RUTGERS
THE STATE UNIVERSITY
OF NEW JERSEY

Alternativas de cómo presentar demostraciones matemáticas y evaluar su comprensión en el salón de clase

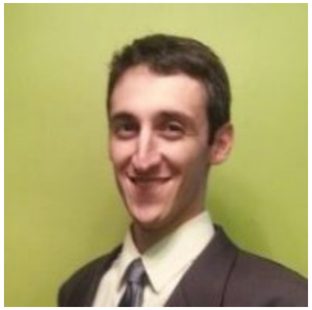
Juan Pablo Mejía-Ramos
Departamento de Aprendizaje y Enseñaza, GSE
Departamento de Matemáticas, SAS
Universidad de Rutgers (NJ, EE.UU)

Colaboradores


Evan Fuller


Keith Weber


Kathryn Rhoads


Aron Samkoff


Kristen Lew

Plan

- Dificultades al leer demostraciones matemáticas.
- Algunas alternativas de cómo presentar demostraciones en el salón de clase y en los libros de texto.
- Cómo podemos evaluar la comprensión de lectura de demostraciones matemáticas?
- Cuál es el efecto que tiene el formato de presentación en la comprensión de demostraciones por parte de nuestros estudiantes?

Algunas dificultades al leer demostraciones

- Las demostraciones matemáticas constituyen una de las principales maneras por medio de las cuales los profesores suelen presentar el conocimiento matemático a sus estudiantes (e.g., Weber, 2004).
- Sin embargo, estudios sugieren que:
  - estudiantes encuentran estas demostraciones confusas, o sin sentido (e.g., Harel, 1998; Porteous, 1986; Rowland, 2001).
  - estudiantes tanto a nivel escolar como universitario tienen dificultades para validar argumentos matemáticos (Selden & Selden, 2003; Weber, 2010).
- Algunos matemáticos atribuyen esta dificultad a la manera formal en la cual son presentadas estas demostraciones (e.g., Thurston, 1994; Rowland, 2001).

Algunas alternativas de cómo presentar demostraciones matemáticas

- *E-proofs* (Alcock, 2009)
- *Explanatory proofs* (e.g., Hanna, 1990; Hersh, 1993)
- *Structured proofs* (Leron, 1983)
- *Generic proofs* (Rowland, 2001)

Sin embargo, hasta hace poco no existían estudios empíricos sobre la efectividad de estas maneras alternativas de presentar demostraciones matemáticas.

Demostraciones estructuradas

- Las demostraciones estructuradas presentan la información en niveles:
  - El primer nivel ofrece una descripción muy general de cómo procede la demostración.
  - El segundo nivel desarrolla los argumentos descritos en el nivel 1.
  - En el tercer nivel se ofrecen los detalles lógicos o cómputos de las ideas en el nivel 2
  - Y así sucesivamente.
- También hay unas secciones “entre niveles”, en las cuales se introducen y motivan las ideas que aparecerán en los siguientes niveles. Así, las proposiciones en la demostración no parecen salir de la nada.

Claim. The equation $x^3 + 5x = 3x^2 + \sin x$ has no nonzero solutions.

Proof:

1. Let $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \sin x$. Solutions of $f(x) = 0$ precisely correspond to solutions of $x^3 + 5x = 3x^2 + \sin x$.

2. Suppose the claim is false. Then $f(x) = 0$ has a nonzero solution s; that is, $s \neq 0$ and $f(s) = 0$.

3. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 - \cos x = 3(x^2 - 2x + 1) + 2 - \cos x = 3(x-1)^2 + 2 - \cos x$.

4. Since $3(x-1)^2 \geq 0$ and $2 - \cos x > 0$ for all real numbers x, $f'(x) > 0$ for all real numbers x.

5. Clearly $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 5(0) - \sin 0 = 0$, so $x = 0$ is a solution of $f(x) = 0$.

6. Since $f(0) = f(s)$ and $s \neq 0$, by Rolle's theorem, there is a c between 0 and s such that $f'(c) = 0$.

7. However, this is a contradiction because $f'(x) > 0$ for all x.

Note: Rolle's theorem states that if a differentiable function f has the property that $f(a) = f(b)$ for $a < b$, then there is a c such that $a < c < b$ and $f'(c) = 0$.

Claim. The equation $x^3 + 5x = 3x^2 + \sin x$ has no nonzero solutions.

Proof:

Level 1. We define $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \sin x$. Solutions of $f(x) = 0$ precisely correspond to solutions of $x^3 + 5x = 3x^2 + \sin x$. Assume the claim is false: then $f(x) = 0$ has a nonzero solution. We show (in Level 2):

a. $f'(x) > 0$ for all x

b. If $f(x) = 0$ has a nonzero solution, then there is a number c for which $f'(c) = 0$.

Together, these conclusions clearly produce a contradiction, so the claim is proved.

Level 2a. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 - \cos x$. Using algebra (in Level 3a), we show this expression is always positive.

Level 2b. Suppose $f(x) = 0$ has a nonzero solution, that is, there exists $s \neq 0$ and $f(s) = 0$. Since $f(0) = 0$ (Level 3b), this implies there is a c such that $f'(c) = 0$, contradicting the fact that $f'(x) > 0$. for all x, which was established in Level 2a. (The details are given in Level 3c).

