DEMOSTRACIONES ALGEBRAICAS DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS EN SHARḤ AL-URJŪZA AL-YĀSMĪNIYYA DE IBN AL-HĀ'IM

Algebraic Proofs of Quadratics Equations in Sharḥ al-Urjūza al-Yāsmīniyya of Ibn al-Hā'im

Abdelaziz Fadil[a], Luis Puig[b]

[a]I.E.S. Isabel la Católica (Granada), [b]Universitat de València Estudi General

Resumen

El álgebra árabe es operar con cantidades desconocidas aplicando las mismas reglas aritméticas que operan con los números conocidos. Esta conceptualización, junto con la definición de las especies de números, ha facilitado el desarrollo del cálculo algebraico de las expresiones algebraicas. En particular, ha permitido la denominación, enunciación, clasificación y formulación de seis ecuaciones cuadráticas. Se han propuesto demostraciones ingenuas, geométricas y algebraicas de los algoritmos de resolución de estas ecuaciones. Ibn al-Hā'im justifica las demostraciones con preliminares numéricos enunciados sin demostraciones y explicados con ejemplos. Presentaremos un análisis de estas demostraciones de los algoritmos de resolución de las formas canónicas de las tres ecuaciones cuadráticas compuestas.

Palabras clave: *historia del álgebra, historia de la demostración, álgebra árabe medieval*

Abstract

Arabic algebra is to operate with unknown quantities using the same arithmetic rules operating with known numbers. This conceptualization, together with the definition of species of numbers, has facilitated the development of algebraic calculus of algebraic expressions. In particular, it has allowed the denomination, enunciation, classification and formulation of six quadratic equations. Naïve, geometric and algebraic proofs to the algorithms of solving these equations have been proposed. Ibn al-Hā'im justifies the proofs with numerical preliminaries enunciated without proof and explained with examples. We present an analysis of these proofs of the algorithms of resolution of the canonical forms of the three composite quadratic equations.

Keywords: *history of algebra, history of proof, medieval arabic algebra*

INTRODUCCIÓN

Los historiadores de las matemáticas han consensuado que el álgebra medieval árabe empezó con la publicación de *al-Kitāb al-mukhtasar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*, el libro conciso en el cálculo de la restauración y la oposición de Mohammad Ibn Mūsa al-Khawārizmī. Definiendo tres especies de números, *māl* (bien), *jidhr* (raíz del bien), y *`adad mufrad* (número simple), consiguió denominar, enunciar y resolver seis formas canónicas de ecuaciones cuadráticas, tres simples y tres compuestas a las cuales se reduce la resolución de una colección de problemas aplicando principalmente, entre otras, dos transformaciones algebraicas denominadas *al-jabr wa al-muqābala*, la restauración y la oposición.

Aunque su intención era escribir un libro que sirva a la gente en sus herencias, repartos, y en sus tratos comerciales, al-Khawārizmī se empeñó en justificar los algoritmos de resolución de estas

Fadil, A. y Puig, L. (2014). Demostraciones algebraicas de las ecuaciones cuadráticas en Sharḥ al-urjūza al-yāsmīniyya de Ibn al-Hā'im. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigación sobre Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 55-64). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

ecuaciones (al-Khawārizmī, 1939, p. 21). Así comenzó una tradición en la historia de la demostración en el álgebra árabe que ha sido seguida durante muchos siglos después. Se trata de las primeras demostraciones de los algoritmos de resolución de las ecuaciones cuadráticas.

Este esfuerzo considerable para justificar los algoritmos de resolución motivó la aparición después de al-Khawārizmī de dos escuelas de pensamiento algebraico en torno a la demostración. La primera considera que la demostración en el álgebra debe basarse en la aplicación de los postulados geométricos recogidos mayoritariamente en los *Elementos* de Euclides, mientras la segunda busca conseguir autonomía e independencia de la geometría creando sus propias herramientas para tratar los objetos algebraicos a partir de los instrumentos de cálculo que ofrece la *Aritmética* de Diofanto.

