueda de solución* a los distintos problemas que aquejan al hombre, creemos que la ´enseñanza por resolución de problemas´ coadyuva a promover el cambio conceptual y metodológico que requiere actualmente el sistema educativo en general. La propuesta consiste esencialmente en el planteo de una situación problemática familiar al estudiante para, a partir de allí y siempre bajo la guía y supervisión del docente, proceder a su discusión, al planteo de conjeturas e hipótesis, resolución, verificación, etc. En este caso el problema requiere del concepto de función, concepto básico y esencial en toda disciplina que acuda a los modelos matemáticos. Creemos que este presenta características que lo signan como *concepto fuerza* en la implementación del cambio pretendido; que su uso en el marco de la resolución de problemas coadyuva a tal propósito pues, entre otras bondades, las funciones se caracterizan por tener cuatro representaciones o codificaciones distintas - *gráfica, numérica, analítica, verbal* - cada una de las cuales expresa aspectos o propiedades didácticas no equivalentes ni equiparables entre sí, lo cual, además de ampliar el espectro de posibilidades para trabajar con el estudiante, proporciona elementos para una mejor evaluación del mismo (asimilando la comprensión del concepto a la capacidad de recodificar la información desde una representación a otra).

La ciencia y su enseñanza

La ineficacia en la enseñanza de las ciencias es un hecho con el que se tropieza habitualmente y que se evidencia tanto en los errores conceptuales y actitudinales que a diario se detectan en los alumnos, como en la incapacidad manifiesta de los mismos para "resolver problemas". De allí la necesidad de proponer una revisión crítica de aquellos supuestos sobre los que descansa el paradigma de enseñanza-aprendizaje más utilizado actualmente para, a partir de allí, reorientar la enseñanza hacia un nuevo paradigma. Esto último podría concretarse a partir de una metodología de clase sustentada en las pautas más recientes ofrecidas desde la didáctica de las ciencias, particularmente en aquellas relativas al aprendizaje significativo y al cambio conceptual y metodológico (Ausubel, Novak y Hanesian 1983; Posner et al, 1982); es decir en un modelo que concebiría el aprendizaje como el cambio ´conceptual y metodológico´ producido en el estudiante a partir de sus ´concepciones previas´. Creemos que el logro de metas superiores está supeditado a la posibilidad de promover tal cambio en las ideas o representaciones previas (ingenuas, no formales, erróneas, precientíficas o rutinizadas) del sujeto que aprende. Dentro de este modelo pedagógico estimamos la "resolución de problemas" (particularmente, la modelización matemática) como el medio más conveniente a los fines propuestos.

La idea de aprendizaje como "cambio conceptual y metodológico" se basa en la similitud detectada entre el aprendizaje significativo de las ciencias y el proceso de elaboración de las teorías científicas. Esta similitud lleva a considerar conveniente a los fines propuestos el programar y orientar el trabajo de los estudiantes de manera tal que por momentos resulte comparable a la actividad de la comunidad científica. Al respecto, y en lo particular, Schoenfeld (1994) se refiere al trabajo matemático como *" un proceso de descubrimiento, vital y continuo, de comprender la naturaleza de objetos o sistemas matemáticos concretos"*. Entendemos que de esta manera lo acercaríamos al entramado conceptual y metodológico del conocimiento científico a la vez que promoveríamos el cambio pretendido a los efectos de optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin dudas la actividad científica no es una actividad *natural;* es más, podría decirse que conlleva una ruptura con formas tradicionales del pensamiento; luego, el cambio conceptual propuesto presenta dificultades de magnitud muy importante y su implementación no es posible si no se lo acompaña de un cambio metodológico profundo que afecte hábitos muy enraizados tanto en los estudiantes como (y quizás fundamentalmente), en los docentes. De allí que enfocamos el aprendizaje como *cambio conceptual y metodológico* .

La experiencia indica que en la actualidad y en el mejor de los casos se obtiene un alumno que *sabe* matemática pero que difícilmente puede *hacer* matemática. Asumimos que esta realidad sería una de las consecuencias del hecho de no haberlo puesto nunca en contacto con el *verdadero quehacer científico*. Las dificultades que presentan los alumnos a la hora de *resolver problemas* avalan la hipótesis que no es suficiente que conozcan y manejen con solvencia fundamentos explicativos de conceptos y propiedades ya que ello, por sí solo, no les permite alcanzar la *movilidad* de los mismos.

