

## DIFERENTES USOS Y DIFICULTADES DE APROPIACIÓN DEL "ARRASTRE" EN CABRI-GEOMETRY

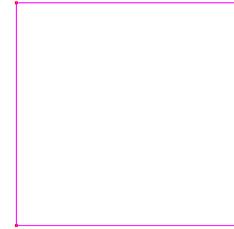
Angela María Restrepo S.

Universidad de los Andes

[am.restrepo253@uniandes.edu.co](mailto:am.restrepo253@uniandes.edu.co)



## Qué es el arrastre?



## El Arrastre

- Invalida las construcciones erróneas
- Pone en evidencia los invariantes geométricos
- Obliga a utilizar propiedades geométricas para construir una figura que resista
- Brinda un “*milieu*” (Brousseau) rico en retroacciones que le pueden permitir al sujeto evolucionar en su estrategia de resolución



## El arrastre es fundamental para la geometría dinámica, pero...

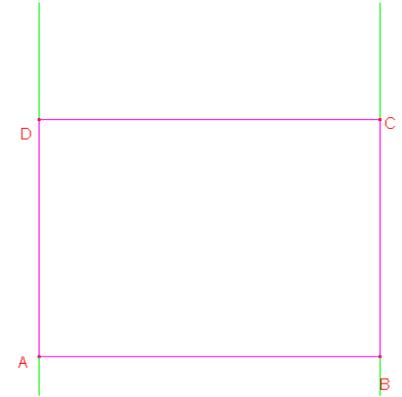
- Los alumnos:
  - les cuesta validar su construcción, le piden permiso al profesor antes de arrastrar (Bellemain & Capponi, 1992)
  - no siempre interpretan de manera geométrica lo que observan según lo que espera el maestro (Soury-Lavergne 1996; Balacheff & Sutherland, 1999)

## El arrastre es fundamental para la geometría dinámica, pero...

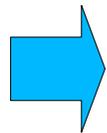
- Los profesores en formación:
  - De primaria, le dan más importancia a las propiedades espaciales que a las propiedades geométricas de la figura; arrastran muy poco para validar una construcción, lo hacen de manera local (Rolet, 1996 ; 1999)
  - De secundaria, utilizan más frecuentemente el arrastre para constatar, al arrastre para conjeturar o validar e invalidar una construcción (Tapan, 2006)

## En los textos escolares

- Construcciones totalmente listas
- “Arrastra, ¿qué observas?”
- seguido eventualmente de
  - “Formule una conjetura”
  - “Demuestre que ...”
- El arrastre solamente para observar, no para investigar o explorar
- A veces el arrastre propuesto en el ejercicio es parcial
- En contradicción con las investigaciones y las innovaciones



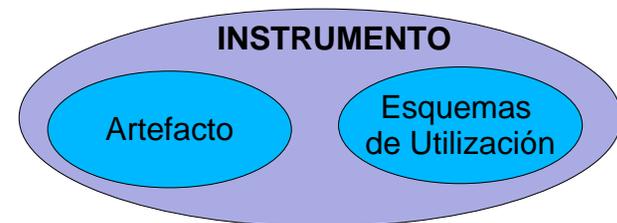
## Tras estas constataciones



¿Cómo se apropian los alumnos el arrastre?  
¿Cuáles son las etapas en el proceso de apropiación del arrastre?

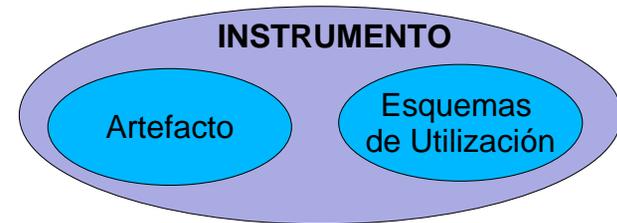
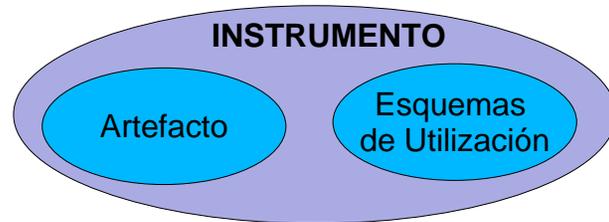
## Teoría Instrumental (Rabardel, Artigue, Trouche)

