ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ALUMNOS DE PRIMARIA EN UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN BASADA EN UN EJEMPLO GENÉRICO

Strategies used by fifth grade students in a generalization task based on a generic example

Eduardo Merino, María C. Cañadas y Marta Molina

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo indagamos en la capacidad de generalización de estudiantes de quinto de educación primaria por medio del análisis de las estrategias que utilizan cuando abordan una tarea escrita de generalización, basada en un ejemplo genérico. Nos centramos aquí en las respuestas de estos alumnos a las cuestiones de dicha tarea relativas a relaciones funcionales inversas entre dos variables. Destacamos el uso de diferentes patrones como estrategia más frecuente y las evidencias obtenidas de la capacidad de generalización de los alumnos de quinto de educación primaria.

Palabras clave: *Educación primaria, ejemplo genérico, estrategia, generalización, patrón, relación funcional.*

Abstract

In this work we explore the generalization capacity of fifth grade students by analysing the strategies used in a generalization task based on a generic example. Here we focus on their answers to the questions of the task that refer to inverse functional relations between two variables. We highlight the use of different patterns as the most frequent strategy and the evidence obtained about the fifth grade students' generalization ability.

Keywords: *Functional relationship, generalization, generic example, pattern, primary education, strategy.*

INTRODUCCIÓN

Este estudio se enmarca en las investigaciones que vienen indagando en la propuesta *early algebra*. Esta propuesta consiste en la "algebrización del currículo" (Blanton y Kaput, 2005) y sugiere promover en las aulas el estudio de patrones, relaciones y propiedades matemáticas en un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos de edades tempranas exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan y argumenten (Molina, 2009). Nos centramos aquí en una de las aproximaciones al álgebra escolar recomendada para estos alumnos: la introducción de las relaciones funcionales (Drijvers, Dekker y Wijers, 2011). Dentro de esta, la generalización y las representaciones se consideran elementos fundamentales (Warren, Cooper y Lamb, 2006).

En esta línea de investigación, estudios previos realizados a nivel internacional (e.g., Mason, Stephens y Watson, 2009; Warren, 2005), ponen de manifiesto la capacidad de estudiantes de educación primaria para identificar propiedades generales a partir de situaciones particulares en las que existe una relación entre dos conjuntos de datos. Carraher, Martínez y Schliemann (2007) señalan cierta tendencia de los estudiantes de 8 años a pensar recursivamente sobre relaciones funcionales en tareas con figuras geométricas. Mediante un estudio longitudinal, Brizuela y Martínez (en prensa) confirman que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales son positivas a largo plazo. Las autoras concluyen que estos alumnos manejan un

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

lenguaje matemático caracterizado por el uso de letras, para representar con fluidez variables y cantidades generalizadas. En relación con el desarrollo de esta capacidad, estudios como los de Radford (2011) y Rivera (2010) llaman la atención sobre la importancia de conectar estructuras espaciales y numéricas, y sobre el papel de los gestos, el discurso, la percepción, y la imaginación en el desarrollo de dicha conexión, en particular, y del desarrollo conceptual del niño, en general.

Con este documento pretendemos contribuir a la investigación sobre la capacidad de generalización de estudiantes de educación primaria, centrándonos en el análisis de las estrategias que ponen de manifiesto alumnos de 5º de educación primaria españoles al abordar una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. Con este estudio, damos continuidad a trabajos que se han realizado en nuestro grupo de investigación sobre patrones y generalización (e.g., Cañadas, Castro y Castro, 2008; Castro, 1995; Castro, Cañadas y Molina, 2010), y contribuimos a la línea de trabajos que se viene desarrollando en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM (Barrera, 2004; García y Martinón, 1999; Ortiz, 1997). A diferencia de la mayoría de los trabajos realizados hasta el momento en España, nuestro interés se centra en la educación primaria. Otro elemento que lo diferencia de la mayoría de los trabajos aquí citados es el tipo de tarea de generalización considerada, que incorpora un ejemplo genérico, en vez de una secuencia de casos particulares.

