# MÉTODOS ALTERNATIVOS EN LA BÚSQUEDA DE LOS PUNTOS CRÍTICOS Y DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

Carlos Rondero, Alexander Karelin y Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México
rondero@uaeh.reduaeh.mx, skarelin@uaeh.reduaeh.mx, anataras@uaeh.reduaeh.mx

## Resumen

Para hacer sentir más profundamente qué son los puntos mínimos y máximos es útil regresar a sus definiciones. Se proponen ejemplos de funciones como polinomio de tercer grado, seno, coseno y otras para las cuales se encuentran puntos críticos sin usar la derivada.

Las nociones del límite y derivada de una función en un punto son tradicionalmente difíciles de comprender por parte de los alumnos de bachillerato y licenciatura. Las dificultades se encuentran precisamente en las definiciones de estas nociones, no en la aplicación de las reglas formales y en el uso de las fórmulas.

Consideramos funciones tales que en cada punto de su gráfica pasa sólo una recta L al respecto de la cual la gráfica misma está por encima o por debajo de ella y no tiene otros puntos de intersección. La idea básica es la siguiente: se resta de la función, la ecuación de la recta L, que corresponde a un punto $x_0$ de tal forma que ahora una nueva función cuyo mínimo o máximo esta precisamente en $x_{0.}$

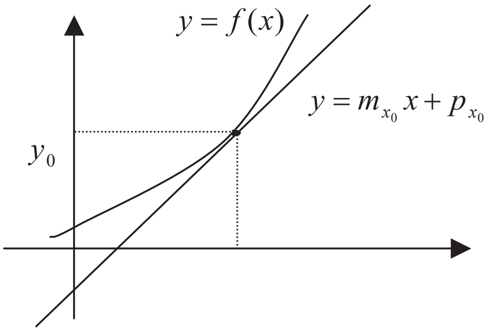
Este método nos ayuda a relacionar la derivada de una función en un punto dado con los puntos mínimos y máximos. El manejo de tales técnicas puede ayudar a los estudiantes de matemáticas de diferentes niveles educativos a asimilar métodos de análisis sobre características gráficas de las funciones. Su puesta en escena se ha hecho con estudiantes de maestría en matemática educativa para evidenciar aspectos geométricos y analíticos que complementan el estudio de la derivada y sus aplicaciones.

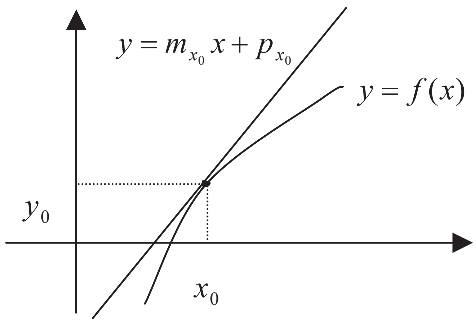
No queremos sustituir los métodos clásicos, pero proponemos un enfoque alternativo que posibilite al estudiante entender mejor las nociones básicas del cálculo a través de métodos no tradicionales para analizar el comportamiento de las funciones.

Se muestra una conexión entre la búsqueda de los puntos mínimos y máximos y el cálculo de la derivada de una función. Después en base a la interpretación geométrica de la concavidad, se propone hallar la derivada en un punto de algunas funciones simples.

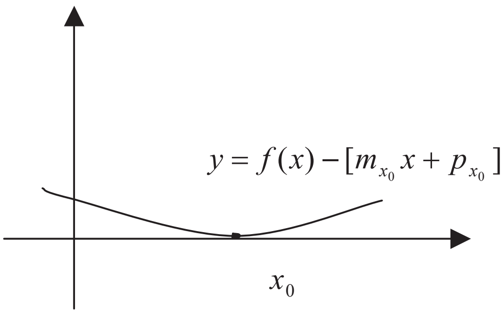
## Conexión entre las nociones de los puntos mínimos, máximos y la derivada