Mientras al-Khawārizmī restringe el álgebra a la manera de un cálculo para transformar ecuaciones cuadráticas generales a sus formas canónicas, Abu Bakr al-Karajī (953-1028) ha sido el primero en delimitar el corpus del álgebra al operar con cantidades desconocidas aplicando las mismas reglas aritméticas que actúan sobre los números conocidos. Precisamente ha condicionado saber las operaciones aritméticas básicas para poder llevar a cabo las transformaciones algebraicas de restauración y oposición (al-Karajī, 1986, p. 158).

En Puig (2011a, 2011b) se propone una clasificación provisional de las demostraciones en el álgebra árabe en tres tipos. El primer tipo es la demostración que llamamos “ingenua”, cuya argumentación se desarrolla dentro de un marco discursivo que toma como referencia una figura geométrica que está acompañada de letras sobre la cual se efectúan acciones de cortar, pegar y mover, en general. La garantía de verdad de este discurso es lo que se ve en la figura en cuestión sin dudar de lo que la vista muestra. Así son las demostraciones de al-Khawārizmī.

El segundo tipo es la que llamamos demostración “geométrica”, cuya argumentación se basa en el modelo euclídeo en el que sigue habiendo figuras geométricas acompañadas de letras, pero que son explicadas dentro de un marco discursivo cuya garantía de verdad reside en las definiciones, postulados, y proposiciones ya demostradas. En este marco discursivo, la argumentación toma la forma de un deducción lógica, por lo cual es necesario que haya un acuerdo sobre qué cosas pueden tomarse como asentadas, es decir que son verdaderas y por tanto no necesitan ser justificadas y forman unas nociones comunes, y qué cosas, por lo contrario, presentan reservas a la hora de aceptarlas como verdaderas. Así son las demostraciones de Thābit Ibn Qurra (836-901) o Abū Kāmil (850-930).

Finalmente, el tercer tipo es la demostración algebraica cuyo discurso de justificación no se basa en ninguna figura geométrica, sino se fundamenta en las operaciones de cálculo que se realizan con las expresiones algebraicas. De hecho, para que se pueda razonar con este tipo de demostración es necesaria una definición clara de la naturaleza de estas expresiones algebraicas, y de ahí definir el tipo de las posibles operaciones que actúan sobre estas expresiones.

En este trabajo hemos seleccionado la obra *Sharḥ al-urjūza al-yāsmīniyya* de Ibn al-Hā'im al-Maqdisī (1352-1412), que representa la segunda escuela de pensamiento algebraico, porque incluye demostraciones de los algoritmos clásicos de resolución de las ecuaciones cuadráticas que se pueden calificar de algebraicas. De hecho, las figuras geométricas desparecen por completo, y las argumentaciones de las mismas se basan en la aplicación de preliminares numéricos a las especies del álgebra que componen la ecuación.

La obra, que es uno de sus muchos comentarios, tiene carácter explicativo del celebre poema didáctico compuesto de 54 versos redactado en el estilo *rajaz,* uno de los 15 estilos para escribir poesías en árabe, por Ibn al-Yāssamīn (m. 1204) para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, cuando enseñaba en Sevilla. Su poema sobre álgebra ha sido editado recientemente por Mahdi Abdeljaouad (Abdeljaouad, 2003).

ENUNCIACIÓN DE LOS ALGORITMOS CLÁSICOS DE RESOLUCIÓN

Los tres algoritmos clásicos se ejecutan en una secuencia de cinco pasos que tienen una parte común que el propio al-Khawārizmī usa para diferenciar las ecuaciones compuestas de las simples. Se trata de los dos primeros pasos: calcular la mitad de la cantidad de la raíz del bien, y elevar al cuadrado esta mitad.

Aunque la demostración se efectúa sobre un ejemplo numérico concreto, Ibn al-Hā'im enuncia los algoritmos clásicos de resolución en su forma general porque la secuencia de sus cinco pasos se expresa con palabras que se refieren a las cantidades abstractas de las dos especies de números, la raíz del bien y el número simple, sin especificación numérica alguna de estas cantidades.

Siguiendo con la misma tradición de al-Khawārizmī, después de enunciar los algoritmos Ibn al-Hā'im propone una colección de ejemplos que explican los pasos de ejecución de los mismos. Estos ejemplos han sido escogidos cuidadosamente para que cubran cantidades positivas enteras y racionales de la raíz del bien y del número simple. Se plantean en forma de ejercicios que preguntan hallar el valor numérico del bien y de su raíz. Cuando finaliza el algoritmo, se comprueba que el resultado obtenido es la solución numérica buscada. En ocasiones se omite la comprobación y se delega al alumno para que ejercite.