MARCO CONCEPTUAL

Centramos el marco conceptual de este trabajo en las nociones de generalización y patrones. La idea de patrón surge de la repetición de una situación con regularidad (Castro, 1995). Pólya (1966) señala que el reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar ya que, a partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos. La generalización se considera clave para la generación de conocimiento (Lakatos, 1978) y, en particular, del conocimiento matemático (Hermite, véase Pólya, 1962-65). Stacey (1989) distingue entre generalización cercana, que implica encontrar un patrón para elementos próximos o elementos que pueden ser hallados por conteo, dibujando o haciendo una tabla; y generalización lejana, en la que encontrar un patrón requiere identificar la regla general.

Desde la Educación Matemática, autores como Neubert y Binko (1992) o McGarvey (2012) destacan la necesidad de introducir más tareas que permitan a los alumnos iniciarse en la identificación de patrones y el reconocimiento de la generalización de las que habitualmente se proponen. Las tareas de generalización radican en obtener, a partir de casos particulares conocidos, nuevos casos particulares o el término general. Por tanto, requieren de la identificación de una pauta o patrón de comportamiento de los casos particulares. Las tareas de ejemplo genérico son un tipo de tarea de generalización que parten de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase (Balacheff, 2000). En ese ejemplo se puede observar una regularidad que permite extraer conclusiones sobre el resto de casos particulares de su misma clase, no siendo necesario disponer de más casos particulares. Dicho ejemplo es el único caso particular conocido en la tarea y, a partir de él, se trata de llegar a la generalización.

La identificación y el uso de patrones es una de las estrategias para resolver una tarea de generalización, entendiendo la noción de estrategia como un "procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual" (Rico, 1997, p. 31).

Desde la perspectiva del contenido matemático, nos centramos en las funciones lineales con dos variables, cuyos conjuntos dominio e imagen son los números naturales. En este contexto, contemplamos dos tipos de relaciones entre las variables. La relación directa hace referencia a situaciones en las que se conoce el valor de la variable independiente y se desconoce la variable dependiente. La relación inversa se da cuando la variable desconocida es la variable independiente.

OBJETIVO

Nuestro objetivo de investigación en este trabajo es identificar y describir las estrategias utilizadas por alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico.

MÉTODO

La investigación es de carácter exploratorio y descriptivo. Recogimos datos en el curso 2011-2012, con una muestra intencional de 20 alumnos de 5º curso de educación primaria (10-11 años), de un colegio privado de Málaga (España). La maestra de dicho grupo de alumnos informó que no habían trabajado tareas de generalización en ese curso académico ni anteriormente.

Instrumento de recogida de información y aplicación

Diseñamos unan prueba individual escrita como instrumento de recogida de información. Los alumnos la resolvieron en la hora y lugar habituales de clase de matemáticas. El primer autor de este trabajo presentó la tarea y resolvió las dudas a los alumnos, insistiendo en la importancia de justificar las respuestas.

La tarea contiene 10 cuestiones[4] que involucran relaciones de dependencia entre dos variables en una función lineal, que se introducen con la información presentada en la figura 1.

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

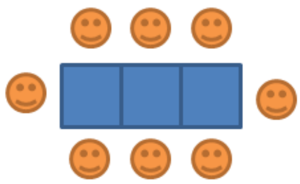


Figura 1. Texto e imagen presentados en la tarea

Las relaciones directa o inversa para esta tarea quedaron definidas del siguiente modo:

- Relación directa: se conoce el número de mesas y se desconoce el número de niños.
- Relación inversa: se conoce el número de niños y se desconoce el número de mesas.

En este trabajo nos centramos en las producciones de los alumnos a las tres cuestiones que se refieren a la relación inversa entre las variables[5], las cuales presentamos a continuación.

