



## SEPARADOR 3

### PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS



Ramón Emilio Sepúlveda Quiroz  
I. E. Asia Ignaciana. Medellín

Carlos Humberto Ospina Noreña  
I. E. Inem José Felix de Bedout. Medellín

José Manuel González  
I. E. Lola González. Medellín



## PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

---

### INTRODUCCIÓN

Desde la perspectiva psicogenética, y en una síntesis muy apretada, se puede plantear, siguiendo a Piaget, que el niño en el proceso de construcción de las nociones geométricas primero procede desde el espacio que está a su alcance, esto es, el entorno inmediato que lo rodea (espacio próximo); luego puede seguir un objeto, prever su trayectoria, buscarlo cuando se pone fuera de su campo visual, etc; pero ésta construcción comporta un posicionamiento del sujeto con respecto al espacio que lo rodea, esto es, debe situarse como un objeto más dentro de su entorno. De esta manera se estructura el “espacio lejano”, en el cual, el individuo debe posicionarse como integrante del mismo, pero a la vez, como interactuante con él.

*La tesis fundamental de Piaget en “La representación del Espacio en el Niño” es que en el dominio de la geometría, el orden genético de la adquisición de las nociones espaciales es inverso al orden histórico del progreso de la ciencia. El niño considera primero las relaciones topológicas de una figura y solo posteriormente las proyectivas y euclidianas, las que son construidas casi simultáneamente. En efecto, las primeras relaciones que el niño puede reconocer y representar gráficamente son las de vecindad, separación, orden, entorno, y continuidad....*

*El dominio de las relaciones proyectivas permite la construcción de una geometría del espacio exterior al sujeto, quien lo contempla desde cierta distancia. La descentración del sujeto respecto a su perspectiva actual le permite coordinar distintos puntos de vista posibles y construir una representación del espacio con el que está interactuando en la que los ejes adelante - atrás y derecha -izquierda dejan de ser absolutos.*

*Galves, 1988, p. 280.*

Por su parte la construcción del espacio Euclidiano, en el que están involucrados tanto el sujeto como los objetos que se mueven, necesita de elaboraciones mentales superiores, ya que en este espacio una característica fundamental es la métrica, a través de la cual se estructura un espacio de coordenadas tridimensionales, en el cual, la construcción de una unidad de medida y de la noción de medición se constituyen en elementos fundamentales.

Así pues, la geometría se constituye como una disciplina resultado de la necesidad del hombre de relacionarse con el mundo que lo rodea y de metrizarlo. Desde esta perspectiva, tanto en los Lineamientos Curriculares, como en los Estándares Básicos de Matemáticas, desde los grados iniciales se rescatan, de un lado, las relaciones topológicas, en tanto reflexión sistemática de las propie-



dades de los cuerpos en virtud de su posición y su relación con los demás. Pero de otro, el reconocimiento y ubicación del niño en el espacio que lo rodea, en lo que Grecia Galves ha llamado el meso-espacio y el macro-espacio refiriéndose no solo al tamaño de los espacios en los que se desarrolla la vida del individuo, sino también a su relación de éste con dicho espacio. Nótese como en este punto del trabajo no es importante la métrica, es decir la medición, sino que lo que importa son las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con estos objetos y este espacio.

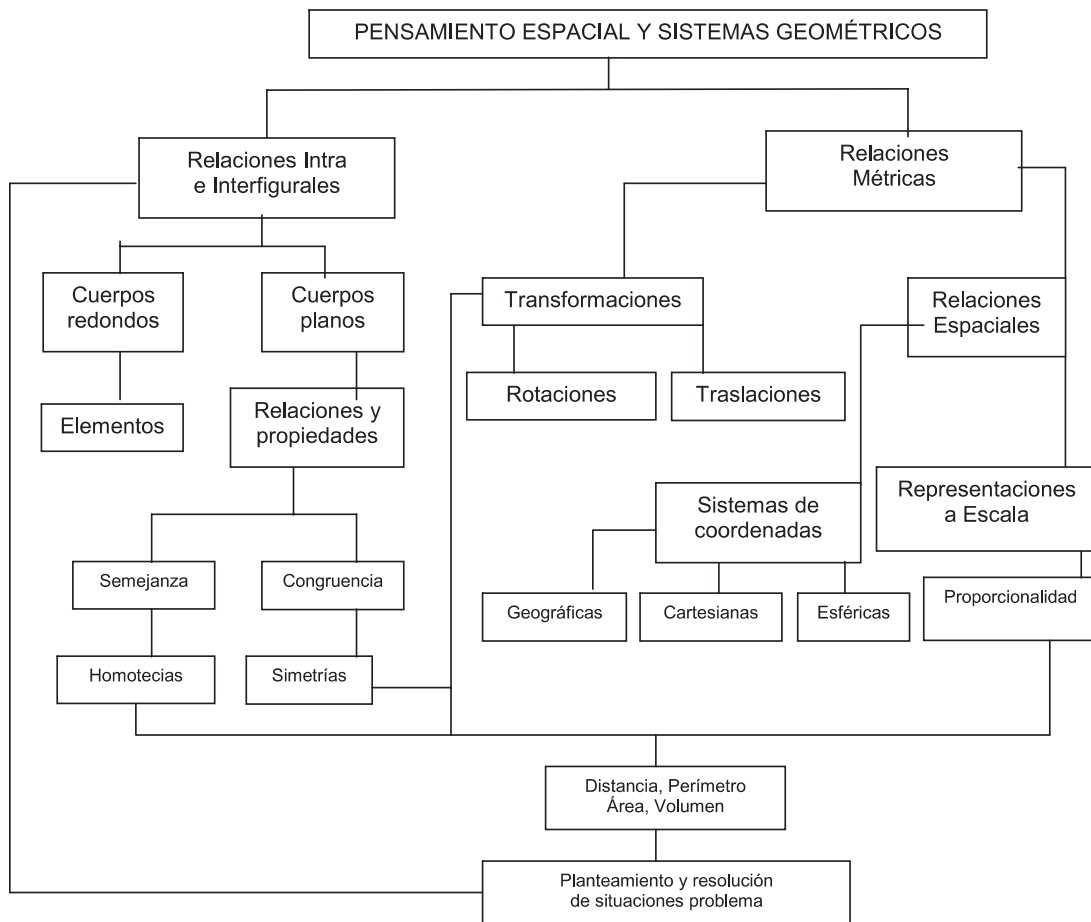
Posteriormente y a medida que se complejizan los sistemas de representación del espacio, se hace necesario la metrización, pues ya no es suficiente con el está cerca o lejos, sino que es necesario determinar que tan cerca o que tan lejos. Esto significa un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual hace aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos. De esta manera la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a su relación con los demás (relaciones interfigurales), sino también entre ellos mismos (relaciones intrafigurales) y a través de sus medidas (Relaciones métricas). El estudio de estas propiedades son las que deberán, convertirse en los conocimientos formales de la geometría, esto es, los teoremas de la geometría Euclidiana.