Level 3a. We support the claim in Level 2a as follows:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 - \cos x = 3(x^2 - 2x + 1) + 2 - \cos x = 3(x-1)^2 + 2 - \cos x$$

Since $3(x-1)^2 \geq 0$ and $2 - \cos x > 0$ for all real numbers x, $f'(x) > 0$ for all real numbers x.

Level 3b. $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 5(0) - \sin 0 = 0$

Level 3c. We support the claim in Level 2b as follows: Rolle's theorem states that if a differentiable function f has the property that $f(a) = f(b)$ for $a < b$, then there is a c such that $a < c < b$ and $f'(c) = 0$. In our case, we have $f(0) = f(s) = 0$. Hence there is a c between 0 and s such that $f'(c) = 0$.

Demostraciones estructuradas

- Leron (1983) explicó algunas de las ventajas de esta forma de presentar demostraciones matemáticas:
  - Este formato provee al lector con un resumen de la demostración y le permite comprender sus ideas principales, sin perderse en los detalles lógicos de la misma.
  - Sin embargo, estos detalles no se pierden, ya que el formato le permite al lector verificarlos en otros niveles si así lo desea.
  - Adicionalmente, esta re-estructuración de la demostración (que va del nivel más general a los detalles más específicos) explica el razonamiento detrás de algunas decisiones que podrían parecer arbitrarias en el formato tradicional.
- En efecto, varios educadores matemáticos han resaltado las cualidades pedagógicas de este formato (Mamona-Downs & Downs, 2002, Melis, 1994, Selden & Selden, 2008)
- Suena bien, pero funciona?

Evaluando de comprensión de demostraciones

- Cómo evaluamos la comprensión de demostraciones actualmente?

Claim. The equation $x^3 + 5x = 3x^2 + \sin x$ has no nonzero solutions.

Proof:

1. Let $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \sin x$. Solutions of $f(x) = 0$ precisely correspond to solutions of $x^3 + 5x = 3x^2 + \sin x$.
2. Suppose the claim is false. Then $f(x) = 0$ has a nonzero solution s; that is, $s \neq 0$ and $f(s) = 0$.
3. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 - \cos x = 3(x^2 - 2x + 1) + 2 - \cos x = 3(x-1)^2 + 2 - \cos x$.
4. Since $3(x-1)^2 \geq 0$ and $2 - \cos x > 0$ for all real numbers x, $f'(x) > 0$ for all real numbers x.
5. Clearly $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 5(0) - \sin 0 = 0$, so $x = 0$ is a solution of $f(x) = 0$.
6. Since $f(0) = f(s)$ and $s \neq 0$, by Rolle's theorem, there is a c between 0 and s such that $f'(c) = 0$.
7. However, this is a contradiction because $f'(x) > 0$ for all x.

Note: Rolle's theorem states that if a differentiable function f has the property that $f(a) = f(b)$ for $a < b$, then there is a c such that $a < c < b$ and $f'(c) = 0$.

Evaluando de comprensión de demostraciones

- Cómo evaluamos la comprensión de demostraciones actualmente?
  - Pedimos a nuestros estudiantes reproducir las demostraciones que han memorizado.
- Nuestro modelo (Mejía-Ramos et al, 2012) propone siete tipos de preguntas que pueden ser utilizadas para evaluar la comprensión de una demostración.
- El modelo esta basado en un modelo anterior que fue diseñado por Yang y Lin (2008) para evaluar la comprensión de demostraciones en geometría escolar.
- Extendimos el modelo de Yang y Lin (2008) para hacerlo relevante en el contexto de matemáticas universitarias.

El modelo

1. Significado de términos y proposiciones
2. Estatus operativo de las proposiciones
3. Justificación de las proposiciones
4. Resumen de las ideas principales
5. Identificación de la estructura modular
6. Transferencia de las ideas generales y métodos a otro contexto
7. Ilustración con ejemplos

El modelo

1. Significado de términos y proposiciones
   - Definir un término dado en sus propias palabras, o proveer un ejemplo de uno de los términos en la demostración
   - Expresar el significado de una de las proposiciones (incluido el teorema a demostrar!), o ilustrarla con un ejemplo

Qué es la raíz de una función?

Describa en sus propias palabras el significado de la frase "el rango de cos(x) *es* [-1,1]"

El modelo

2. Estatus operativo de las afirmaciones
   - Identificar el estatus operativo de una proposición
   - Identificar la estructura lógica de la demostración

En la demostración, por que se asume que la proposición a demostrar es falsa?

El modelo

3. Justificación de las proposiciones
   - Hacer explicita una justificación implícita en la demostración (e.g. “Dado *x*, entonces *y*”)
   - Identificar la información que justifica una proposición dada (e.g. “Por tanto, *z*”)
   - Identificar las proposiciones que son justificadas por un paso particular.
     (e.g. “Observe que *w.*”)

Cómo se utilizó en la demostración el hecho de que $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in R$ *?*

El modelo

4. Resumen de las ideas principales
   – Identificar o proveer un resumen de la demostración (o de una de sus secciones) que incluya sus ideas principales

Cuál de los siguientes contiene la idea principal de la demostración?

