

LA COMUNICACIÓN DE LOS SABERES MATEMÁTICOS

Alicia Gil, Amalia Kaczuriwsky
 Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Mendoza. U. N. de Cuyo
lauma@nysnet.com.ar; alivagil@hotmail.com

Resumen

El aprendizaje de la Matemática constituye un campo de estudio importante para el análisis de las actividades cognitivas que son puestas en juego con este fin. La necesidad de poder comunicar correctamente los saberes matemáticos requiere el uso de un lenguaje específico el que se adquiere a través de un proceso de comprensión posible justificar desde dos relaciones distintas: la diádica (significado/significante) y la triádica (objeto – representante – interpretante). La primera de ellas tiene su soporte en la noción de representación semiótica y cambios de registro; en tanto la segunda se apoya en la noción de signo. La relación diádica considera al lenguaje lógico formal como un registro, en tanto que la triádica postula la creación por parte de los alumnos de lenguajes formales cada vez más avanzados, hasta lograr la expresión más abstracta.

Es una problemática que le concierne a la Didáctica de la Matemática el buscar una solución que permita articular los distintos registros de representación para superar esos obstáculos y uniformizar criterios que permitan realizar con éxito la comunicación de los saberes de esta ciencia. El desafío está planteado.

El lenguaje matemático

Uno de los conflictos que surgen en la enseñanza de la Matemática tiene que ver con el lenguaje que la misma utiliza. Cada uno de nosotros usa para comunicarse con los demás, el lenguaje propio de su país; sin embargo, cuando nos iniciamos en la etapa escolar, nos vamos introduciendo en un lenguaje nuevo, caracterizado por sus connotaciones de exactitud y de rigor: el de la Matemática. Seguramente en nuestra labor como docentes nos ha pasado, al escribir:

$$\{a; e; i; o; u\} = \{x/ x \text{ es vocal}\}$$

que nuestros alumnos no reconocieran la igualdad, ya sea porque en el primer conjunto hay cinco elementos y sólo reconocen uno en el segundo, o porque la x no es vocal y no la identifican como variable, la toman como un elemento que se cuenta, es decir, hay uno. Otro hecho bastante frecuente es, al preguntar a los alumnos, ¿cuántas x tengo en $3x$ más $5x$?, que nos contesten: dos; o ¿qué nos da si a $6x$ le quitamos x ? y nos respondan: seis...; o ¿cuál es la diferencia entre 5 y 2?, nos podrán responder que uno es par y el otro impar, que cinco es mayor que dos, y no siempre darán la respuesta que nosotros, como docentes, esperamos. Estos ejemplos simples, frecuentes, muestran el poco éxito de la comunicación en Matemática, muchas veces se trata de dos interlocutores hablando del mismo objeto, pero con ópticas distintas. No obstante, el lenguaje matemático se ha ido simplificando a través de los tiempos, tratando también de unificarse y poniendo de manifiesto la evolución que tuvo. No se trata, por lo tanto, de eliminar el lenguaje formal, sino de encontrar caminos didácticos que permitan poder pasar con fluidez del lenguaje natural al formal y viceversa. En la búsqueda de estos caminos, encontramos dos visiones: una diádica y otra triádica.

El lenguaje formal

El vocablo “abstraer” suele ser temido por quienes no saben reconocer las palabras que designan las formas. En este sentido, la enseñanza no contempla el aprendizaje de las formas. La única abstracción que llega a realizarse es en el álgebra y se suele enseñar de tal manera, que más de un alumno puede resolver y aprobar un examen que contenga complicadas técnicas algebraicas sin saber que el álgebra es, en algún sentido, la forma abstracta del cálculo aritmético.

Es el estudio de la lógica que, como ciencia formal, se interesa por la forma de ciertos conjuntos de signos, lo que permite hacer explícitas estas abstracciones, a pesar de que es justamente el uso de esos signos lo que constituye un verdadero problema. La Matemática es una creación de la mente humana, en consecuencia, para cada individuo existen sólo aquellos conceptos que pueden ser construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos que, además, deben poder explicitarse a través de un discurso. La práctica de un discurso es inseparable de cierto funcionamiento cognitivo.