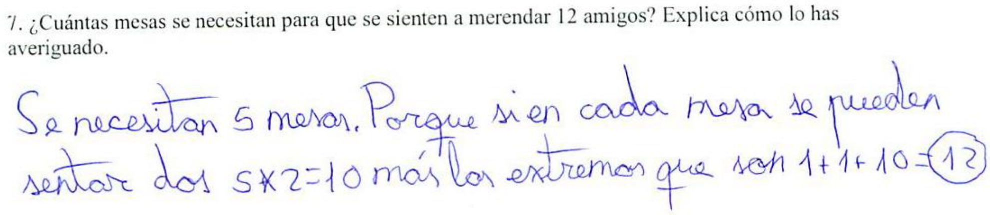
[4] Las 10 cuestiones pueden consultarse en el trabajo completo de Merino (2012)

- Cuestión 7[6]. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.
- Cuestión 8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.
- Cuestión 9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Categorías de análisis y proceso de codificación

Definimos las categorías de análisis con base en el marco conceptual, los antecedentes y un análisis preliminar de las respuestas de los alumnos, siguiendo la teoría fundamentada (*grounded theory*) de Corbin y Strauss (1990). Las categorías utilizadas para distinguir los tipos de estrategias identificados son las siguientes: (a) conteo (sobre los casos particulares), (b) uso de patrón (completo/incompleto y apropiado/inapropiado), (c) operación sin uso de patrón (utiliza operaciones que no podemos relacionar con un patrón), (d) estrategia previa (hace referencia a la estrategia utilizada en al menos una cuestión anterior), (e) casos particulares anteriores (hace referencia a los valores de las variables correspondientes a casos particulares conocidos), y (f) repetición de enunciado.

Por ejemplo, en la respuesta a la Cuestión 7 que se muestra en la figura 2, identificamos el uso del patrón, en este caso, el que responde a M×2+1+1 (siendo M un número concreto).


7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Se necesitan 5 mesas. Porque si en cada mesa se pueden sentar dos 5×2=10 más los extremos que son 1+1+10=12

Figura 2. Respuesta de A10 a la Cuestión 7

DATOS Y RESULTADOS

Resumimos las estrategias utilizadas por cada alumno en cada una de las cuestiones en la tabla 1. Distribuimos los alumnos por filas y las cuestiones por columnas (ver Tabla 1). Para referirnos a los alumnos, utilizamos la letra A junto con el número que asignamos aleatoriamente a cada uno. En el caso de la estrategia uso de patrones, explicitamos la estructura de cada patrón usando las letras M y N para denotar a un número concreto relativo al número de mesas y/o niños, respectivamente.

Tabla 1. Resumen de resultados

	Estrategias		
Alumnos	Cuestión 7	Cuestión 8	Cuestión 9[7]
A1	Conteo	M:3*	Repite enunciado
A2	Conteo*	-	Estrategia previa
A3	M×2+2	N:2-1	2:M

[5] El estudio de las cuestiones que involucran la relación directa entre variables se presenta en Merino, Cañadas y Molina (2013).

[6] Mantenemos la numeración original de las cuestiones en la tarea.

[7] No se analiza la corrección o incorrección en la Cuestión 9, debido a que la mayoría de las respuestas no pueden considerarse como correctas ni incorrectas.

	Estrategias		
Alumnos	Cuestión 7	Cuestión 8	Cuestión 9[7]
A4	N:3*	N:3 / N:8*	Opera “sumando”
A5	M×2+2/Caso anterior	(N:2)×2×2*	M×2+2
A6	2+2+2+2+2+2	N:2*	N:M
A7	Estrategia previa	N:8*	Estrategia previa
A8	M+M+2	N:2*	M×2+2
A9	Opera “dividiendo”	-	M×2+2
A10	M×2+1+1	Estrategia previa	N:2+2
A11	Respuesta directa*	Nx3*	Opera 58×3
A12	Estrategia previa / Caso anterior	N:2-2*	(N-2):2
A13	N:2-2*	N:2-2*	N:2-1
A14	Respuesta directa*	-	Conteo
A15	Conteo	N:2*	-
A16	Opera 10+2	N:2+2	N:2+2
A17	M+M+2	N-2*	N-2
A18	(N-2):2	-	Conteo
A19	Respuesta directa	Conteo	-
A20	M×2+2	(N-2):2	(N-2):2

