

## CAPÍTULO 5

### **ÁREAS DE REGIONES SOMBREADAS ENTRE POLÍGONOS Y PORCIONES CIRCULARES**

BLANCA LILIA ARENAS, NELSON H. LIZARAZO, MAURICIO MEDINA,  
JUAN CARLOS RUBIANO Y MARÍA JOSÉ GONZÁLEZ

En el siguiente informe, presentamos el trabajo que desarrollamos como estudiantes del programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes en el periodo 2012-2014. Presentamos la planificación e implementación de una unidad didáctica en cuatro fases: el diseño previo, la implementación, la evaluación y la propuesta final.

El tema matemático que abordamos en la unidad didáctica es el de áreas de regiones sombreadas entre polígonos y porciones circulares. Este tema está ubicado dentro de la geometría métrica plana. Con la elaboración de la unidad didáctica, pretendemos contribuir a mitigar los inconvenientes que los estudiantes pueden presentar en el aprendizaje del tema y que los docentes pueden tener al orientarlo.

Para elaborar la unidad didáctica, hicimos un estudio del tema con base en cuatro análisis: (a) el análisis de contenido, en el que el foco de atención es el tema matemático que se va a enseñar y se indaga sobre las diferentes perspectivas y significados que puede tener un tema; (b) el análisis cognitivo, en el que el foco de atención es el aprendizaje de los estudiantes y se realiza una descripción de lo que el profesor espera que el estudiante aprenda sobre el contenido matemático y el modo como va a desarrollar este aprendizaje; (c) el análisis de instrucción, en el que el foco de atención es la enseñanza y se hace un estudio y descripción de qué medios dispone el profesor para alcanzar sus propósitos; y (d) el análisis de actuación, en el que el foco de atención es la evaluación y se planifica el seguimiento del aprendizaje de los escolares y del proceso de enseñanza.

Implementamos la unidad didáctica en la institución educativa pública IED Técnico-Comercial de Tocancipá, con un grupo de estudiantes de grado noveno. Esta institución atiende a familias de la zona urbana y rural, de diversas clases sociales. La mayoría de los estudiantes son hijos de familias tradicionales de la región que generalmente empiezan y terminan su ciclo educativo en la misma institución. Una minoría de estudiantes pertenece a familias de población flotante que, por sus condiciones de trabajo, se trasladan continuamente.

El grupo de estudiantes que elegimos para implementar la unidad didáctica se caracteriza por tener un historial de bajo rendimiento académico. La mayoría de los estudiantes son repitentes y se caracteriza por falta de responsabilidad académica, de interés y de concentración. Ellos no aprovechan los recursos y las oportunidades que brinda la institución. Además, se observa en ellos falta de motivación por el aprendizaje de las matemáticas y poca conciencia de su bajo nivel de desempeño académico.

La unidad didáctica inicia con la presentación del tema y una tarea diagnóstica en la que se busca detectar y fortalecer los conocimientos previos requeridos para su desarrollo. Otras sesiones se dedican al desarrollo de tareas, con el fin de alcanzar los objetivos planificados. Las sesiones finales se dedican a la evaluación del aprendizaje por medio de exámenes que, junto con la percepción de los estudiantes y la del profesor, proporcionan información para los procesos de realimentación necesarios para la superación de las dificultades.

El proceso de enseñanza-aprendizaje no termina con la implementación de la unidad didáctica, sino que, son sus resultados y la información recogida los que permiten un análisis profundo sobre el alcance de logros en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para ello, realizamos un análisis crítico de los aspectos fuertes y débiles de todo el trabajo realizado, tanto de la planificación como de la implementación. Como consecuencia de este balance, planteamos una nueva unidad didáctica en la que se buscó potenciar las fortalezas y diluir las debilidades.