Respecto a la organización secuencial y temática de los contenidos, Ibn al-Hā'im hubiera preferido enunciar los algoritmos de resolución después de abordar las operaciones con expresiones algebraicas tal como lo hizo al-Karajī en su libro *al-Fakhrī*. Ahora bien, como se trata de explicar la urjūza, se ha visto obligado a seguir el orden mismo impuesto por Ibn al-Yāssamīn, al igual que al-Khawārizmī, que aborda los algoritmos de resolución antes de tratar las expresiones algebraicas.

Aunque aporta numerosos ejemplos que explican los procedimientos de resolución, Ibn al-Hā'im los considera insuficientes para alcanzar un aprendizaje satisfactorio de los mismos. Por ello, exige un buen dominio de las cinco operaciones aritméticas: la adición, la substracción, la multiplicación, la división, y la extracción de las raíces cuadradas.

> No seas un creído por la sencillez de este ejemplo y su claridad, y te crees que has aprendido las cinco tareas que ha señalado en el poema, y que son fáciles, no necesitan el esfuerzo de prestarlas atención. Si no has conseguido dominar las cinco tareas según lo que ha dicho el cálculo, no te avaricias en saber esta ciencia, ni en percibir su olor. Cuántas ecuaciones ponen en duda la mente y se cansa en hallar su mitad, que es la más fácil de las tareas, además de extraer su raíz que es la más difícil. Sin embargo, he dicho esto para instarte a prestar atención a dominar las operaciones del número conocido, entero y fracción, expresable y sordo, y que son: la suma, la substracción, la multiplicación, la división, la denominación, y la extracción de la raíz (al-Hā'im, 2003, p. 78).

La enunciación de los algoritmos clásicos de resolución ha sido complementada por cuatro aportaciones sistemáticas para cada una de las tres ecuaciones compuestas. La primera es demostrar los algoritmos clásicos con preliminares numéricos enunciados, sin demostración, y explicados con ejemplos. La segunda es explicar los pasos de dos algoritmos, con ejemplos y sin demostración, para hallar el valor numérico del bien antes de la raíz, seguidos de un algoritmo que termina con hallar simultáneamente el bien y su raíz. La tercera aportación es enunciar, y explicar con ejemplos sin demostración, un método para formular una colección de ecuaciones cuadráticas que poseen al menos una solución racional positiva. Por último demostrar con preliminares numéricos un algoritmo que transforma las ecuaciones compuestas en las simples.

ALGORITMOS DE RESOLUCIÓN DEMOSTRADOS CON PRELIMINARES NUMÉRICOS

Se puede agrupar los algoritmos de resolución que han sido demostrados con preliminares numéricos en dos bloques. El primer bloque lo forman los algoritmos clásicos. Las demostraciones de estos algoritmos se justifican con la aplicación directa de preliminares numéricos (*muqaddimāt* *`adadiyyah*) que han sido enunciados en su formal general, sin demostración, y cuya comprobación se ejecuta con ejemplos numéricos. La omisión de la demostración de estos preliminares ha sido intencionada. Además de su fin didáctico, que es facilitar el aprendizaje, la demostración recurre a la manipulación de figuras geométricas que a su vez necesitan el conocimiento de los postulados de los *Elementos* de Euclides, aspecto que Ibn al-Hā'im quiso evitar.

> Sobre mostrar el porqué de este camino que lleva a la raíz, y la manera de deducirla de las cinco tareas. La gente tiene la tradición de aclarar las demostraciones de estas ecuaciones con la geometría, sea con líneas o bien con áreas. Efectivamente, saber aquello necesita saber Euclides. Me ha parecido mostrar aquello con preliminares numéricos sin recurrir a mencionar línea o área, aunque estos preliminares mismos necesitan las argumentaciones geométricas. Sin embargo, hago esto para aproximar la asimilación, y remitir las aclaraciones de estos preliminares a Euclides u otros libros de la geometría (al-Hā'im, 2003, p. 79).