- “Definimos el instrumento como una totalidad que comprende a la vez un artefacto (o una parte de un artefacto) y uno o varios esquemas de utilización” (Rabardel, 1995)





- Los artefactos semióticos, tales como dibujos o signos, pueden ser también vistos como artefactos



- El artefacto no es un instrumento terminado o completo, sino resulta de una construcción del sujeto



- Piaget
  - los esquemas constituyen medios del sujeto gracias a los cuales puede asimilar las situaciones y los objetos a los cuales se ve confrontado
  - el esquema es el producto de la actividad asimiladora siendo la tendencia de toda conducta a conservarse



- Vergnaud
  - Un esquema es *“la organización invariante de conducta para una clase de situación”*
  - *“Es en los esquemas donde se deben buscar los conocimientos-en-acto del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria” (Vergnaud, 1990)*



## El instrumento

- Se compone entonces
  - de un artefacto, material o simbólico, hecho por el sujeto o por otros;
  - de uno o varios esquemas de utilización asociados, que resultan de una construcción propia del sujeto, autónoma o apropiación de esquemas de utilización sociales.

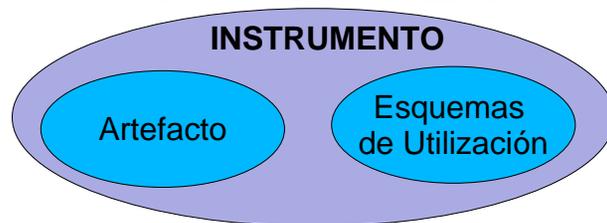


## El instrumento

- Un mismo esquema de utilización puede aplicarse a una multiplicidad de artefactos
- Así mismo, a un artefacto es posible asociarle diferentes esquemas de utilización al cual se le atribuirán diferentes significados y funciones
  - un mismo artefacto puede entonces dar lugar a la construcción de diferentes instrumentos



## Teoría Instrumental (Rabardel, Artigue, Trouche)

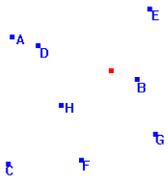


Durante la **Génesis instrumental** se construyen los diferentes instrumentos asociados a un mismo artefacto



## Esquemas de utilización

- Esquemas de utilización
  - los **esquemas de uso**, orientados hacia las “**actividades secundarias**” que corresponden a la gestión de características y propiedades particulares del artefacto;
  - los **esquemas de acción instrumentada**, incorporan esquemas de uso; son relativos a las “**actividades primarias**”, orientadas hacia el objeto de la actividad, y para las cuales el artefacto es un medio de realización (Rabardel, 1995)

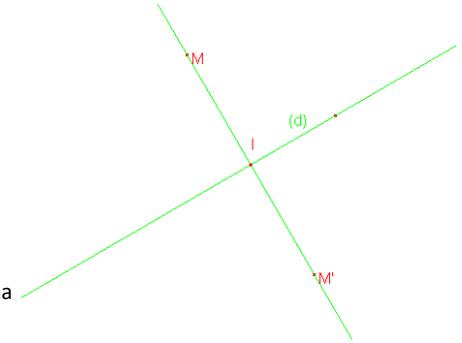


## Concepto de esquema (Vergnaud)

- Un esquema es “la organización invariante de conducta para una clase de situación”
- Se compone de:
  - “reglas de acción”, de tipo “si condición entonces acción a efectuar” permiten generar la serie de acciones y de actividades del sujeto;
  - “invariantes operatorios”
    - de tipo “proposiciones”: susceptibles de ser verdaderos o falsos, como los “teoremas-en-acto”;
    - de tipo “conceptos-en-acto” o “categorías-en-acto”: que no deben ser juzgados como verdaderos o falsos, sino por su pertinencia en la toma de información;
  - “anticipaciones” y el “objetivo” que se busca alcanzar;
  - “inferencias”;