Resumimos los aportes de mayor relevancia de esta propuesta en los siguientes aspectos: (a) valoramos el trabajo de los estudiantes introduciendo una concepción de evaluación que integra lo cuantitativo con lo cualitativo; (b) planificamos tareas con diseños que ofrecen diferentes perspectivas de solución y por tanto mejores resultados de aprendizaje; (c) generamos motivación en los estudiantes al participar de su proceso de evaluación; (d) creamos un material didáctico que aporta a la propuesta significatividad y motivación

por el aprendizaje de nuestro tema; y (e) estimulamos el trabajo en grupo y la interacción entre estudiantes y con el docente.

Iniciamos este informe con el planteamiento del problema. Luego, detallamos el diseño previo de la unidad didáctica y su fundamentación. En seguida, exponemos los instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de información. Después, describimos el diseño implementado y la forma como se aplicó. Posteriormente, presentamos los procesos de análisis y valoración de la unidad didáctica implementada que complementamos con una evaluación de todo el proceso realizado. Finalmente, presentamos el nuevo diseño de la unidad didáctica, justificamos cada una de las mejoras realizadas al diseño previo y proponemos las conclusiones del trabajo realizado.

## 1. Formulación del problema

El tema de la propuesta didáctica se encuentra incluido en la planeación del área de matemáticas y geometría de la institución y es acorde con los estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). No obstante, el tema prácticamente no se enseña por dos razones. Por una parte, la limitada intensidad horaria en el área hace que el docente dé mayor importancia a otras temáticas no menos relevantes y deje para el final el desarrollo de algunos temas de geometría, como el de la presente propuesta. Por otra parte, la escasez de propuestas metodológicas y estrategias adecuadas para la enseñanza y aprendizaje del tema, así como su desconocimiento por parte del profesor, hacen que se evite su implementación. Desde nuestra experiencia docente, el principal inconveniente en el aprendizaje de nuestro tema radica en que los estudiantes carecen de habilidades para la aplicación de procedimientos geométricos de visualización de formas geométricas que componen una región sombreada y sus posibilidades de recomposición. La propuesta también surge con motivo de los débiles resultados en matemáticas de pruebas internas y externas en nuestras instituciones. De ahí que, a nivel local, los docentes permanentemente busquemos metodologías y estrategias de enseñanza que permitan mantener o mejorar el desempeño educativo en la clasificación a nivel regional y nacional.

La propuesta didáctica se fundamenta en los lineamientos y estándares curriculares del MEN (2006). Desde los lineamientos curriculares, nuestro trabajo orienta la enseñanza haciendo énfasis en cuatro de los cinco pensamientos de la matemática: el numérico, el variacional, el métrico y el espacial.

Desde los estándares curriculares, la unidad didáctica fomenta la evolución de las competencias matemáticas asociadas al logro de objetivos por medio del desarrollo de los procesos generales.

La unidad didáctica ofrece una alternativa metodológica y didáctica a docentes de matemáticas como principales responsables del diseño y desarrollo del currículo de la enseñanza y de los resultados del proceso educativo. También ofrece a los estudiantes herramientas para la superación de dificultades que se pueden presentar al hallar áreas de regiones sombreadas. Finalmente, esta propuesta propicia el desarrollo de competencias matemáticas que contribuyen a la superación de diversas dificultades y a la mejora de la calidad educativa.

## 2. Fundamentación y diseño de la unidad didáctica

El diseño de la unidad didáctica de áreas de regiones sombreadas entre polígonos y regiones circulares tiene como propósito final contribuir a que los estudiantes calculen esas áreas. Para este diseño, realizamos cuatro tipos de análisis: (a) de contenido, (b) cognitivo, (c) de instrucción y (d) de actuación. Cada uno de estos análisis se centra en una dimensión del currículo (Rico, 1997, p. 409), como mostramos en la figura 1. A continuación, detallamos cada análisis.

