PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resumen

Si bien es cierto que la resolución de problemas es fundamental en la enseñanza de las matemáticas, es también cierto que en una gran mayoría de casos el profesor de matemáticas no ha sido formado de manera adecuada para orientar las sesiones de resolución de problemas con sus alumnos. Encuestas y entrevistas realizadas a grupos de profesores de nivel básico y superior, revelan que en un alto porcentaje sus experiencias en resolución de problemas se reducen a experiencias individuales y a la lectura de libros y folletos con problemas resueltos, muchos de los cuales son esencialmente algorítmicos, poco atractivos y con dificultades centradas en lo operativo. Una manera de contribuir a llenar este vacío es realizando talleres de resolución de problemas con profesores, en el marco de los planteamientos de Polya y de Schoenfeld . El autor de este artículo considera que los problemas de optimización son particularmente importantes, pues la optimización es una actividad muy natural en el hombre, y en la vida cotidiana frecuentemente estamos resolviendo o tratando de resolver problemas de optimización apoyados fuertemente en la intuición y haciendo conjeturas. Trabajar con problemas de optimización es una excelente oportunidad para estimular el desarrollo del pensamiento matemático - examinar diversos casos, considerar situaciones particulares, hacer representaciones gráficas, abstraer, formalizar, conjeturar y demostrar, buscar contraejemplos, pensar en la existencia de soluciones, plantearse generalizaciones, prever nuevas dificultades, etc. – y para motivar el estudio de teorías matemáticas que resuelven rigurosamente los problemas planteados o los problemas derivados de las especulaciones matemáticas a partir de ellos.

En el presente artículo, como parte de una investigación más amplia, y fruto de las observaciones, las reflexiones y la experiencia del autor como profesor de una maestría en enseñanza de las matemáticas, y animando talleres con docentes de matemáticas de secundaria en ejercicio y con estudiantes universitarios, se presentan diversos problemas de optimización, con comentarios sobre los enfoques considerados al resolverlos, ya sea por iniciativas de los participantes o por sugerencias del autor a partir de ellas.

Introducción

Es importante que los docentes conozcamos una variedad amplia de problemas de optimización: los que se presentan en la vida cotidiana, los que tienen que ver con juegos y estrategias, los relacionados con construcciones, los de geometría, los que tienen que ver con el azar, etc. Reflexionar sobre ellos, manejar adecuadamente el ensayo y error, buscar la visualización, proponer nuevos enunciados o contextualizaciones, resolver el mismo problema de varias formas, hacer variantes al problema y crear nuevos problemas, contribuye a contar con mayores elementos para orientar a nuestros estudiantes, tanto estimulando su pensamiento matemático y valorando sus aproximaciones intuitivas, como mostrándoles una visión más amplia e integrada de las matemáticas, pues a partir de problemas sencillos se pueden tratar temas de geometría, aritmética, álgebra, análisis, probabilidades, etc.

En el marco de un estudio de casos se ha encontrado que de manera especial en los problemas de optimización, juega un papel muy importante la intuición, ya sea para prever la solución o para una buena aproximación a la solución sin usar recursos matemáticos refinados. Esta capacidad humana puede potenciarse grandemente en nuestros alumnos orientando adecuadamente sus aproximaciones intuitivas a problemas de optimización cuidadosamente seleccionados, graduados y presentados.

Un problema sencillo que da para mucho

Entre varios amigos han reunido 4 soles para comprar caramelos y encargan a Juanito que vaya a comprar el mayor número posible de caramelos, debiendo gastar completamente los 4 soles. Juanito va a la bodega y encuentra que sólo hay caramelos de 0,30 soles y de 0,50 soles. ¿Cuál es el mayor número de caramelos que puede comprar Juanito?

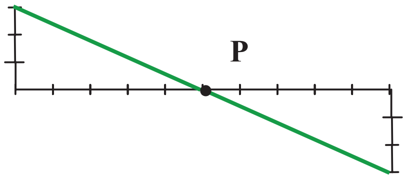
Comentarios:

1. El problema resultó atractivo en casi todos los casos.
2. En la mayoría de los casos fue resuelto por ensayo y error e intuición. Excelente oportunidad para orientar adecuadamente este procedimiento tan frecuente en la vida diaria. No debería reducirse a un conjunto de tanteos sino a un tanteo inicial y luego la búsqueda de una racionalidad que oriente los siguientes ensayos.
3. Una manera interesante de abordar el problema fue utilizando el criterio *"comprar más del más barato"* y luego haciendo los ajustes del caso al advertir que Juanito compraría 13 caramelos de 0,30 soles y le sobrarían 0,10 soles. Debe dejar de comprar caramelos de 0,30 soles de modo que añadiendo a lo que le sobró complete 0,50 soles o un múltiplo entero de 0,50 soles.
4. Una vez resuelto el problema, y ante la sugerencia de hacerle algunos cambios para examinar la eficacia del procedimiento seguido, un cambio natural fue alterar el monto total a gastar. El considerar cantidades mayores, como 40 ó 70 soles, hace ver la ventaja de usar el criterio de "comprar más del más barato". Resultó particularmente interesante discutir el caso al considerar que la cantidad total a gastar es de 1 sol, pues entonces la solución es muy simple: comprar dos caramelos de 0,50 soles y 0 caramelos de 0,30 soles, pero se está comprando más del más caro.
5. Es frecuente que en un intento de resolver más formalmente el problema, se llegue a plantear la ecuación $0{,}3x + 0{,}5y = 4$. Se debe afrontar entonces la dificultad de tener una sola ecuación y dos incógnitas. Ante la opción del ensayo y error para encontrar la solución, es importante recordar que se puede obtener una ecuación equivalente más fácil de manejar, que debe comprarse el mayor número de caramelos (*¿cómo representar esto usando las variables x e y?*) y que la representación gráfica de la ecuación podría dar algunas pistas.
6. Al hacer la representación gráfica de la ecuación $3x + 5y = 40$ usando papel cuadriculado o DERIVE, se encontró la solución al problema examinando los puntos de coordenadas enteras de la recta correspondiente. Momento oportuno para pedirles que enuncien un problema de geometría analítica "equivalente" al problema de Juanito. Se llegó al siguiente enunciado:

   Encontrar el punto (a, b) de la recta $3x + 5y = 40$, tal que a y b sean enteros no negativos y $a + b$ sea el número mayor posible.

7. Algunas reflexiones a partir de esta solución gráfica
   i) ¿La existencia de un punto de coordenadas enteras nos garantiza la existencia de otros puntos de coordenadas enteras?
   Es muy ilustrativo hacer notar que la recta de ecuación $3x + 5y = 40$ tiene pendiente $-3/5$ y que, en consecuencia, si se parte de un punto P de coordenadas enteras, al mover el punto P 5 unidades hacia la derecha (o hacia la izquierda) y luego 3 unidades hacia abajo (o hacia arriba), se tendrá otro punto de la recta y

obviamente sus coordenadas serán enteras.



De esta observación se pasó a generalizar un poco: *si en esta recta existe un punto de coordenadas enteras, entonces existen infinitos puntos de coordenadas enteras.*

La observación anterior puede expresarse más formalmente usando ecuaciones y considerando que el punto P de la recta tiene coordenadas enteras (x_0, y_0):

$$\begin{cases} x = x_0 + 5t, & t \in Z \\ y = y_0 - 3t, & t \in Z \end{cases}$$

Si consideramos que P es un punto cualquiera de la recta y que el parámetro t varía en R y no sólo en Z, tenemos las **ecuaciones paramétricas** de la recta, obtenidas de manera natural.

Otro nivel de generalización que se examinó: *¿Si en una recta cualquiera existe un punto de coordenadas enteras, entonces existen infinitos puntos de coordenadas enteras.?*

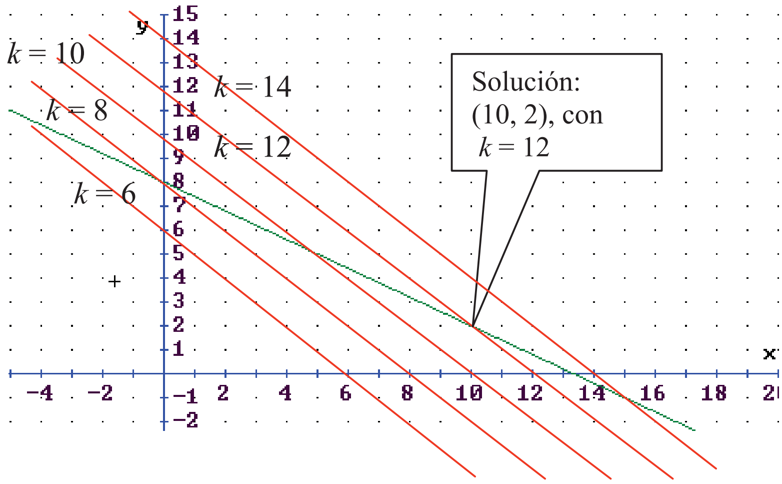
ii) *¿Todos los problemas similares tienen solución?*
Esta pregunta llevó a pensar en variantes al problema, de modo que se obtenga un problema que no tiene solución. La idea del *contraejemplo*, tan importante en matemáticas, resulta de manera natural.

iii) *¿Cómo garantizar que un problema similar tiene solución?*
Esta pregunta llevó a examinar aspectos teóricos y prácticos para resolver **ecuaciones diofánticas:** la ecuación $ax + by = c$, con $a,b,c \in$ Z admite una solución entera (x_0, y_0) si y sólo si el máximo común divisor de a y b es también divisor de c; y en consecuencia, si a y b son primos entre sí, la ecuación admite una solución entera. Utilizando las ecuaciones paramétricas obtenidas anteriormente, se llegó fácilmente a utilizar el método de Euler para resolver ecuaciones diofánticas.