a. $f(x)=x^3-3x^2+5x-\sin x$. *Si existiese* $s\neq 0$ *tal que* $f(s)=0$, *entonces existiría un punto x en el cual* $f'(x)=0$. *Sin embargo* $f'(x)>0$. *Por tanto 0 es la única solución.*

b. *Dado que* $f(x)=x^3-3x^2+5x-\sin x$, *entonces* $f'(x)=3x^2-6x+5-\cos x=3(x-1)^2+2-\cos x$. *Si* s *es una solución, entonces* $f(s)=0$, *lo cual implica que* $f'(c)=0$. *Esto es una contradicción.*

El modelo

5. Identificar la estructura modular de la demostración
   - Dividir la demostración en sus principales módulos
   - Identificar la función de cada módulo
   - Identificar la (in)dependencia lógica entre distintos módulos

El modelo

6. Transferencia de las ideas generales y métodos a otro contexto
   - Transferir el método de la demostración a la solución de un nuevo problema
   - Identificar el método de la demostración en otro contexto
   - Apreciar las limitaciones del método

Por qué es imposible usar el método de esta demostración para demostrar que la ecuación $x = \sin x$ *no tiene soluciones distintas a cero?*

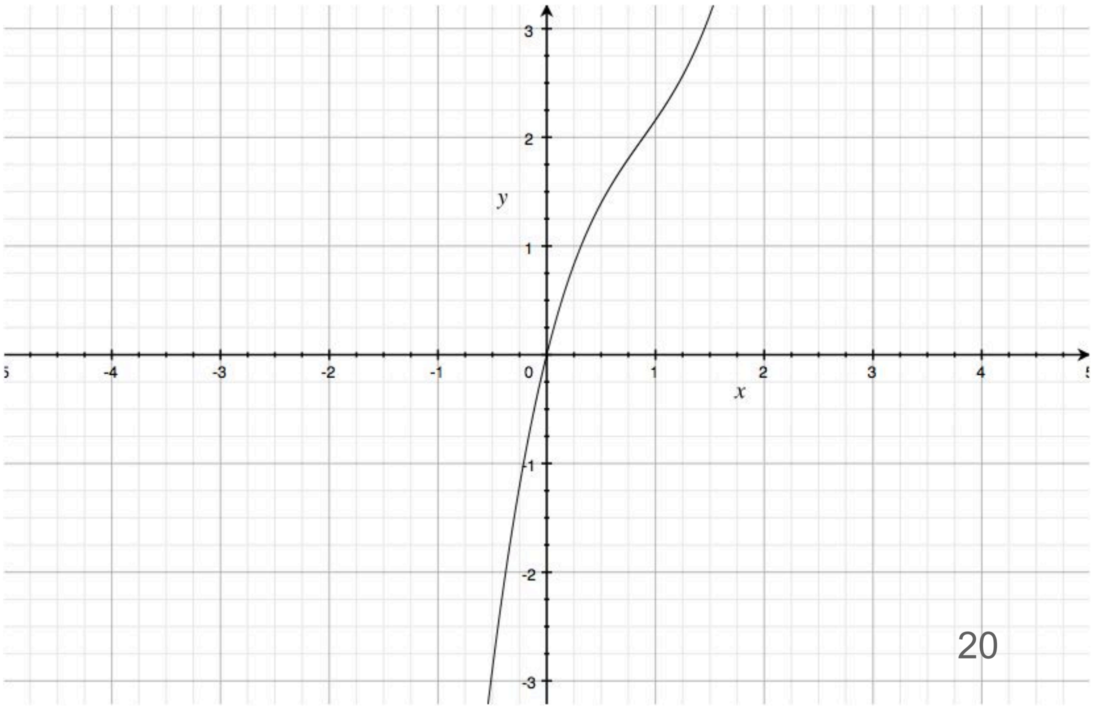
El modelo

7. Ilustración con ejemplos
   - Ilustrar con un ejemplo una serie de inferencias de la demostración.
   - Interpretar la demostración en términos gráficos.

Explique la demostración

en términos de la gráfica de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \sin x$$



Volvamos entonces a nuestra pregunta

- Algunos matemáticos han sugerido que las demostraciones estructuradas son más fáciles de comprender que demostraciones presentadas en un formato más tradicional.
- Nuestro modelo nos permite evaluar la comprensión de una demostración.
- Veamos entonces qué comprenden los estudiantes al leer demostraciones estructuradas.

Métodos - Demostraciones estructuradas

- Le dimos esta y una segunda demostración a 18 estudiantes.
- Les pedimos que la leyeran con cuidado.
- Les dimos una prueba de comprensión de lectura basada en nuestro modelo (8 preguntas de respuesta abierta):
  - Significado de términos y proposiciones
  - Estatus operativo de las afirmaciones
  - Justificación de las proposiciones
  - Resumen de las ideas principales
  - Transferencia de las ideas generales y métodos a otro contexto
  - Ilustración con ejemplos
- Les preguntamos sobre el formato de la demostración (lo que más les gustaba y disgustaba).

Métodos - Demostraciones estructuradas

We define a number as *monadic* if it can be represented as $4j+1$ for some integer j, and *triadic* if it can be represented as $4k+3$ for some integer k. A triadic (monadic) prime refers to a number that is both triadic (monadic) and prime. Note that every odd prime is either a monadic prime or a triadic prime.

Claim. There exist infinitely many triadic primes.