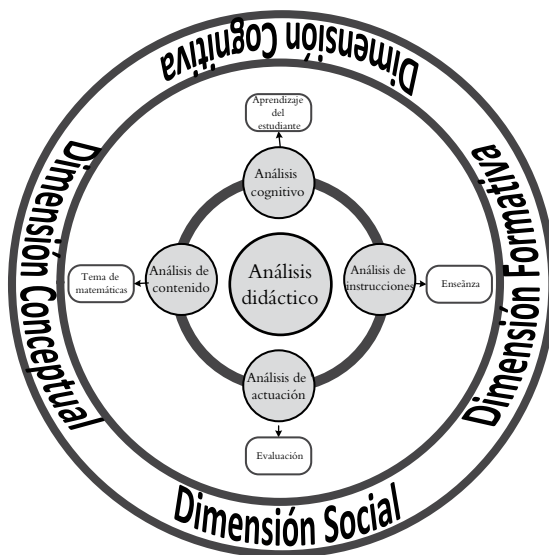


Figura 1. Análisis didáctico y dimensiones del currículo

## 1. Análisis de contenido

En el análisis de contenido, el foco de atención es el tema matemático que se va a enseñar. En este análisis, indagamos sobre las diferentes perspectivas y significados que puede tener un tema. Para ello, producimos información sobre la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología del tema.

### 1.1. Estructura conceptual

Para identificar los diferentes significados del tema, realizamos una clasificación cognitiva del contenido en elementos del campo conceptual y procedimental.

#### *Hechos*

Los hechos se componen de (a) los términos (lado, ángulo, altura, base, apotema, cateto, triángulo, cuadriláteros, pentágono, hexágono, eneágonos, circunferencia, círculo, medida, centro, radio, diámetro, pi y conjuntos); (b) las notaciones (raíces, potencias, medidas y fórmulas); (c) los convenios (ángulo agudo, rectángulo y obtusángulo, áreas, y composición y recomposición de formas planas, unión, intersección, y complemento); y (d) los resultados (la clasificación de ángulos y triángulos, el cálculo de longitudes, las razones de semejanza de triángulos y la relación entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo).

#### *Conceptos*

Los conceptos aglutinan un conjunto de hechos y sus relaciones. Los conceptos en el tema que nos ocupa son la relación entre medidas de segmentos y ángulos (en polígonos y en la circunferencia), la circunferencia, el círculo y sus elementos, las formas planas, las transformaciones en el plano, la medición y las operaciones básicas entre conjuntos.

#### *Estructuras*

Las estructuras son un sistema de conceptos que se relacionan entre ellos. Las estructuras de nuestro tema son las formas planas (polígonos y círculo, y sus elementos), las propiedades métricas (teorema de Pitágoras, paralela media, teoremas de cateto y altura, entre otros), y las áreas de figuras planas (fórmulas y técnicas de descomposición y de completado).

### *Destrezas*

Las destrezas son acciones que se ejecutan sobre los hechos. Para nuestro tema, las destrezas son las siguientes: construir un triángulo equilátero, clasificar polígonos en regulares e irregulares, reconocer un polígono por el número de sus lados, identificar elementos de los polígonos y del círculo, hallar potencias y raíces, identificar simbología de la teoría de conjuntos y utilizar adecuadamente instrumentos de medición.

### *Razonamientos*

Los razonamientos son acciones que se ejecutan procesando conceptos. Para nuestro tema, los razonamientos son los siguientes: reconocer cada una de las transformaciones en el plano, identificar las representaciones geométricas de operaciones entre conjuntos, reconocer y representar figuras planas como los triángulos, los cuadriláteros, los círculos y las porciones circulares en una región sombreada, y aplicar las fórmulas correspondientes que permitan calcular áreas y longitudes mediante el uso del teorema de Pitágoras.

### *Estrategias*

Las estrategias son las acciones que se ejecutan sobre estructuras. Para nuestro tema, las estrategias son las siguientes: identificar cómo están compuestas las áreas de regiones sombreadas en las que se incluyen polígonos y porciones circulares, y construirlas; calcular áreas sombreadas mediante procedimientos geométricos y aritméticos; y verificar la coherencia de los resultados con el problema.