El papel del lenguaje en el funcionamiento cognitivo es fundamental pues está relacionado con la comunicación, el tratamiento y la objetivación. Es la comunicación quien le permite a un individuo interactuar con otro; el tratamiento es fundamentalmente la actividad de razonar y la objetivación está relacionada con la capacidad de análisis.

Estas funciones del discurso, que son irreductibles, evidencian la importancia del conocimiento de la lengua. La función de designar objetos es de manera analítica, sin recurrir a la intuición ni a ningún tipo de representación temporal o espacial, los alumnos deben realizar un aprendizaje por adaptación de estas designaciones y esto puede ser origen de obstáculos, tal como lo plantea el Dr. Brousseau¹.

Los signos

Cualquier sistema de comunicación está formado por unidades constituyentes que se denominan signos, el empleo de signos que tienen sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento, constituyen un sistema semiótico y la disciplina que los estudia es la Semiótica, de la que se considera fundador a Fernando de Saussure²,

La visión semiológica de Saussure se explica con las nociones de “lo significante” y de “lo significado”, siendo “signo” sólo la relación entre uno y otro. Así por ejemplo, lo significante puede ser la imagen sonora de la palabra casa y lo significado es el concepto de casa que se tiene, no la casa misma. La descripción que Saussure hace del signo es de contenido psicológico porque localiza el signo en la mente del emisor. Un concepto (significado) se asocia de modo arbitrario con una imagen acústica (significante). Este tipo de significante responde al carácter vocal - auditivo de las lenguas, la relación que plantea en consecuencia es diádica: lo significante/ lo significado. De cualquier modo la postura de Saussure, como se centra en el lenguaje verbal, ha sido vista como prototipo de perspectiva lingüística, por el contrario a la semiótica norteamericana se la ha visto como pragmática o dirigida al estudio del uso del signo. Charles Sanders Peirce³ inició en Estados Unidos el

¹ Brousseau, Guy: “Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática”.

² Lingüista sueco. 1857- 1913

³ Nacido en Massachussets, USA, 1839- 1914

estudio del signo: “Un signo es un objeto que está en el lugar de otro en alguna mente”⁴, define, y establece que sus características son tres:

- Existe una relación triádica entre significado – significante – interpretante, entendiendo como este último, a la cognición producida en una mente.
- Esta relación no es estática pues está abierta a otra cognición, que a su vez es un signo, y así sucesivamente.
- Tampoco es arbitraria porque el signo fuerza al interpretante a referirse al mismo signo al que él se refiere.

⁴ “A sign is an objet which stands for another to some mind”, Hoopes, ed. 1991, pág.141.