El trabajo realizado de esta manera permite la realización de proyectos integrados con otras áreas como por ejemplo el área de sociales, o el área de ciencias. Entre otros se pueden mencionar: Elaboración de mapas y maquetas, estudio de las formas en la naturaleza, estudio de las simetrías en la naturaleza.

Se presenta a continuación una serie de planteamientos sobre los estándares básicos de matemáticas en lo relativo al pensamiento espacial y sistemas geométricos. Se trata de un esfuerzo de sistematizar una serie de ideas que muestran una alternativa de organización curricular de los mismos.



## EJES TEMÁTICOS



En los Lineamientos curriculares se plantea una **geometría activa**, a través de la cual se evidencia la diferencia entre mostrar y hacer, observar y actuar, simbolizar y conceptualizar; por lo tanto se da prioridad al cuerpo o sólido sobre la superficie, de ésta sobre la línea y de ésta sobre el punto. Asumimos además, en el presente trabajo, la solución de problemas como un eje transversal en el desarrollo de los diferentes contenidos tal como se observa posteriormente a partir de las situaciones problemáticas.

Los estándares curriculares establecidos por el M. E. N para la enseñanza de la geometría en la Educación Básica y Media, se pueden agrupar en dos grandes ejes temáticos:

I. RELACIONES INTER E INTRA FIGURALES.

II. TRANSFORMACIONES Y RELACIONES ESPACIALES.

Estos dos ejes están en estrecha relación con lo que Piaget denominó las operaciones lógicas e infralógicas. Castorina y Palau en la “ **Introducción a la lógica operatoria de piaget**”, plantean las operaciones lógicas y las operaciones infralógicas en los siguientes términos.



“Las operaciones lógicas son aquellas que se realizan sobre objetos individuales y se limita a reunirlos independientemente de sus vecindades y las distancias espacio temporales que las separan”. Las operaciones infralógicas “consisten en engendrar el objeto por medio de sus propios elementos, logrando así, no clases o relaciones independientes del espacio, sino objetos totales de distintos tipos”. En otras palabras, en una operación infralógica, se trata de componer o descomponer las partes de un objeto o de colocarlas en un orden de sucesión determinado. De otro lado, las operaciones lógicas son las que agrupan los objetos en clases según propiedades comunes invariantes, y por lo tanto se forman clases que se ordenan, se comparan, se igualan, etc.

En las operaciones lógicas *se separan o agrupan los cuerpos* por sus diferencias o semejanzas, en tanto en las operaciones infralógicas *se separan o agrupan las partes de un objeto* por la relación espacial que ocupan entre sí con respecto al todo. En síntesis, clasificar objetos por su forma y color, por ejemplo, es realizar una operación lógica, mientras que armar un rompecabezas es realizar una operación infralógica.

En el campo de la geometría, a las operaciones lógicas se les llama operaciones interfigurales, y a las operaciones infralógicas se les llama operaciones intrafigurales.

El eje temático I comprende el estudio de las diferentes figuras y cuerpos geométricos, identificando sus elementos, propiedades y relaciones al interior de cada figura y entre diferentes figuras. Las relaciones y operaciones interfigurales nos permiten clasificar un conjunto de objetos en cuerpos redondos (sólidos tridimensionales) – que tienen por lo menos uno de sus lados no plano – y cuerpos planos -cuyos lados son caras -. En los cuerpos redondos se identificarán sus elementos, y en los cuerpos planos además de lo anterior se estudiarán sus relaciones y propiedades incluyendo el estudio de semejanzas y congruencias.

El eje temático II pretende devolver la ***dinámica*** a los sistemas geométricos a través de las ***transformaciones en el plano y las relaciones y operaciones espaciales***.

La aplicación de las transformaciones (rotaciones, traslaciones, simetrías, homotecias) por su parte, permite establecer relaciones de semejanza y congruencia entre objetos geométricos. La semejanza por su lado, apoyada en el concepto de proporcionalidad permite efectuar cálculos de: perímetros, áreas y volúmenes.

Esta visión exige que se creen situaciones problemáticas en las que los estudiantes puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos, haciendo énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y retomando los contenidos geométricos. Considerando fundamentalmente:

- Que el estudiante manipule los cuerpos geométricos
- Que active su capacidad mental
- Que en la construcción establezca relaciones
- Que adquiera confianza en si mismo
- Que se prepare para los nuevos retos de la ciencia y la tecnología



Ambos tópicos, las transformaciones y semejanzas de la geometría resultan de internalizar en forma de esquemas activos en la imaginación, las acciones y transformaciones que se efectúan físicamente. (Lineamientos curriculares Pág 61).

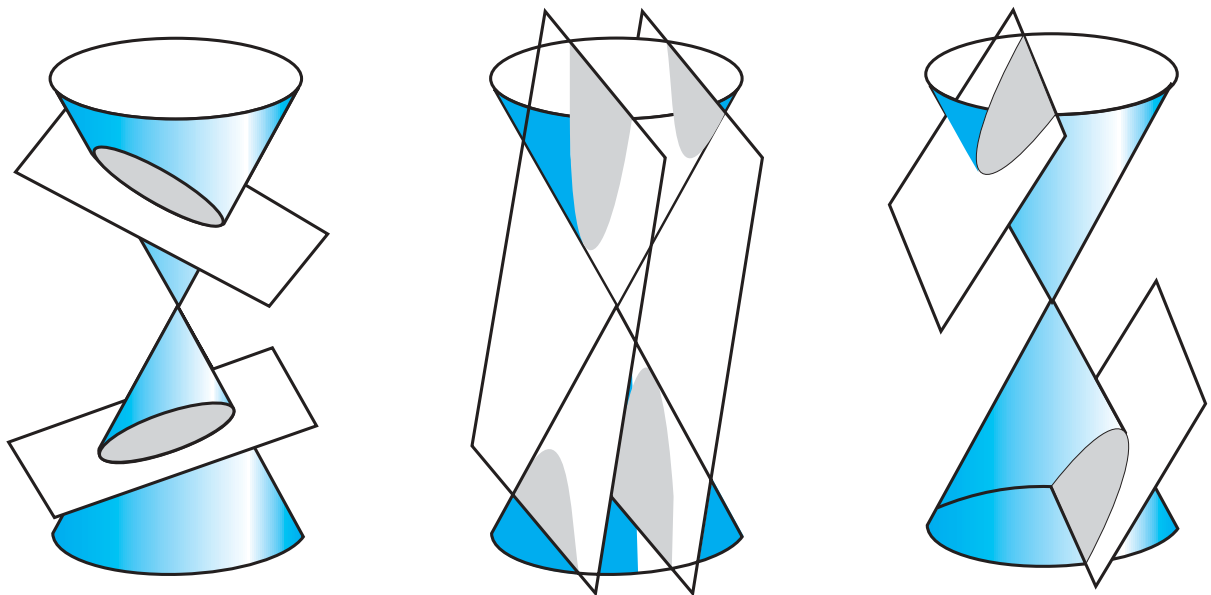
Para la enseñanza aprendizaje de este eje temático, las nuevas tecnologías, en particular el **software Cabri, el Poly, Regla y Compás**, entre otras, se constituyen en mediadores interesantes tanto para el maestro como para el estudiante.