Proof:

1. Consider a product of two monadic numbers:

$$(4j+1)(4k+1) = 4k \cdot 4j + 4k + 4j + 1 = 4(4jk + j + k) + 1$$

   which is again monadic.

2. Similarly, the product of any number of monadic numbers is monadic.
3. Now, assume the theorem is false, so there are only finitely many triadic primes, say $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
4. Let $M = 4p_2 \cdots p_n + 3$, where $p_1 = 3$.
5. $p_2, p_3, \ldots, p_n$ do not divide M as they leave a remainder of 3, and 3 does not divide M as it does not divide $4p_2 \cdots p_n$.
6. We conclude that no triadic prime divides M.
7. Also, 2 does not divide M since M is odd.
8. Thus all of M's prime factors are monadic, hence M itself must be monadic.
9. But M is clearly triadic, a contradiction.

Análisis - Demostraciones estructuradas

- Inicialmente nos enfocamos en:
  - Los comentarios (positivos y negativos) sobre el formato de presentación.
  - Momentos en los cuales los estudiantes llegaron a comprender aspectos de la demostración.
  - Cualquier tipo de confusión expresada por los estudiantes al leer las demostraciones estructuradas o al responder las preguntas de la prueba de comprensión.
- También intentamos mejorar las demostraciones mismas (para que fueran más fáciles de leer) y las preguntas de la prueba de comprensión.

Resultados - Demostraciones estructuradas

- Cuatro temas principales emergieron de nuestro análisis:
  - Algunos estudiantes (5 de los 18) valoraron explicaciones del razonamiento justificando algunas decisiones en la demostración, otros estudiantes (4 de los 18) no.
  - Algunos estudiantes (5 de los 18) valoraron los resúmenes en el Nivel 1 de las demostraciones estructuradas, otros (3 de los 18) tuvieron dificultad comprendiéndolos.
  - La mayoría de los estudiantes (14 de los 18) se quejaron diciendo que las demostraciones estructuradas son difíciles de leer ya que requieren “saltar de un lado a otro” en el texto.

Claim. The equation $x^3 + 5x = 3x^2 + \sin x$ has no nonzero solutions.

Proof:

Level 1. We define $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \sin x$. Solutions of $f(x) = 0$ precisely correspond to solutions of $x^3 + 5x = 3x^2 + \sin x$. Assume the claim is false: then $f(x) = 0$ has a nonzero solution. We show (in Level 2):

a. $f'(x) > 0$ for all x

b. If $f(x) = 0$ has a nonzero solution, then there is a number c for which $f'(c) = 0$.

Together, these conclusions clearly produce a contradiction, so the claim is proved.

Level 2a. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 - \cos x$. Using algebra (in Level 3a), we show this expression is always positive.

Level 2b. Suppose $f(x) = 0$ has a nonzero solution, that is, there exists $s \neq 0$ and $f(s) = 0$. Since $f(0) = 0$ (Level 3b), this implies there is a c such that $f'(c) = 0$, contradicting the fact that $f'(x) > 0$. for all x, which was established in Level 2a. (The details are given in Level 3c).

Level 3a. We support the claim in Level 2a as follows:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 - \cos x = 3(x^2 - 2x + 1) + 2 - \cos x = 3(x-1)^2 + 2 - \cos x$$

Since $3(x-1)^2 \geq 0$ and $2 - \cos x > 0$ for all real numbers x, $f'(x) > 0$ for all real numbers x.

Level 3b. $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 5(0) - \sin 0 = 0$

Level 3c. We support the claim in Level 2b as follows: Rolle's theorem states that if a differentiable function f has the property that $f(a) = f(b)$ for $a < b$, then there is a c such that $a < c < b$ and $f'(c) = 0$. In our case, we have $f(0) = f(s) = 0$. Hence there is a c between 0 and s such that $f'(c) = 0$.

Resultados - Demostraciones estructuradas

- Cuatro temas principales emergieron de nuestro análisis:
  - Algunos estudiantes (5 de los 18) valoraron explicaciones del razonamiento justificando algunas decisiones en la demostración, otros estudiantes (4 de los 18) no.
  - Algunos estudiantes (5 de los 18) valoraron los resúmenes en el Nivel 1 de las demostraciones estructuradas, otros (3 de los 18) tuvieron dificultad comprendiéndolos.
  - La mayoría de los estudiantes (14 de los 18) se quejaron diciendo que las demostraciones estructuradas son difíciles de leer ya que requieren "saltar de un lado a otro" en el texto.
  - Los estudiantes no llegaron a comprender lo que eran las demostraciones estructuradas, o cómo funcionaban.

Resultados - Demostraciones estructuradas

- Sin embargo:
  - Este estudio fue realizado con un número pequeño de estudiantes.
  - Es posible que los beneficios de este formato sean mayores que las desventajas identificadas en este primer estudio.
  - También es posible que las dificultades que tuvieron los estudiantes no sean desventajas del formato en cuanto a la comprensión de las demostraciones.

Métodos - Demostraciones estructuradas

- Las mismas dos demostraciones.
- 202 estudiantes de matemáticas participaron por internet.
- Cada participante fue aleatoriamente asignado a una de las siguientes condiciones:
  - Tradicional
  - Estructurada
  - Estructurada con instrucciones
- Prueba de comprensión de lectura con cuatro o cinco preguntas dependiendo de la demostración.
- A los participantes en la condición “estructurada” les preguntamos si les había gustado el formato y por qué.

