PARADOJAS DE FUNDAMENTACIÓN EN LA MATEMÁTICA

María Rosa Rodríguez y Jesús Zeballos
Universidad Nacional de Tucumán, Argentina
mrestofan@tucbbs.com.ar, jesuszeballos@tucbbs.com.ar

Resumen
El interés por la fundamentación racional de la matemática estuvo presente en toda su historia, pero se acrecienta especialmente a partir de mediados del siglo XIX. Sin embargo, los sistemas formales elaborados durante este largo período, para hacer más explícita esta fundamentación han derivado en paradojas, a pesar de sus formulaciones aparentemente consistentes y lógicamente correctas. Para superar estas dificultades, se han formulado respuestas lógico-matemáticas que se clasificaron en tres grandes líneas: el logicismo, el formalismo y el intucionismo. Kurt Gödel demostró que las respuestas de estas escuelas fueron insatisfactorias, ya que las paradojas internas eran insalvables. Sólo podían ser superadas con la formulación de sistemas más amplios y potentes, expresados en un lenguaje metamatemático. Tanto formalistas como logicistas hicieron un tratamiento puramente sintáctico, pero la presencia de las paradojas mostraba que la sintaxis formal es necesaria pero insuficiente. A ella se debe agregar una semántica, que tiene que ver con el contenido significativo de las reglas operativas y una pragmática que esclarece lo apropiado de su interpretación. También señalamos en este trabajo lo inadecuado de la acusación de esterilidad al tratamiento lógico-formal de la fundamentación matemática. Nosotros sostenemos que los sistemas formales no son estériles, puesto que engendran paradojas. En esta constitución paradojal o antinómica de los sistemas formales, se oculta el dinamismo y el espíritu creador de la matemática. Esto nos permite afirmar que el quehacer matemático es al mismo tiempo descubrimiento e invención. Quizá una futura fundamentación de la matemática deba recurrir a la lógica dialéctica y a las lógicas paraconsistentes

Introducción

El saber matemático puede ser considerado desde dos perspectivas metodológicas. La primera consiste en la determinación de su campo objetivo a través de la precisión de sus conceptos; y la segunda, en el establecimiento de reglas rigurosas que precisen las relaciones de deductibilidad entre sus proposiciones. La primera de estas tareas se refiere a la definición de los términos y la segunda a la construcción de pruebas lógicas de demostración. Aquí confluyen la matemática, la lógica y la filosofía de la matemática, cuya conjunción constituye parte sustancial de lo que en la actualidad se denomina "epistemología de la matemática". Desde este punto de vista, se observan al menos tres ámbitos interrelacionados y fácilmente discernibles: el plano ontológico o de la existencia de los objetos matemáticos, el plano lingüístico o simbólico y el plano lógico-formal de la deducción de teoremas, a partir de las fórmulas primitivas, axiomas.
En relación a este último aspecto, la fundamentación racional de las teorías matemáticas, se han señalado múltiples paradojas surgidas de la construcción de sistemas, a pesar de sus formulaciones aparentemente consistentes y lógicamente correctas. Para superar las dificultades que supone la presencia de paradojas o inconsistencias, se han formulado respuestas lógico-matemáticas que se clasificaron en tres grandes líneas: *el logicismo, el formalismo y el intuicionismo.* Kurt Gödel demostró que las respuestas de estas escuelas fueron insatisfactorias, ya que las paradojas internas eran insalvables. Sólo podían ser superadas con la formulación de sistemas más amplios y potentes, expresados en un lenguaje metamatemático. Este trabajo pretende mostrar que estas soluciones al problema

de la fundamentación matemática son también lógicamente insatisfactorias. Una alternativa de solución podría ser la lógica dialéctica, que asume la significación de las paradojas como un motor que dinamiza el progreso del saber matemático.

El ideal de la formalización

En toda la historia de la matemática, filósofos, lógicos y matemáticos se interesaron en precisar los conceptos matemáticos, con definiciones "claras y distintas", y a construir pruebas rigurosas de demostración. En los siglos XIX y XX se acentúa significativamente este interés, recurriendo a la abstracción y formalización del lenguaje matemático. De ello se obtienen dos efectos inmediatos: el afinamiento riguroso de los razonamientos matemáticos y el desarrollo de la lógica-matemática, que en algunos casos se confunde con la metamatemática. A partir de entonces, tanto la lógica como la matemática se estructuraron en sistemas axiomáticos deductivos, consistentes, completos e independientes. Lo que significa en primer término la eliminación de paradojas y/o contradicciones; en segundo lugar, la demostración completa de todos los teoremas en base a los propios axiomas del sistema; y por último, que ninguno de los axiomas o supuestos pueda derivarse como teorema a partir de los restantes.