El desarrollo de cada uno de los ejes temáticos debe obedecer a una **geometría activa**; tal como se propone en los Lineamientos Curriculares de matemáticas. Pág 57 “se trata pues de “hacer cosas”, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna.

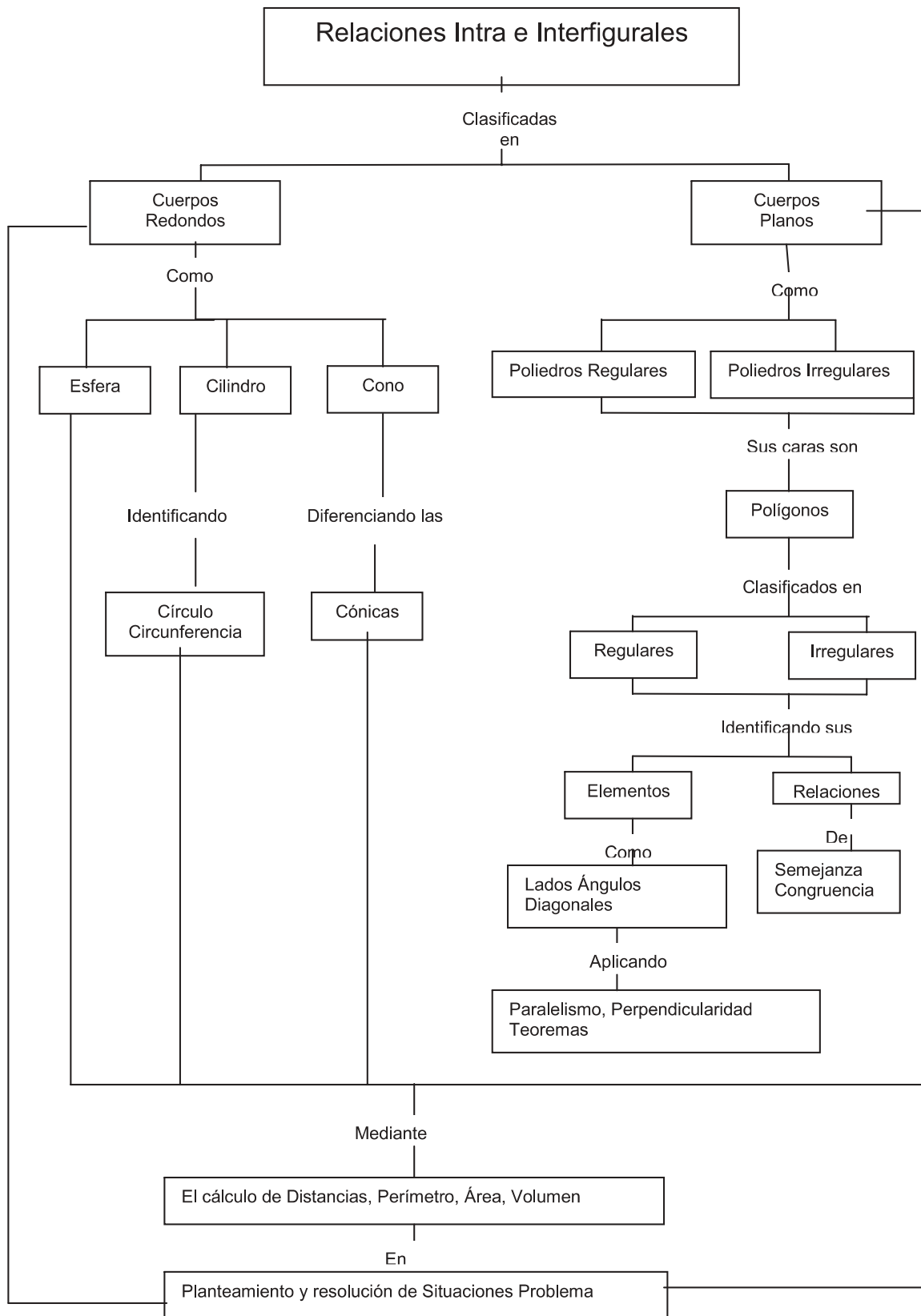
### EJE 1: RELACIONES INTRA E INTER FIGURALES

Por la configuración de los objetos geométricos existentes en el medio, es preciso clasificarlos en dos grandes grupos. Cuerpos redondos y cuerpos planos.

Los redondos: La esfera, el cilindro y el cono, servirán de base para el estudio del círculo, la circunferencia y las cónicas, identificando en ellos sus elementos y sus interrelaciones.



Para su estudio se parte del objeto concreto, en el caso particular del cilindro, partiendo de un tarro, se procede a hacer cortes, inicialmente se retiran las bases y luego se realiza un corte lateral, identificando claramente sus componentes bidimensionales. Para el caso de las figuras cónicas, se sugiere realizar en sólidos, los cortes que muestran las anteriores figuras.







Para el estudio de los cuerpos planos se partirá de la manipulación de objetos tridimensionales como cajas con caras de diferente forma y tamaño, donde se identificaran algunos elementos como: formas de las caras (cuadradas, rectangulares, triangulares y otras formas geométricas), vértices, aristas y ángulos.