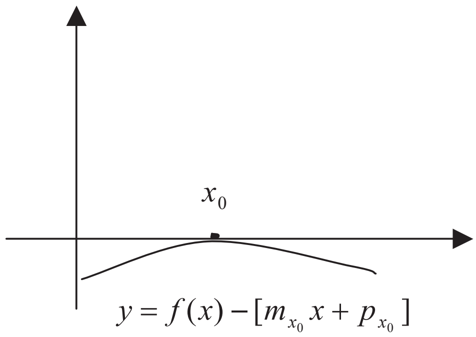
Consideremos las funciones $y = y(x)$ para las cuales en cada punto $(x_0, y_0)$ de su gráfica $L:\{(x, y(x):)\}$ existe una y solo una recta $R(x_0, y_0) = m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}$ que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, no tiene otros puntos comunes con la grafica $L$ y $L$ está ubicada arriba o abajo con respecto de la recta $R(x_0, y_0)$. La clase de tales funciones vamos a denotar $D$. La clase de tales rectas para una función $y = f(x)$ vamos a denotar como $T(f)$.




Afirmación 1.
Vamos a escoger una función $y = f(x)$ de la clase $D$ y un punto $(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$. Una recta $R(x_0, y_0) = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es la recta de la clase $T(f)$ en el punto $(x_0, y_0)$ para $y = f(x)$ si y solo si la función $y = F(x)$, $F(x) = f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}]$ tiene un punto mínimo o un punto máximo en $x = x_0$.




Usando esta conexión entre los puntos mínimos y máximos y la derivada de una función se propone hallar la derivada de algunas funciones simples.

**Polinomio de segundo grado**

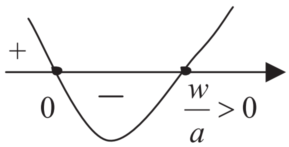
Hallar la ecuación de la recta tangente $R(x_0, y_0) = m_{x_0} x + p_{x_0}$ que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, de la parábola $y = P_2(x), P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Anotamos que $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.
Sea $a > 0$, el caso $a < 0$ se estudia analógicamente.

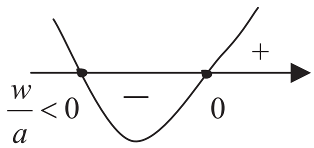
Completamos la función $F(x) = P_2(x) - [m_{x_0} x + p_{x_0}] = ax^2 + bx + c - m_{x_0} x - p_{x_0}$.
Según la Afirmación 1, esta función deberá tener un punto mínimo ($a > 0$) en el punto $x = x_0$.
Por la definición del punto mínimo local en $x_0$ debe cumplirse la desigualdad

$F(x) \geq F(x_0)$, alrededor del punto $x = x_0$ , $|x - x_0| < \varepsilon$ .
Respecto a la nueva variable $z = x - x_0$ tenemos
$F(z + x_0) \geq F(x_0)$, alrededor del punto $z = 0$ , $|z| < \varepsilon$ .
Al cumplir operaciones
$a(z + x_0)^2 + b(z + x_0) + c - [m(z + x_0) + p] \geq ax_0^{\,2} + bx_0 + c - [mx_0 + p]$,
vamos a tener
$z(az + 2ax_0 + b - m) \geq 0$ .

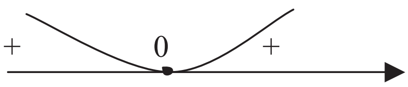
Cuando $w \neq 0, w = m - [2ax_0 + b]$
la desigualdad $z(az - w) \geq 0$ no se cumple alrededor de $z = 0$ ,

$y = z(az - w)$



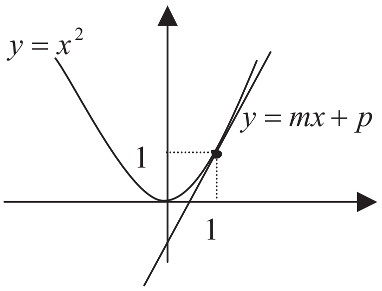

Cuando $w = 0$
La desigualdad $az^2 \geq 0$ se cumple alrededor de $z = 0$ ,
$y = az^2$

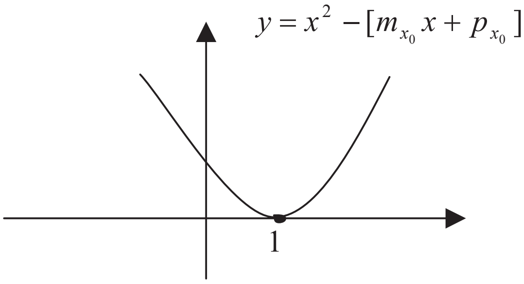



De aquí encontramos
$m = 2ax_0 + b \quad p = y_o - (2ax_0 + b)x_0 = -ax_0^{\,2} + c$
y la resolución del problema
$y = (2ax_0 + b)x - ax_0 + c$ .