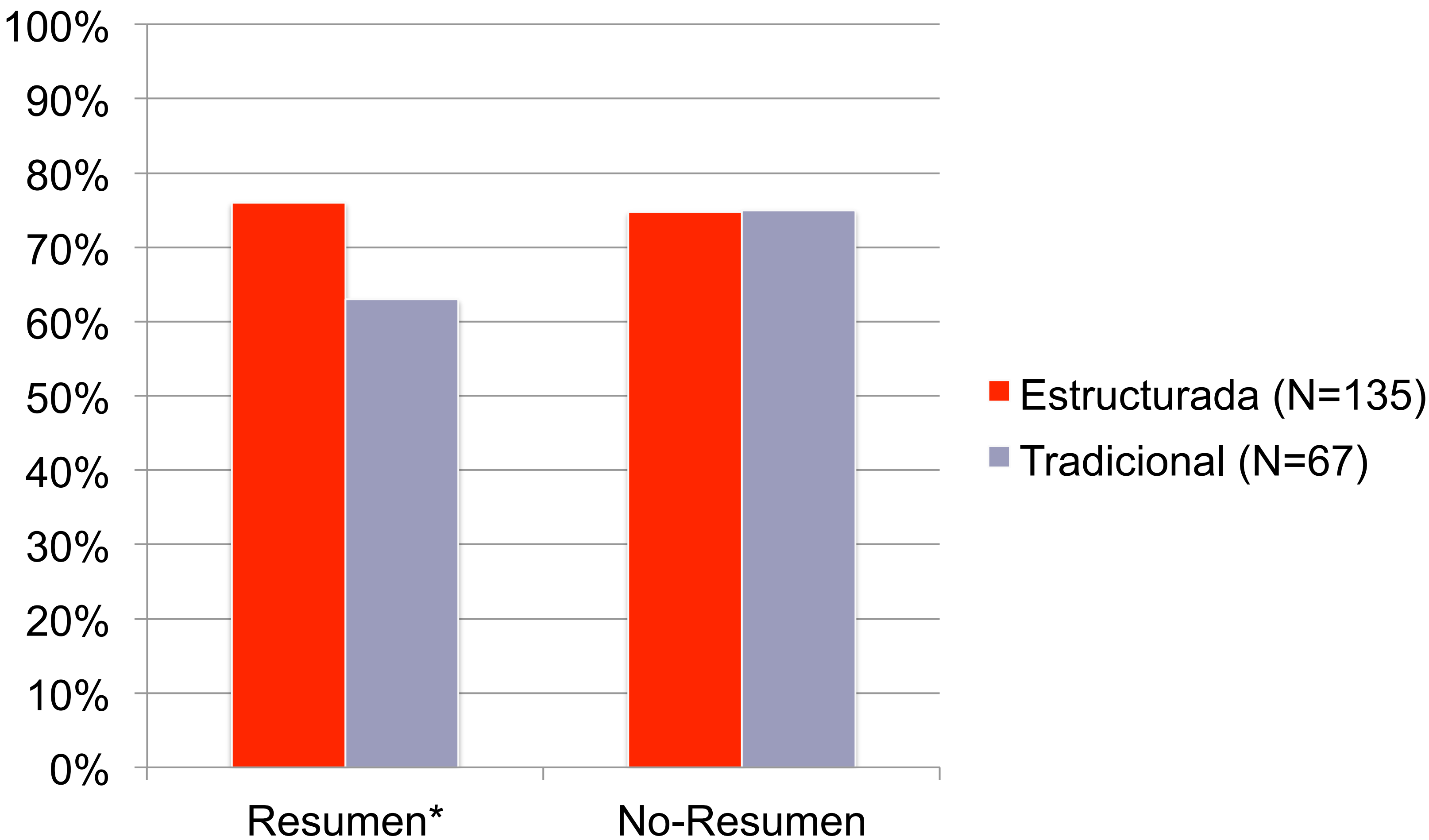
Resultados - Demostraciones estructuradas

Demostración 1

Pregunta	Estructurada (N=135)	Tradicional (N=67)
Resumen*	76%	63%
Justificación 1	88%	85%
Justificación 2	80%	85%
Transferencia	53%	61%
Diagrama	78%	69%

