

ESTUDIO DE LA VARIACION DE LA DIRECCION DE UNA CURVA CON SOPORTE TIC'S

Patricio Guzmán Sereño
Universidad Tecnológica Metropolitana, Chile
pguzman@utem.cl

Resumen

Una situación matemática puede ser estudiada desde tres puntos de vista; algebraica, numérica y gráfica, desde una perspectiva cognitiva dicha situación puede ser considerada en forma integrada desde los tres puntos de vista, permitiendo la posibilidad de establecer nuevas relaciones entre las representaciones lo que deviene en una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos en estudio, posibilitando el aprendizaje de herramientas nuevas proporcionadas por la tecnología mediante el uso de un software algunos de ellos muy simples, amistosos y poderosos. Ellos permiten que los registros gráfico y numérico adquieran un nuevo estatus, pues permiten a los alumnos comprender que los problemas algebraicos se pueden resolver, sobre la base de estos registros, gráfica o numéricamente tan bien como con la manipulación algebraica.

Desarrollo

En un lenguaje común la curvatura de una curva se relaciona con la tendencia de un punto en movimiento sobre una curva a cambiar de dirección. Si la curva es una línea recta no hay cambio de dirección. La dirección de una curva se toma como la pendiente de la recta tangente a la curva. Una de las interpretaciones de la derivada informa acerca de la dirección de la curva en un punto, en el caso de una línea recta esta dirección es siempre la misma, no hay cambio ni variación, en el caso de una circunferencia la curvatura es constante, al representar una gráficamente una función es posible formarse una idea acerca de la variación de la dirección de la curva.

El software disponible actualmente nos permite graficar con rapidez y exactitud una gran variedad de funciones, al observar la gráfica de una función es posible formarse una primera impresión acerca de su dirección y del cambio que esta experimenta. Aún cuando existen ejemplos acerca de los errores en que incurren algunos programas disponibles al graficar funciones, existe otro tipo de errores que se cometen a partir de inferencias relativas a la variación de la dirección de una curva y que se producen al observar las gráficas de estas funciones.

Se presenta el estudio de dos ejemplos en los cuales a partir de la representación gráfica de funciones realizada mediante el uso de software matemático se infiere error respecto a la variación de la derivada, Se resalta el hecho de que el soporte teórico permanece invariante es decir permanece constante.

Variaciones en la derivada

Se propuso a los alumnos del primer curso de cálculo en las carreras de Construcción Civil y Arquitectura dos problemas.

Problema 1

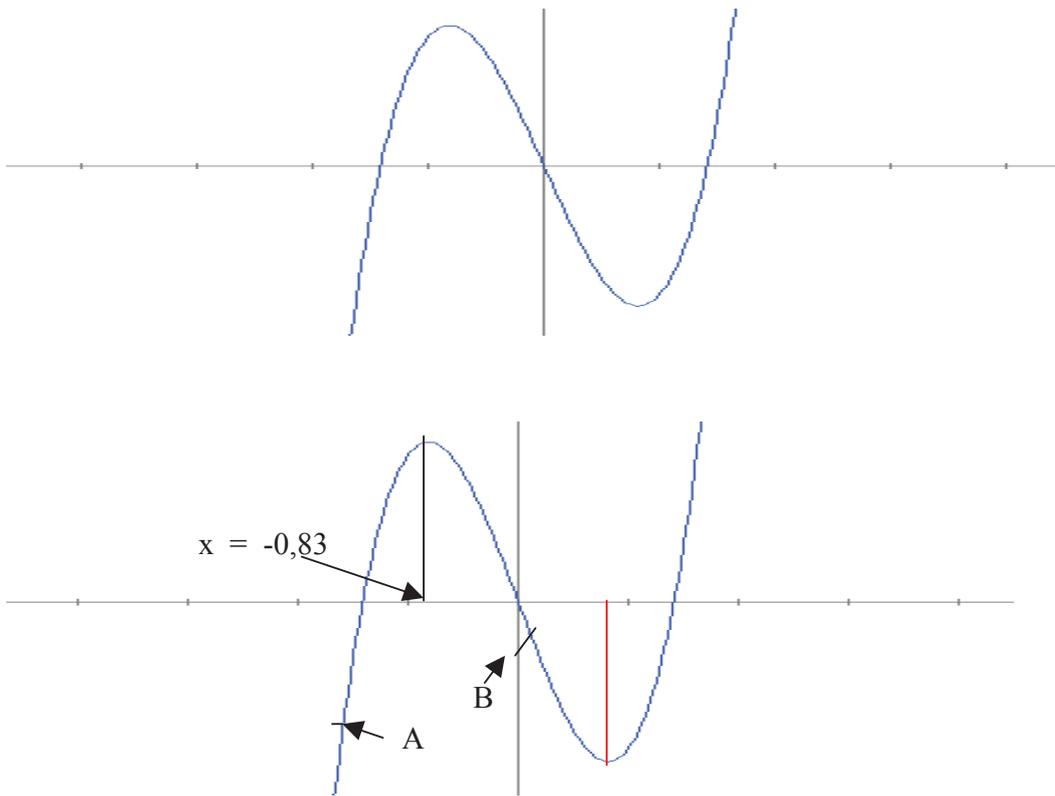
Construcción de una carretera cuyo trazado está determinado por la gráfica de la función:

$$y = -\frac{x^3}{3} - \frac{2x}{3},$$

se solicita determinar los puntos en que la curvatura de la carretera es máxima, a objeto de colocar la correspondiente señal de tránsito.

Al parecer el problema se resuelve determinando los puntos en que la gráfica presenta mayor cambio en su dirección

La gráfica de esta función es:



Al observar la gráfica se tiene que entre los puntos A y B la curva casi no hay variación en su pendiente, en cambio si lo hay en una vecindad de; $x = -0,83\dots$, alcanzando valores positivos cada vez más pequeños y tomando valores negativos a la derecha de; $x = -0,83$. El cambio en la dirección de la curva al parecer es extremo .

La información gráfica parece indicar que el cambio en la dirección de la curva se produce en los extremos de la función

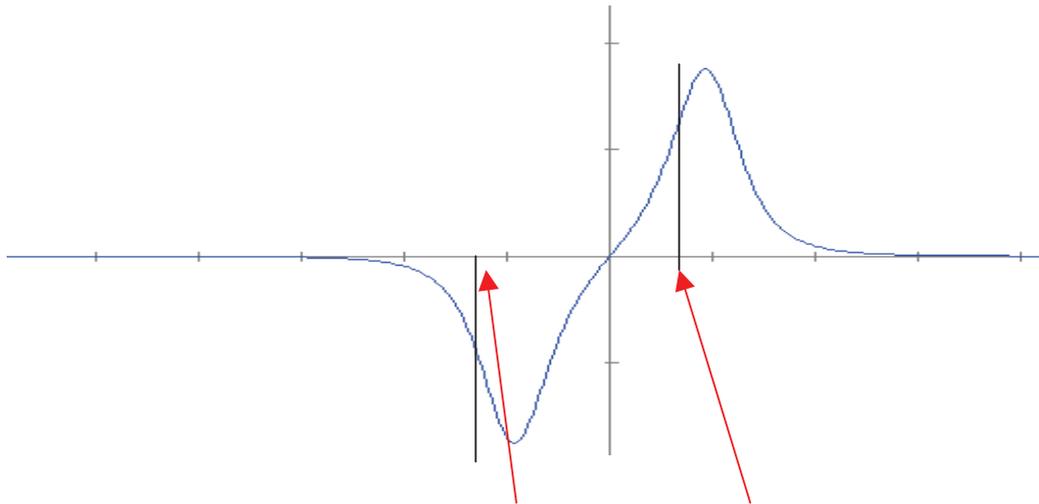
El cálculo de los extremos de

$$y = -\frac{x^3}{3} - \frac{2x}{3}$$

Estos se presentan en; $x = -0,83$; $x = 0,83$

La expresión que da cuenta de la curvatura es:
$$K(x) = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

La gráfica es:



Los extremos de esta curva se presentan en: $x = -0,9309$, $X = 0,9309$.

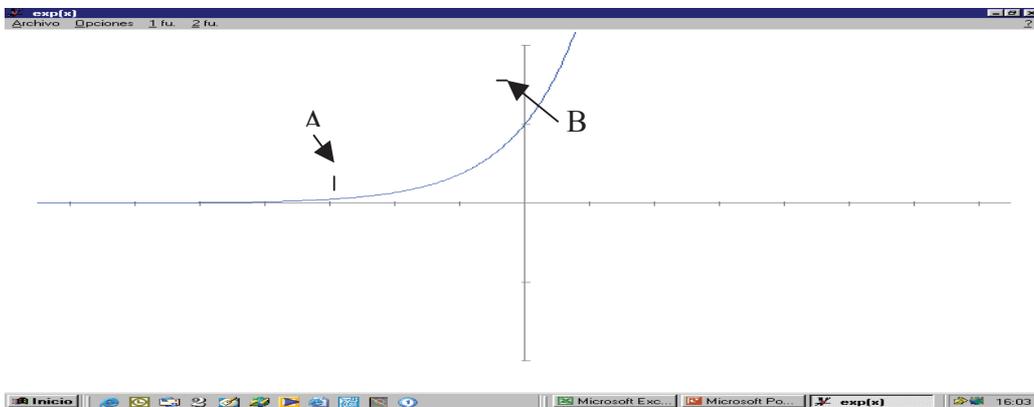
Los cuales no coinciden con los puntos en los cuales la función presenta sus valores extremos.