Para concluir el análisis del tema, elaboramos mapas conceptuales que relacionan aspectos esenciales de los elementos anteriores. Hemos descrito los conceptos y procedimientos anteriores teniendo en cuenta dos perspectivas: la estructura de la geometría plana en la que se ubica el tema y el tema de áreas de regiones sombreadas entre polígonos y porciones circulares, como mostramos en las figuras 2 y 3.

En la figura 2, el mapa muestra como eje central la geometría métrica plana, con cuatro núcleos de atención, señalados con líneas punteadas: (a) polígonos, y círculo y sus elementos; (b) propiedades geométricas que permiten calcular longitudes (teoremas); (c) descomposición y completado de figuras planas; y (d) procesos de cálculo de áreas (métodos de cálculo directo e indirecto con fórmulas). En la figura 3, mostramos la estructura del mapa conceptual del tema.

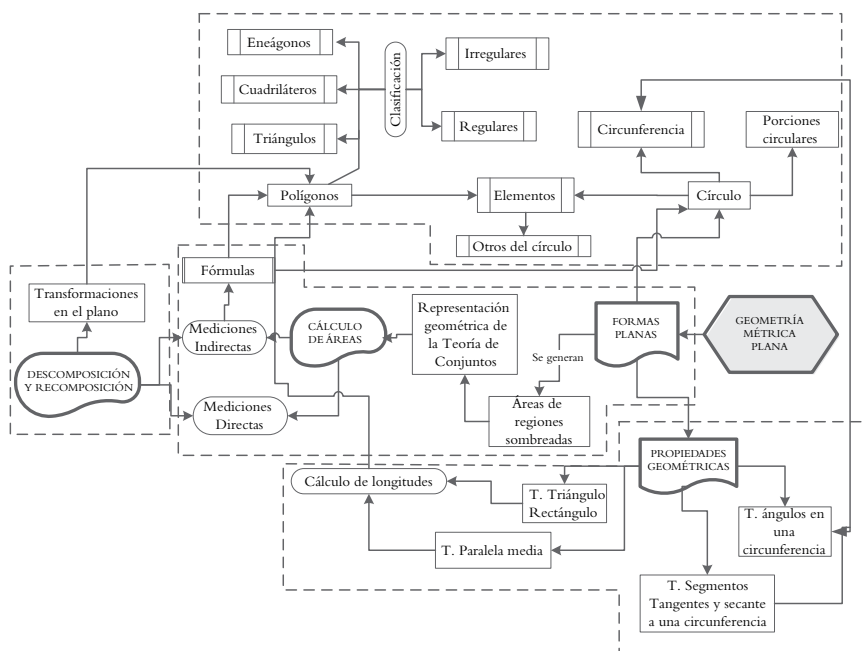


Figura 2. Mapa conceptual de la estructura matemática en la que se ubica el tema

El mapa conceptual del tema presenta básicamente dos núcleos de atención, señalados con líneas punteadas: (a) construcción de áreas de regiones sombreadas y (b) cálculo de áreas de regiones sombreadas (métodos de cálculo directo por descomposición o descomposición y recomposición, y métodos de cálculo indirecto por medio de fórmulas de áreas y teoremas para hacer inferencia de otras medidas).

## 1.2. Sistemas de representación

Identificar los sistemas de representación en las áreas sombreadas constituye un aspecto relevante desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje del tema. Esta información le permite al docente ampliar el campo de acción en la planeación y ejecución de su quehacer en el aula. Al estudiante le puede resultar motivante y facilitarle los procesos de aprendizaje. Teniendo en cuenta la relación con la estructura conceptual, los sistemas de representación utilizados en nuestro tema son los siguientes: numérico, simbólico, geométrico, verbal, pictórico y ejecutable. Describimos brevemente estos sistemas de representación a continuación.