La propuesta triádica Para Peirce, la Semiótica es una relación subjetiva pues depende de “alguien” concreto y triádica, esto lo explica a partir de la trilogía Objeto – Representante (Signo) – Interpretante. De acuerdo con su teoría, el objeto es el objeto en sí, el que existe en el mundo real, no la palabra que lo significa. El signo está en lugar del objeto y cada uno puede interpretarlo de manera distinta, se crea así la noción de interpretante. El signo es un coproducto entre el objeto y el sistema de interpretación. El interpretante de un signo se transforma en un nuevo signo; se genera así una cadena de signos que converge hasta crear un hábito. En su trabajo sobre “Signos, textos y sistemas matemáticos”, Luis Puig estudia los procesos de significación y comunicación en el sentido de Peirce para quien el énfasis está puesto en la idea de signo. Peirce distinguió tres tipos de signos: los íconos, que guardan una relación de semejanza con el objeto designado (foto, mapa...), es una relación racional entre el signo y la cosa; los indicios, que remiten al intérprete hacia algo que ellos mismos no son por su inmediata relación física (humo, fuego); si el objeto no existiera, el índice dejaría de significar, no se parecen a los objetos correspondientes y los símbolos que serían casi en su totalidad convencionales, dejan por lo tanto, de tener significado. El ícono y el objeto no poseen una conexión dinámica, el ícono recuerda a alguna mente un objeto por sus semejanzas con él, es decir, existe una asociación mental por semejanza. El índice, en cambio, se conecta físicamente con el objeto, la mente no interviene en esa conexión, sólo la reconoce una vez establecida. El símbolo está conectado con el objeto por una idea que existe en la mente, sin esa idea no existiría conexión. En la terminología de Peirce las expresiones algebraicas, que generalmente conocemos como lenguaje simbólico (por ejemplo, una ecuación), no son símbolos sino íconos pues, a partir de su observación directa es posible deducir propiedades que tienen los objetos. Siguiendo con el ejemplo, las letras de una ecuación tomadas en forma aislada son índices porque indican una cantidad y los signos $=$, $+$ son los símbolos. En la conceptualización de Peirce, el interpretante toma un papel tan relevante que las representaciones pasan a ser casi exclusivamente mentales, esta visión nos llevaría a tomar un modelo cognitivo puramente mental para analizar la adquisición del conocimiento matemático. Lo que propone este modelo de comunicación es generar sistemas matemáticos de signos para la escritura formal, que se utilizan efectivamente en situaciones de enseñanza. El concepto de texto es radicalmente distinto al que conocemos; en este sentido, un texto es una consecuencia de un acto de elaboración realizado por una persona. Estos textos son de abstracción progresiva a medida que se avanza en la escolaridad, es una forma de reproducir los avances que se realizaron en la propia Historia de la Matemática. Cada sistema matemático de signos define un estrato, cada estrato es un momento distinto de este proceso de construcción de espacios textuales. El uso de estratos distintos o de combinaciones distintas de estratos puede hacerse pero estableciendo la correspondencia entre los elementos utilizados. Cuando esta correspondencia no es posible, surge un nuevo estrato más abstracto que el anterior, es decir, un sistema matemático de signos de nivel superior.

La propuesta diádica

Por el contrario, si consideramos la teoría del Dr. Raymond Duval⁵ para quien las representaciones subjetivas se plantean como origen de conflictos para el aprendizaje, las

⁵ Duval, Raymond. “Representation et représentations”. *Seminaires de Recherche. Conversion et articulation des représentations analogiques*. Janvier 1999. Pág: 7 a 24.

representaciones semióticas son por naturaleza, representaciones externas, y para un mismo objeto es posible tener representaciones diferentes; cada nuevo sistema semiótico aporta nuevos significados de representación y nuevos procesos para el pensamiento matemático; por lo tanto, la conceptualización a tener en cuenta desde este punto de vista, es la relación diádica “significante – significado”.

El progreso en Matemática implica el desarrollo de numerosos sistemas de representación, de tal forma que cada nuevo sistema semiótico aporta nuevos significados. Desde esta perspectiva, aparecen las causas de los errores pues cuando se cambia de sistema semiótico, se modifica la representación mientras el objeto permanece constante.

Es lo que el Dr. Duval llama el carácter paradójico del conocimiento matemático: no se puede acceder a los objetos sin los signos que los representan pero al mismo tiempo, no deben confundirse con sus representaciones.

En Aristóteles (*De interpretatione*) y Platón (*Cratilo*) ya se ve la preocupación por estudiar las relaciones que podían establecerse entre la configuración de los términos y la configuración de las cosas: el **semainon** (significado) y el **semainomenon** (significante).

Desde esta relación diádica planteamos ahora el problema de la comunicación.

La función semiótica se realiza cuando expresión y contenido entran en correlación mutua, en tanto que el concepto de representación mental es una imagen interna que tiene un individuo sobre un objeto en correspondencia con su pensamiento; las representaciones semióticas corresponden a un conjunto de signos que se manifiestan mediante el lenguaje como medio de expresión de esas representaciones mentales para hacerlas visibles a otro individuo.