*$p<0.05$

Resultados - Demostraciones estructuradas



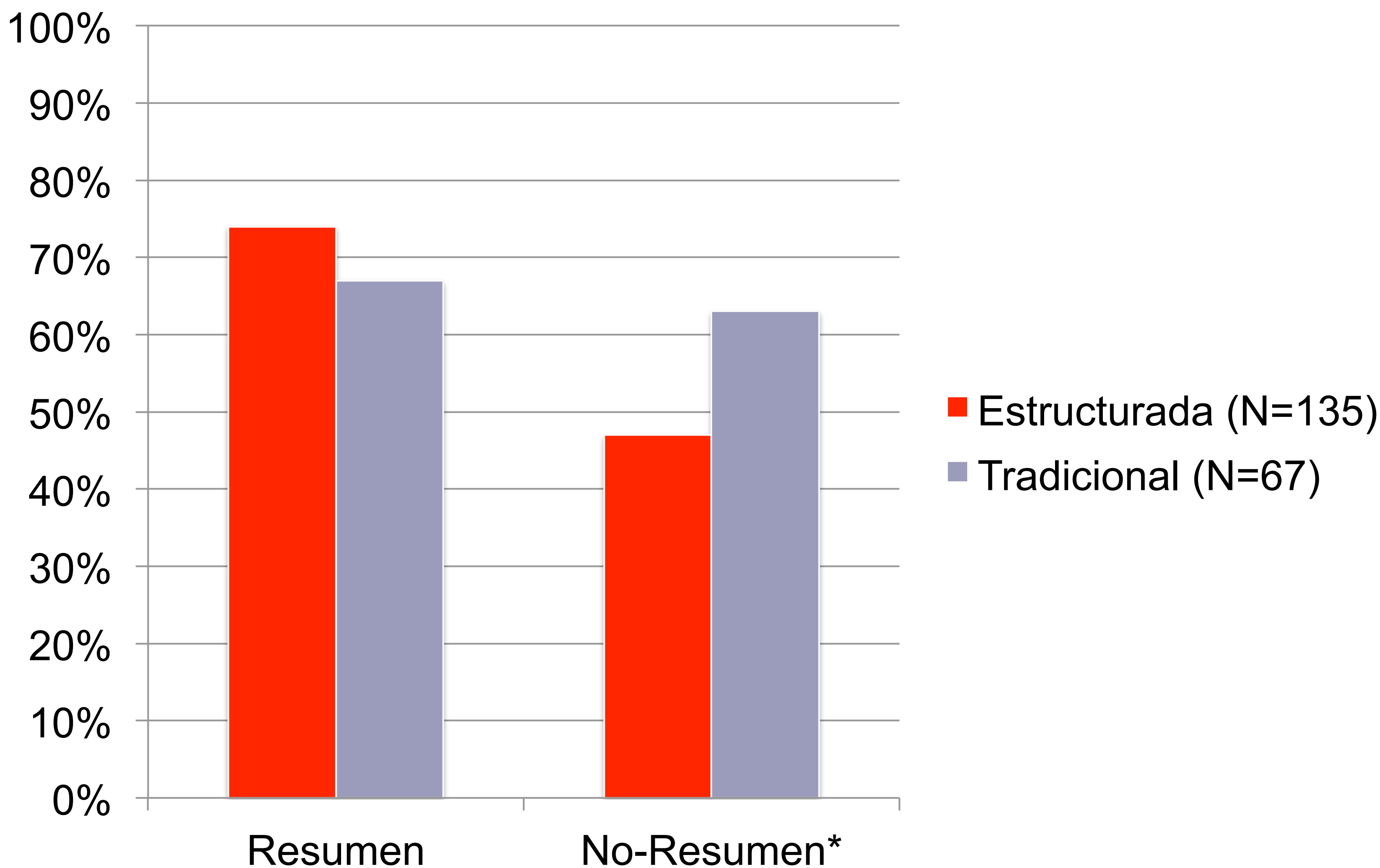
Resultados - Demostraciones estructuradas

Demostración 2

Pregunta	Estructurada (N=135)	Tradicional (N=67)
Resumen	74%	67%
Justificación	38%	45%
Transferencia	40%	54%
Ejemplo*	63%	91%

$^*p<0.05$

Resultados - Demostraciones estructuradas



Conclusiones - Demostraciones estructuradas

- Significa esto que las demostraciones estructuradas “no funcionan”?
- Claro que no, este es sólo un estudio que investiga una implementación bastante específica de este formato, y que utiliza un instrumento de medición bastante particular.
- Sin embargo, nuestros resultados sí sugieren que es poco probable que simplemente cambiando el formato de presentación de las demostraciones (de un formato tradicional a uno estructurado) vaya a mejorar sustancialmente la comprensión de las mismas por parte de nuestros estudiantes.

Conclusiones - Demostraciones estructuradas

- Estos resultados también sugieren que al realizar recomendaciones pedagógicas, debemos especificar no sólo sus posibles beneficios, sino también detalles de la implementación que nos dará esos beneficios y de cómo podemos medirlos.
- Finalmente, estos resultados nos hacen pensar que estos nuevos formatos de presentación pueden llegar a tener efectos positivos en sólo algunos aspectos de su comprensión, e incluso llegar a tener efectos negativos en la comprensión de otros aspectos.

Demostraciones genéricas

- Las demostraciones genéricas ejemplifican el razonamiento general de la demostración en términos de un objeto matemático particular sin hacer alusión a propiedades específicas de ese objeto.
  - "…a proof of a particular case which is small enough to serve as a concrete example, yet large enough to be considered a non-specific representative of the flow of arguments in the proof of the general case" (Malek & Movshovitz-Hadar, 2011).

Theorem. Let S_n be the set of ordered finite sequences of positive integers that sum to n. (For example, $(2,1,2), (1,2,2)$, and (5) are distinct elements of S_5). Then the number of elements in S_n is 2^{n-1}. In other words, there are 2^{n-1} ways to express n as an ordered sum of positive integers.

Proof: (By induction).
Base case. If $n = 1$, the only element in S_1 is (1). Hence there are $1 = 2^0 = 2^{1-1}$ elements of S_1.
Inductive case. Assume that the theorem is true for $n = k$; that is, S_k has 2^{k-1} elements. We show that each element of S_k generates two elements of S_{k+1}.