Con la omisión de las figuras geométricas, Ibn al-Hā'im quiere romper con la tradición de las demostraciones ingenuas y geométricas, lo que muestra el grado de autonomía y madurez que alcanzó el álgebra como área científica, independiente de la geometría, con sus propias definiciones de los conceptos y sus formulaciones de sus postulados. Por consiguiente los preliminares no necesitan demostración alguna y se pueden usar cuando se considere imprescindible ya que forman parte del entramado de los objetos del álgebra.

El segundo bloque está formado por los procedimientos mediante los cuales las ecuaciones compuestas son transformadas algebraicamente en las ecuaciones simples. Las argumentaciones también se basan en la aplicación de preliminares numéricos. Son cuatro los preliminares numéricos que han sido enunciados por Ibn al-Hā’im. Algunos de ellos sirven para justificar más de una demostración. Sin embargo cada demostración se argumenta recurriendo a un solo preliminar que se recuerda o se enuncia inmediatamente antes de proceder a exponerla. Cuando un preliminar ya se había enunciado antes, sólo se recuerda el lugar donde se había utilizado sin una nueva enunciación del mismo. Presentamos a continuación cómo enuncia Ibn al-Hā’im cada uno de los preliminares en lenguaje vernáculo y su traducción al sistema de signos actual del álgebra simbólica, indicando también en qué demostraciones usa cada uno de ellos.

El primer preliminar se ha aplicado al demostrar el algoritmo clásico de resolución de la primera ecuación compuesta y al justificar las operaciones algebraicas que permiten transformar la tercera ecuación compuesta a la primera o tercera ecuación simple.

> Cualquier número que se divide en dos mitades, y luego se le añade otro número, entonces el resultado de multiplicar el número y el añadido por el añadido, cuando se suma al cuadrado de la mitad del número, es igual al producto de la suma del número añadido a la mitad del número por sí misma (al-Hā'im, 2003, p. 79).

En nuestro sistema de signos, el preliminar se traduce a la identidad: $(m+n)n+\left(\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{m}{2}+n\right)^2$

El segundo preliminar es útil para demostrar cómo transformar la primera ecuación compuesta a la primera o tercera ecuación simple.

> Para cada dos números distintos, cuando sumas, al cuadrado de la mitad de la diferencia entre ellos, el producto de uno de ellos por el otro, el resultado es lo mismo que el cuadrado de la mitad de su suma (al-Hā'im, 2003, p. 82).

Expresado en lenguaje simbólico, el preliminar se traduce a la identidad: $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+mn=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$

Con el tercer preliminar se justifica la demostración del algoritmo de resolución de la segunda ecuación compuesta, y la manera de cómo llevarla a la primera o tercera ecuación simple.

> Cualquier número que se divide en dos mitades y se descompone en dos sumandos distintos, entonces el resultado de multiplicar uno de los distintos por el otro, cuando se le suma el cuadrado de la diferencia entre uno de ellos y la mitad del número impuesto, es igual al cuadrado de la mitad del número impuesto (al-Hā'im, 2003, p. 87).

En nuestro sistema de signos, el preliminar se traduce a la identidad: $mn+\left(m-\frac{m+n}{2}\right)^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$

El último preliminar es usado para justificar la demostración del algoritmo de resolución de la tercera ecuación compuesta.

> Cualquier número del cual has disminuido unas raíces suyas, y has sumado a lo que queda el cuadrado de la mitad de la cantidad de aquellas raíces, entonces la raíz del resultado es menor que la raíz del bien con una cantidad igual a la mitad de la cantidad de estas raíces (al-Hā'im, 2003, p. 94).

En nuestro sistema de signos, el preliminar se traduce a la identidad: $\sqrt{\left(m-n\sqrt{m}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{m}-\frac{n}{2}$

El hecho que Ibn al-Hā'im remita las demostraciones de los preliminares numéricos a los libros de la geometría no significa que no se han propuesto demostraciones numéricas a los mismos. En efecto, en el capítulo cuatro dedicado a la multiplicación de su tratado *Raf` al-ḥijāb `an ujūh a`māl al-ḥisāb*, Ibn al-Bannā al-Murrāqushī (m. 1321) afirma que las demostraciones de los métodos que transforman las ecuaciones compuestas a las simples se basan en una manera de multiplicar que él denomina *adarbu bī-attarbī`* (la multiplicación elevando al cuadrado)

> El porqué del operar en las ecuaciones compuestas se entiende con la multiplicación elevando al cuadrado (al-Bannā, 1988, p. 309).