Consideremos la función $y = x^2$.
Vamos a encontrar una ecuación de a recta tangente $y = mx + p$ que pasa por el punto $(1{,}1)$ sin hacer uso de la derivada.

Hay una relación entre pendiente y termino independiente $y\big|_{y=1} = mx\big|_{x=1} + p$ , $1 = m + p$ .
Según la Afirmación 1, la función $y = x^2 - [mx + b]$ debe tener su punto mínimo local en x=1




Por la definición del punto mínimo local en $x_0$ debe cumplirse la desigualdad

$x^2 - mx - b \geq 1^2 - m1 - b$ Cuando $|x-1| < \varepsilon$

o

$(z+1)^2 - m(z+1) \geq 1 - m$ , $z = x - 1$, $|z| < \varepsilon$,

$z^2 + 2z - mz \geq 0$, $z(z + 2 - m) \geq 0$,

Esta desigualdad se cumple alrededor de $z = 0$ cuando $m = 2$.
De aquí tenemos $m = 2$, $p = 1 - m = -1$
y la resolución del problema
$y = 2x - 1$.

**Polinomio de tercer grado**
Hallar la ecuación de la recta tangente $R(x_0, y_0) = m_{x_0} x + p_{x_0}$ que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, de la grafica de la función

$y = P_3(x), P_2(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_3 \neq 0$, $3a_3 x_0 + a_2 \neq 0$ . Anotamos que

$y_0 = a_3 x_0{}^3 + a_2 x_0{}^2 + a_1 x_0 + a_0$.

Sea $a > 0$, el caso $a < 0$ que se estudia analógicamente.
Completamos la función $F(x) = P_3(x) - [m_{x_0} x + p_{x_0}] = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_o - m_{x_0} x - p_{x_0}$.
Según Afirmación 1 esta función tiene su extremo local en el punto $x = x_0$.
Por definición del punto extremo local en $p_{\min} = x_0$ de la función $y = P_3(x)$ debe cumplirse la desigualdad $F_3(x) \geq F_3(x_0)$ o $F_3(x) \leq F_3(x_0)$ alrededor del punto $x = x_0$.
Respecto a nueve variable $z = x - 1$

$F(z + x_0) \geq F(x_0)$, o $F(z + x_0) \leq F(x_0)$ alrededor del punto $z = 0$, $|z| < \varepsilon$,

$a_3(z + x_0)^3 + a_2(z + x_0)^2 + a_1(z + x_0) + a_0 - [m(z + x_0) + p] \geq$
$\geq a_3 x_0{}^3 + a_2 x_0{}^2 + a_1 x_0 + a_0 - [m x_0 + p]$,

o

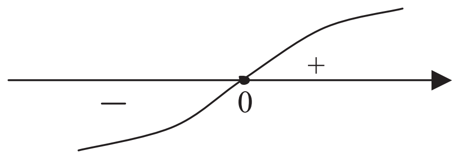
$a_3(z + x_0)^3 + a_2(z + x_0)^2 + a_1(z + x_0) + a_0 - [m(z + x_0) + p] \leq$
$\leq a_3 x_0{}^3 + a_2 x_0{}^2 + a_1 x_0 + a_0 - [m x_0 + p]$

Al cumplir con las operaciones vamos a tener la desigualdad

$z[a_3z^2+(3a_3x_0+a_2)z+3a_3x_0{}^2+2a_2x_0+a_1-m]\geq 0$
o
$z[a_3z^2+(3a_3x_0+a_2)z+3a_3x_0{}^2+2a_2x_0+a_1-m]\leq 0$.

