FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN UNA GEOMETRÍA DE HILBERT

Gonzalo Riera, Rubén Preiss y Hernán Carrasco
P. U. Católica de Chile, U. Diego Portales, U. de las Américas
griera@mat.puc.cl, ruben.preiss@udp.cl, hcarrasc@uamericas.cl.

Resumen

En las geometrías conocidas, tales como la Euclidiana, Esférica o Hiperbólica, damos por sentado muchas propiedades elementales sin mayor reflexión. Por ejemplo, en la Geometría de Euclides sabemos que todos los triángulos equiláteros de lado 1 son congruentes entre sí, con área igual a $\sqrt{3}/4$. Es interesante entonces conocer un modelo geométrico sencillo en el cual es preciso replantearse todas esas propiedades, tales como la definición de un ángulo o el área de un triángulo. Veremos que aquí no todos los triángulos equiláteros de igual lado son congruentes entre sí, aunque podemos hablar de ángulos, distancias y funciones trigonométricas. El modelo que planteamos es el de la Geometría de Hilbert en un triángulo que ya fue explicada en [1] . En este trabajo mostramos algunos resultados, con las potencialidades y beneficios ofrecidos por la Geometría No-Euclidiana no solamente desde el punto de vista científico, sino también, desde el punto de vista didáctico, toda vez que es posible usar este tipo de Geometría como herramienta para motivar e integrar a docentes y estudiantes en la comprensión de la Ciencia y a usar la tecnología educativa como campo de experimentación para desarrollar abstracciones en mundos imaginarios diferentes, donde la geometría es tratada por medio de modelos que toman como base un conjunto convexo proporcionado por David Hilbert y donde se hace necesario estudiar los conceptos básicos como la estructura y definición de un círculo y un ángulo, y nos concentramos en obtener algunos teoremas importantes en la Geometría hiperbólica. En resumen, si bien los resultados presentados en este trabajo constituyen un aporte creativo de conocimiento en lo científico (en lo respecta al estudio, investigación y obtención de algunos de teoremas de la Geometría No-Euclidiana), constituyen también un aporte desde el punto de vista didáctico en la enseñanza de la Geometría No Euclidiana.

Introducción

Resumimos a continuación lo explicado en [1] para conveniencia del lector. Dados cuatro puntos A, B, C, D en una línea recta en el plano euclideano (cartesiano) usual, la razón doble se define por:

(A B C D) = $\frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD}$. Esta razón es invariante bajo proyección desde un punto.

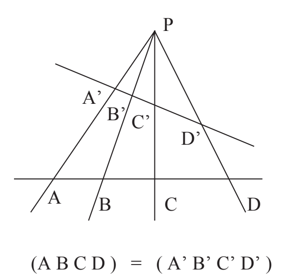
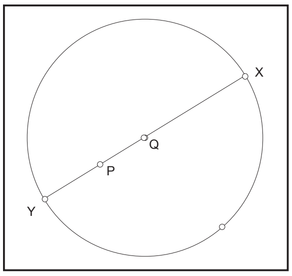


Figura 1

Hilbert considera la distancia siguiente para dos puntos cualquiera P y Q en el interior de un cuerpo convexo.



$$\delta(P,Q) = \left|\mathrm{Log}(PQXY)\right|$$

Es esta una distancia bien definida bajo la cual los puntos del borde del cuerpo convexo están "al infinito". ***Nuestro espacio es el interior de un triángulo de vértices A, B, C.*** En ese espacio vimos que:

$$\delta(P,Q) + \delta(Q,R) = \delta(P,R)$$

para puntos que no necesariamente están en línea recta y estudiamos la forma de la circunferencia unitaria.

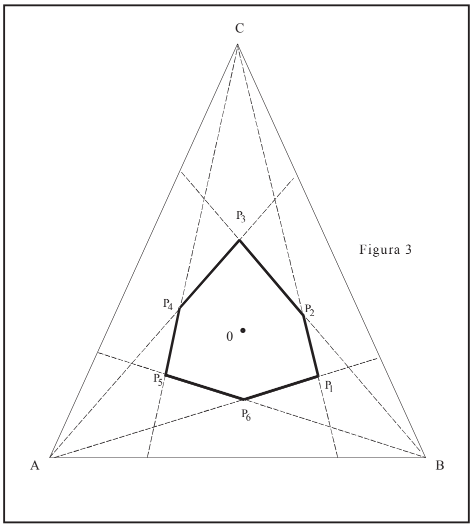


Figura 3

La "circunferencia" unitaria : $\delta(O,P) = 1$

Coordenadas

Recordamos que dados dos puntos A y B, entonces un punto Q divide al segmento A B en la razón k si $AQ \;/\; QB = k$. Resolviendo para Q se tiene: $Q = aA + bB$ con $a + b = 1$ donde:

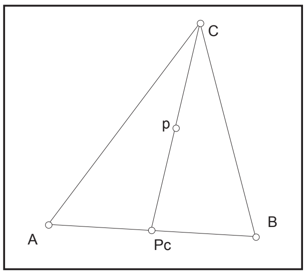
$a = 1/(1 + k)$, $\quad b = k/(1 + k)$.