Esta forma de multiplicar incluye tres identidades numéricas donde la multiplicación de dos números positivos se expresa como una descomposición aditiva, sustractiva, multiplicativa, o división de dos números positivos, que dependen de los números multiplicados, y donde al menos uno de ellos se eleva al cuadrado. Previa enunciación de tres identidades equivalentes, Ibn al-Bannā aporta una demostración numérica al segundo preliminar de Ibn al-Hā'im (Ibn al-Bannā, p. 260).

Además de una diversificación en la enunciación de los preliminares numéricos en distintas formas equivalentes, encontramos justificaciones numéricas del primer y tercer preliminar de Ibn al-Hā'im. Lo que significa que los preliminares numéricos, con sus diferentes enunciaciones en el lenguaje vernáculo, ya forman parte de la secuencia didáctica de los contenidos en los manuales de texto del álgebra árabe.

Lo que distingue a Ibn al-Hā'im de su antecesor Ibn al-Bannā es recordar los preliminares necesarios justo antes de empezar la demostración para su aplicación inmediatamente después en la justificación del encadenamiento lógico de la demostración.

DEMOSTRACIONES ALGEBRAICAS DE LOS ALGORITMOS DE RESOLUCIÓN DE LA PRIMERA ECUACIÓN COMPUESTA

La primera ecuación compuesta canónica, un bien y sus raíces igualan un número, se traduce con nuestro lenguaje simbólico a la siguiente ecuación: $x^2+bx=c$ donde b y c son números positivos enteros o racionales. A continuación presentamos un análisis de dos demostraciones algebraicas de resolución de la primera ecuación compuesta. La primera es del algoritmo clásico, la segunda es la de transformar la primera ecuación compuesta a la primera o tercera ecuación simple.

Demostración del algoritmo clásico de resolución

Es bien conocido que el algoritmo clásico de resolución se ejecuta en cinco pasos: tomar la mitad de la cantidad de las raíces, elevar al cuadrado esta mitad, sumarle el número simple, extraer la raíz cuadrada del total, y substraerle la mitad de la cantidad de las raíces. En nuestro lenguaje simbólico, los pasos se traducen a:

$$\frac{b}{2} \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Ibn al-Hā'im ha explicado los pasos de ejecución del algoritmo clásico con cinco ejemplos numéricos distintos, el primero de ellos servirá luego para explicitar la demostración del algoritmo: un bien y diez de sus raíces igualan veinticuatro.

Inmediatamente antes de explicitar la demostración del algoritmo, Ibn al-Hā'im recuerda el primer preliminar que se limita a explicar con un ejemplo. Partiendo de la ecuación $x^2 + 10x = 24$ procede a desglosar con palabras los pasos de la demostración.

> Supongamos que estamos hablando del primer ejemplo, que es un bien y diez de sus raíces igualan veinticuatro. Entonces, decimos que la cantidad de las raíces es el número inicial, y la cantidad de las raíces del bien ligado a ella es el número añadido a él. Y el número simple es como el resultado de multiplicar el número con el añadido por el añadido. Entonces los veinticuatro, en el ejemplo, serán obtenidas a partir de multiplicar el diez y la cantidad de las raíces del bien, añadida a ella, por la cantidad de las raíces añadidas. Cuando tomamos la mitad de la cantidad de las raíces y elevamos al cuadrado esta mitad y añadimos el resultado, que es veinticinco, al número se juntan cuarenta y nueve, que es lo mismo que el cuadrado de la suma de la cantidad de las raíces añadidas a la mitad de diez. La raíz de cuarenta y nueve, que es siete, será la suma de la mitad de la cantidad de las raíces y la cantidad de las raíces añadidas al diez. Cuando se substrae del siete la mitad de diez quedan dos que son la cantidad de las raíces del bien añadidas a las diez raíces. Así sabes que el bien iguala dos de sus raíces, y entonces cada raíz será dos, tal como hemos anticipado que en cada bien hay tantas raíces como unidades haya en una raíz. Se ha quedado claro, por lo que hemos dicho, el porqué de hallar la mitad de las raíces, sumar el cuadrado de la mitad al número, tomar la raíz del total, y substraerle la mitad (al-Hā'im, 2003, p. 80).