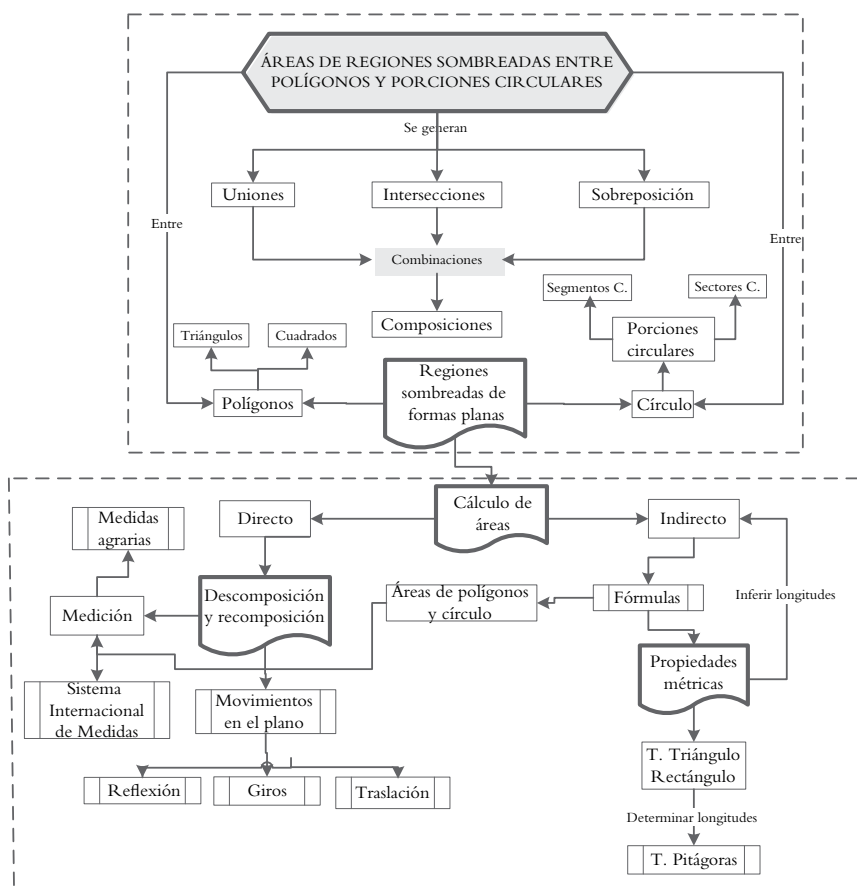


Figura 3. Mapa de la estructura conceptual del tema

### *Sistema de representación numérico*

Los números reales son el conjunto numérico que abarca nuestro tema. Estos números se utilizan para reemplazar fórmulas y expresiones que permiten el cálculo de las áreas de polígonos (como el triángulo, los cuadriláteros y los hexágonos) y el área del círculo y sus porciones. Algunos ejemplos del sistema de representación numérico son los siguientes.

- $L = (2)(3,14)(3)$
- $A = \sqrt{(12)(8)}$
- $h = (2)(8)$
- $h^2 = 16$



- $A = \frac{6 \times 4 \times 2}{2}$

### *Sistema de representación simbólico*

El sistema de representación simbólico está conformado por una serie de fórmulas establecidas para representar superficies sombreadas y calcular áreas. En este sistema de representación, se utilizan números, letras y signos de operaciones, que permiten generar transformaciones sintácticas invariantes de una expresión, como se detallará más adelante. A continuación, presentamos algunos ejemplos.

- $A = \pi r^2$
- $A = \frac{n \times l \times a}{2}$
- $A = \frac{\pi \times r^2 \times \alpha}{360^\circ} - A\Delta$
- $h^2 = x^2 + y^2$
- $As = \pi r^2 - l^2$ .

### *Sistema de representación geométrico*

El sistema de representación geométrico es uno de los sistemas de mayor significación en nuestro tema. La mayoría de las situaciones de aplicación de áreas de regiones sombreadas se presenta en este sistema de representación y motiva la relación entre los sistemas de representación geométrico y simbólico, como mostramos en la figura 4.

