SITUACIÓN DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE DERIVADA

Bertha Ivonne Sánchez Luján y Alberto Camacho Ríos
I. Tecnológico de Cd. Jiménez e I. Tecnológico de Chihuahua
isanchez@teacher.com; camachoalberto@hotmail.com

Resumen
Proponemos introducir el concepto de derivada mediante una aplicación de la velocidad media, utilizando un simulador y el desarrollo en serie de funciones, a partir de lo cual los estudiantes proporcionen una definición de la derivada.

Antecedentes

Como docentes del área, hemos observado como el concepto de derivada es enseñado por medio de la recta tangente, algunas veces como una aplicación, y otras como una fórmula dada y reconocida por los profesores, nos esforzamos por que los estudiantes la apliquen, "comprendan" una gráfica para luego olvidarnos de ella y utilizar el formulario. El concepto de recta tangente muestra que si tenemos una curva cuya ecuación es $y=f(x)$ y queremos hallar la tangente a esta recta en un punto P entonces se considera un punto Q cercano y se calcula la pendiente de la recta secante PQ, enseguida nos acercamos a otro punto a lo largo de la curva, tratando de que el intervalo entre P y Q tienda a cero, entonces la tangente a la curva en el punto P es la posición límite de la recta secante PQ, cuando Q tiende a P. Esta es la forma en que normalmente se enseña el concepto de derivada, en este proyecto presentamos una alternativa para obtener el concepto.

Planteamiento del problema

La función llamada derivada de f, implica el uso del concepto de límite de una función

$$f^{1}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{para todo } x \text{ donde exista este límite.}$$

Esto requiere, en particular, que f esté definida en una vecindad para que $f^{1}(x)$ exista. En los cursos de Cálculo, se proporciona la definición anterior para luego resolver problemas de derivada de una función utilizando fórmulas, lo que hace que el estudiante no relacione lo aprendido anteriormente.

Justificación

Notamos que existe un alto porcentaje de reprobados en la materia de Cálculo Diferencial e Integral, y los profesores tenemos la responsabilidad de hacer más accesible lo enseñado, debemos tomar en cuenta que nuestros estudiantes serán usuarios de la matemática dado que es un instrumento que les permitirá abordar problemas de otras materias y en su desarrollo laboral, por lo que debemos ayudarlos a lograr una mejor asimilación de conceptos básicos y de esta forma puedan aplicarlos posteriormente. Los estudiantes de estos niveles de enseñanza presentan, concepciones poco confiables en la determinación algorítmica de expresiones que contienen límites, como lo es el concepto de recta tangente, lo que crea en los estudiantes dificultades - obstáculos epistemológicos, como las definidas por Brousseau (Brousseau G, 1983) - que los bloquean e impiden la aplicación real del concepto.

Utilidad metodológica

Después de diseñar, aplicar y analizar las situaciones didácticas, se propondrán para su implementación en el aula con el fin de crear una serie de situaciones didácticas o escenarios para enseñar la materia.

Objetivo

Introducir el concepto de derivada en el curso de Matemáticas I, Cálculo Diferencial e Integral, mediante situaciones didácticas donde se utilice la noción de velocidad media, con el fin de lograr una concepción real vía la construcción del concepto.

Metas concretas

Diseñar una situación didáctica sobre el concepto de derivada

Introducir el concepto de una manera elemental en los estudiantes por medio de situaciones didácticas. Siendo ellos mismos quienes con sus palabras establezcan la definición correcta.

Proponer las secuencias didácticas para su aplicación por parte de los profesores del área; o, en su caso, rediseñarlas para un mejor funcionamiento en el aula.

Supuestos. **Mediante la aplicación de la secuencia didáctica, el estudiante construirá el concepto de derivada.**

Marco teórico. **La base teórica es la Teoría de las Situaciones de Aprendizaje. Se realizó un análisis histórico del concepto de derivada y análisis de libros de texto.**

Marco metodológico. ***Conocimientos previos a la aplicación de la secuencia.*** **Antes de la introducir el concepto de derivada, es necesario que se realicen ejercicios sobre el Teorema del Binomio de Newton:**

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \ldots$$

Se pide que realicen ejercicios como los siguientes:

1. Desarrollar $(3x\text{-}1)^4$
2. Si se tiene que $f(x)=x^2$, $f(x+\Delta x)$, obtener $(x+\Delta x)^2$
3. Si $f(x)=x^3$, $f(x+\Delta x)$ Obtener $(x+\Delta x)^3$
4. $f(x)=(x)^{1/2}$, $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^{1/2}$

De estos ejercicios se pretende concluir que $f(x+\Delta x) = f(x) + B\Delta x + C\Delta^2 x + \ldots$ si analizamos esta fórmula el segundo término al que llamaremos primera variación, y lo comparamos con el valor obtenido en la velocidad media cuando Δt tiende a cero, nos damos cuenta que es el mismo valor, y además es aquel que cumple con la relación