El esquema de la demostración puede describirse de la manera siguiente:

- Reenunciación del primer preliminar numérico usando las especies de números del álgebra. El preliminar se expresa en su forma general para cualquiera ecuación compuesta de este tipo. Se hace referencia a las especies de números que componen la ecuación de manera abstracta, y no se menciona el ejemplo numérico de la ecuación.
  - Decimos que la cantidad de las raíces es el número inicial. Aquí identifica *b*, que es la cantidad de las raíces en la ecuación, con *m*, que es el número inicial en el primer preliminar.
  - La cantidad de las raíces del bien ligado a ella es el número añadido a él. El bien, x^2, es concebido geométricamente como producto de la raíz por sí misma. Sin embargo aquí se define aritméticamente como suma de la raíz tantas veces como la propia raíz. Es decir $x^2 = x \cdot x = x + x + \ldots + x$ (*x*-veces, la cantidad de las raíces del bien). Al sustituir *n* por *x* en el primer preliminar, se obtiene $\left(b+x\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$.
  - Y el número simple es como el resultado de multiplicar el número con el añadido por el añadido. Es una factorización del primero miembro de la ecuación: $\left(b+x\right)x = c$.

- Ejemplificación explicativa de la abstracción. La demostración se concreta con el ejemplo numérico de la ecuación, aunque el razonamiento sigue desarrollándose en términos generales.
  - Entonces los veinticuatro, en el ejemplo, serán obtenidos a partir de multiplicar el diez y la cantidad de las raíces del bien, añadida a ella, por la cantidad de las raíces añadidas. Ejemplifica la factorización anterior de la ecuación, es decir, $(10+x)x=24$.
  - Cuando tomamos la mitad de la cantidad de las raíces. Esto es $\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{10}{2}=5$.
  - Elevamos al cuadrado esta mitad. Esto es $\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2=5^2=25$.
  - Añadimos el resultado, que es veinticinco, al número, se juntan cuarenta y nueve. Esto es $\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=(b+x)x=25+24=49$.
  - Que es lo mismo que el cuadrado de la suma de la cantidad de las raíces añadida a la mitad de diez. Se aplica la igualdad del preliminar numérico $(b+x)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$, y con el ejemplo se escribe $\left(\frac{10}{2}+x\right)^2=49$.
- Hallar la raíz. Este paso se consigue con la extracción de la raíz cuadrada, que es una operación aritmética.
  - La raíz de cuarenta y nueve, que es siete, será la suma de la mitad de la cantidad de las raíces y la cantidad de las raíces añadida al diez. Esto es $\left(\frac{b}{2}+x\right)=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$, y con el ejemplo se escribe: $\left(\frac{10}{2}+x\right)=\sqrt{49}=7$.
  - Cuando se substrae del siete la mitad de diez quedan dos que son la cantidad de las raíces del bien añadida a las diez raíces. Esto es $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$, es decir, $x=2$.
- Justificación de los cinco pasos del algoritmo clásico. Es un desglose de las cinco operaciones aritméticas que hay que efectuar para calcular el valor numérico de la raíz.
  - El porqué hallar la mitad de las raíces (Tarea 1).
  - Sumar el cuadrado de la mitad al número (Tareas 2 y 3).
  - Tomar la raíz del total (Tarea 4).
  - Substraerle la mitad de la cantidad de las raíces (Tarea 5).

La demostración ha sido expuesta en términos generales, ya que se refiere, en todos sus pasos, a las especies del álgebra que componen la ecuación. Aquí el ejemplo sirve sólo de explicación de un razonamiento abstracto.

Demostración del algoritmo que transforma la ecuación compuesta a la simple

Además del algoritmo clásico, existe otro procedimiento de resolución que consiste en transformar la ecuación compuesta en la primera o tercera ecuación simple y que se basa en el segundo preliminar numérico. No se aporta ningún ejemplo que acompaña la explicación de la demostración como se hizo en el caso de la demostración del algoritmo clásico. Se razona sobre las especies de números en términos abstractos.