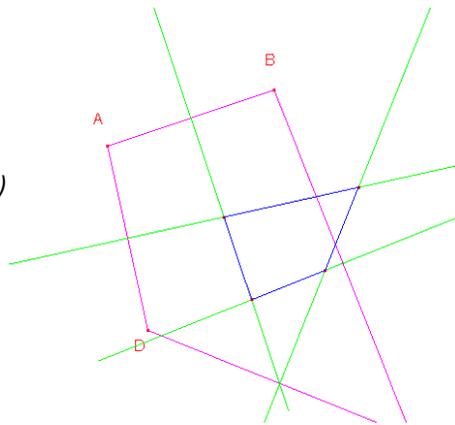
## Esquema de acción instrumentada “verificar que dos rectas son perpendiculares”

- a. “regla de acción”: para verificar si dos rectas son perpendiculares, basta arrastrar un punto o una recta y ponerlas en posición vertical/horizontal
- b. “invariantes operatorios”:
  - Concepto-en-acto de perpendicularidad: dos rectas, una horizontal y la otra vertical son perpendiculares
  - Teorema-en-acto: dos rectas son perpendiculares si al poner una horizontalmente la otra es vertical
  - Teorema-en-acto: las rectas horizontales o verticales son las únicas que no presentan escaleras en el trazado
  - Teorema-en-acto: si dos rectas dependientes son perpendiculares en una posición, entonces lo son en todas las posiciones
- c. las “inferencias”: las dos rectas son (o no son) perpendiculares



## Clasificación de los distintos tipos del arrastre

- Trabajos de Arzarello et al. (2002), Olivero (2002), Healy (2000)
  - Arrastre errático (*Wandering dragging*)
  - Arrastre limitado (*Bound dragging*)
  - Arrastre blando o guiado (*Guided dragging*)
  - Arrastre sobre una línea (*Line dragging*)
  - Arrastre sobre objeto (*Linked dragging*)
  - Test del arrastre (*Dragging test*)



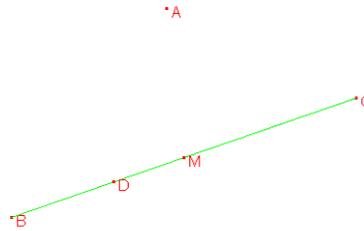
## Clasificación de los distintos tipos del arrastre

- Al apoyarnos en la Teoría Instrumental distinguimos:
  - El uso del artefacto (esquemas de uso)
  - El rol del arrastre según la finalidad matemática (esquemas de acción instrumentada)

## Clasificación de los distintos tipos del arrastre

### • Usos del artefacto:

- **Arrastre libre:** arrastrar un punto libre en toda la pantalla.
- **Arrastre limitado** (*bound dragging*): arrastrar un punto sobre objetos (segmento, recta, semi-recta...).
- **Arrastre indirecto:** los puntos que no se pueden atrapar, solo se pueden mover al atrapar y arrastrar otro de manera indirecta.
- **Foto-arrastre o arrastre discreto:** “Modalities which suggest a discrete sequence of images over time: the subject looks at the initial a final state of the figure, without paying attention the intermediate instances. The aim is to get a particular figure.” (Olivero, 2002)
- **Cine-arrastre o arrastre continuo:** “Modalities which suggest a film: the subject look the variation of the figure while moving and the relationships among the elements of the figure. The aim of dragging is the variation of the figure itself.” (Olivero, 2002)



## Clasificación de los distintos tipos del arrastre

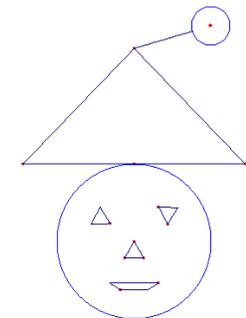
- Rol del arrastre según la finalidad matemática
  - Arrastre *sin finalidad matemática* (*wandering dragging*)
  - Arrastre para *ajustar*
  - Arrastre *blando* o arrastre *guiado* (*guided dragging*)
  - Arrastres *exploratorios*:
    1. Arrastre para *identificar los invariantes* de la figura
    2. Arrastre para *constatar las variaciones* durante el movimiento
    3. Arrastre para encontrar la *trayectoria* de un punto
  - Arrastres para *validar o invalidar*:
    1. Arrastre para *validar una construcción* (*dragging test*)
    2. Arrastre para *invalidar una construcción*
    3. Arrastre para *validar una conjetura/propiedad*

## Preguntas de investigación

- ¿Qué instrumentos arrastre construyen los alumnos durante la génesis instrumental?
  - ¿Cómo emergen y se organizan durante el tiempo?
  - ¿Cuál es la influencia de las situaciones?
- ¿Los alumnos asumen la responsabilidad de la validación de sus construcciones usando el arrastre?