Formalización Geométrica

Desde la antiguedad se consideró como un modelo de sistema axiomático-deductivo a la geometría euclidiana (siglo III). Efectivamente, en base a unos pocos principios, que Euclides denomina Postulados y Nociones Comunes, se deducen todos los teoremas de la geometría. Durante siglos se consideró que esta geometría era la descripción del espacio físico-real, *"en el cual nos movemos, vivimos y somos"*. Esta convicción llegó a tal punto que Kant consideró al espacio euclídeo como una de las formas puras, *a priori* de la intuición. Nunca se cuestionó la verdad de sus proposiciones euclideanas, esto es, el espacio se comportaba tal y cual lo decía su geometría. Sumada a esa adecuación ontológica, se daba el rigor lógico de las demostraciones deductivas. Aunque los geómetras posteriores descubrieron algunos errores de derivación, como por ejemplo la utilización de algunos supuestos no explícitos, en general se aceptó el rigor de las pruebas lógicas de demostración de los teoremas. Ni el rigor sintáctico ni la verdad semántica del sistema euclidiano estaban cuestionados.
Sin embargo, siempre se sospechó de la independencia de sus axiomas. Concretamente el postulado 5º de las paralelas[3] parecía no gozar de las características propias de los restantes como para ser considerado una proposición axiomática. En 1733 el matemático italiano Girolamo Saccheri publica el libro *Euclides ab omni naevo vindicatus,* donde demostraba por reducción al absurdo que el postulado de las paralelas era un axioma independiente. Negando la validez del 5º postulado de las paralelas, creyó haber reivindicado el valor absoluto de la geometría de Euclides. No se percató que con ello había descubierto un nuevo sistema axiomático para la geometría. Efectivamente, logró demostrar todos los teoremas bajo la validez de la hipótesis denominada del ángulo agudo. Con esto queremos

[3] El Postulado 5º se enuncia de diversas maneras: i) Que si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos rectos. ii) Por un punto dado pasa sólo una paralela a una recta dada (geometría plana) y un solo plano paralelo a otro dado (geometría del espacio).

decir que las demostraciones lógicas que elaboró Saccheri fueron absolutamente consistentes aunque los resultados obtenidos le resultaron totalmente contra intuitivos, cosa que él estimó como absurdas porque tenía la convicción de que la única geometría válida era la euclídea.

Posteriormente Nicolai Ivanovitch Lobachewsky (1793-1856) y Georg Friedich Bernhard Riemann (1826-1866) por separado construyeron nuevas geometrías. En el año 1829, Lobachewsky publicó en el *Kazan Messenger* un artículo titulado "Sobre los Principios de la Geometría", que marca el inicio de las geometrías no euclideanas. En él se demuestra que el postulado 5º no podía ser demostrado a partir de los otros cuatro y construye una geometría sobre una hipótesis que contradecía dicho postulado: "Por un punto C exterior a una recta AB puede trazarse más de una recta contenida en el plano ABC y que no corta a la recta AB". Con este postulado dedujo una teoría geométrica consistente, sin contradicciones lógicas y sin preocuparse si el espacio geométrico supuesto se aplicaba a algún espacio físico. Pero esta geometría parecía tan opuesta al sentido común que el mismo Lobachewsky la llamó "Geometría Imaginaria".

Riemann, en cambio, no se interesó sólo en la cuestión de cuántas paralelas podían trazarse por un punto exterior a una recta. Sostenía, además, que la geometría no necesariamente debería tratar de puntos, rectas y otros conceptos referentes al espacio real, sino de conjuntos de n-uplas ordenadas que se pueden combinar de acuerdo a ciertas reglas, con lo que logra una concepción absolutamente abstracta del espacio. Entre las reglas más importantes está la "métrica" a definir, que determinará a priori las propiedades del espacio a considerar. Un modelo de la geometría riemeniana, por ejemplo, toma al 'plano' como la superficie de una esfera y una 'línea recta' como la circunferencia de un círculo máximo en dicha esfera y en este caso la suna de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que dos rectos. El desarrollo científico posterior mostró que el espacio riemaniano fue de gran utilidad en la teoría de la Relatividad de Einstein, del mismo modo que el espacio geométrico de Euclides fue totalmente aplicable en la física clásica de Newton.