Los extremos relativos no son puntos en los cuales la función presenta curvatura máxima.

Luego el análisis gráfico y el analítico sólo han dado una respuesta aproximada, el análisis algebraico ha dado la respuesta correcta.

Problema 2.

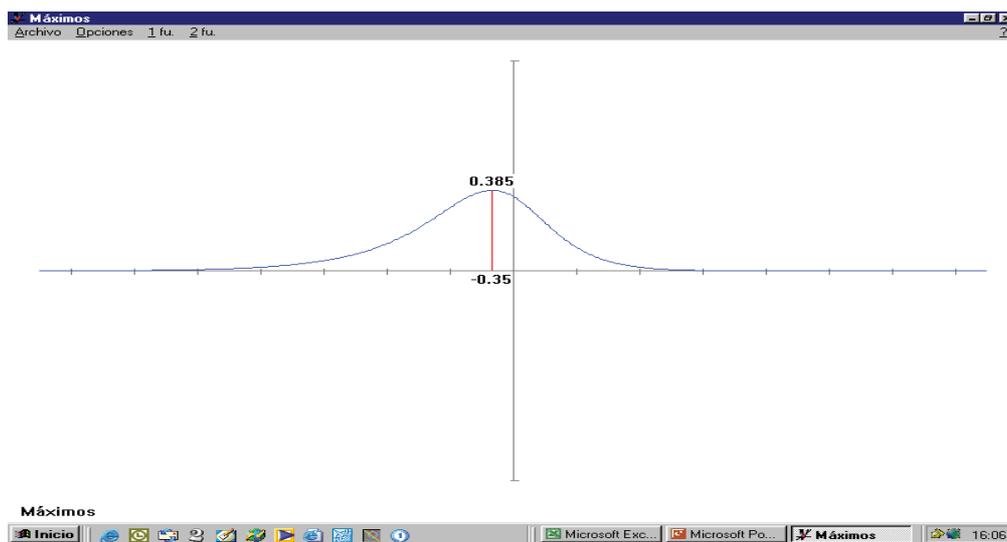
Construcción de una carretera cuyo trazado está determinado por la gráfica de la función: $y = e^x$. Se solicita determinar los puntos en que la curvatura de la carretera es máxima, a objeto de colocar la correspondiente señal de tránsito



La gráfica nos informa que esta es una curva "suave", que no presenta una variación significativa en su pendiente entre los puntos A y B.

La curvatura de esta función está dada por: $k(x) = \frac{e^x}{[1 + e^{2x}]^{\frac{3}{2}}}$

La gráfica de esta expresión con indicación de su extremo es



En este ejemplo una curva que no presenta una gran variación en su dirección presenta un punto en el cual la curvatura es máxima

La función: $y = e^x$, $x \in \mathcal{R}$, no presenta extremos relativos en cambio si presenta un punto en que su curvatura es máxima.

Conclusiones

La información obtenida del análisis gráfico nos induce a formular propiedades de la función que no coinciden con la información obtenida con el análisis algebraico, en el primer caso no coinciden los extremos de la función con aquellos puntos en los cuales el cambio de la derivada es extrema, en el segundo caso la curva presenta una pendiente suave que si presenta un punto de curvatura máxima. Por lo tanto quien decide es el análisis numérico.

Bibliografía

- Cantoral, R. (1994). *Hacia una Didáctica del Cálculo basada en la Cognición*. Antologías Número 1 (pp. ; 1-24)
- Cedillo, T. (2001). *La Calculadora en la Clase de Matemáticas Implicaciones hacia la Enseñanza*. Memorias de la Conferencia Internacional sobre Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo Morelia, México.
- Cordero, F. y Solís, M. (1997): *Las Gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo*. Serie Cuadernos de Didáctica, Grupo Editorial Ibero América, 2a. edición
- Hitt, F., (1997): *Modelación Matemática con ayuda de Calculadora Graficadora*. Memorias VIII Seminario Nacional. Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. CINVESTAV, México
- Dolores, C (2002). *Concepciones alternativas acerca del comportamiento de funciones a través de sus gráficas*, Actas RELME 16, La Habana, Cuba