## Geo

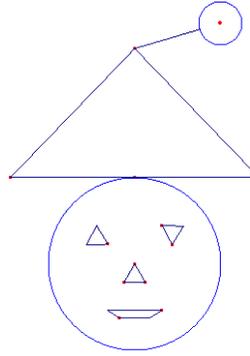
- Situación de introducción a Cabri y al arrastre
- Simple exploración de la figura y de los posibles arrastres





## Esquemas de uso

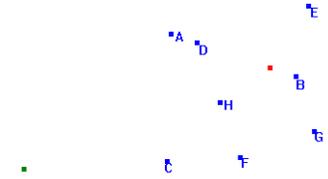
- Esquema de uso de “arrastre de un objeto”
  - Arrastre un objeto de dimensión superior o igual a 1
  - Arrastre un punto
- Es necesario institucionalizarlo
- Esquema de uso de “búsqueda de los puntos que se pueden mover”
- Esquema de uso de “distinción de los diferentes tipos de puntos del programa”



## Sobre qué objeto?

- Identificar los objetos geométricos descritos por los puntos rojo y verde al arrastrarlos
- Construir los objetos
- Redactar un mensaje que permita reconstruir los mismos objetos utilizando solamente los puntos azules

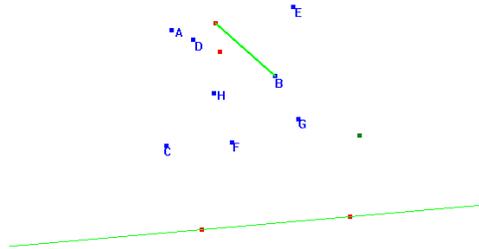
Sobre qué objetos el punto rojo y el punto verde se desplazan? Construye esos objetos. Cuidado! Solo puedes utilizar los puntos azules.



## Sobre qué objeto? Esquemas

- Esquema de acción instrumentada de “identificación del objeto-trayectoria”
- Esquema de acción instrumentada “verificar que la trayectoria pasa por un punto”
- Esquema de acción instrumentada de “materialización de una trayectoria con una recta”
- Esquema de acción instrumentada de “ajuste para satisfacer una condición”
- Esquema de acción instrumentada “arrastrar un punto para verificar una construcción”

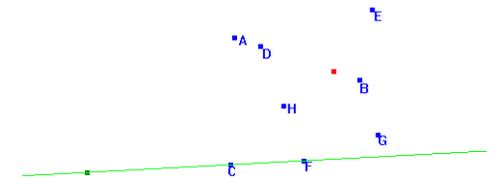
Sobre qué objetos el punto rojo y el punto verde se desplazan? Construye esos objetos. Cuidado! Solo puedes utilizar los puntos azules.



## Sobre qué objeto?

- El uso de la geometría dinámica permitió revelar concepciones de los alumnos:
  - Concepto-en-acto de recta: una recta está definida por dos puntos que se encuentran lo suficientemente lejos uno del otro
  - Teorema-en-acto: la recta que pasa por 3 puntos está determinada por esos 3 puntos

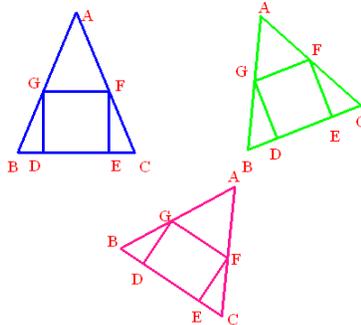
Sobre qué objetos el punto rojo y el punto verde se desplazan? Construye esos objetos. Cuidado! Solo puedes utilizar los puntos azules.





- Los alumnos abren el archivo y ven tres dibujos en una posición tal que:  $(GD) \perp (BC)$ ,  $(GD) \parallel (FE)$  et  $(GF) \parallel (BC)$
- Los alumnos deben responder a las preguntas:
  - $(DG) \perp (BC)$ ?
  - $(DG) \parallel (EF)$ ?