Una vez recordado el preliminar Ibn al-Hā'im describe la demostración con estas palabras donde la diferencia entre dos números *al-fadl* es siempre positiva.

> Que consideres los dos números cuya diferencia se calcula: el bien y el número, siempre. Entonces las raíces serán la diferencia entre ellos. Multiplicas uno de ellos por el otro como bienes, y añades al resultado el cuadrado de la mitad de la diferencia entre ellos considerada como bienes, el total será el cuadrado de la mitad de su suma. Tomas su raíz, que será la mitad de su suma, y que es cosas y la guardas. Luego miras la mitad de su suma, que será siempre el bien y la mitad de las cosas ligadas a él porque el número, por supuesto, es como el bien y las cosas. Cuando se suma esto al bien, el total del bien y el número será dos bienes y las cosas impuestas. Y la mitad de aquello es un bien y la mitad de las cosas. Si quieres la primera ecuación, iguala con aquel guardado, y substraes lo común, quedan cosas igualan un bien, que es lo solicitado. Si quieres la tercera, ya sabes que el número iguala el bien y las cosas impuestas y que la mitad de la suma del bien al número es un bien y la mitad de las cosas, el número será adición de la mitad de la suma del bien al número y la mitad de las cosas, y que el guardado iguala la mitad de su suma. Añades a lo guardado la mitad de las cosas, el total será cosas igualan el número impuesto (al-Hā'im, 2003, p. 82).

Hemos fraccionado la demostración en tres partes. La primera es común a las dos restantes. La segunda explica cómo transformar la ecuación compuesta en la primera simple. La tercera explicita cómo llevar la ecuación compuesta a la tercera simple. Una descripción de la parte común de la demostración se detalla como sigue.

- Aplicar el segundo preliminar.
  - Que consideres, siempre, los dos números cuya diferencia se calcula: el bien y el número. Tomar el bien como *n*, y el número *c* impuesto en la ecuación como *m*, es decir $n = x^2$ y $m = c$ en el segundo preliminar.
  - Entonces las raíces serán la diferencia entre ellos considerada como bienes. La multiplicación de un número por el bien es concebida como bienes $bx = c - x^2$.
  - Multiplicas uno de ellos por el otro. Esto es $mn = cx^2$.
  - Añades al resultado el cuadrado de la mitad de la diferencia entre ellos como bienes. Sustituyendo, expresa el primer miembro de la igualdad del segundo preliminar en función del bien
    $$\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + mn = \left(\frac{c-x^2}{2}\right)^2 + cx^2 = \left(\frac{bx}{2}\right)^2 + cx^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 x^2 + cx^2 = \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\right)x^2.$$
  - El total será el cuadrado de la mitad de su suma. Se aplica la igualdad del segundo preliminar $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + mn = \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\right)x^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+x^2}{2}\right)^2$
- Demostrar la parte común del método.
  - Tomas su raíz, que será la mitad de su suma, y que es cosas, y la guardas. Al aplicar la raíz cuadrada a los dos miembros de la igualdad anterior, salen las raíces del bien, es

decir $\frac{c+x^2}{2}=x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$.

- Luego miras la mitad de su suma, que será siempre el bien y la mitad de las cosas ligadas a él. Esto es $\frac{c+x^2}{2}=x^2+\frac{bx}{2}$.
  - Porque el número, por supuesto, es como el bien y las cosas. Esto es $c=x^2+bx$.
  - Cuando se suma esto al bien, esto es $c+x^2=x^2+bx+x^2$.
  - El total del bien y el número será dos bienes y las cosas impuestas $c+x^2=2x^2+bx$.
  - Y la mitad de aquello es un bien y la mitad de las cosas $\frac{c+x^2}{2}=\frac{2x^2+bx}{2}=x^2+\frac{bx}{2}$.

Se aprovecha la parte común de la demostración en dos ocasiones. La primera es para demostrar cómo transformar la primera ecuación compuesta a la primera ecuación simple.

- Si quieres la primera ecuación.
  - Iguala con aquel guardado. Esto es $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}=x^2+\frac{bx}{2}$.
  - Substraes lo común. Esto es $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{bx}{2}=x^2$.
  - Quedan cosas igualan un bien, esto es, se consigue la primera ecuación simple $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}\right)x=x^2$.