8. También se trabajó con un sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 40 \\ x + y = k, \text{ con } x, y, k \in \text{Z}; \quad x, y, k \geq 0; \ k \text{ debe ser máximo.} \end{cases}$$

Haciendo representaciones gráficas (considerando por razones prácticas variaciones de x e y en R) y examinando las intersecciones de una recta fija ($3x + 5y = 40$) con las rectas $x + y = k$, para diversos valores enteros positivos de k, hasta encontrar el punto de coordenadas enteras no negativas que corresponda al mayor valor posible de k, se está empleando, de manera natural, un método de la **programación lineal,** y más específicamente de la programación entera:



9. Ciertamente, todas las disquisiciones anotadas se hacen teniendo en cuenta el nivel de los participantes. Es destacable el hecho de poder incursionar en conceptos y métodos de diversos campos de la matemática a partir de un problema sencillo y "real", y respetando las iniciativas de los participantes.

Otro problema sencillo, complementario al anterior

Carlos dispone de 50 monedas de medio sol y de 60 monedas de un quinto de sol. Si desea entregar a María S/. 13,10 empleando sólo estas monedas, pero el menor número posible de ellas, ¿cuál es el número de monedas de cada denominación que debe emplear Juan?.

Comentarios

1. Resulta interesante plantear un problema como éste, luego de haber trabajado el anterior (de maximización), pues brinda la oportunidad de afianzar reflexivamente los métodos empleados, tratándose ahora de un problema de minimización.
2. Algunos intentos del autor por lograr que los participantes inventaran un problema con estas características, luego de trabajar con el anterior, no fueron muy exitosas.

El problema de la viga

Un tronco de madera tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo largo mide 3 metros y cuya sección transversal tiene 20 centímetros de diámetro. Se desea obtener una viga de sección rectangular minimizando el desperdicio de madera en el corte. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de tal rectángulo?

Comentarios

1. En un 90% de los casos observados, se abordó este problema empleando cálculo diferencial, o se percibió resistencias a tratar de resolverlo al ser consciente de no recordar bien las técnicas de este campo de la matemática. Muchos intuyeron, sin poder explicarlo, que el rectángulo debería ser un cuadrado. Quienes lo resolvieron planteándolo formalmente como

$$\textit{maximizar } 4xy, \textit{ sabiendo que } x^2 + y^2 = 100$$

y haciendo las derivadas correspondientes, no encontraron novedad en el problema.

2. En las experiencias tenidas, se percibió cierto escepticismo en los participantes cuando se les pidió resolver el problema sin emplear cálculo diferencial. Se sugirió usar un gráfico que muestra un rectángulo inscrito en una circunferencia, con una de sus diagonales (que es un diámetro del círculo) y pensar en maximizar el área de uno de los triángulos que la diagonal determina con los lados del rectángulo, considerando la diagonal como base de longitud fija y su correspondiente altura variando al moverse el vértice en la circunferencia. Entonces no resultó difícil obtener la solución: cuando la altura es un radio; lo cual lleva al cuadrado.
3. El impacto que produjo el razonamiento geométrico para resolver este problema, sobre todo a quienes lo identificaron como uno propio del cálculo diferencial y se esforzaron por recordar sus métodos, fue ocasión propicia para conversar sobre la *belleza de las matemáticas*, lo cual es sumamente importante para quienes aprenden y para quienes enseñan esta disciplina.

Problemas de optimización en juegos

i) Con el conocido juego de las *torres de Hanoi*, se planteó el problema de determinar el menor número de movimientos para trasladar los discos de un poste a otro bien determinado, considerando inicialmente cuatro discos y luego n discos.