Creemos así que el modelo de cambio conceptual y metodológico propone una instancia superadora y que entre los medios para llevar adelante esta propuesta, la *resolución de problemas* (en particular la confección de modelos matemáticos) aparece como un poderoso instrumento de cambio metodológico. Cabe aclarar aquí que si bien esta metodología es hoy ampliamente reconocida como potenciadora del aprendizaje esto no significa que esté total y satisfactoriamente resuelta, que no existan cuestiones relativas a su implementación aún no lo suficientemente ponderadas como, por ejemplo, la incidencia sobre ella de los distintos modos de proceder inducidos por cada área del conocimiento; de la *´visión del profesor´* tanto respecto de disciplina como de su rol o función dentro del aula, Según Gómez (1995) esta *visión* influye en los procesos que el estudiante aprehende, los *sobredetermina*, puede o no actuar a modo de *catalizador de sus intereses y esfuerzos*.

A este respecto creemos que muchos docentes no han captado aún la diferencia entre ´problema´ y ´ejercicio de aplicación´ y que esto interfiere con el objetivo de cambio pretendido ya que, en el marco de la enseñanza por resolución de problemas cada una de estas actividades tiene un objetivo didáctico distinto e importante en sí mismo.

Así; por ejercicio se entiende cualquier actividad dirigida a *fijar y/o consolidar* conceptos o técnicas ya conocidas, mientras que por problema se entiende toda actividad que origine un desequilibrio con los saberes previos, que exija al alumno *algo de sí*, un esfuerzo que lo lleve al límite de sus posibilidades intelectuales y lo obligue a optimizar sus estrategias de razonamiento (en este caso el docente, y según la analogía propuesta, actuaría a modo de director de investigación).

- Para *resolver un ejercicio* se requieren las siguientes capacidades y destrezas:
  a) el conocimiento de conceptos, técnicas o propiedades relativos a la actividad propuesta.
  b) la habilidad para procesar y trasformar los datos necesarios para las operaciones concretas que requiera la solución. (por ej: reducir fórmulas).

▫ Para resolver un problema, además de (a) y (b), se deben poner en juego las siguientes destrezas y capacidades :

c) habilidad para separar información relevante de la irrelevante.

d) habilidad para procesar *simultánea y mentalmente* un gran número de pasos o etapas en la ejecución de la tarea propuesta., destreza que Pascual Leone (cit. en Pómez Ruiz, 1991) denomina <M-Capacity> (*) esta capacidad hace a la posibilidad de proponer un plan de trabajo y una estrategia acorde al mismo; o sea, a la posibilidad de *dimensionar* el trabajo intelectual requerido por el problema (según Niaz (cit. en Pómez Ruiz, 1991) la <M-Demand> del problema).

e) habilidad para procesar y trasformar datos en *varias direcciones*, (*) esta habilidad requiere el conocimiento del efecto y oportunidad de uso de cada operación e implica el ejercicio de razonamientos hipotético-deductivo ya que requiere del análisis comparativo de varias combinaciones y posibilidades y resulta, por ende, una manifestación del razonamiento formal.

f) habilidad para extraer información crítica desde un contexto distinto al contexto de aplicación o sea, movilidad o trasportabilidad de los conceptos de un área a otra.

Es importante señalar que muchas veces es la forma de presentación de una actividad la que finalmente determina su carácter. Así, al planificar nuestras actividades debemos tener en claro los objetivos pretendidos en cada instancia y, fundamentalmente, el objetivo *final*: desarrollar en los alumnos la capacidad de resolver problemas sin caer en la manipulación rutinaria de datos, fórmulas y/o procesos, en la actitud de *reconocer o abandonar*; lograr que pase del ´razonamiento basado en evidencias´ al razonamiento en ´término de hipótesis´; es decir, lograr *´la formación integral del estudiante, como profesional y como persona consciente del papel que puede y debe jugar tanto para sí como para su entorno´.*
Sabemos que la concreción de este objetivo no es fácil ni simple, que ello requiere de una profunda *transformación* del sistema educativo en general. Así, y aunque esto parezca una cuestión de ´vocabulario´, creemos que es importante cambiar la forma de expresarnos; que si lo que nos preocupa es *´formar´* y no *´informar´*, una manera de imbuirnos de esta idea es, por ejemplo, hablar de *proceso de transformación* en vez de *proceso de enseñanza.* Es decir, creemos que para *formar*, debemos *transformar,* y que la resolución de problemas al permitir trabajar con el *proceso* del cual deriva un resultado (antes que con el resultado), ofrece importantes oportunidades para accionar en este sentido ya que permite poner en juego cuestiones que hacen a la formación integral pretendida. Entre las más importantes: *la búsqueda de ´ método´, la capacidad de abstraer, el ´sentido de la estética´,*