Let $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ be an element of S_k. By definition of S_k, we know that $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = k$.

We generate two elements of S_{k+1} as follows. The first one is generated by increasing the last term of the sequence by 1 to yield $(a_1, a_2, \ldots, a_m + 1)$. This is an element of S_{k+1} since

$$a_1 + a_2 + \cdots + (a_m + 1) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) + 1 = k + 1.$$

The other element is generated by appending a 1 at the end of the sequence to yield $(a_1, a_2, \ldots, a_m, 1)$. This is also an element of S_{k+1}.

Next, we show that each element of S_{k+1} was generated from one element of S_k. Let $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ be an element of S_{k+1}.

If $b_m = 1$, simply eliminate b_m from the sequence. In this case, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ was generated by $(b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}) \in S_k$.

Otherwise, if $b_m > 1$, decrease the last entry of the sequence by 1. In this case, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ was generated by $(b_1, b_2, \ldots, b_m - 1) \in S_k$ [note that $b_m - 1$ is a positive integer because $b_m > 1$].

Since every element of S_{k+1} is generated by exactly one element of S_k, this ensures that the process above yields S_{k+1} and does not double count.

Because every element of S_k generates two elements in S_{k+1}, S_{k+1} has twice as many elements as S_k. By the inductive hypothesis, there are 2^{k-1} elements in S_k. Thus, there are 2^k elements in S_{k+1}.

Theorem. Let S_n be the set of ordered finite sequences of positive integers that sum to n. (For example, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$, and (5) are distinct elements of S_5). Then the number of elements in S_n is 2^{n-1}. In other words, there are 2^{n-1} ways to express n as an ordered sum of positive integers.

Proof: (By induction).
Base case. If $n = 1$, the only element in S_1 is (1). Hence there are $1 = 2^0 = 2^{1-1}$ elements of S_1.
Inductive case. Assume that the theorem is true for $n = k$; that is, S_k has 2^{k-1} elements. We will illustrate how each element of S_k generates two new elements of S_{k+1} using the example $k = 3$.

> For each element of S_3, we generate an element of S_4 either by increasing the last entry in the sequence by 1 or by appending a 1 at the end of the sequence.
>
> To illustrate, $(2,1)$ is an element of S_3 and generates two elements of S_4. We add 1 to the last entry to get $(2,2)$ or we append a 1 at the end of the sequence to get $(2,1,1)$. Using this process,
>
> (3) generates (4) and $(3,1)$
> $(1,2)$ generates $(1,3)$ and $(1,2,1)$
> $(2,1)$ generates $(2,2)$ and $(2,1,1)$
> $(1,1,1)$ generates $(1,1,2)$ and $(1,1,1,1)$
> Each generated element is in S_4.
>
> Next, we show each element of S_4 was generated from one element of S_3. If the last entry of the sequence in S_4 is a 1, simply eliminate the 1 from the sequence. For instance, $(1,2,1)$ is in S_4 and was generated by $(1,2)$ in S_3.
>
> Otherwise, if the last entry of the sequence in S_4 is greater than 1, decrease the last entry of the sequence by 1. For instance, $(2,2)$ is in S_4 and was generated by $(2,1)$ in S_3.
>
> Since every element in S_3 generates two elements in S_4 and every element of S_4 is generated by exactly one element of S_3, there are twice as many elements in S_4 as there are in S_3.

The logic illustrated above can be applied to any S_k and S_{k+1}. Thus, S_{k+1} always has twice as many elements as S_k. By the inductive hypothesis, there are 2^{k-1} elements in S_k. Therefore, there are 2^k elements in S_{k+1}.