Para cada una de las figuras siguientes, debes decidir si:  
 a)  $(DG)$  y  $(BC)$  son perpendiculares?  
 b)  $(DG)$  y  $(EF)$  son paralelas?

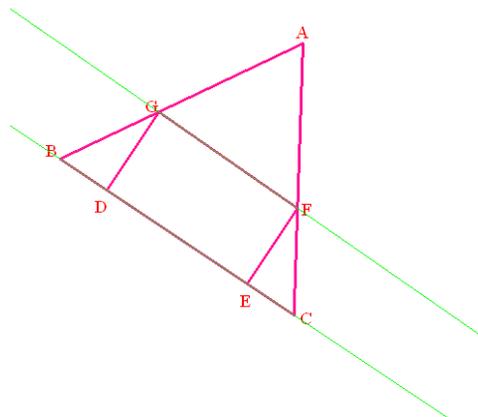


- Los alumnos deben utilizar el arrastre para decidir de la validez de las propiedades geométricas
- Puesta en común: cuando se puede decir que una propiedad geométrica es verdadera o falsa

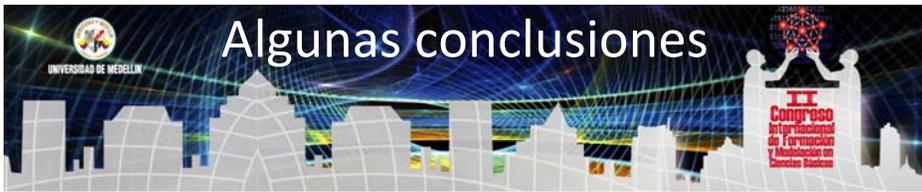
Activité "TROIS COULEURS"		
Nom Prénom : _____ Classe : _____ Date : _____		
<b>Figure Bleue</b>		
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?		
<b>Figure Verte</b>		
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?		
<b>Figure Rose</b>		
(DG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?	Réponse	Note les points que tu déplaces
(DG) et (EF) sont-elles parallèles ?		



- Esquema "Arrastrar para validar una propiedad/conjetura"
- Esquema del "dibujo contra-ejemplo obtenido al arrastrar"



- Situación clave en el proceso de apropiación del arrastre, permitió:
  - A los alumnos construir el esquema del "dibujo contra-ejemplo obtenido al arrastrar"
  - La institucionalización de este esquema en clase
  - Al profesor institucionalizar el arrastre de TODOS los puntos de la figura para decidir de la validez de las propiedades
- El invariante paralelismo lo reconocen mas fácilmente que el invariante perpendicularidad



## Algunas conclusiones

- El análisis puso en evidencia una gran variedad de esquemas que no estaban previstos a priori
- El arrastre permitió poner en evidencia concepciones de los alumnos



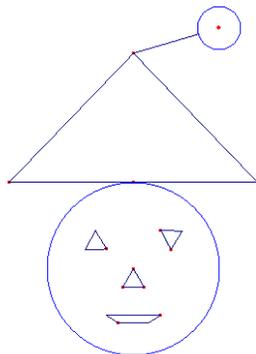
## Génesis instrumentales

- Alex y Cloe
  - Cedric e Iris
- Mismo nivel matemático (medio-)
  - Génesis instrumentales muy diferentes



## Génesis instrumentales: Geo

- Alex & Cloe
- Octubre
- Construcción del esquema de uso de “arrastre de un objeto”
- Diciembre
- Reconocen los puntos gracias a la intervención de otro alumno
- Marzo
- Mayo



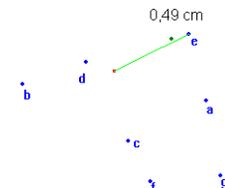
- Cedric & Iris
- Exploración de todos los arrastres posibles
  - Esquema de uso de “búsqueda de todos los puntos que se pueden mover”



## Génesis instrumentales : Sobre qué objeto?

- Alex & Cloe
- Octubre
- Cloe no logra caracterizar la trayectoria de un punto, reconoce la trayectoria rectilínea
- Diciembre
- Marzo
- Mayo

Sobre qué objetos el punto rojo y el punto verde se despl. Construye esos objetos. Cuidado! Solo puedes utilizar los puntos azules.