Nota. Repite enunciado = repetición de instrucciones ofrecidas en el enunciado. Estrategia previa = alusión a la estrategia usada en, al menos, una cuestión anterior. Caso anterior = referencia a casos particulares hallados en cuestiones anteriores. Opera = operación sin uso de patrón, en la que los alumnos ofrecen cálculos concretos, o solo aluden verbalmente al tipo de operación usada “dividiendo” o “sumando”. * = Respuesta incorrecta

Destacamos algunos resultados atendiendo, en primer lugar, de forma global, a cada una de las cuestiones; y, en segundo lugar, a la actuación de cada alumno en el conjunto de las cuestiones objeto de análisis.

Los alumnos respondieron mediante estrategias variadas a la Cuestión 7. Las estrategias más usadas fueron el conteo y el uso del patrón M×2+2. Se dieron otros patrones apropiados (es decir, patrones que conducen a una respuesta correcta) como M×2+1+1 (ver figura 2), M+M+2, y (N-2):2 (ver figura 3). También encontramos un patrón incompleto, N-2, así como patrones inapropiados (conducen a una respuesta incorrecta): N:3 y N:2-2 (ver figura 4).

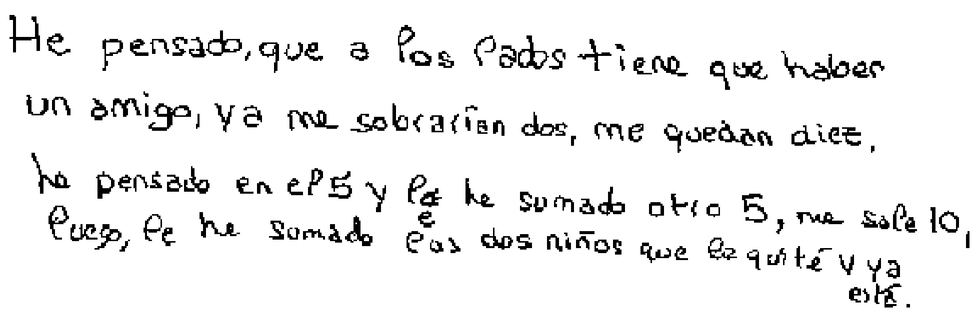


Figura 3. Respuesta de A18 a la Cuestión 7

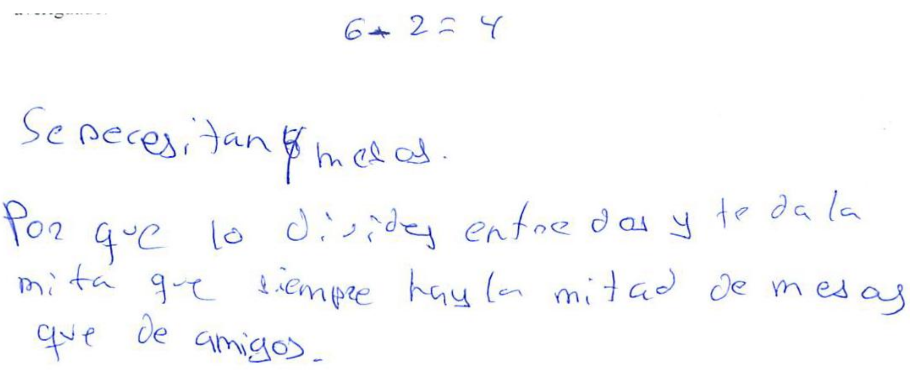


Figura 4. Respuesta de A13 a la Cuestión 7

En general, las respuestas erróneas a esta cuestión fueron asociadas al uso de patrones inapropiados y a respuestas directas que no nos permiten tener evidencia de la estrategia empleada.

Entre los 16 alumnos que respondieron a la Cuestión 8, la estrategia más utilizada fue el uso de algún patrón. Utilizaron patrones apropiados como Mx2+2, N:2-1 y (N-2):2; patrones incompletos como N-2 y N:2; y cinco patrones inapropiados (7 alumnos). Solo un alumno utilizó el conteo como estrategia (ver figura 5).