Esta segunda forma es independiente del origen escogido en la recta por A B o en cualquier origen en realidad. De igual forma, dados tres puntos A , B y C en el plano, un punto P en él se escribirá:

$P = aA + bB + cC \;,\; a + b + c = 1$

y los puntos al interior del triángulo Δ ABC corresponden a: $a \geq 0,\; b \geq 0,\; c \geq 0$.

Llamaremos *(a, b, c)* las coordenadas *proyectivas* del punto P. Los puntos (0, b, c) corresponden al lado BC y así también para los otros dos lados. Observaremos una relación entre las coordenadas de P y de su proyección en uno de los lados.



Si P = *(a, b, c)* entonces: $P_c = \frac{a}{1-c} A + \frac{b}{1-c} B$ De modo que

$k = b/a$.

Proposición 1
Si P = *(a, b, c);* Q = *(u, v, w)* y la recta que los une intersecta los lados AC y BC entonces :

$$\delta(P,Q) = \left| \mathrm{Log}\left(\frac{v}{u} \cdot \frac{a}{b}\right) \right|$$

Demostración:
Por proyección desde C se tendrá $\delta(P, Q) = |\mathrm{Log}\,(P\,Q\,X\,Y)| = |\mathrm{Log}\,(P_C\,Q_C\,B\,A)|$.

Pero $(P_C\ Q_D\ B\ A) = \frac{P_C\,B}{B\,Q_C} \cdot \frac{A\,Q_C}{P_C\ A} = L/k = \frac{v}{u} \cdot \frac{a}{b}$, de donde se obtiene la conclusión.

Para referencia, las coordenadas de los puntos en la figura 3 son: 0 = (1/3 , 1/3 , 1/3)

$P_1 = \frac{1}{2+e}\,(1, e, 1)$, $P_2 = \frac{1}{2e+1}\,(1, e, e)$, $P_3 = \frac{1}{2+e}\,(1, 1, e)$,

$P_4 = \frac{1}{2e+1}\,(e, 1, e)$, $P_5 = \frac{1}{2+e}\,(e, 1, 1)$ y $P_6 = \frac{1}{2e+1}\,(e, e, 1)$.

Además los segmentos del borde se parametrizan por

$P_1\,P_2 = (t\,, et\,, 1-t-e\,t)$ con $\frac{1}{2e+1} \leq t \leq \frac{1}{2+e}$

$P_2\,P_3 = (t\,,\ 1-t\ -et\ ,\ et)$;

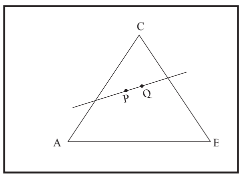
$P_3\,P_4 = (1-t-et\,,\ t\,,\ et)$; $P_4\,P_5 = (et\,,\ t\,,\ 1-t\ -e\,t\,)$;

$P_5\,P_6 = (et\,,\ 1-t-et, t)$; $P_6\ P_1 = (1-t-et\,,\ et, t)$.

Junto a estas coordenadas proyectivas consideramos las coordenadas <u>afines</u> de un punto P definidas por:

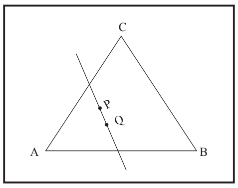
Si P = *(a, b, c)* con a + b + c = 1 entonces: $P = [x, y]$ con $\begin{cases} x = a/c \\ y = b/c \end{cases}$

(Suponemos entonces P al interior estricto del triángulo, donde *a, b, c* son positivos).
Si conocemos las coordenadas afines [x, y] podemos obtener las coordenadas proyectivas por:
$a = x/(1+x+y)$; $b = y/(1+x+y)$; $c = 1/(1+x+y)$
Estas coordenadas afines tienen la ventaja de ser dos (y no tres) en un espacio de dimensión dos.
La fórmula para la distancia en estas coordenadas varía sin embargo y la escribimos aquí:

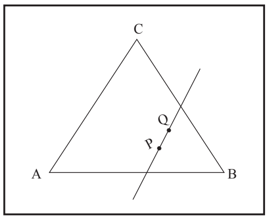


P = [x, y] Q = [r, s]

$$\delta(P,Q) = \left| \mathrm{Log}\left(\frac{s}{r} \cdot \frac{x}{y}\right) \right|$$



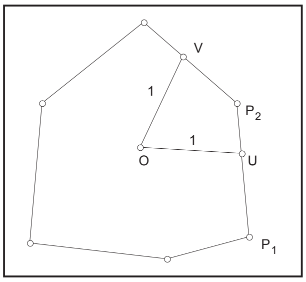
$$\delta(P,Q) = \left| Log\left(\frac{1}{s} \cdot y\right) \right|$$



$$\delta(P,Q) = \left| Log\left(x \cdot \frac{1}{r}\right) \right|$$

En coordenadas afines las coordenadas de los puntos en la figura 3 son: $0 = [1, 1]$; $P_1 = [1, e]$; $P_2 = [e^{-1}, 1]$; $P_3 = [e^{-1}, e^{-1}]$; $P_4 = [1, e^{-1}]$; $P_5 = [e, 1]$; $P_6 = [e, e]$

Funciones Trigonométricas
Debemos ahora considerar la definición de ángulo. Consideremos dos semirectas que se intersectan en un vértice P. Por una isometría podemos llevar P al punto central O; las semirectas intersectan a la circunferencia unitaria en dos puntos. La longitud de ese arco será la medida de nuestro ángulo.



$> U0V = \alpha$ si.
$$\delta(U, P_2) + \delta(P_2, V) = \alpha$$

El ángulo completo mide entonces 6, pues la circunferencia completa mide 6. El ángulo plano medirá 3. Tal como en el caso clásico, tomamos ahora una semi-recta en OP_1 que empieza a girar en el sentido contrario a las agujas de un reloj. Definimos $[C(\alpha), S(\alpha)]$ como las coordenadas afines del punto P si $\angle P_1 OP = \alpha$

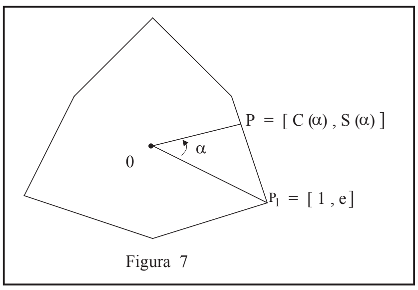


Figura 7

Proposición 2
Las funciones trigonométricas tienen los valores siguientes:

1 $\begin{cases} C(\alpha) = e^{-\alpha} \\ S(\alpha) = e^{1-\alpha} \text{ si } 0 \le \alpha \le 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} C(\alpha) = e^{-1} \\ S(\alpha) = e^{1-\alpha} \text{ si } 1 \le \alpha \le 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} C(\alpha) = e^{\alpha-3} \\ S(\alpha) = e^{-1} \text{ si } 2 \le \alpha \le 3 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} C(\alpha) = e^{\alpha-3} \\ S(\alpha) = e^{\alpha-4} \text{ si } 3 \le \alpha \le 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} C(\alpha) = e \\ S(\alpha) = e^{\alpha-4} \text{ si } 4 \le \alpha \le 5 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} C(\alpha) = e^{6-\alpha} \\ S(\alpha) = e \text{ si } 5 \le \alpha \le 6 \end{cases}$

y se extienden por periodicidad para $\alpha \le 0$ o también para $\alpha \ge 6$.

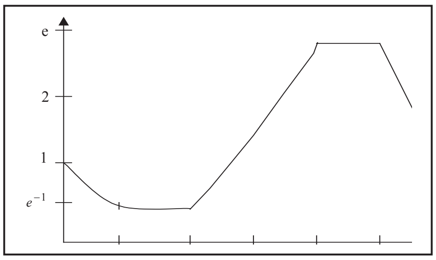
Demostración
Verificamos la fórmula 1) utilizando para ello las distintas versiones de la distancia.

$$\delta(O, P) = \delta\left([1,1], [e^{-\alpha}, e^{1-\alpha}]\right) = \left| Log \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{e^{1-\alpha}}{e^{-\alpha}} \right) \right| = Log\ e = 1$$

$$\delta(P, P_1) = \delta\left([1, e], [e^{-\alpha}, e^{1-\alpha}]\right) = \left| Log \left(\frac{e^{-\alpha}}{1} \right) \right| = Log\left(e^{\alpha}\right) = \alpha$$

Las otras fórmulas son similares.