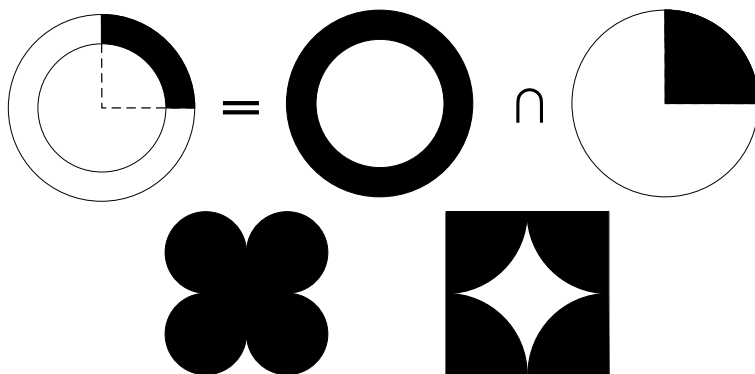


Figura 4. Representación geométrica

### *Sistema de representación verbal*

El sistema de representación verbal permite expresar con palabras los conceptos geométricos, métricos y numéricos, las fórmulas y las regiones sombreadas, entre otros. A continuación presentamos algunos ejemplos.

- El área de un círculo es igual a  $\pi$  por el radio al cuadrado.
- El área de un triángulo es igual al semiproducto de la medida de la base y de la altura.
- El área del segmento circular es igual al cociente entre el producto del valor de  $\pi$  con la medida del radio elevado al cuadrado con el ángulo y  $360^\circ$ , disminuida el área del triángulo.
- El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

### *Sistema de representación ejecutable*

El sistema de representación ejecutable es importante en nuestro análisis, ya que permite una mejor comprensión de los movimientos en el plano cuando se realizan descomposiciones y recomposiciones para calcular áreas de regiones sombreadas. El software GeoGebra es una herramienta que nos permite mostrar visualmente movimientos de trozos de superficies de una región sombreada, como mostramos en la figura 5.

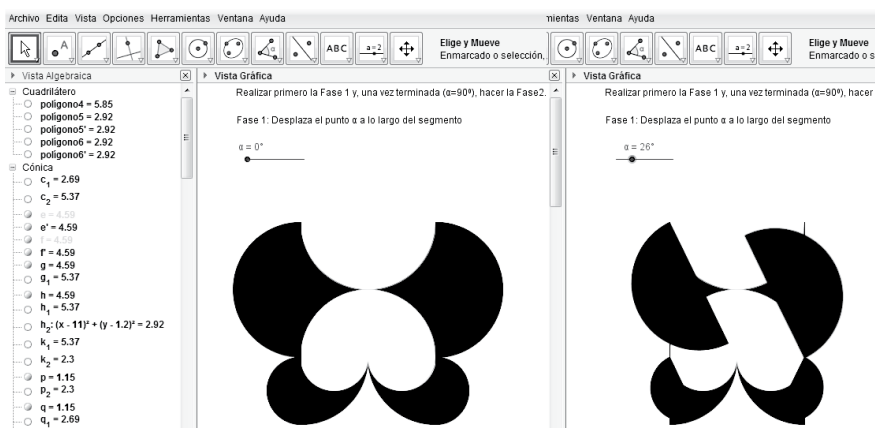


Figura 5. Sistema de representación ejecutable

A continuación, presentamos, de manera esquemática en la figura 6, los sistemas de representación utilizados en el desarrollo de nuestro tema y

las relaciones que surgen entre ellos. En este mapa conceptual, los rombos simbolizan los sistemas de representación para nuestro tema; los rectángulos explican de forma general los núcleos de cada sistema de representación; las tarjetas son un ejemplo de cada sistema de representación; y las líneas punteadas indican las relaciones que se establecen entre los sistemas de representación.