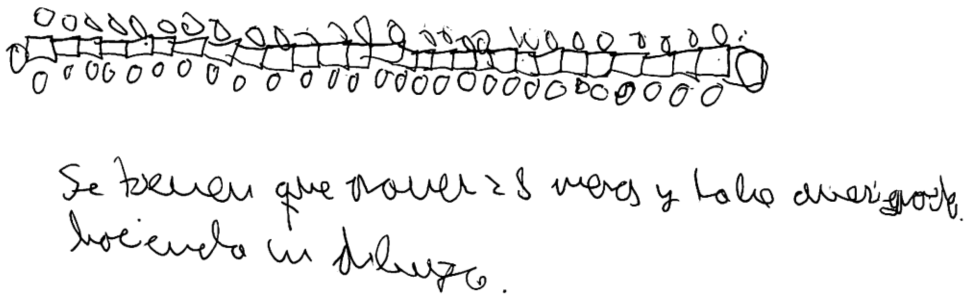


Figura 5. Respuesta de A19 a la Cuestión 8

En la Cuestión 8, la mayoría de los alumnos que dieron respuestas erróneas, utilizaron operaciones que no incluyeron el uso de ningún patrón.

A la Cuestión 9 respondieron 18 alumnos, pudiéndose identificar patrones apropiados (Mx2+2, (N-2):2 y N:2-1), un patrón incompleto (N-2) (ver figura 6), y patrones inapropiados (N:M, N:2+2 y 2:M). Dos alumnos utilizaron operaciones que no implicaron el uso de patrones. Un alumno repitió las instrucciones dadas en el enunciado y otros dos hicieron alusión a la estrategia usada en una cuestión anterior (ver figura 7).

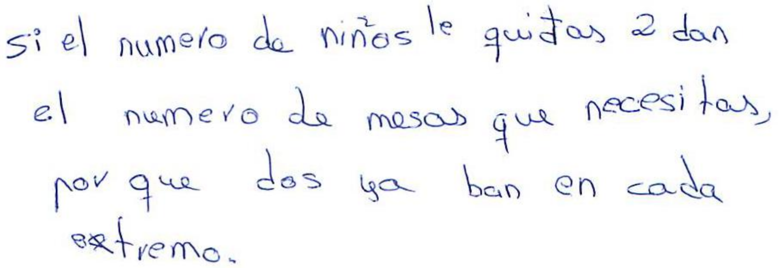


Figura 6. Respuesta de A17 a la Cuestión 9

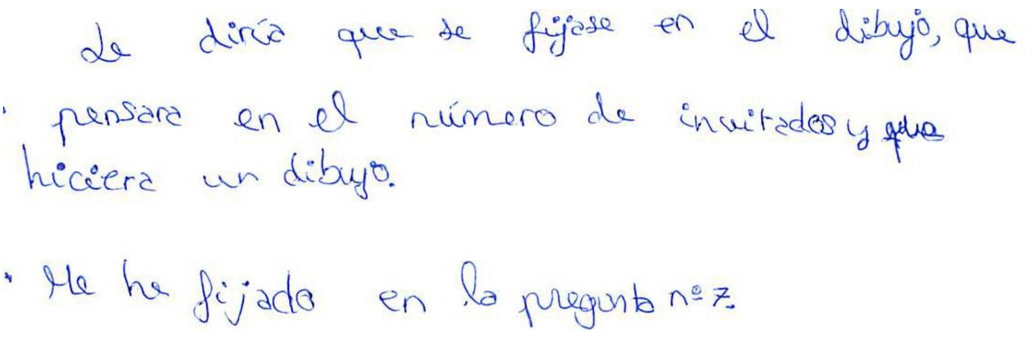

Le diría que se fijase en el dibujo, que
· pensara en el número de invitados y que hiciera un dibujo.
· Me he fijado en la pregunta nº 7.