Corolario
La gráfica de la función $C(\alpha)$ es la siguiente:



En tres períodos completos se verá:

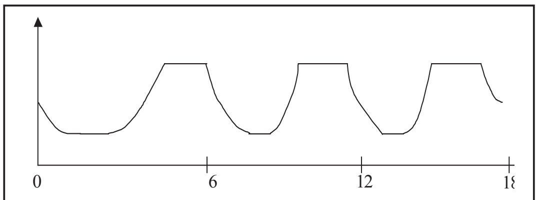


Figura 8

La gráfica de S (α) es similar

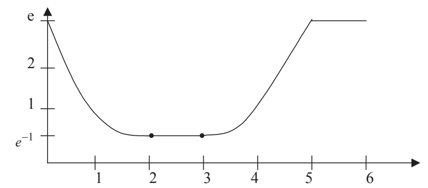
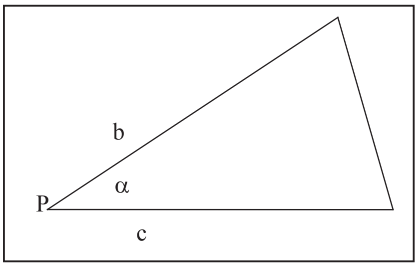


Figura 9

Observamos entonces que: $\boxed{C\ (\alpha - 1) = S\ (\alpha)}$

relación no inmediata a partir de la definición.



Área de un Triángulo

Consideremos un triángulo en nuestra geometría de lados de longitudes b y c y ángulo α.

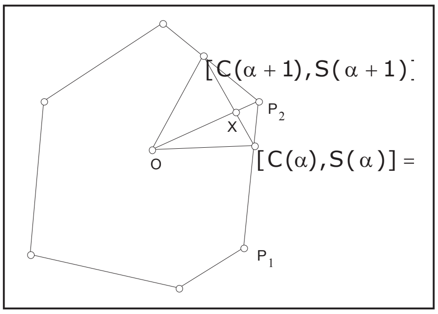
Es razonable definir su área por $b.c$ (área triángulo de lados 1 y ángulo α). Esto nos lleva a la pregunta: ¿Cuánto vale el área de un triángulo de lados 1 y ángulo α? O más precisamente aún: ¿Cuánto vale el área de un triángulo equilátero de lados 1 y ángulo 1? Si llevamos por una isometría el vértice P al origen 0, esa área será igual a ½ si los otros vértices son P_1 y P_2. En efecto, el área total del círculo de centro 0 y radio 1 debe ser 3. Pero si los otros vértices no están en esa posición, la respuesta varía.

Proposición 3

Supongamos que un triángulo equilátero de lado 1 tiene un vértice en 0 y demás vértices en $P = [C(\alpha), S(\alpha)]$, $Q = [C(\alpha+1), S(\alpha+1)]$.

Entonces su área es igual a $\frac{1}{2}\left|\mathrm{Log}\left|\frac{e^{-\alpha}+e^{1-\alpha}-2}{e-1}\right|\right|$

Demostración



$\Delta OUP_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha)$, pues el área total es $\Delta P_1OP_2 = \frac{1}{2}$. De igual anera: $\Delta OP_2V = \frac{1}{2}\alpha$.
Entonces: $\Delta OUV = \Delta OUX + \Delta OVX = \overline{0X}\,\Delta OUP_2 + \overline{0X}\Delta OVP_2 = \overline{OX}\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(1-\alpha)\right) = \frac{1}{2}\overline{OX}$.
Basta calcular entonces la distancia $\overline{0X}$ donde X es el punto de intersección de las rectas por U, V y por O, P_2. Eso da el resultado de la proposición.

Corolario: No todos los triángulos equiláteros de lado 1 tiene igual área.

Bibliografía

Riera, G., Carrasco H., Preiss R. (1999). La Geometría de Hilbert en un triángulo. *Revista Pharos*, 6 (2): 61-69. ISSN 017-1307. Universidad de las Américas. Chile.
Buseman, H. (1955). *The Geometry of Geodesics***.** Academic Press Inc. New York. USA.
Hilbert D. (1971). *Foundations of Geometry*. Open Court, La Salle. USA.
Buser, P. (1992). *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Birkhäuser.
Castelnuovo, G. (1959). *Lecciones de Geometría Analítica*. Edit. Calomino, La Plata, Argentina.