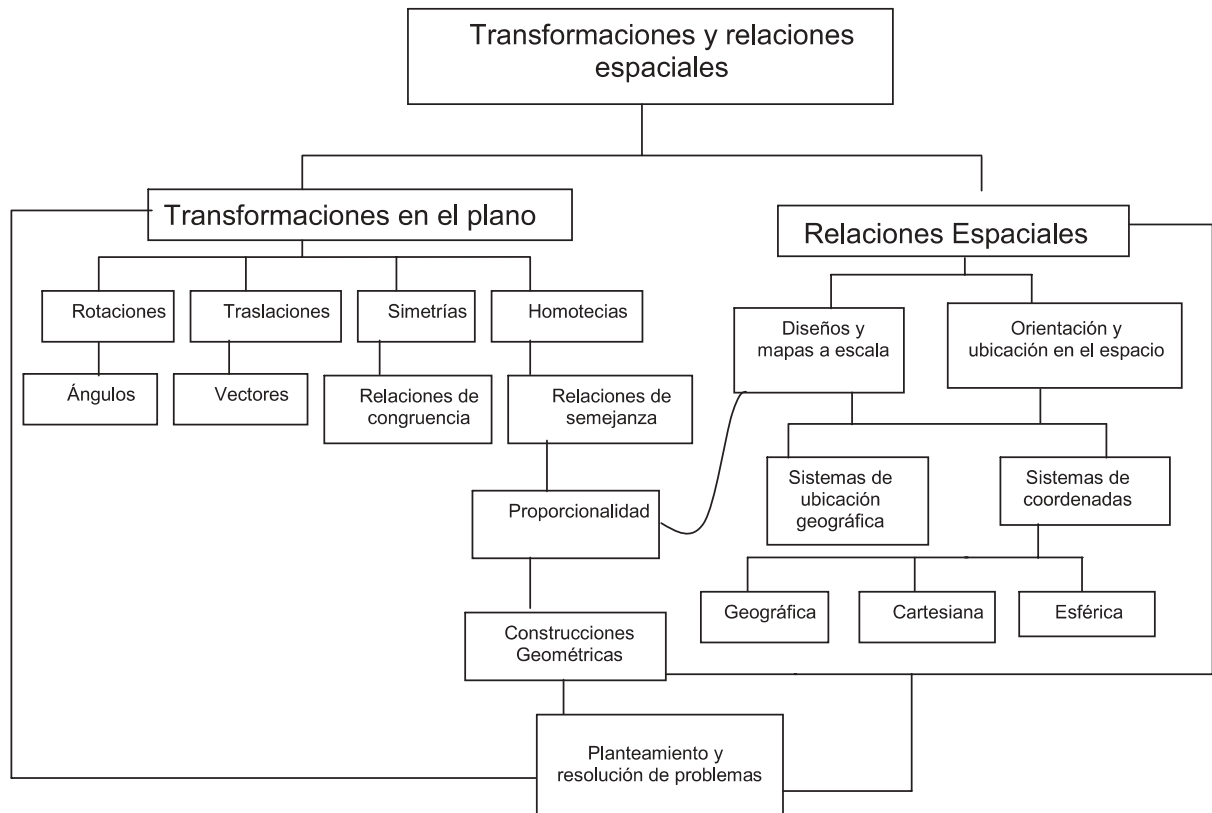
Las caras de los poliedros son polígonos, que se pueden clasificar según el número de lados y a su vez en regulares e irregulares. Estos polígonos nos permiten determinar los elementos que los componen: lados, ángulos, diagonales, y las relaciones existentes entre ellos.

En el estudio, tanto de los cuerpos planos como los redondos, se hace indispensable la formulación de situaciones problema - entendidas como espacios donde se formulan interrogantes algunos de los cuales no son de respuesta inmediata, y que tienen que ver con:

una red de conceptos planeados por el docente -. En este caso se evidencia la aplicación de conceptos como: perímetro, área, distancia entre puntos, volumen, paralelismo, congruencia, semejanza, perpendicularidad, transformaciones en el plano entre otros conceptos.

Posterior a la presentación de este plan se pone en consideración de docentes y alumnos algunas situaciones problemáticas que se espera han de ser suficientemente exploradas y enriquecidas con otros interrogantes.

## EJE 2: TRANSFORMACIONES Y RELACIONES ESPACIALES





Las transformaciones en el plano a considerar son:

- La rotación – entendida como el giro de un objeto geométrico sobre un mismo plano con respecto a un centro de giro, un ángulo  $x$  determinado-.
- La traslación – deslizamiento de un objeto geométrico en el mismo plano, mediante un vector  $p$  determinado.
- La simetría que se puede considerar con respecto a un punto del objeto o fuera de él (Simetría Central) y la que se puede plantear con respecto a un eje de simetría (Simetría axial), estableciendo relaciones de congruencia.
- Homotecias (simetría activa) considerada como una transformación que conserva la forma, ampliando o reduciendo el tamaño del cuerpo, estableciendo relaciones de semejanza.

Al establecer relaciones de semejanza entre objetos geométricos, aplicamos propiedades de la proporcionalidad, la cual nos permite realizar construcciones geométricas, diseños artísticos, mapas, maquetas, etc., los cuales nos permiten orientarnos y ubicarnos en el espacio.

## ESTÁNDARES SEGÚN LOS EJES TEMÁTICOS

En el esquema que presentamos a continuación, ubicamos cada uno de los estándares curriculares en diferentes ejes temáticos; considerando el eje temático II en dos bloques por separado: **transformaciones en el plano y las relaciones espaciales** con el fin de facilitar su comprensión.

Ejes	1° a 3°	4° a 5°	6° a 7°	8° a 9°	10° a 11°
<b>Relaciones intra e inter figurales</b>	<p>1. Diferenciar atributos y propiedades de objetos Tridimensionales.</p> <p>2. Dibujar y describir figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños.</p> <p>3. Re conocer nociones de horizontalidad, v verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.</p>	<p>1 Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.</p> <p>2.Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.</p>	<p>1.Representar objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.</p> <p>2. Identificar y describir figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales</p> <p>3. Clasificar polígonos en relación con sus Propiedades.</p>	<p>1. Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de Problemas.</p> <p>2. Reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).</p> <p>3. Aplicar y justificar criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.</p>	



Ejes	1° a 3°	4° a 5°	6° a 7°	8° a 9°	10° a 11°
<b>Relaciones intra e inter figurales</b>	7. Reconocer Congruencia y semejanza entre figuras (Ampliar, reducir)	5. Identificar y justificar relaciones de Congruencia y semejanza entre figuras  6. Construir Descomponer figuras y sólidos a partir de Condiciones dadas.  8. Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura	5. Resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia representaciones visuales.		
<b>Tranformaciones</b>	5. reconocer y aplicar traslaciones y giros de una Figura en el plano.  6. reconocer y valorar simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño	3. Identificar el ángulo como giros, aberturas, inclinaciones en situaciones Estáticas y dinámicas  7. Hacer conjeturas y Verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para Construir diseños.	4. Predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones (traslaciones, rotaciones, reflexiones y homotecias sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.		



Ejes	1° a 3°	4° a 5°	6° a 7°	8° a 9°	10° a 11°
<b>Relaciones Métricas</b>	<p>4. Representar en el espacio circundante para establecer relaciones espaciales (distancia, dirección, orientación etc.</p> <p>8. realizar diseños y construcciones cuerpos y figuras geométricas</p>	<p>4 Utilizar sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales</p>	<p>6. Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.</p> <p>7. Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.</p>	<p>4 Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas.</p>	<p>2. Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, Esféricos,...).</p> <p>3. Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas de manera algebraica.</p> <p>4. Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.</p> <p>5. describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.</p>

## SITUACIONES PROBLEMA

### 3.1. SITUACIÓN PROBLEMA N° 1

Se propone que la siguiente actividad sea desarrollada para los grados 1° a 5°.

Dados varios cuerpos sólidos de diferente tamaño y ubicados en diferentes posiciones, se pide al estudiante que construya objetos similares, de igual y de distinto tamaño con el objeto de decorar su aula de clase.



### Grados de 1° a 3°.

**Estándar 1:** Diferenciar atributos y propiedades de objetos tridimensionales.

**Estándar 2:** Dibujar y describir figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños.

**Saberes previos:**

Concepto de polígono y sus elementos.