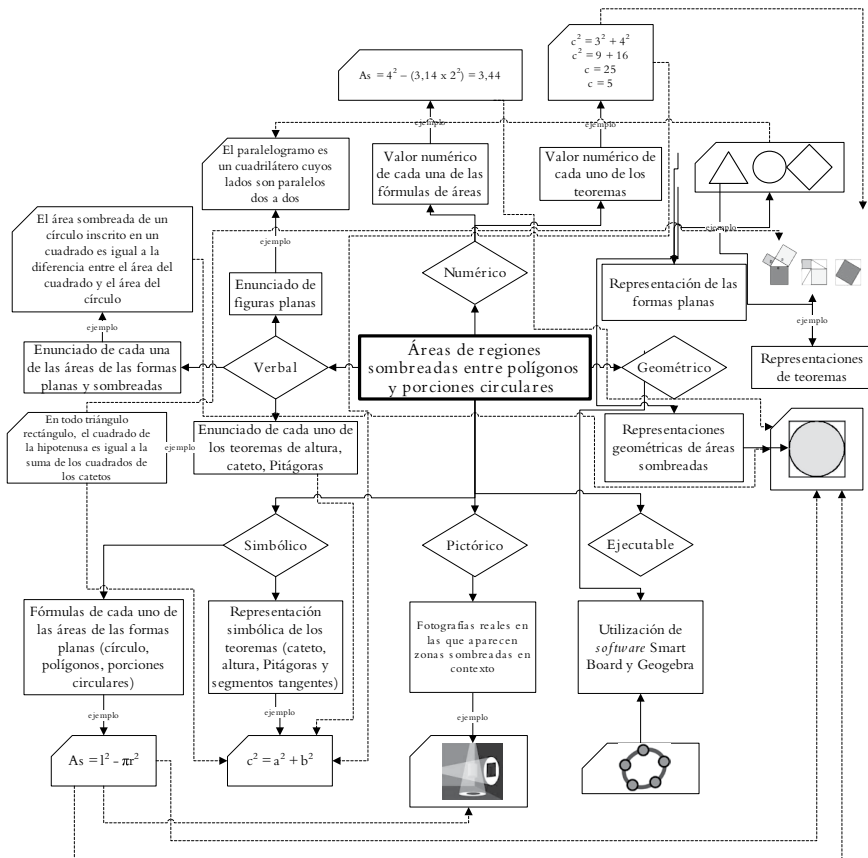


Figura 6. Relaciones entre sistemas de representación

Además de identificar los sistemas de representación del tema, también establecimos traducciones y transformaciones sintácticas entre los sistemas de representación. Estas traducciones se dan al pasar de un sistema a otro. Existen dos clases de transformaciones: las variantes y las invariantes. Las variantes transforman el significado y las invariantes no, como detallamos a continuación.

*Transformaciones sintácticas variantes*

En nuestro tema, una transformación sintáctica variante se presenta cuando se pasa de un círculo que se encuentra inscrito en un cuadrado a un cuadrado inscrito en el círculo, con el correspondiente cambio en el área de la figura, como mostramos en la figura 7.

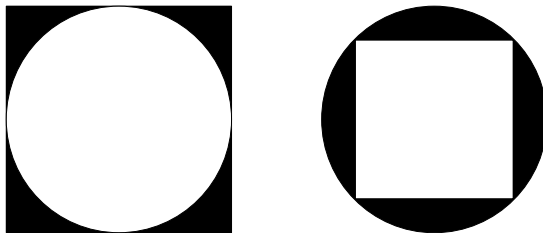


Figura 7. Transformación sintáctica variante

*Transformaciones sintácticas invariantes*

La transformación sintáctica invariante se presenta cuando el área sombreada no varía si el área está descompuesta o recompuesta, o el valor de  $\pi$  no cambia al reemplazar el valor del diámetro por dos veces el radio de la circunferencia o al escribir el valor en número irracional. Lo mismo sucede con las distintas fórmulas para el cálculo del área de un polígono regular: podemos intercambiar el producto del número de lados por el valor del lado con el perímetro de la figura sin que varíe el resultado, como lo mostramos en la figura 8.