Comentarios:

1. Este problema-juego brinda una buena oportunidad para experimentar – y con material concreto - la importancia de considerar un problema más simple que ayude a resolver el problema planteado (en este caso, considerar menos de cuatro discos); para estimular el razonamiento inductivo; para tomar conciencia de la importancia de la demostración y para adoptar una notación adecuada para representar las situaciones.
2. Se decidió usar ternas para indicar la ubicación de los discos en su posición inicial y después de cada movimiento. En el caso de dos discos, A y B, ubicados en el primer poste: pasar de (AB, Φ, Φ) a (Φ, Φ, AB). Empíricamente es fácil concluir que se requieren sólo tres movimientos. ¿Y la demostración? Un diagrama de árbol con todas las posibles secuencias de dos movimientos, demuestra que es imposible llegar a (Φ, Φ, AB) en menos de tres movimientos. Es muy enriquecedor matemáticamente deducir el menor número de movimientos teniendo 4 discos en base al conocimiento del menor número de movimientos con 3 discos y luego obtener la *expresión recursiva* general para el menor número de movimientos: $M(n) = 2M(n-1) + 1$, siendo $M(1) = 1$. La obtención de una expresión funcional para $M(n)$ lleva a trabajar con *progresiones geométricas* o con *ecuaciones en diferencias de primer orden*.
3. Otra línea de trabajo fue usar la obtención experimental del mínimo número de movimientos con 1, 2 y 3 discos y la conjetura que en general el menor número de movimientos con n discos será $2^n - 1$. Fue ocasión adecuada para reflexionar sobre la demostración matemática y en este caso para usar la *inducción matemática.*

ii) Otro juego muy interesante es el denominado *"sol y sombra"*: *en una fila de 7 casillas se ubican 3 fichas azules en cada una de las tres casillas de la izquierda y 3 fichas rojas en cada una de las 3 casillas de la derecha. El problema-juego consiste en determinar el menor número de movimientos necesarios para intercambiar la ubicación de las fichas azules y rojas. Un movimiento es: o el desplazamiento a una casilla adyacente vacía, o el salto por encima de una ficha de otro color a una casilla vacía adyacente a ésta. Cada casilla puede estar ocupada a lo más por una ficha.*

Comentarios

Como en el caso anterior, la experimentación y la intuición llevan a la solución, pero no es fácil pasar a una demostración y a una generalización. Fue una oportunidad para evaluar en qué medida usarían creativamente las experiencias tenidas con las torres de Hanoi. Adoptaron una notación y usaron diagramas de árbol, pero el análisis de los casos sencillos no llevó muy fácilmente a una explicación lógica del número mínimo de movimientos. (En este caso no hay un planteamiento recursivo como en el problema de las torres.) Fue útil sugerir que expresen el número que encontraban experimentalmente distinguiendo entre desplazamientos y saltos. Tomó tiempo demostrar que $n^2 + 2n$ es el mínimo número de movimientos, teniendo n fichas azules y n rojas en una fila de $2n + 1$ casillas.

Problemas de optimización y geometría

Personajes de la historia de las matemáticas, como Herón de Alejandría y Jacob Steiner están vinculados al paso de la intuición a la demostración de conjeturas sobre la solución de problemas de optimización en geometría. Es enriquecedor matemáticamente trabajar con problemas isoperimétricos; en particular, iniciar con el problema-juego de *construir una figura plana de perímetro dado, teniendo suficientes cuadrados de la misma área, de modo que el área total sea máxima.* Es muy formativo hacer el análisis de los casos sencillos y llegar a una solución general.

Otra línea de trabajo es la búsqueda de los caminos más cortos. Pasar de problemas en un cilindro circular recto o en un cubo – solucionables con argumentos de geometría plana - a problemas en una esfera, lleva de manera natural a comentar y trabajar intuitivamente temas importantes en la cultura matemática y en las aplicaciones actuales, como las geometrías no euclídeas y el cálculo de variaciones. La limitación de espacio no permite exponer las interesantes experiencias tenidas con universitarios y docentes.

A modo de conclusión

Los cursos, talleres y sesiones de trabajo tenidos por el autor con problemas de optimización como los expuestos, fueron muy motivadores para los participantes y brindaron experiencias en las que interactuaron la intuición, los conocimientos matemáticos, la creación de nuevos problemas y la metacognición, lo cual fue reconocido como muy importante para aprender y para que los docentes orienten mejor la formación matemática de sus estudiantes.

Bibliografía

Corbalán, F. (1998). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Courant, R and Robbins, H. (1963). *What is mathematics?* New York, USA:Oxford University Press.

Guzmán, M. de, et al. (1994*). Matemáticas - Bachillerato 3*. Madrid, España: Grupo Anaya.

Guzmán, M de (1994). *Para pensar mejor*. Madrid, España: Pirámide.

Malaspina, U. (2002). Optimización matemática. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 15, Tomo 1, pp 43- 48). México: CLAME.

Mlodinow, L. (2001). *Euclid's window*. New York, USA: The Free Press.

Polya, G. (1957). *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton, USA: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, USA: Macmillan.