**Actividades:**

- 1.1 ¿Qué tipo de cuerpos son?
- 1.2 ¿Cuántas caras tiene cada cuerpo?
- 1.3 ¿Qué forma tiene cada cara del cuerpo?
- 1.4 ¿Qué semejanza encuentras entre las caras de los diferentes cuerpos?
- 1.5 ¿Qué diferencias encuentras entre los cuerpos?
- 1.6 ¿A qué conclusión llegas?

En este nivel los estudiantes deben percibir las formas de los cuerpos geométricos, describiendo su aspecto físico donde reconocen y diferencian elementos referentes a las semejanzas o diferencias físicas globales; constituyéndose así el primer nivel de razonamiento del modelo planteado por Van Hiele, de reconocimiento.

### Grados 4° y 5°.

**Estándar 1:** Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.

**Estándar 2:** Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.

**Actividades:**

- 1.1 ¿Qué características tienen las caras de cada cuerpo?
- 1.2 ¿Qué nombre reciben las intersecciones de dos caras, de tres o más caras...?
- 1.3 ¿Cuántos lados tiene cada cara? ¿Cuántos vértices? ¿Cuántos ángulos?
- 1.4 ¿Qué clase de ángulos son? Según cual criterio de clasificación?
- 1.5 Determine qué lados son paralelos y cuáles son perpendiculares en cada cara?

**Estándar 8:** Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.

**Actividades:** El educador le brinda al estudiante el modelo bidimensional, para que él construya el sólido donde identifique las figuras planas que lo conforman, sus ángulos, vértices, caras, etc.

El estudiante debe elaborar un modelo para construir otro sólido de menor o mayor tamaño, en el cual:

1. Clasifique y nombre las figuras que conforman el sólido construido.



2. Determine las semejanzas y diferencias entre las figuras que forman la cara.
  3. Identifique el número de caras, vértices y ángulos.
  4. Generalice y concluya de acuerdo a la experiencia.
- En este nivel los estudiantes están en condiciones de describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades; pueden realizar deducciones y generalizaciones; constituyéndose así en el II nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele.

## SITUACIÓN PROBLEMA N 2

Grados 6° y 7°.

**Estándar 3:** Clasificar polígonos en relación con sus propiedades.

**Estándar 6:** Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.

Consideremos el cuadrado ACEG, que tiene de lado  $x+y$ , tal que  $x > y$ , como lo muestra la figura 1

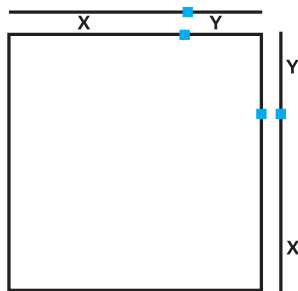


Fig. 1

Docente y estudiante pueden determinar los valores reales de  $x$  y de  $y$ .

Si dividimos el cuadrado ACEG, por un extremo de  $x$  y de  $y$  como muestra la figura 2, se tiene que  $AB = x$ ;  $BC = y$ , de igual manera,  $GF = x$ ; y  $FE = y$ .

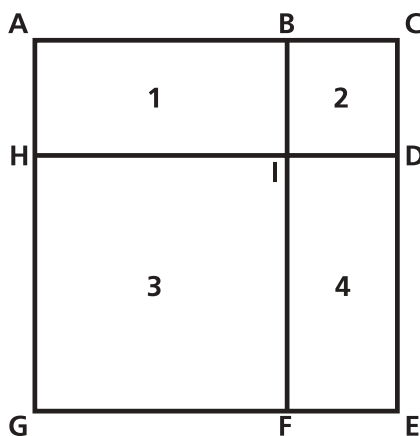


Fig. 2



1. Especifique qué tipo de figuras son las partes 1, 2, 3, 4. de la figura 2
2. Compare cada una de las partes con las demás, establezca semejanzas, diferencias (entre lados, ángulos), identifique los segmentos paralelos, perpendiculares entre sí.
3. Determine el perímetro de las partes 1, 2, 3, 4, de la figura 2, con los valores reales antes asignados.
4. ¿Qué otras figuras se pueden generar? Determine el perímetro de cada una de ellas.
5. Determine el área de cada una de las figuras identificadas en el punto anterior y establezca relaciones entre ellas.

**3.3. Actividad:** Con pitillos plásticos y alfileres se le pide al estudiante que construya la figura 2.

Al cuadrado ACEG le aplicamos una deformación, a través de un estiramiento de dos vértices que pueden ser los vértices A,E obteniendo como consecuencia un cambio en la longitud de sus diagonales, como muestra la figura 3.

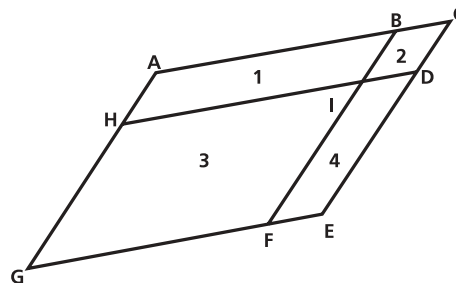
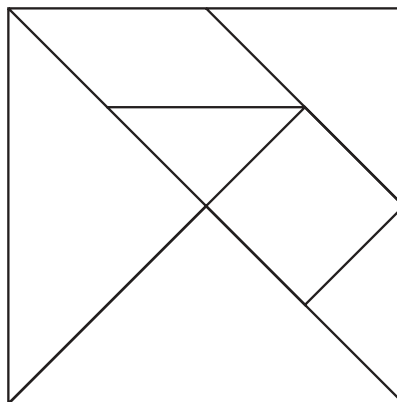


Fig. 3

1. ¿Qué transformaciones observas en las cuatro figuras componentes de la construcción con pitillos al deformarse como la figura 3, respecto a la misma construcción cuando no se ha deformado y se parece a la figura 2? (En cuanto a forma, ángulos, lados y diagonales).
2. Calcular el perímetro de los cuadriláteros de la construcción con pitillos cuando tiene la forma de la figura 2 y 3; Comparar los que sean correspondientes. ¿Qué se concluye?
3. Calcular el área de los cuadriláteros de la construcción con pitillos cuando tiene la forma de la figura 2 y 3; Comparar los que sean correspondientes. ¿Qué se concluye?
4. ¿Qué relación y diferencia existe entre las partes de la construcción con pitillos? Concluya y generalice.