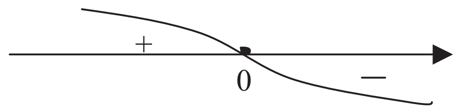
Cuando $w\neq 0, w=m-[3a_3x_0{}^2+2a_2x_0+a_1]$,
$z=0$ no es un raíz del polinomio en los corchetes
$\widetilde{P}_2(z)=[a_3z^2+(3a_3x_0+a_2)z+3a_3x_0{}^2+2a_2x_0+a_1-m]$.
Alrededor de $z=0$ el polinomio $\widetilde{P}_2(z)$ es negativo o positivo y ninguna de las dos desigualdades se cumple alrededor de $z=0$,

$y=z\widetilde{P}_2(z)$




$\widetilde{P}_2(z)>0$

$y=z\widetilde{P}_2(z)$



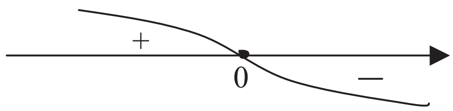

$\widetilde{P}_2(z)<0$

Cuando $w=0$,
la primera desigualdad toma forma $z^2[a_3z+(3a_3x_0+a_2)]\geq 0$,
la segunda desigualdad toma forma $z^2[a_3z+(3a_3x_0+a_2)]\leq 0$.
Recordamos que $3a_3x_0+a_2\neq 0$.
Si $[a_3z+(3a_3x_0+a_2)]\geq 0$ la primera desigualdad se cumple alrededor de $z=0$.
Si $[a_3z+(3a_3x_0+a_2)]\leq 0$ la segunda desigualdad se cumple alrededor de $z=0$.
De aquí $m=3a_3x_0{}^2+2a_2x_0+a_1$.
Encontramos
$p=y_o-(3a_3x_0{}^2+2a_2x_0+a_1)x_0=-2a_3x_0{}^3-a_2x_0{}^2+a_0$
y la resolución del problema
$y=(3a_3x_0{}^2+2a_2x_0+a_1)x-2a_3x_0{}^3-a_2x_0{}^2+a_0$.

Consideremos la función $y=x^3$.
Vamos a encontrar una ecuación de a recta tangente $y=mx+p$ que pasa por el punto $(1,1)$ sin hacer uso de la derivada

La relación entre pendiente y término independiente es $1 = m + p$.
Según la Afirmación 1, la función $y = x^3 - [mx + b]$ debe tener su punto mínimo local en $x = 1$.
Por definición del punto extremo local en $p_{\min} = x_0 = 1$ debe cumplirse la desigualdad
$x^3 - mx - b \geq 1^3 - m1 - b$ al rededor de $x = 1$, en un entorno $|x - 1| < \varepsilon$
o
$(z+1)^3 - m(z+1) \geq 1 - m$, alrededor de $z = 0$, $|z| < \varepsilon$.
Después de las operaciones tenemos
$z^3 + 3z^2 + 3z - mz \geq 0$
o
$z(z^2 + 3z + 3 - m) \geq 0$.
La expresión $(z^2 + 3z + 3 - m)$ es negativa alrededor de $z = 0$, cuando $m < 3$

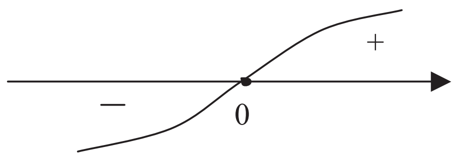
$z(z^2 + 3z + 3 - m)$




la desigualdad no se cumple alrededor $z = 0$.

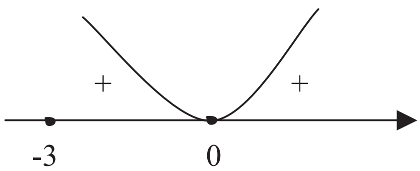
La expresión es positiva alrededor de $z = 0$, cuando $m > 3$

$z(z^2 + 3z + 3 - m) \geq 0$




la desigualdad no se cumple alrededor $z = 0$.
Cuando $m = 3$ la desigualdad toma la forma $z^3(z+3) \geq 0$

$z^3(z+3)$




Esta desigualdad se cumple alrededor de $z = 0$.
De aquí tenemos $m = 3$, $p = 1 - m = -2$
y la resolución del problema

$y = 3x - 2$.

## Bibliografía

Stewart, J. (1999) *Calculus:EarlyTtranscedentes*, International Thomson Publ. Inc.

Rondero, C., González, M., Karelin, A., Tarasenko, A. (2002). El polinomio de tercer grado como un modelo para estudiar las propiedades de las funciones, Artículo aceptado para su publicación en las *Actas de RELME 16*.