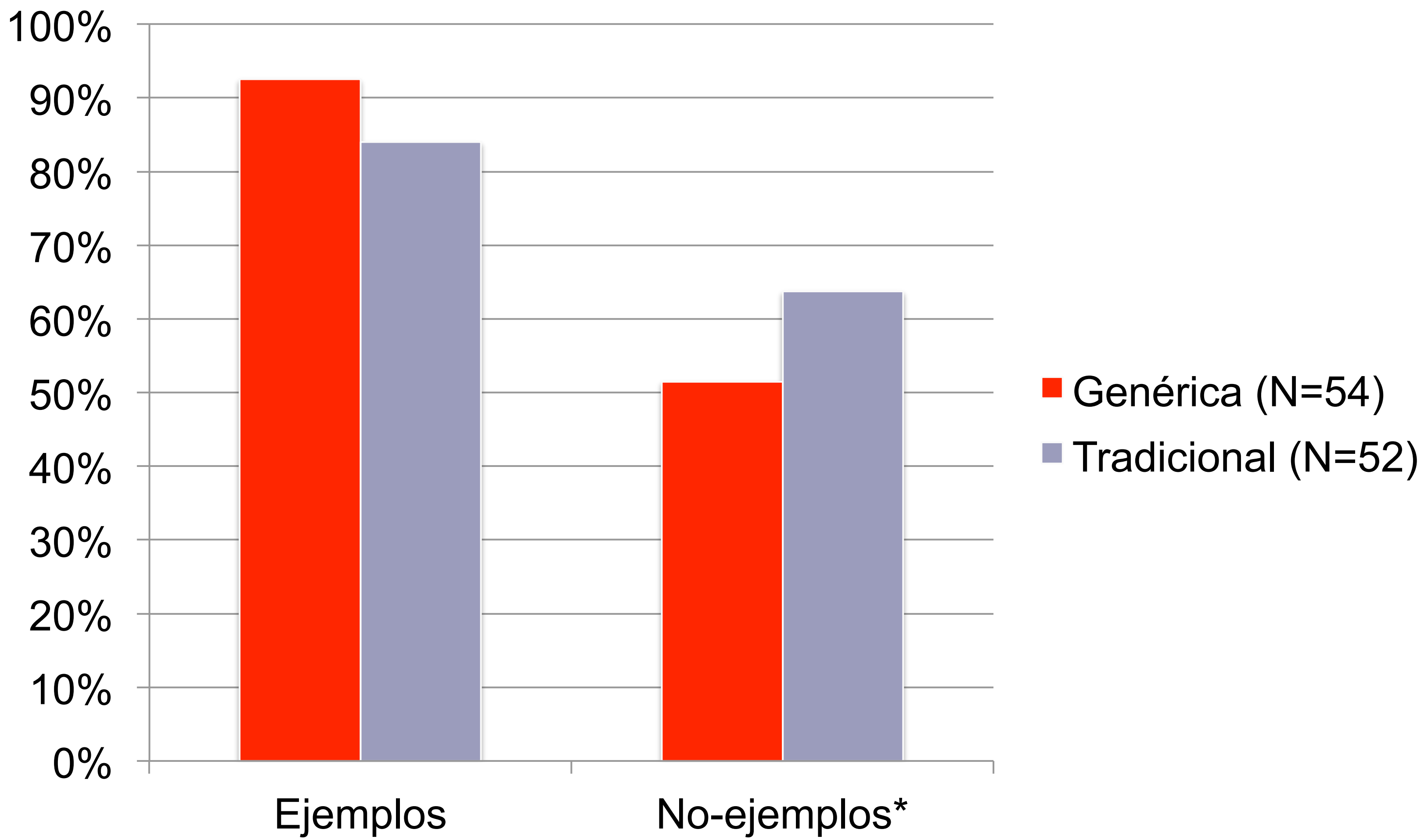
Métodos – Demostraciones genéricas

- 106 estudiantes participaron en un experimento en Internet.
- Una demostración.
- Cada participante fue aleatoriamente asignado a una de las siguientes condiciones:
  - Tradicional
  - Genérica
- Prueba de comprensión de lectura con seis preguntas (dos preguntas de ilustración con ejemplos, dos preguntas de justificación, una pregunta de resumen, y una pregunta de transferencia de método).
- A los participantes en la condición “genérica” les preguntamos si les había gustado el formato y por qué.

Resultados – Demostraciones genéricas

Question	Genérica (N=54)	Tradicional (N=52)
Ejemplo 1	91%	83%
Ejemplo 2	94%	85%
Justificación 1	37%	63%
Justificación 2	74%	87%
Resumen	65%	62%
Transferencia	30%	43%

Resultados – Demostraciones genéricas



Conclusiones

- De nuevo:
  - al realizar recomendaciones pedagógicas, debemos especificar no sólo sus posibles beneficios, sino también detalles de la implementación que nos dará esos beneficios y de cómo podemos medirlos.
  - estos nuevos formatos de presentación pueden llegar a tener efectos positivos en sólo algunos aspectos de su comprensión, e incluso llegar a tener efectos negativos en la comprensión de otros aspectos.

Gracias!

- Mi página web: http://www.math.rutgers.edu/~jpmejia/
- La página web de nuestro grupo de investigación (con más información sobre nuestros proyectos y copias de todos nuestros artículos): http://pcrg.gse.rutgers.edu

Referencias

- Alcock, L. (2009). e-Proofs: Students experience of online resources to aid understanding of mathematical proofs. In *Proceedings of the 12th Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education*. Available for download at: http://sigmaa.maa.org/rume/crume2009/proceedings.html.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.
- Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *American Mathematical Monthly, 105*, 497-507.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.
- Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *American Mathematical Monthly, 90*(3), 174-184.
- Malek, A. & Movshovitz-Hadar, N. (2011). The effect of using Transparent Pseudo-Proofs in linear algebra. *Research in Mathematics Education, 13*, 33-58.
- Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2002). Advanced mathematical thinking with a special reference to mathematical structure. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 165-196). Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, NJ.
- Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18.
- Melis, E. (1994). How mathematicians prove theorems. In *Proceedings of the 16th Annual Cognitive Science Conference*. Atlanta, GA.
- Porteous, K. (1986). Children's appreciation of the significance of proof. *Proceedings of the Tenth International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 392-397). London, England.
- Rowland, T. (2001). Generic proofs in number theory. In S. Campbell and R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction*. (pp. 157-184). Westport, CT: Ablex Publishing.
- Selden A. & Selden J. (2003) Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for research in mathematics education, 34*(1) 4-36.
- Selden, A. & Selden, J. (2008). Overcoming students' difficulties with learning to understand and construct proofs. In M. P. Carlson and C. Rasmussen (Eds.) *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education,* MAA Notes: Washington, D.C.Thurston, 1994
- Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics classrooms: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 115-133.
- Weber, K. (2010). Mathematicians' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 306-336.
- Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 59–76.