### 3.4. SITUACIÓN N° 3: trabajo con el tangram





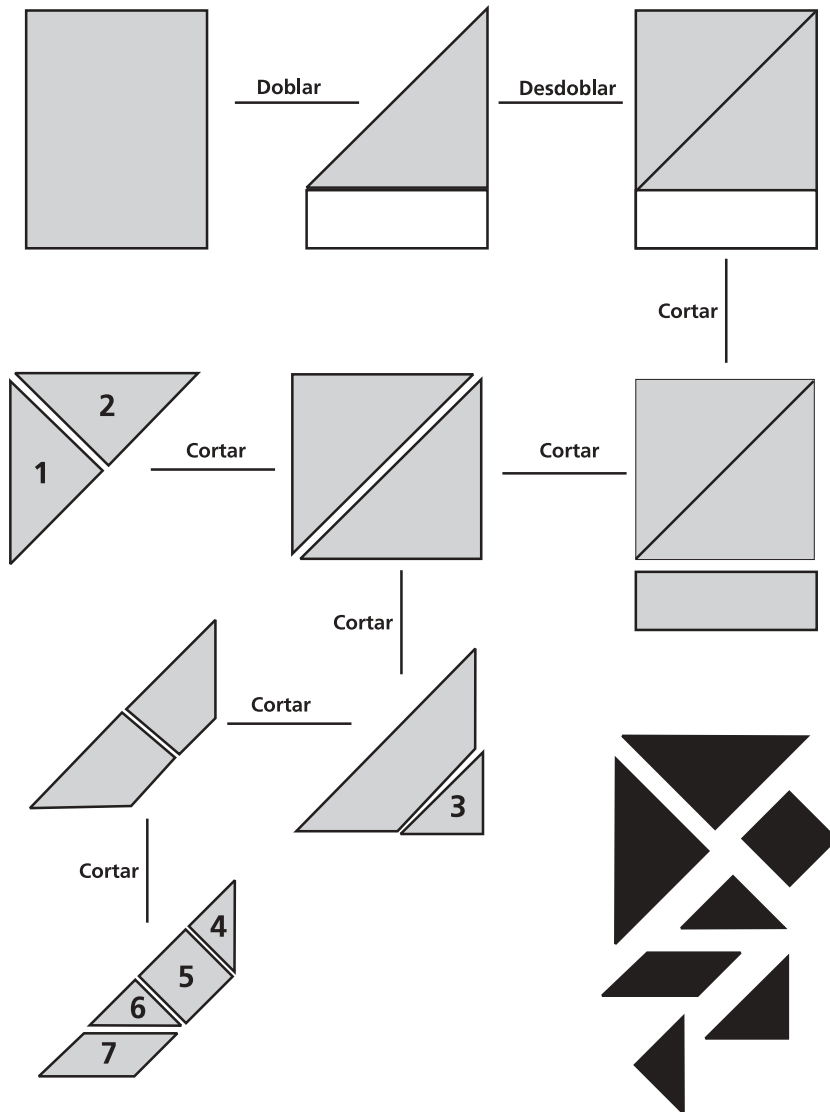
**Grados 6° a 7°**

**Estándares:**

**Estándar 5°** Resolver y formular problemas que involucran relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

**Estándar 6°** Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.

A través de esta situación problema se enriquece la caracterización y clasificación de figuras planas, el perímetro, el área y las relaciones entre estas.







Se pueden plantear interrogantes como las siguientes:

- 1- Utilizando todas las fichas arma un paralelogramo, un cuadrado, un trapecio, un rectángulo, y un triángulo rectángulo.
- 2- ¿Cuál es la relación entre el área del cuadrado original y el área de cada una de las figuras que se formaron?
- 3- ¿Cuál es la relación del perímetro del cuadrado inicial con el perímetro de cada una de las figuras que se formaron?
- 4- ¿Es posible que haya figuras con igual área y diferente perímetro?. ¿Se podrán encontrar figuras con igual área e igual perímetro que tengan forma diferente?
- 5- Construir todos los paralelogramos, cuadrados, trapecios y triángulos que tengan como área la mitad del área del cuadrado original. Hacer una tabla donde registre el área y el perímetro de cada una de las figuras construidas.
- 6- Que figuras se pueden construir con los  $\frac{3}{4}$  del área del cuadrado original.
- 7- Es posible construir un triángulo rectángulo que tenga como área  $\frac{9}{16}$  del área del tangram original?
- 8- Utilizando sólo las 5 piezas más pequeñas (separando los triángulos más grandes) construya un cuadrado, un triángulo, un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio, un hexágono. ¿Cuál es la relación entre el área del triángulo más pequeño del tangram y el área de cada una de las figuras que acaba de construir?
9. Con el transportador mida cada uno de los ángulos interiores de cada una de las partes que conforman el Tangram, enumerándolos previamente para evitar confusiones y poder clasificarlos según su medida. Complete la tabla siguiente.

Angulo (medida)	Agudo	Recto	Obtuso



- 10 Utilizando todas las piezas arme un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio, un triángulo rectángulo. En cada una de las figuras determine el área, el perímetro y mida todos los ángulos.
- 11 Compare las áreas de cada uno de los polígonos que hacen parte del Tangram.
- 12 Con los resultados obtenidos en los numerales 3.3 y 3.6 complete la siguiente tabla y escriba sus observaciones.

Figura	Perímetro	Área

- 13 Exprese el área de cada una de las siete piezas que forman el TANGRAM con respecto al área del cuadrado inicial. Expresada en porcentaje, fracción y decimal.
- 14 Determine la suma de los ángulos interiores de cada polígono y trate de hallar una generalización para polígonos de  $n$  lados.
- 15 Armar otras figuras con todas las piezas, y calcular áreas y perímetros de las nuevas construcciones.

### 3.5. SITUACIÓN PROBLEMA N° 04

#### Grado 6° y 7°

**Estándar:** resolver y formular problemas que involucran relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.

Se construye un rectángulo ABCD de base  $x$  y altura  $y$ , con pitillos. Se da libertad al estudiante que determine la medida de la base y la altura. Se pide a éste que calcule el perímetro y el área de dicho rectángulo.

Al estirar el rectángulo por dos vértices opuestos AC o BD este se deforma:

- ¿Como se llama la nueva figura?
- Calcular el perímetro y compararlo con el del ejercicio 1.
- Calcular el área, y compararla también con la del ejercicio 1.
- Comparar los lados y los ángulos de la figura inicial con los lados y los ángulos de la figura deformada.
- Completar la siguiente tabla cada vez que se deforma la figura inicial.



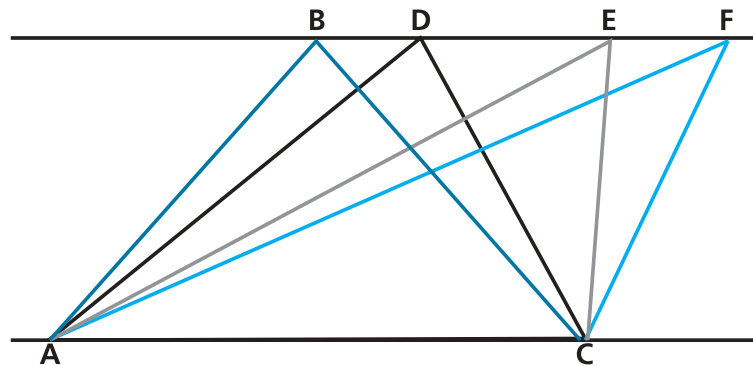
Ángulos A, C	Área	Perímetro	Suma áng interiores
90°			
80°			
70°			
45°			
20°			

¿Qué se concluye del perímetro y del área del rectángulo y del paralelogramo?