(*) Resulta interesante señalar aquí cómo, para dar fuerza a la idea que se pretende difundir, nuevamente e inconscientemente se produce una modificación del vocabulario. Así, hoy día, en vez de hablar de ´capacidad de abstraer´ se habla de ´capacidad de modelar´, cambio este que no es ocioso ni casual ya que esta última expresión traduce con efectividad la esencia de la concepción emergente.

Efectivamente, si por *MODELO* entendemos, "la expresión ***formal*** de las relaciones existentes entre entidades ***reales o abstractas*** definidas en términos matemáticos" ; vemos que el proceso de *modelizacion* utiliza la lógica y los procesos matemáticos incluso en el contexto de lo *real o concreto.* De allí que la construcción y resolución de modelos deja de ser un ejercicio puramente teórico, permite *'bajar a lo concreto'* y rescata para la Matemática un importante rol en el modelo de educación emergente.

La modelización es un modo de resolución de problemas que creció en los últimos 30 años. Como no es una rama de la matemática pura, referida *solamente* a la lógica deductiva aplicada a establecer relaciones entre entidades abstractas, entendemos que el desarrollo de la capacidad de modelar hace tanto al aprendizaje significativo como al cambio pretendido. El esquema siguiente resume las capacidades potenciadas a partir de la búsqueda de modelos matemático.

BÚSQUEDA DEL MODELO		
Requiere		detectar
Capacidad de abstraer	para	Factores o hechos relevantes Interrelaciones relevantes
Confección de un plan de trabajp		Desarrollar en forma óptima y organizada las actividades con el uso del método
Sentido de la estética		La elección de un método claro y simple; potente; efectivo

Desarrollo de una experiencia

Presentamos un ejemplo a través del cual analizamos la puesta en práctica de la metodología propuesta. Comenzamos *planificando* la enseñanza del tema (en este caso: *función*); reconociendo para ello la necesidad de tratar en forma *integral* las tres instancias que abarca el acto educativo en el área matemática:

1- formación del concepto: el concepto se presenta teniendo en cuenta su ´origen´." el verdadero origen del concepto función es el de plantear, pedir, producir o reproducir dependencias o conexiones entre variables acontecidas en el mundo físico, social o mental; esto es, en y entre estos mundos" (Freudhental, 1983) Esto permite motivar la presentación a través de la resolución de problemas, mostrar la función como un instrumento natural para modelizar relación entre magnitudes.

2 - ejercitación y aplicación

2.1 - ejercitacion: etapa de fijación y consolidación de los conceptos aprendidos.

2.2- aplicación: etapa destinada a alcanzar la movilidad del concepto.

Estimamos que esta última instancia debería ser, en lo posible, la de mayor peso; que la misma posibilita el trabajo interdisciplinario, la presentación de situaciones problemáticas.

3- evaluación, entendida como un instrumento esencial para las decisiones pedagógicas.

En lo que sigue mostramos como trabajamos en la instancia de aplicación.