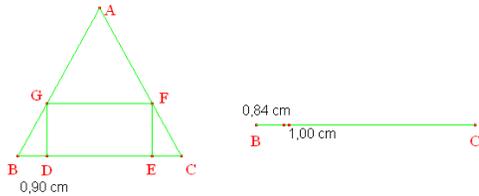


- Cedric & Iris
- Esquema “de ajuste para satisfacer una condición” aparece espontáneamente

# Génesis instrumentales : El mismo triángulo

- Alex & Chloé :  
construcción del  
esquema de  
"ajuste  
instrumentado por  
la medida"
- Octubre  
Diciembre  
Marzo  
Mayo

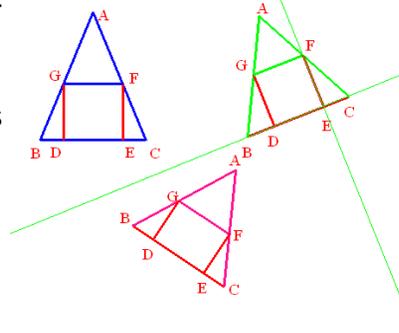
Explora la figura de izquierda y reconstruyela en la de la derecha. Para ayudarte, el segmento [BC] ya ha sido construido. Cuidado, las dos figuras deben ser iguales aun al arrastrar los puntos.



# Génesis instrumentales : A veces/Siempre verdadero

- Alex & Cloe
- Octubre  
Diciembre  
Marzo  
Mayo
- Alex quisiera decidir a partir de los dibujos estáticos
  - Cloe insiste: es necesario arrastrar para decidir de la validez de las propiedades geométricas

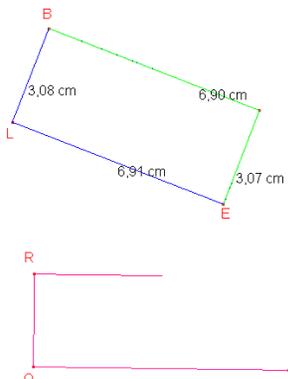
Para cada una de estas figuras, debes decidir si: (DG) y (BC) son perpendiculares? (DG) y (EF) son paralelas?



- Cedric & Iris
- validación de las propiedades instrumentada por la construcción de rectas paralelas y perpendiculares

# Génesis instrumentales : Completar los rectángulos

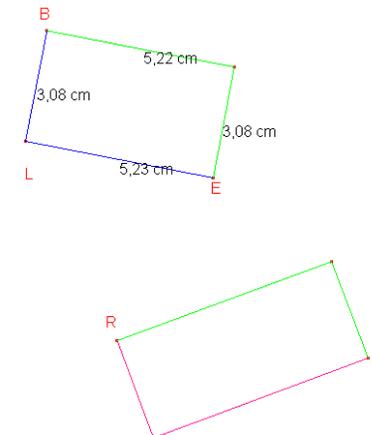
- Alex & Cloe
- Octubre  
Diciembre  
Marzo  
Mayo
- Estrategia de ajuste instrumentada por la medida
  - Uso del arrastre para validar necesita (aún!) la intervención del profesor



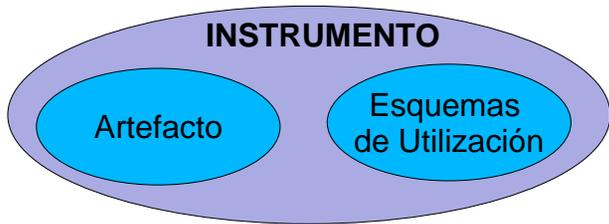
- Cedric & Iris
- cambian los datos del problema
  - Una gran dificultad a invalidar su construcción
  - intervención de un experto permite llegar a la estrategia ganadora

# Génesis instrumentales : Completar los rectángulos

- Alex & Cloe
- Octubre  
Diciembre  
Marzo  
Mayo
- Estrategia de ajuste instrumentada por la medida
  - Uso del arrastre para validar necesita (aún!) la intervención del profesor



- Cedric & Iris
- cambian los datos del problema
  - Una gran dificultad a invalidar su construcción
  - intervención de un experto permite llegar a la estrategia ganadora