**Observaciones.**

- Realizar el mismo proceso con un cuadrado de lado  $x$ .
- Estos ejercicios pueden hacerse en el computador con la ayuda del software CABRI y también con RYC.

Se propone que el estudiante repita el ejercicio anterior con triángulos que tengan igual base e igual altura como muestra la figura. Conocido el valor del ángulo A el estudiante debe medir con el transportador el valor de los dos ángulos restantes, efectuar la suma y completar la tabla.



Ángulos A, C	Área	Perímetro	Suma áng interiores
90°			
80°			
70°			
45°			
20°			

¿Qué puede decirse del área y el perímetro del triángulo?

¿Qué se concluye al comparar las dos tablas anteriores?



## TALLER BÁSICO DE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

Con este taller se pretende aplicar y afianzar conceptos básicos de la geometría. Además de utilizar la regla y el compás tradicionales, en la construcción de objetos geométricos, se pueden utilizar softwares, tales como CABRI y REGLA Y COMPÁS (R y C), combinando en esta forma lo tradicional con los medios electrónicos actuales.

1. Construir un segmento de recta igual a uno dado.
2. Bisecar un segmento dado.
3. Construir la perpendicular a una recta dada, en un punto dado de ésta.
4. Trazar la perpendicular a una recta dada, por un punto dado exterior a ella.
5. Trazar una perpendicular a un segmento dado, en un punto medio. (Mediatriz).
6. Construir la paralela a una recta dada que pase por un punto exterior a ella.
7. Construir un ángulo igual a un ángulo dado.
8. Bisecar un ángulo. (Bisectriz).
9. Construir un ángulo doble y uno triple a otro dado.
10. Construir un triángulo equilátero conociendo el lado.
11. Construir un ángulo de  $60^\circ$ .
12. Construir un triángulo dados sus tres lados.
13. Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo que forman.
14. Construir un triángulo dados un lado y los dos ángulos contiguos a él.
15. Construir un triángulo dados dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.
16. Construir un triángulo rectángulo dados su hipotenusa y un cateto.
17. Construir un triángulo rectángulo conociendo sus catetos.

### **Proporcionalidad:**

18. Dividir un segmento en un número cualquiera de partes iguales.
19. Dividir un segmento dado en partes que estén en una razón dada.
20. Construir el cuarto segmento proporcional de 3 segmentos dados.
21. Construir la media proporcional a 2 segmentos dados.
22. Construir un triángulo semejante a uno dado a partir de un segmento planteado como base.



**Con circunferencias:**

23. Construir la tangente a una circunferencia dada desde un punto de ella.
24. Construir una tangente a una circunferencia dada desde un punto exterior a ella.
25. Circunscribir una circunferencia a un triángulo.
26. Determine el centro de una circunferencia dada. No conocemos su radio, ni su diámetro.
27. Construir un octágono regular inscrito en una circunferencia dada.
28. Construir un hexágono regular inscrito en una circunferencia dada.
29. Construir un triángulo equilátero regular inscrito en una circunferencia dada.

**OTROS PROBLEMAS DE APLICACIÓN**

1. Marquemos un punto A (sobre una esquina de la cuadrícula), ubiquemos un punto B situado 7 unidades a la derecha de A, luego ubiquemos un punto C situado a 7 unidades a la derecha y 5 hacia arriba de A, por último ubiquemos un punto D, 5 unidades arriba de A. Una los puntos ABCD, aproximemos el área y el perímetro del polígono formado. (Utilizar hoja cuadrículada).
2. Construyamos todos los rectángulos posibles de perímetro 20 unidades de longitud. Elijamos el que encierre mayor área. Sistematicemos la información y concluyamos. (Utilizar hoja cuadrículada).
3. Dados rectángulos de perímetro 28 y 32. Hallemos todos los rectángulos posibles para cada caso, con áreas diferentes.
4. Dado un rectángulo de área 24 unidades cuadradas, encontremos todos los rectángulos con perímetro diferente que tengan esta misma área. Pensemos lo mismo para rectángulos de áreas 12 y 36 unidades de área. (Sugerencia: tomemos lados de valores enteros para trabajar sobre la cuadrícula).
5. Marquemos un punto A (sobre la cuadrícula); desde A ubiquemos un punto B situado a 5 unidades a la derecha; desde B ubiquemos un punto C a 2 unidades a la izquierda y 4 unidades hacia arriba. Una los tres puntos, identifique la figura formada y calcule su área y su perímetro.
6. Construyamos y triángulos rectángulos diferentes. Calculemos el área y el perímetro de cada uno.
7. Construyamos 5 triángulos diferentes, que tengan la misma área.
8. Construyamos un triángulo que tenga la misma área que un cuadrado dado. Establescamos algún criterio general para encontrar la solución a este problema.
9. Construyamos un cuadrado que tenga la misma área que un triángulo dado. Establescamos algún criterio general para encontrar soluciones a este problema.



## ANEXO

---

### Modelo de Van Hiele

Es nuestro propósito presentar a consideración de los educadores una propuesta en relación con la operacionalización de los estándares propuestos por el MEN en relación con la enseñanza de la geometría en la educación básica y media. Para ello retomamos la experiencia recogida, analizada y teorizada por los Holandeses DINA VAN HIELE Y PIERRE VAN HIELE, conocida en nuestro medio como el modelo de VAN HIELE.

Este modelo surgió a raíz de los problemas cotidianos que se presentan en el aula de clase en actividades propias del aprendizaje de la geometría en particular.

Un modelo es una representación de un fenómeno real. Si el modelo es matemático, describe matemáticamente una situación concreta por ejemplo: el modelo de la proporcionalidad, “**a** es a **b** como **c** es a **d**”, describe la variación entre magnitudes. Un modelo educativo como el de los esposos VAN HIELE tiene que ver con el desarrollo intelectual, y particularmente con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Dicho modelo pretende establecer una relación adecuada entre profesores y alumnos para lograr con más facilidad el acceso a niveles superiores de razonamiento, para lo cual se divide en dos aspectos: describe y da directrices de razonamiento.

#### 1.1.1 ASPECTO DESCRIPTIVO.

El aspecto descriptivo intenta explicar como razonan los estudiantes, para lo cual, identifica cinco niveles de razonamiento que suceden siempre que el estudiante aborda un nuevo conocimiento. La superación de cada nivel no está sujeta a una edad en particular, algunos estudiantes no superan nunca el segundo nivel, otros alcanzan el cuarto nivel a los 14 ó 15 años y el quinto nivel en algunos casos es alcanzado a través los estudios superiores. La superación de dichos niveles tampoco se da, necesariamente, en forma continua y está estrechamente ligada al contexto de actuación de las personas. Van Hiele (1986) acepta avances bruscos cuando afirma “...Había partes de las matemáticas que yo podía explicar y explicar y aún así los alumnos no entendían...De pronto parecía que entendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido”.