Modelos matemáticos. Ajuste de curvas

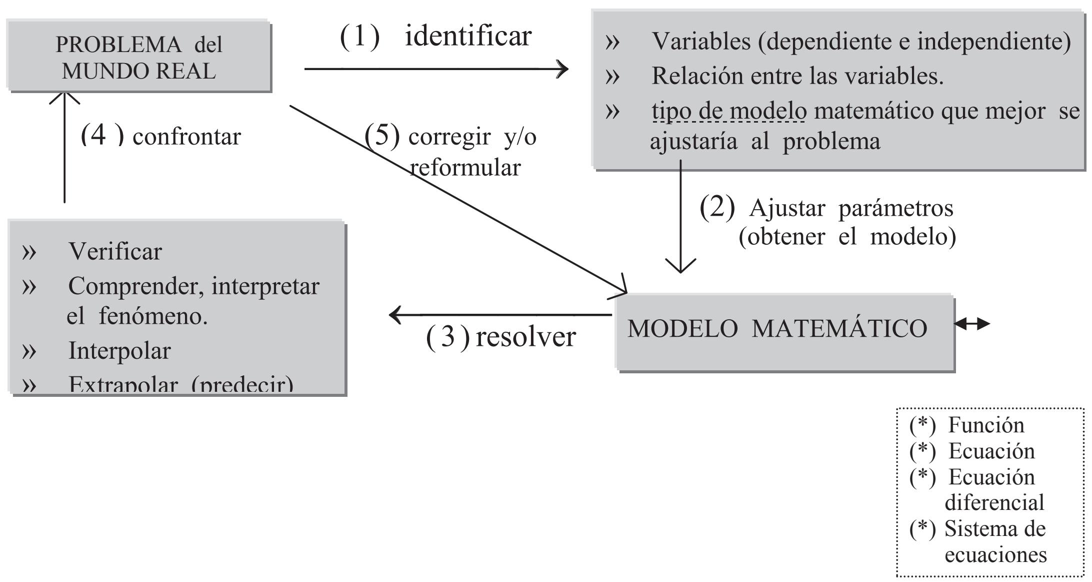
Recordamos que un modelo matemático es una descripción matemática de un fenómeno del mundo real, que la obtención de tales modelos requiere de cierta rutina ó método. Así normalmente primero se procede a identificar las variables que intervienen, el carácter de las mismas (dependiente o independiente), las relaciones entre ellas, para, a partir de allí, organizar el trabajo a los efectos de hallar una función (ó ecuación) que las vincule.

A veces sucede que ya se conoce alguna *ley* que ligue a las variables; en tal caso, una manipulación algebraica de la fórmula correspondiente permite obtener el modelo buscado. Pero no siempre habrá una ley a mano que facilite el trabajo.

Se acude entonces al *modelo empírico*, modelo esencialmente sustentado en *datos* reunidos a través de una o más observaciones o repeticiones experimentales del hecho en estudio.

En este caso, una vez realizada la experiencia se analizan los resultados en busca de un *patrón de comportamiento*. Para facilitar esto conviene presentar los datos de manera tal que las propiedades más sobresalientes queden al descubierto, sean apreciables. Así:

- se procede a la *tabulación* de los datos (***representación numérica de la función***).
- si de la representación numérica podemos pasar a la ***representación gráfica de la función***, crecen las probabilidades de hallar patrones de comportamiento ya que muchas propiedades pueden ser leídas directamente de un gráfico así como muchas veces la gráfica ´*sugiere*´ la ecuación adecuada. Existen métodos perfectamente probados que, para cierto tipo de curvas, permiten obtener la ecuación que mejor la ´ajusta´ ; o sea la que mejor captura la tendencia básica de los puntos datos.
- Si de la representación gráfica podemos obtener la ***representación analítica de la función*** estaremos sin dudas en condiciones óptimas de estudiar el fenómeno, incluso estaremos también en condiciones de hacer interpolaciones y/o extrapolaciones .
- En la siguiente figura se ilustra el proceso del modelado matemático.



UN PROBLEMA TIPO: ***comportamiento de un gas ideal***

Observación de un fenómeno natural:

" un gas que se encuentra en un recipiente deformable, a presión constante, sometido a cambios de temperatura presenta cambios de volumen".

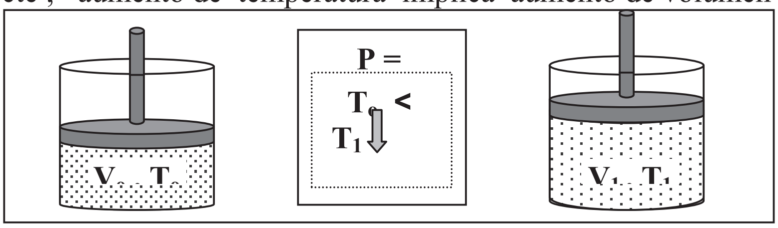
Problema: ¿ Puede ser *cuantificada* la dependencia temperatura-volumen ? .

Resolución:

(I) Proponemos un debate a partir de la palabra *cambio* (el volumen: ¿*aumenta ó disminuye*?); de las *variables* del problema, rol y relevancia de cada una de ellas, etc.