Figura 7. Respuesta de A2 a la Cuestión 9

El análisis global de las respuestas de los estudiantes a estas tres cuestiones muestra el uso de una amplia variedad de patrones, llegándose a registrar hasta 18 patrones distintos, aunque la mayoría conducen a una respuesta errónea. Los alumnos que utilizaron patrones en su respuesta, generalmente lo hicieron a lo largo de las 3 cuestiones, siendo el más utilizado M×2+2. Otros patrones apropiados utilizados fueron M×2+1+1, o M+M+2. Estos tres patrones parten del número de mesas para averiguar el número de niños, es decir, son propios de la relación directa. Junto a M×2+2, el patrón apropiado más usado a lo largo de las cuestiones fue (N-2):2, que junto a N:2-1 o N:2+2 forma el grupo de patrones apropiados que parten del número de niños para averiguar el número de mesas, siendo un patrón propio de la relación inversa entre variables. Entre los patrones erróneos utilizados, destacan los que usaron los alumnos que dividieron el número de niños entre otra cifra (2, 3 u 8), o el patrón N-2, utilizados con más frecuencia que el resto.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En la Cuestión 7, los tipos de respuesta más frecuentes fueron las que se basan en el conteo o las respuestas directas, probablemente debido a la posibilidad de resolverla con cálculo mental por involucrar números pequeños. Sin embargo, en las cuestiones 8 y 9 se dio un mayor uso de patrones y de operaciones, lo que pudo deberse a un aumento de la complejidad de la cuestión (cifras mayores y pregunta por un caso general) que hizo que los alumnos no pudieran acudir al cálculo mental.

Resulta llamativo que el patrón apropiado más usado sea propio de la relación directa (Mx2+2). Esto puede deberse a que esta era la relación con la que habían trabajado en las cuestiones previas. Observamos cómo, a medida que fueron avanzando las cuestiones, los alumnos tomaron como referencia el número de niños (N) para proponer patrones. Entre los patrones que llevaron a una respuesta correcta distinguimos: M+M+2, M×2+2, N:2-1, N:2+2 y (N-2):2.

Por otra parte, es reseñable que la mayoría de los alumnos que utilizó algún patrón apropiado en su respuesta, no mantuvo el uso de un patrón propio de un tipo de relación durante las tres cuestiones. Este cambio de estrategia pudo deberse a la dificultad creciente en los enunciados que hizo que el alumno debiera investigar nuevas vías para ofrecer su respuesta.

El uso de estrategias estuvo, en cierto modo, condicionado por las cantidades de niños o mesas propuestas en los enunciados a las cuestiones. Las estrategias de conteo y las respuestas directas fueron más utilizadas cuando en cuestiones de generalización cercana (Cuestión 7); mientras que en las cuestiones de generalización lejana (Cuestión 8, con 58 alumnos y 28 mesas), la tendencia generalizada fue utilizar el cálculo y recurrir al uso de diferentes patrones. Así mismo, observamos que el uso de patrones al abordar la cuestión relativa a valores pequeños de la variable mesas condujo a un mayor éxito al abordar la cuestión relativa a números más grandes o la cuestión sobre la expresión general de la relación entre las variables. También es reseñable que en la Cuestión 9 se dé un incremento del número de respuestas que aluden a estrategias usadas en cuestiones anteriores, lo que sugiere dificultades para expresar verbal o simbólicamente las relaciones apreciadas.

Entre las estrategias que condujeron a respuestas erróneas destacan la multiplicación y la división. Esto puede deberse a una incorrecta comprensión del enunciado o a la utilización, por parte de los alumnos, de una operación multiplicativa al reconocer cierta reiteración de una cantidad en el contexto presentado.

Destacamos algunos alumnos, como A13, quien usó el patrón inapropiado N:2-2 para las cuestiones 7 y 8, y cambia a N:2-1(apropiado) en la Cuestión 9. Su error en las primeras cuestiones se pudo deber a que identificó la cantidad que debía restar con el número de niños. También destacamos a A16, que utilizó el patrón apropiado N:2-1 pero, sin embargo, explicó que lo que había hecho era dividir el número de niños por dos para obtener el número de mesas, y sumar 2 a ese número. Este alumno intercambió de manera eficaz el papel de las variables, ya que su respuesta finalmente fue correcta.