#### 1.1.2 NIVEL 1: RECONOCIMIENTO.

Se caracteriza porque los estudiantes:

- Perciben las figuras geométricas en su totalidad, esto es, no se diferencian elementos y propiedades relevantes, las diferencias que se establecen son de carácter físico y global, (por ejemplo el número de puntas que tiene el objeto, o si no tiene puntas) el niño dice: tiene forma de...



Puede afirmarse que en éste nivel se hace una clasificación interfigural, ya que no se reconocen las propiedades matemáticas de los objetos geométricos.

- Se diferencia el aspecto físico de los objetos sólo en presencia de ellos, es decir, la semejanza se expresa como: se parece a.
- Como consecuencia de lo anterior el estudiante clasifica los objetos geométricos sólo en su relación nombre figura, por tal razón para él un cuadrado no es un rectángulo.
- Este nivel en el que ubicamos a los niños de preescolar y primeros años de primaria, no es exclusivo de ellos, está presente siempre que un nuevo concepto le llega al estudiante. Puede ocurrir que en un nivel de escolaridad superior, ante una nueva situación de aprendizaje, el paso por el nivel de reconocimiento sea más rápido.

### **1.1.3. NIVEL 2: DE ANÁLISIS.**

Se caracteriza por los siguientes aspectos:

- Reconoce las partes del objeto geométrico en estudio y algunas de sus propiedades matemáticas aunque de manera informal.
- No relaciona propiedades entre sí, por lo tanto no puede hacer clasificaciones lógicas, es decir, clasificaciones lógico deductivas, en las que se concatenen: definiciones, axiomas y propiedades de los objetos geométricos.
- Realiza generalizaciones por experimentación, en consecuencia se requiere la presencia del objeto. En el caso del cuadrado por ejemplo es posible que identifique características como: tener lados iguales, ángulos rectos, lados paralelos y diagonales, sin embargo no alcanza a apreciar que la igualdad de las diagonales es consecuencia de la igualdad de ángulos.

### **1.1.4. NIVEL 3: DE CLASIFICACIÓN.**

- Se inicia el razonamiento formal, en la medida, en que descubre que unas leyes se deducen de otras, sin embargo estas implicaciones, aunque permiten hacer clasificaciones, todavía requieren la presencia de los objetos.
- Se comprenden los pasos sucesivos de un razonamiento formal, pero en forma aislada, ya que no se ve la necesidad de encadenarlos.
- No comprende la estructura axiomática de la geometría, en consecuencia no ve la necesidad de la demostración por razonamiento deductivo. Para él es suficiente hacer verificaciones de casos particulares.

### **1.1.5. NIVEL 4: DEDUCCIÓN FORMAL.**

En éste nivel:

- Puede realizar razonamiento lógico formal (demostraciones de varios pasos con sentido y por necesidad como medio de verificar la verdad de una afirmación.)



- Se está en capacidad de comprender la estructura axiomática de las matemáticas y en particular de la geometría.
- Acepta la existencia de equivalencias y de demostraciones alternativas que permiten llegar a los mismos resultados.

#### 1.1.6. NIVEL 5: RIGOR MATEMÁTICO.

En este nivel es posible manejar diversas geometrías procedentes de diferentes sistemas axiomáticos. Se dice que algunos estudiantes logran este nivel sólo a medida que avanzan en sus estudios superiores.

## 1.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES.

- Cada nivel de razonamiento se caracteriza por tener un lenguaje propio, es decir, los estudiantes que pasan de un nivel a otro se cualifican en su lenguaje. Un mismo término adquiere connotaciones diferentes de un nivel a otro. Por ejemplo el término **demostrar**, en el primer nivel carece de sentido, es razonar en forma dispar, en el nivel 2 demostrar es dar ejemplos de casos particulares, en muchos casos es verificar por medio de mediciones; en el nivel 3 el concepto se aproxima al razonamiento lógico-deductivo de los matemáticos, aunque de manera informal, sin rigor; en el nivel 4 la demostración adquiere el sentido axiomático propio de los matemáticos.
- Otra característica es la jerarquización, entendida, como el proceso que permite pasar de un nivel inferior a otro superior y no viceversa. Si un estudiante haciendo uso de la memorización aparenta estar en un nivel de deducción formal, al plantearse un problema diferente al memorizado, intentan resolverlo usando al pie de la letra los métodos que conocen, por lo tanto el fracaso es inminente ante procedimientos inapropiados.
- El paso de un nivel a otro, como se dijo en el aspecto descriptivo, se produce no necesariamente en forma continua- no confundir el comprender un problema completo, con la adquisición de la destreza en el manejo del nuevo tipo de razonamiento- cada nivel se caracteriza por la adquisición de varias habilidades de razonamiento, por lo tanto, se supera un nivel cuando se tiene dominio de las respectivas destrezas.

## 1.3. LAS FASES DEL MODELO DE VAN HIELE

Son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven a un nivel superior de razonamiento.

### 1.3.1. FASE 1: INFORMACIÓN.

- Su finalidad es la de obtener información recíproca profesor-alumno. Por su parte, el profesor averigua qué saben los alumnos sobre el tema que se va abordar (saberes previos) y la forma de razonar que tienen. Por otra parte, los alumnos entran en contacto con el objeto y hacen el reconocimiento respectivo.





### **1.3.2.FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA**

- El estudiante debe consultar sobre los elementos básicos: que descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras etc. así empieza a tener la red del nuevo nivel. Las actividades deben ser cuidadosamente seleccionadas para que le sirvan de base al nivel superior.

### **1.3.3. FASE 3: EXPLICITACIÓN.**

- Se pretende en esta fase que los estudiantes intercambien sus experiencias y aprendan el nuevo vocabulario. No se recomienda introducir, conceptos nuevos si no afianzar el trabajo anterior.

### **1.3.4. FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE.**

- Se pretende que el estudiante aplique los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. Los problemas deben presentar situaciones nuevas, ser problemas abiertos que ayuden a completar la red.

### **1.3.5. FASE 5: INTEGRACIÓN.**

- Se busca condensar en un todo el dominio que ha explorado el pensamiento (lo nuevo y lo que se tenía) las actividades deben estar orientadas a acumular, comparar y combinar lo que ya se conoce (no conceptos nuevos).
- Completada esta fase los alumnos tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.



## BIBLIOGRAFÍA

---

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1998, p 131.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Matemáticas. Santafé de Bogotá, 2003.

GALVEZ, Grecia. La geometría, la Psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela primaria. En Didáctica de la matemáticas. Aportes y Reflexiones. Cecilia Parra e Irma Saiz (Comp.). Paidós Educador. Argentina. 1998.

OBANDO Z, Gilberto; MUNERA, John Jairo. Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Educación y pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, no. 35, (enero- abril), 2003 pp 183-200.