Concluimos que: "para P=cte ; aumento de temperatura implica aumento de volumen"

(II) Insistimos en lo útil de acudir a un esquema o representación gráfica de la cuestión a resolver, aun cuando este sea muy simple o elemental.



- Resulta muy probable que en la obtención de la macroestructura, se pierda de vista el problema en sí, resulta conveniente entonces realizar un *control de proceso*: ¿ dónde estamos dentro de la estructura propuesta? ; ¿ qué paso sigue? :
  - encontramos el modelo *físico* (aumento de temperatura ⇒ aumento de volumen)
  - debemos buscar el modelo *matemático* (función que ligue temperatura y volumen)

(III) Buscamos el modelo matemático.

En este momento es cuando empiezan a surgir las cuestiones más significativas en cuanto a la matemática; por ejemplo, aparece aquí un error muy común en relación a dos variables en las que el aumento de una determina el aumento de la otra: el alumno asocia automáticamente la relación hallada con una relación de directa proporcionalidad.

Vemos así como esta metodología permite detectar errores, trabajar en su eliminación.

Otra cuestión importante es la relativa a los datos: experimentales vs. teóricos. Al alumno le cuesta entender la relación entre el modelo matemático y la realidad; que el modelo propone una situación idealizada, que interpreta los hechos bajo ciertas simplificaciones.

(En este punto, fue necesario realizar un control del proceso de enseñanza; decidir respecto del tratamiento del error en los datos experimentales; se optó por simplificar esta cuestión informando de esto al alumno)

Así, y de acuerdo a este análisis, pusimos al alcance de los alumnos una serie de valores de temperatura y volumen, resultado de mediciones realizadas en forma experimental.

T (ºC)	0	50	100	150	200	250	300
V (cm^3)	20.0	23.7	27.4	31.1	34.8	38.5	42.2

Una vez puesto en marcha el proceso intentamos que el alumno trabaje en forma independiente, orientando las actividades a través de preguntas. Por ejemplo:

- ¿ qué concepto matemático ´*comprende*´ este problema?, ¿ cuál es el rol de cada magnitud variable?, ¿cómo pasamos de la representación numérica a la representación analítica de la función?, ¿ siempre podemos pasar de una representación a otra?, etc...

La primer pregunta permite evaluar si el alumno logró asimilar el concepto de *función*. Si el alumno es capaz de reconocer que esta ante una función, el problema es un problema *motivador*. Si no puede hacerlo el problema está muy lejos de él y se generan otras situaciones distintas de las que se deseaba trabajar (las cuales deben ser atendidas).

Si el alumno reconoce que está ante una función, su atención puede centrarse en el nudo del problema: hallar la *ley de la función* (ó *modelo matemático para un gas ideal*)

(*) Se insiste en la importancia de que el alumno *registre* estas preguntas, que entienda que lo que en realidad estamos haciendo es pensar en voz alta. "Estas *órdenes secretas* que los docentes nos damos al tratar de resolver un problema, facilitan patrones de conducta para el lenguaje interior, patrones que el alumno debe imitar; este proceso será gradual y el alumno debe desplegar un lenguaje interior que irá modelando hasta desarrollar un patrón silencioso; sin embargo, para que esto de resultado en el desempeño matemático, el alumno debe tener habilidades básicas" (Meichenbaum cit. en Elosúa y García, 1993).

Los alumnos responden las preguntas y desarrollan las actividades que van surgiendo:

- grafican los puntos de la TABLA en un sistema coordenado.
- del gráfico *leen* que: *los puntos se disponen sobre una recta*
- reconocen el *tipo* de función que este hecho caracteriza*: función lineal.*
- recuerdan la ecuación general de la función lineal , **y = m x + h** ;