En el marco de esta teoría, un **objeto** (por ejemplo, las funciones) tiene distintas **representaciones**, que se denominan registros, y que pueden ser: gráfico, tablas, algebraico, informático, etc.; surgen los sistemas semióticos.

El progreso de los conocimientos siempre es acompañado por la creación de sistemas semióticos nuevos. La formación del pensamiento científico es inseparable de los simbolismos para representar los objetos y sus relaciones.

La pluralidad de las representaciones semióticas permite que un mismo objeto sea representado por sistemas distintos, cuando esto ocurre, es posible desarrollar mejor las capacidades cognitivas del individuo.

El Dr. Duval sostiene que muchas veces las dificultades en la comprensión de la Matemática no dependen de su complejidad, ni de sus conceptos, sino a la no congruencia entre significante y significado y/o entre un registro de representación y otro.

En su obra, el Dr. Duval demuestra, mediante tareas que implican cambios de registros, que existen obstáculos y dificultades específicos, relativos a la comprensión de la Matemática, que no son debidos a la complejidad de la misma sino a la interferencia, inadecuación y restricciones que provocan el uso de determinado registro de representación.

De acuerdo con esta teoría, el análisis del desarrollo de un conocimiento y los obstáculos de aprendizaje relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos, se deben a tres fenómenos ligados entre sí: el primero es la diversificación de registros de una representación semiótica, otro es la diferenciación entre representante y representado y el tercero es la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles.

La importancia que adquiere el tratamiento de la conversión de representaciones y las actividades a plantear para facilitarlas, por todo lo dicho, es fundamental.

La conversión de una representación producida dentro de un registro en una representación del mismo objeto en otro registro, deja explicitada una actividad de reconocimiento. Así por ejemplo, un texto y una imagen, presentados en conjunto, deben identificarse como dos representaciones del mismo paisaje; la escritura algebraica de una ecuación de primer grado y su gráfica cartesiana son dos representaciones de la misma función afín.

Esta conversión de representaciones es una etapa necesaria en la resolución de un problema o en la comprensión de un enunciado.

El Dr. Duval establece que todas las representaciones funcionan como una oposición “mental/ material”. Las representaciones materiales corresponderían a todo lo que sea visible: expresiones lingüísticas, fórmulas, esquemas, gráficas, tablas; por el contrario, las representaciones mentales corresponden a lo que está dentro “de la cabeza” del sujeto y que no se pueden exteriorizar materialmente; son las imágenes, los conceptos y tienen el carácter de subjetivas.

Serían estas representaciones mentales las que permiten la comprensión de las materiales, las que cumplen, esencialmente, una función de comunicación; esta especie de subordinación hace que los sistemas semióticos dentro de toda actividad intelectual cobren suma importancia.

Una de las mayores dificultades que manifiestan los alumnos concierne precisamente al pasaje entre los distintos registros de representación semiótica. La comprensión conceptual implica, en sentido estricto, el dominio de un registro de representación y la capacidad para articular un concepto en otro registro de representación; ningún conocimiento puede ser adquirido mediante un único registro, son necesarios al menos dos diferentes para poder comprenderlo.

Por otra parte, una representación semiótica admite la posibilidad de un tratamiento, es decir, sin cambiar de registro, desarrollar procedimientos que permitan una mejor comprensión.

El tratamiento es la función que transforma una representación en otra, dentro del mismo registro, es decir, son las transformaciones discursivas estrictamente ligadas a una misma representación; así por ejemplo, un cálculo o una demostración de alguna propiedad. No debemos confundir con la actividad de conversión, puesto que ésta consiste, como vimos, en pasar de un sistema de representación a otro, el mismo objeto representado.

La importancia de la diferencia entre la actividad de tratamiento y la de conversión para comprender el funcionamiento cognitivo está inmersa dentro del contexto de dos fenómenos mayores. Mientras que el tratamiento hace referencia a la posibilidad de demostrar, de desarrollar; la conversión está relacionada con la capacidad de comprensión y la madurez intelectual del alumno.