En cuanto a la relación entre estrategia usada y corrección de las respuestas, la gran mayoría de respuestas incorrectas (14 de 18) fueron precedidas del uso de un patrón inapropiado. Solo en 4 ocasiones, los alumnos usaron una estrategia distinta y su respuesta fue errónea: respuesta directa (2 veces), conteo y operación (suma). Además, una vez se hubo incurrido en un error los alumnos no volvieron a dar una respuesta correcta. Los 7 alumnos que fallaron en la Cuestión 7 también lo hicieron en la Cuestión 8 o no respondieron a ella.

CONCLUSIONES

En este trabajo atendemos a las estrategias empleadas en cuestiones relativas a la relación inversa entre variables en una tarea de generalización a partir de un ejemplo genérico. Hemos identificado una gran variedad de estrategias utilizadas por los alumnos, siendo la más frecuente el uso de patrones. La variedad de patrones que son capaces de identificar los alumnos de quinto de educación primaria destaca por su numerosidad, a pesar de no estar acostumbrados a este tipo de tareas, según la información aportada por la maestra. Esta riqueza está, al menos en parte, justificada por la tendencia de los alumnos a buscar nuevas estrategias en diferentes cuestiones aunque se refieren a la misma relación entre las variables. Destacamos este hecho para abordarlo en estudios posteriores. Este estudio coincide con otros realizados a nivel internacional al dar evidencias de la capacidad de generalización de algunos alumnos españoles de estas edades, en este caso a partir de la identificación de regularidades en un ejemplo genérico. No obstante se evidencia la necesidad de abordar este tipo de tareas en la enseñanza de forma explícita, dada la alta presencia de patrones inapropiados en las estrategias de los alumnos.

Observamos que aquellos estudiantes que utilizan patrones en las cuestiones relativas a números pequeños, son más exitosos en el resto de cuestiones. Estos resultados, junto con una tendencia similar observada en las respuestas de los alumnos a las cuestiones en las que se da una relación directa, nos conduce a proponer a los docentes que promuevan el uso de este tipo de estrategias cuando aborden cuestiones relativas a relaciones entre variables, en detrimento de estrategias de conteo.

Los resultados presentados contribuyen a la investigación sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en el marco de la propuesta *early algebra*, centrándonos en el uso de patrones y la generalización en educación primaria. La incorporación del ejemplo genérico destaca como elemento novedoso en esta investigación aportando resultados complementarios a los de estudios previos.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: una Empresa Docente.

Barrera, V. J. (2004). *Trabajo con razonamiento inductivo por profesores de educación primaria en formación*. Trabajo de Investigación Tutelada. Granada: Universidad de Granada.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Brizuela, B. M., y Martinez, M. V. (en prensa). Aprendiendo acerca de la comparación de funciones lineales. En J. A. Castorina, M. Carretero y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Castro, E, Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Corbin, J. y Strauss, S. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology, 13*(1), 3-21.

Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011). Algebraic education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

García, J. A. y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(1), 31-43

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology*. *Philosophical Papers*. vol. 2. Cambridge: University Press. (Traducción al castellano: D. Ribes, 1981, Matemáticas, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza.)

Mason, J., Stephens, M y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de primaria en una tarea de generalización. Trabajo fin de máster. Universidad de Granada: Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1926/

Merino, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

McGarvey L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(4), 310-337.

Neubert, G. A. y Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington, D. C.: National Education Association.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico*. *Un estudio en Educación Primaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Pólya, G. (1962-1965). *Mathematical discovery*. 2 vols. New York: John Wiley and Sons.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turkey: PME.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.

Rivera, F. D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En Pinto, M.F. y Kawasaki, T.F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Belo Horizonte, Brazil: PME

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En Chick, H.L., y Vincent, J.L. (Eds.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: PME.

Warren E. A., Cooper T. J. y Lamb J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 208-223.