Con estas aplicaciones se muestra la utilidad de los sistemas abstractos de la geometría, pero al mismo tiempo, se evidencia que las propiedades semánticas no son fundamentales para la construcción de los sistemas axiomáticos en sí mismos, sino una cuestión extrasistemática. Cuando se quiere encontrar a un sistema geométrico abstracto una aplicación a otros campos pueden surgir paradojas, si no se tienen los recaudos necesarios que fija una lógica de la interpretación. Y en este punto surge otra cuestión epistemológica esencial: la prioridad e independencia lógica de las ciencias formales. No hubiera podido existir la física de Newton sin los supuestos de la geometría de Euclides, ni la de Einstein sin los de la geometría riemanniana. Es decir, que no puede haber física sin geometría pero sí geometría sin física.

En la actualidad sólo se tiene en cuenta el rigor lógico-sintáctico, interno al sistema mismo. La máxima expresión de abstracción y formalización se encuentra en la geometría de David Hilbert (1862-1943), en la cual no se alcanza a discernir la geometría pura de una lógica y una sintaxis pura. En 1899, Hilbert publica su *Grundlagen der Geometrie* donde realiza un esfuerzo sistemático por dar un carácter absolutamente formal deductivo a la geometría. Frente a la necesidad de una fundamentación axiomática de la geometría, Hilbert advierte que no todos los términos se pueden definir, ni todas las proposiciones se pueden demostrar. Hay puntos de partida para las definiciones, que son los términos indefinidos, y puntos de partida para las demostraciones, que son los axiomas. Hilbert propone 21

axiomas, llamados “axiomas de Hilbert”, que incluyen a los postulados y a las nociones comunes de Euclides. De esta manera quedó perfectamente axiomatizada la geometría en el siglo XX.
Como resultado de esta formalización matemática el espacio geométrico se constituyó en un concepto absolutamente abstracto, cuya descripción teoremática no requiere de la intuición ni de su aplicación al espacio físico. Ilustración de estas abstracciones no son sólo la geometría, sino también el álgebra de conjuntos, los números imaginarios, la aritmética transfinita y las topologías. Hilbert recurre a la teoría de conjuntos para mostrar que las ideas geométricas debían ser eliminadas y los puntos, rectas y planos debían ser considerados simplemente como elementos pertenecientes a conjuntos dados.

Formalización Aritmética
Al reducir los conceptos geométricos a elementos pertenecientes a un conjunto, Hilbert toma a la teoría de conjuntos de Georg Cantor (1845-1918) como base para hacer una fundamentación absolutamente formal de la geometría, del mismo modo en que Giuseppe Peano(1858-1932) lo hizo para la aritmética. Pero la teoría de conjuntos de Cantor encierra contradicciones o paradojas, con lo cual el ideal de formalización para mostrar la consistencia de los sistemas matemáticos, se vio frustrado. Estas paradojas, estrictamente formales y/o lógico-matemáticas, contenidas en el sistema de Cantor, señaladas en 1897 por Burali-Forti, y Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953), se deben a que el número ordinal y el cardinal que corresponden a un conjunto de números en cuestión serán siempre mayores en una unidad al mayor número de los que constituyen el conjunto, perteneciendo al mismo tiempo a dicho conjunto.
En el mismo error incurre Gottlob Frege en su *Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleiter* (I, 1893; II, 1903). Bertrand Russell señala este error, en una carta dirigida a Frege y fechada el 16 de Junio de 1902, en la que comenta: “una función no puede jugar el papel del elemento indeterminado” o, en otros términos, “una función no puede ser una función de sí misma”. En gramática lógica diríamos que “un predicado no siempre predica de sí mismo”, relación que Frege inadvertidamente sostuvo y que dio origen a la paradoja del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismo, señalada por Russell. La paradoja de Cantor es similar a las que Russell considera como paradojas de las clases, de las propiedades y de las relaciones. Para dar solución a estas paradojas, Russell en 1908 formula su *teoría ramificada de los tipos* y Zermelo intenta otra solución con la *teoría axiomática de los conjuntos.* Más tarde, Chwistek en 1921 y Ramsey en 1926 modifican la teoría de Russell formulando la *teoría simple de los tipos.*
En suma, podemos decir que la matemática y la lógica, que se origina en ella, buscaron su propia fundamentación. Como afirmaba Ludwig Wittgenstein (1914) “deben dar cuenta de sí mismas”. Este ideal parecía haber sido alcanzado en la construcción de sistemas axiomáticos deductivos formales, al estilo de *Arithmetics Principia: nova método exposita* de Peano (Turín, 1889), *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) y *Grundgesetze der Arithmetik* (dos tomos 1893 - 1903) de Frege, *Grundlagen der Geometrie* (1899) de Hilbert, *Principia Matemática* (1919)de Russell y Whitehead. El orden temporal de aparición de las obras citadas coincide con la obtención de un mayor rigor en las demostraciones que, a medida que va acrecentándose, va plasmando un lenguaje específico y constituyendo una nueva disciplina: la metamatemática o teoría de la demostración. El foco de interés de los matemáticos se centró en lo que en la actualidad denominamos las

propiedades metamatemáticas de consistencia, completitud e independencia de sus axiomas.