Este punto es crucial en cuanto a verificar si el *concepto de función*, de *variable independiente* y *dependiente*, ha sido realmente *internalizado, asimilado* por el alumno. Es decir, si puede relacionar las variables abstractas (*x* e *y*) de la formulación *ideal* de la función lineal, con las variables concretas de su problema (T y V). Este paso (*elemental* si el concepto ha sido comprendido) no resulta, en general, fácil ni obvio para el alumno promedio. Existe un *obstáculo* que evidentemente les dificulta *bajar* del mundo de lo

abstracto e ideal al mundo de lo concreto y real. Así, detectamos que el alumno no sólo tendría el tradicional problema de *abstraer,* de *quitar sustancia a los objetos reales*, sino que también tendría el problema inverso, el de *dar sustancia a los contenidos abstractos* . Y si bien es entendible la dificultad para formalizar o abstraer, la reversa no aparece como algo *´difícil´* de manejar. Creemos que si detectamos dificultades, estas no son otra cosa que la *señal* de que el nuevo conocimiento no ha sido incorporado *con efectividad* a la estructura cognitiva; en definitiva, la señal de que el aprendizaje no se ha producido.
Finalmente el alumno procede a *traducir* el fenómeno al lenguaje matemático, cuidando de *dotar de sentido* a las variables.

	TEORÍA	EXPERIENCIAA	RESULTADO
Variable Independient. IndeIndependiente	**x**	**T**	
Variable Dependiente	**v**	**V**	
FUNCIÓN	**v = m x + h**	**V = m T + h**	
M = pendiente	**m =** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	**m =** $\frac{\Delta V}{\Delta T}$	→ **m =** $\frac{V_f - V_i}{T_f - T_i} = \frac{22.2}{300} = 0.074$
h=ordenada al origen	**x =0 → y = h**	**T =0→V = 20**	→ **h = 20**
CONCLUSIÓN			→ **V = 0. 074 T + 20**

MODELO MATEMÁTICO

Este es también el momento de evaluar si los objetivos propuestos en la etapa de *fijación y consolidación* del concepto *función lineal*, se han logrado. O sea, si se ha alcanzado el dominio de las técnicas algebraicas, si se ha comprendido cabalmente el significado (geométrico y físico) de los coeficientes; particularmente el de ***m*** como *razón de cambio*:
Teoría → *m* → variación de ´***y***´ por cada cambio unitario de ´ ***x*** ´
Experiencia → 0.074 → variación de ***volumen*** por cada grado de ***temperatura***.
Procedemos luego a la *validación y generalización del modelo*.
Por último planteamos los siguiente interrogantes, el resultado obtenido:
¿será válido para cualquier gas ?; ¿ para cualquier condición inicial en que el mismo se encuentre ? ; o sea, ¿ siempre que se caliente un gas a presión constante este se expandirá a razón de 0.074 $cm^3/ºC$?. ¿Coincide esto con lo visto en Química?.
Sin dudas nos encontramos ante ¡¡ otro *problema !!* ; que dejamos para otra ocasión, particularmente para cuando el alumno haya visto la ecuación para un gas real en Química (materia paralela a la nuestra) y nosotros visto derivadas y estudio de funciones.

Hacia la autonomía en el aprendizaje

Una vez resuelto un problema, si la intervención del docente ha sido muy importante, lo óptimo es proponer una serie de problemas de naturaleza similar a los efectos de que el alumno los resuelva *solo*, tratando de aplicar las reglas *descubiertas*.
Se insiste que un punto crucial de todo este trabajo es la *estructura de la evaluación final*, que de ella depende muchas veces el éxito o fracaso de toda la propuesta. Que la misma debe ser presentada de tal forma que resulte otra instancia de entrenamiento de aquellas habilidades que impliquen el manejo y el control de los propios recursos cognitivos.

Conclusiones

En particular, y en relación al tema desarrollado, se validaron en forma importante muchas de las hipótesis concluidas a partir nuestro diario accionar, entre ellas:
"Que el desmedido automatismo termina por anular la capacidad de abordar adecuadamente la resolución de problemas " .
"Que la aplicación a situaciones concretas además de facilitar la correcta interpretación y resolución de problemas, coadyuva al aprendizaje significativo"

Bibliografía

Ausubel, D.; Novak, J.D. y Hanesian, H. (1983) *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Posner, G.J.y otros (1982) Accomodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science Education,* 66 (2) , 211-227.

Schoenfeld, A. (1994). *Ideas Y Tendencias , En La Resolución De Problemas.* Bs. As, Argentina: Olimpíada Matemática Argentina. Edipubli S.A.

Gomez P. (1995). *Profesor: no entiendo*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Pomés Ruiz, J. (1991) La metodología de resolución de problemas y el desarrollo cognitivo. *Enseñanza De Las Ciencias* , Volumen 9, Nº 3, 78-82

Freudhental, H. (1983) . *Didactical Phenomelogy ol Mathematical Structure* .