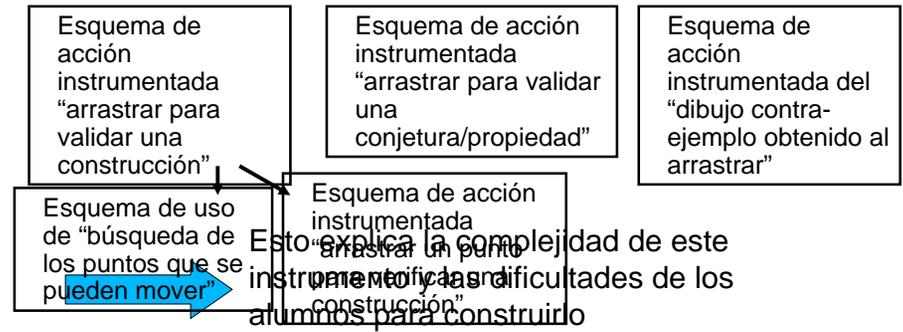


• **Arrastre sin finalidad matemática**

- Esquema de uso de "arrastrar un punto"
- Esquema de uso de "búsqueda de los puntos que se pueden mover"
- Esquema de uso de "distinción de los diferentes tipos de puntos del programa"



• **Arrastre para validar una construcción :**



- Alumnos de un mismo nivel escolar no tienen las mismas génesis instrumentales
- Todos los alumnos construyen el arrastre para ajustar, pero algunos no lo construyen tan rápidamente
- El arrastre para invalidar aparece mas temprano que el arrastre para validar
- El arrastre para validar, más complejo, no lo alcanzan, pero se apoya en el esquema de "búsqueda de los puntos que se pueden mover" y la regla de acción "es necesario mover todos los puntos" la cual fue adquirida por todos luego de una institucionalización

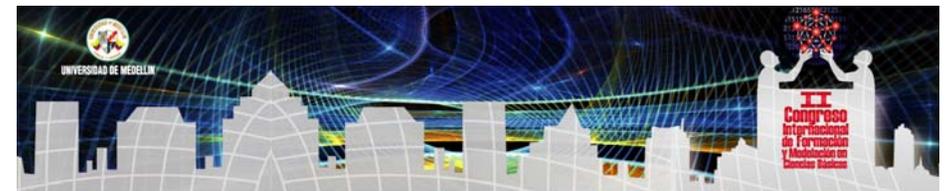


- **Qué instrumentos arrastre construyeron los alumnos durante la génesis instrumental?**
  - El arrastre para encontrar la trayectoria de un punto (menos Cloe)
  - El arrastre para ajustar, instrumentado o no
  - El arrastre para invalidar una construcción
- **Los instrumentos más difíciles de construir:**
  - El arrastre para constatar las variaciones durante el movimiento
  - El arrastre para validar una construcción

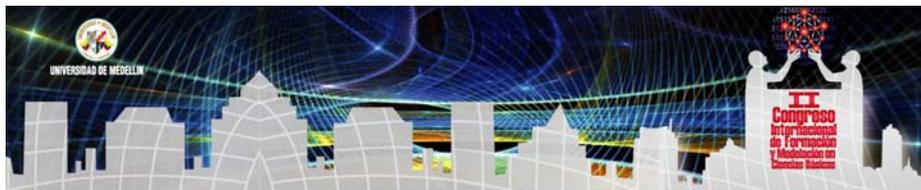


## Preguntas de investigación

- Los alumnos toman la responsabilidad de la validación de sus construcciones usando el arrastre?
  - Los alumnos si toman la responsabilidad de la validación de sus construcciones usando el arrastre. Lo utilizan de manera espontánea y en general logran invalidar sus construcciones, sin embargo el instrumento no es completamente funcional



Gracias



## DIFERENTES USOS Y DIFICULTADES DE APROPIACIÓN DEL "ARRASTRE" EN CABRI-GEOMETRY

Angela María Restrepo S.

Universidad de los Andes

[am.restrepo253@uniandes.edu.co](mailto:am.restrepo253@uniandes.edu.co)



REPOSITORIO DIGITAL DE DOCUMENTOS  
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

<http://funes.uniandes.edu.co/>