La segunda aplicación de la parte común es para demostrar la manera de llevar la primera ecuación compuesta a la tercera ecuación simple.

- Si quieres la tercera
  - Ya sabes que el número iguala al bien y las cosas impuestas. Esto es $c=x^2+bx$.
  - Que la mitad de la suma del bien al número es un bien y la mitad de las cosas $\frac{c+x^2}{2}=x^2+\frac{bx}{2}$.
  - El número será la adición de la mitad de la suma del bien al número y la mitad de las cosas $c=\frac{c+x^2}{2}+\frac{bx}{2}$.
  - Que el guardado iguala la mitad de su suma. Esto es $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}=\frac{c+x^2}{2}$.

- Añades a lo guardado la mitad de las cosas. Esto es $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{bx}{2}=\frac{c+x^2}{2}+\frac{bx}{2}$.
- El total es cosas igualan el número impuesto $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{bx}{2}=\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{b}{2}\right)x=c$.

CONCLUSIONES

Después de la descripción y el análisis de las demostraciones de los algoritmos de resolución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en *Sharḥ al-urjūza al-yāsmīniyya* de Ibn al-Hā'im podemos deducir algunas conclusiones que enfocan tres líneas de reflexión.

La primera se centra en la naturaleza y los rasgos de las propias demostraciones de estos procesos de resolución. Las demostraciones estudiadas son puramente algebraicas. En ninguna de las demostraciones analizadas se ha recurrido a la manipulación de figuras geométricas. Aunque las demostraciones están hechas en un lenguaje retórico, es decir con ausencia del lenguaje simbólico, esto no impide calificarlas de algebraicas porque los conceptos que las nutren son algebraicos y no apelan explícitamente a las proposiciones de Euclides. El núcleo de estas demostraciones reside en la aplicación de cuatro preliminares numéricos que han sido enunciados antes de abordar las demostraciones y explicados con ejemplos. Estos preliminares no necesitan ser demostrados, ya que forman parte de las herramientas del álgebra.

La segunda reflexión se centra en las consideraciones didácticas hechas por el autor para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas. Es un proceso de enseñanza basado en la explicación de los conceptos usando ejemplos. Estos ejemplos han sido diversificados para abarcar números naturales y racionales positivos. La presentación temática de las tres ecuaciones ha sido ordenada y sistemática.

La tercera reflexión aborda las consecuencias que pueden derivarse del análisis que hemos realizado de estas demostraciones para la organización de la enseñanza de la demostración en el álgebra. El aprendizaje de la demostración en el álgebra no será posible sin que este proceso esté acompañado de ejemplos numéricos que lo clarifiquen.

Referencias

Abdeljaouad, M. (2003). *12th Century Algebra in an Arabic Poem: Ibn Al-Yāsamīn's Urjūza fi'l-jabr wa'l-muqābala*. Tunis. http://membres.multimania.fr/mahdiabdeljaouad/Urjuza.pdf

al-Bannā, I. (1988). *Raf` al-ḥijāb `an ujūh a`māl al-ḥisāb*. Edición árabe y comentario de Mohammed Aballagh. Fez: Universidad Sidi Mohammed ben Abdellah. Publicaciones de la Facultad de Letras y Ciencias Humanas, Dhar al-mahrāz.

al-Hā'im, I. (2003). S*harḥ al-urjūza al-yāsmīniyya*. Edición árabe y comentario de Mahdi Abdeljaouad. Tunis: L'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.

al-Karajī, A. (1986). *Al-kāfī fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*. Edición árabe y comentario de Sami Shalhoub. Ma`had atturath al `ilmī al-`arabī. Alepo: Universidad de Alepo.

al-Khawārizmī, M. (1939). *Al-kitāb al-mukhtasar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*. Edición árabe y comentario A.M, Musharrafah y A. Mursi. Cairo: Universidad Egipcia. Facultad de Ciencias.

Puig, L. (2011a). Historias de al-Khwārizmī (6ª entrega). El cálculo con la cosa. *Suma*, 67, pp. 101-110.

Puig, L. (2011b). Historias de al-Khwārizmī (7ª entrega). Figuras y demostraciones. *Suma*, 68, pp. 93-102