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = velocidad$$

Justificación del diseño de la situación didáctica del concepto de derivada. La secuencia está diseñada para que mediante instrucciones sencillas, los estudiantes logren dar una definición propia del concepto de derivada. Se presenta un problema en el que se deja caer una pelota , se proporciona la ecuación de la distancia recorrida y la fórmula para la velocidad promedio y se pide se complete una tabla de velocidad para diversos intervalos de tiempo. Los valores fueron escogidos de modo que proporciones información clara y suficiente sobre lo que se desea obtener, recordemos además que ya vieron la noción intuitiva del concepto de límite y han realizado ejercicios sobre el Teorema del Binomio de Newton, que es lo que los ayudará a obtener una expresión algebraica del concepto. Es una fase importante dentro del proceso, pues las preguntas van en relación a los resultados obtenidos y es donde los estudiantes pueden darse cuenta de los errores y aciertos. Al completar la tabla las preguntas que se harán a los alumnos giran en torno al comportamiento de los valores obtenidos y persiguen que ellos posean un panorama.

Análisis de la población

Las secuencias fueron aplicadas a dos grupos de estudiantes, ambos de la materia de Matemáticas I (Cálculo Diferencial e Integral)de la carrera de Ingeniería Industrial en el Instituto Tecnológico de Chihuahua II., por el mismo Profesor. El primer grupo que llamaremos "A", tomaron la clase de 9:00 a 10:00 hrs., son alumnos de primer semestre. Las clases del curso son impartidas por la Profesora A, la secuencia fue aplicada por el Profesor B.

Grupo A	**Edades**	**Carrera**	**Equipo-Integrantes**
34 estudiantes	De 17 a 25 años 6 estudiantes de 17 años 15 estudiantes de 18 años 8 estudiantes de 19 años 3 estudiantes de 20 años 1 estudiante de 23 años 1 estudiante de 25 años	Ing. Industrial Nuevo ingreso	5 5 5 5 5 4 5

El segundo grupo, en el cual se aplicó la secuencia, lo llamaremos "B; toman la clase de 9:00 a 10:00 de la mañana, todos llevan la asignatura como repetidores y asiste un estudiante para examen especial. Las clases durante el semestre, así como la secuencia, fueron impartidas por el Profesor "B".

Grupo B	**Edades**	**Curso**	**Equipo-Integrantes**
16 estudiantes	De 18 a 22 años 1 estudiante de 18 años 10 estudiantes de 19 años 3 estudiantes de 21 años 2 estudiantes de 22 años	Repetición 15 Especial 1	1B 4 2B 4 3B 4 4B 4

La secuencia se llevó a cabo en 1 clase de 1 hora cada una, previa sesión de análisis de ejercicios utilizando el Binomio de Newton.

Se les entregó a cada uno el problema de la pelota con la tabla para completar la velocidad promedio.

El total de los estudiantes contaban con una calculadora para realizar las operaciones, además realizaron operaciones y anotaron resultados en la hoja del problema

Se utilizó proyector de acetatos para cada tabla y se fueron llenando en el aula con la participación de los estudiantes.

En general se mostraron atentos y dispuestos a trabajar

Se contó con observadores y se grabó video de la clase.

Análisis de la situación didáctica del concepto de derivada

Observaciones generales. En este punto se concentran las aportaciones de cada uno de los equipos, y las descripciones que dieron a cada uno de los resultados a cada fase y cada una de las secuencias.

FASE 1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA
SECUENCIA 1
Se presenta el siguiente problema: *Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la torre CN de Toronto, 450m arriba del suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.*
La distancia recorrida después de *t* segundos es:

$$s(t) = 4.9\, t^2$$

$$velocidad\_promedio = \frac{dis\tan cia\_recorrida}{tiempo\_transcurrido}$$

SECUENCIA 2
Se pide a los estudiantes que con ayuda de una calculadora completen la siguiente tabla:

Intervalo de tiempo	**Velocidad promedio (m/s)**
$5 \le t \le 6$	53.9
$5 \le t \le 5.1$	49.49 m/s
$5 \le t \le 5.01$	49.049
$5 \le t \le 5.001$	49.0049
$5 \le t \le 5.0001$	49.00049
$5 \le t \le 5.00001$	49.000049

El profesor escribe los datos que le proporcione el grupo para completar la tabla.
FASE 2 SECUENCIA 1
El profesor pide a los estudiantes que analicen los resultados obtenidos y los comparen con el binomio de Newton.
FASE 3 SECUENCIA 1
Se pide a los estudiantes que formen equipos de cinco integrantes para concluir con una expresión algebraica.
Se pregunta:
¿Qué semejanza se encuentra entre el desarrollo del binomio de Newton y los resultados obtenidos en la tabla?
¿Qué podemos concluir al respecto?
¿Es posible obtener una expresión algebraica de lo observado?
El profesor debe guiar la discusión y dar una conclusión final

GRUPO A.- Es lo mismo, sacamos el límite de una función y da lo mismo.
En equipos de cinco para concluir:
Que la variación es el límite de la función $\lim_{x \to a} s(t) = primera\_\mathrm{var}iación$
El límite de la función cuando tiende a "a" es igual que la primera variación.
La primera variación multiplicada por el límite nos da como resultado la función.