Conclusiones

En 1931, apareció en la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik* un artículo con el título *Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Matemática und verwandter Systeme* (Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Matemática y Sistemas afines) que dio por tierra con todas las esperanzas de poder demostrar la completitud y consistencia de un sistema axiomático. El autor era un matemático austríaco radicado en Estados Unidos, Kurt Gödel (1906-1978) y probaba que ni φ ni noφ pueden ser decidibles en ningún sistema formal de la matemática clásica, incluidos *Principia Matemática, La Aritmética Formal de Peano, La teoría Axiomática de Conjuntos, etc.* Del mismo modo demostraba que es imposible deducir una fórmula que pruebe la consistencia del sistema, o sea que era imposible demostrar, usando los métodos a los que hacía referencia tanto Hilbert como Russell, que los axiomas de la aritmética no conducirían a contradicciones. El teorema de la incompletitud de la aritmética establece por lo tanto que no puede demostrarse la consistencia que contenga la teoría elemental de números, por medio de las reglas de derivación propias de la misma teoría. Gödel mostró cómo construir una fórmula aritmética φ que represente la afirmación matemática "la fórmula φ no es demostrable". Y demostró que φ es demostrable sí y solamente sí lo es su negación. Pero si bien φ no es formalmente demostrable por su construcción φ es verdadera, ya que afirma su propia indemostrabilidad. Puesto que φ es verdadera y formalmente indecidible el sistema que la contiene es incompleto. Si supusiéramos que la fórmula φ signifique "la aritmética es consistente", por las mismas razones tampoco sería demostrable en la teoría axiomática.

Se han ensayado otras demostraciones de consistencia distintas a las "internas al sistema mismo" acudiendo a técnicas más potentes que las de la propia teoría, como por ejemplo la de inducción transfinita que es una extrapolación a los números ordinales transfinitos. Pero estas técnicas, al igual que la teoría de los tipos de Russell, nos llevan a una regresión al infinito, en la cual no habría una base determinada de fundamentación.

Otra razón que hace inalcanzable el ideal de formalización al estilo de Hilbert o Russell consiste en que todo sistema tiene reglas operativas. Las reglas de formación establecen cuáles son las fórmulas que pertenecen al sistema (fórmulas bien formadas) y las reglas de transformación determinan como se pueden obtener nuevas fórmulas a partir de las primitivas. En términos tradicionales diríamos qué procedimientos nos permiten obtener nuevos teoremas a partir de los axiomas o de teoremas previamente demostrados. Ahora bien, una regla es una norma de acción que no puede ser totalmente formalizada, pues debe entenderse el sentido de lo que prescribe. En consecuencia el tratamiento puramente sintáctico, al que se remitían en exclusividad tanto formalistas como logicistas, es necesario pero insuficiente para una fundamentación. A la sintaxis, se debe agregar una semántica, que tiene que ver con el contenido significativo de las reglas operativas y una pragmática, que esclarece lo apropiado de su interpretación.

Por último queremos señalar lo inadecuado de una acusación al tratamiento lógico-formal de la fundamentación matemática: que los sistemas formales son estériles. Nosotros sostenemos que no lo son, puesto que engendran paradojas. En esta constitución paradojal o antinómica de los sistemas formales se oculta el dinamismo y el espíritu creador de la matemática. Esto nos permite afirmar que el quehacer matemático es al mismo tiempo descubrimiento e invención. Quizás una futura fundamentación de la matemática deba recurrir a la lógica dialéctica y a las lógicas paraconsistentes.

Bibliografía

Boyer, C. B. (1999) *Historia de la Matemática.* Madrid. Alianza Editorial.

Camino Cañón, L. (1993) *La Matemática Creación y Descubrimiento*. Madrid. Universidad Pontificia Comillas.

Frege, G. (1974) *Escritos Lógico-Semánticos.* Madrid. Editorial Tecnos.

Gödel, K. (1981) *Obras Completas.* Madrid. Alianza Editorial.

Lakatos, I. (1978) *Pruebas y Refutaciones.* Madrid. Alianza Editorial.

Russell, B. (1967) *Los Principios de la Matemática.* Madrid. Editorial Espasa-Calpe.