Es importante destacar que no todos los sistemas semióticos permiten actividades de tratamiento, tal como la lengua formal, la escritura algebraica, representaciones gráficas.

Las dificultades que aparecen cuando se efectúan cambios de registros se deben fundamentalmente a que no se respeta el concepto de congruencia, es decir, no existe congruencia entre un registro y otro.

Para poder determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar por segmentar a cada uno de ellas en unidades significantes y luego analizar si pueden o no ponerse en correspondencia.

Esta congruencia se apoya en tres conceptos fundamentales:

- debe existir una correspondencia semántica de elementos significantes del registro de partida y el de llegada,
- esa correspondencia entre unidades significantes debe ser unívoca,
- debe respetar el orden de conversión de las representaciones.

Es posible postular, por lo tanto, que de acuerdo con esta visión diádica, las causas profundas de errores hay que buscarlas en la no congruencia entre sistemas semióticos, lo cual revela ausencia de coordinación (o sea, la capacidad para reconocer representaciones distintas de un mismo objeto) entre dichos sistemas.

Un ejemplo

El análisis de la definición de elemento inverso de cada elemento en un grupo finito G , ya sea en su forma coloquial o formal, conduce a las siguientes consideraciones según cada una de las visiones.

a) Para la visión triádica:

A partir del soporte teórico de la relación triádica de Peirce existe otra propuesta, que plantea la generación progresiva de sistemas matemáticos de signos, no de sistemas de signos matemáticos (la caracterización matemática la tiene el sistema, no el signo). Como vimos, consiste en que los alumnos generen en sus espacios textuales sistemas de matemáticos de signos que acompañen su crecimiento intelectual.

En este sistema, los textos intermedios que generan los alumnos hasta alcanzar la escritura correcta se interpretan como distintos estratos que al superarlos se va alcanzando mayor nivel de abstracción.

b) Para la visión diádica:

Así como ya se ha planteado la necesidad de tender un puente entre la aritmética y el álgebra, observamos la necesidad de plantear, desde la Didáctica de la Matemática, la creación de una representación intermedia entre ambos registros que funcione como vínculo entre ambos lenguajes pero que no pertenezca a ninguno de los dos.

Es de destacar que las expresiones mixtas, que resultan de uso frecuente, no constituyen una representación intermedia pues mezclan características de un registro con otras propias del otro; carecen de reglas de formación y tratamiento.

El Dr. Duval propone como vínculo, un sistema sagital, a partir del hecho que el alumno está familiarizado con este sistema, muy utilizado para graficar relaciones.

El sistema sagital se realiza con representaciones no discursivas; permite objetivar, controlar o corregir la comprensión de los enunciados.

Constituye el encadenamiento de dos expresiones independientes entre sí y excluye el análisis del enunciado con criterio semántico o sintáctico, es una representación esquemática que se construye para apropiarse de un funcionamiento discursivo.

Bibliografía

- Duval, R. (1999) *Sémiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali, Colombia. Universidad del Valle. Traducción de Myriam Vega de Sémiosis et Pensée Humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels (1995). Berne: Peter Lang. ISBN 958- 8030- 23- 4.

- Duval, R. (1999) *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*. Univesité du Littoral, Laboratoire Mutations de Systèmes éducatifs and IUFM Nord Pas-de-Calais.
- Rey Pastor, J. y Babini, J. (1951) *Historia de la Matemática*. Buenos Aires. Editorial Espasa – Calpe.
- Kilpatrick, J. y otros (1995). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. Bogotá. Grupo Editorial Iberoamericana. ISBN 970-625-107-3.
- Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Matemática*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Álvarez, J. et al (1997) *Breve historia de la lógica*. Monterrey. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.
- Font, V. (2000). *Procedimientos para obtener expresiones simbólicas a partir de gráficas*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.
- Malisani, E. (1999) *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico*. Rosario. Instituto Rosario en Ciencias de la Educación. ISSN 0327- 392X.
- Puig, L. (1994). *Signos, textos y sistemas matemáticos de signos*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.