$\lim_{t \to 5} s(t) = \lim_{t \to 5} 1a.\text{var} = 49$

$\lim_{t \to 5} s(t) = \lim_{t \to 5} 1a.\text{var} = 49$ evaluada en 4.9t2

El límite de la función cuando t tiende a 5 es igual a la primera variación multiplicada por su tendencia.

GRUPO B.-

Pero en tiempo 5 la velocidad se va alejando, ¡alejando no!, acercando.
Es un proceso al límite
El límite por la izquierda es 5.
Profesor: el límite al cual se aproxima la velocidad es 49.
Profesor: es 49 por el alejamiento de los ceros. *t=5 , v(5)= 49*
El límite de la función cuando *t* tiende a 5 es igual a 49
Lo escribieron así: $\lim_{t \to 5} v(t) = 49$
Conclusión

GRUPO A.-

$1a.\text{var}(a) = \lim_{t \to a} s(t)$ *si llamamos a la 1ª. Variación = velocidad, de acuerdo a lo que vimos:*

$v(a) = \lim_{t \to a} s(t)$ *si generalizamos:* $v(t) = \lim_{t \to a} s(t)$

GRUPOB.-

El profesor pide a los alumnos que realicen el proceso anterior, esto es, en forma binomial *S(t) = 4.9 t²*

Si hacemos $t \to \Delta t$ $\quad s(t + \Delta t) = 4.9(t + \Delta t)^2$

los alumnos dictan: $s(t + \Delta t) = 4.9t^2 + 9.8t\Delta t + 4.9(\Delta t)^2$

*se identifica el segundo término como la primera variación y se concluye que ésta es igual a **9.8t = 49***

Conclusiones
Cuando se desarrolla el binomio, en la primera variación cuando se sustituye se comprueba que es el mismo resultado

$\lim_{t \to 5} v(t) = PV$

Para llegar a un mismo resultado se hicieron dos operaciones distintas.

$s'(t) = \lim_{t \to a} s(t)$

Conclusiones

Consideramos que la inclusión del Binomio de Newton

$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \ldots,$ como una parte del proceso para la obtención del concepto de derivada, es una alternativa didáctica que se relaciona ampliamente con el concepto de velocidad promedio, es una forma fácil de "ver" la correspondencia entre los dos términos comparativos. Al aplicar la secuencia notamos que los estudiantes presentan un proceso natural de aceptación del concepto, pues es de esa misma manera que se introdujo el concepto de límite y de límite infinito, en este proceso, los estudiantes participan activamente en todas las actividades encomendadas por el profesor. El concepto es presentado de manera numérica y al compararlo con lo visto anteriormente, se presenta en forma verbal para luego traducirlo a un lenguaje matemático, logrando así una transposición didáctica entre el objeto del saber y el objeto del conocimiento. Lo que demuestra, nuevamente, la dificultad de obtener el lenguaje matemático, de pasar de la forma verbal a la algoritmia, y más aún en estudiantes del primer semestre. Se considera que el objetivo se cumplió pues las conclusiones obtenidas así lo demuestran:

Cuando se desarrolla el binomio, en la primera variación cuando se sustituye se comprueba que es el mismo resultado

$$\lim_{t\to 5} v(t) = PV$$

Para llegar a un mismo resultado se hicieron dos operaciones distintas.

$$s'(t) = \lim_{t\to a} s(t)$$

Recomendaciones

Al analizar los resultados obtenidos, se observa que los estudiantes si construyeron el conocimiento por sí mismos, y en aplicaciones posteriores lo utilizaron acertadamente, por lo que se presenta esta alternativa para enseñar el concepto de derivada.

Bibliografía

Artigue, M.(1992): Didactic Engineering. En *Research in Didactique of Mathematics*, Selected Papers. Published with the participation of ADIREM: La Pensée Sauvage Éditions. France.

Artigue, M. (1998): *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?* Equipe DIDIREM, Université de Paris 7 et IUFM de Reims. RELIME, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Internacional. Thomson Editores. México, vol. 1, núm. 1.

Boyer, Carl (1968) *Historia de la matemática*. Versión española. Alianza Editoraial. Madrid.

Edwards,C. Jr.(1982). *The historical development of the calculus*. Springer -Verlag. Second printing. New York.

Edwards y Penney (1994). *Cálculo con Geometría Analítica*. Prentice Hall. 4ª. Ed. México.

Farfán, R. (1997): *Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Leithold, L. (1998): *El Cálculo*. Oxford University Press. Séptima edición. México.

Piaget, J. (1975): *L´equilibration des structures cognitives, problème central du développment*. París URF.

Perrin-Glorian, M. J. (1994) *Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspecives. Vingt Ans de didactique des mathématiques* en France. Artigue, M, Gras, R, et al. La Pensée Sauvage éditions Paris.

Purcell E. y Varberg D. (1992): *Calculus with analitic geometry*. Prentice Hall. Sixth edition. New Jersey.

Steward, J. (2001): *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Thompson Learning.4ª. Edición.

Swokowski, E. W. (1989): *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica. 2° edición. México.