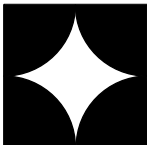
Área sombreada	Número $\pi$	Área de polígono regular
	$\pi = \text{longitud} / \text{diámetro}$ $\pi = \text{longitud} / 2r$ $\pi = 3,1415\dots$	$A = (n \times l \times a) / 2$ $A = (\text{perímetro} \times a) / 2$

Figura 8. Transformación sintáctica invariante

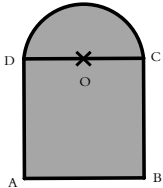
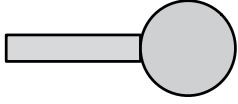
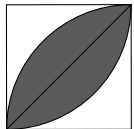
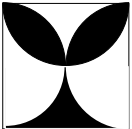
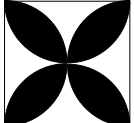
**1.3. Fenomenología**

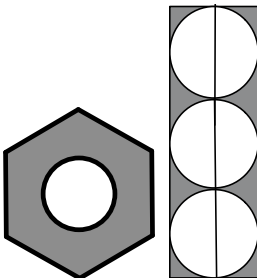
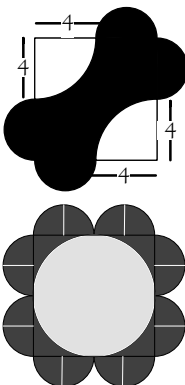
La fenomenología da sentido práctico al propósito de establecer una relación entre una estructura matemática y los grupos de fenómenos asociados a ella. Permite dar respuesta a interrogantes como: ¿qué fenómenos dan sentido al

tema? (fenómenos), ¿qué subestructuras permiten organizar los fenómenos que dan sentido al tema? (subestructuras), ¿para qué se utiliza el tema o a qué problemas da respuesta? (contextos) y ¿en qué situaciones está presente el tema? (situaciones).

Los fenómenos que dan sentido a nuestro tema se presentan por medio de subestructuras y ejemplos que representan regiones sombreadas resultantes de (a) la suma de dos o más figuras geométricas básicas (unión), (b) el cruce parcial de dos o más figuras geométricas básicas (intersección), (c) la superposición completa de dos o más figuras geométricas básicas (sobreposición) y (d) la combinación de dos o más subestructuras (composición). Cada subestructura tiene asociados contextos que agrupan fenómenos que se pueden clasificar de acuerdo con situaciones laborales, públicas, personales o científicas. Resumimos estas ideas y presentamos algunos ejemplos en la tabla 1.

Tabla 1  
*Fenomenología*

Subestructuras y contextos	Ejemplos de áreas sombreadas	Ejemplos de fenómenos	Situaciones			
			La	Pu	Pe	Ci
Unión		Diseño y construcción de puertas, ventanas	✓			
		Moldes para llaves		✓		
		Silueta de un muñeco			✓	
Intersección		Elaboración de moldes para modistería	✓		✓	
		Siluetas de plantas				
		Elaboración de vitrales para ventanas	✓			

			Situaciones			
Subestructuras y contextos	Ejemplos de áreas sombreadas	Ejemplos de fenómenos	La	Pu	Pe	Ci
Sobreposición		Tuercas	✓			
		Elaboración de empaques	✓			
		Área que ocupa la silletería en una plaza de toros		✓		
Composición		Cortes de porcelanacrón			✓	
		Silueta del poporo		✓		
		Silueta de un hueso			✓	

Nota: La=Laboral o educativa; Pu= Pública; Pe=Personal; Ci= Científica

2. Análisis cognitivo

Con base en el análisis de contenido que acabamos de presentar, pasamos ahora a otro foco de atención: el aprendizaje de los estudiantes. Para realizar este análisis, describiremos (a) las expectativas de tipo afectivo y cognitivo que pretendemos que los estudiantes desarrollen sobre el tema de estudio y los conocimientos previos que se requieren para el éxito de la unidad didáctica; (b) las posibles limitaciones de aprendizaje que se pueden presentar durante el desarrollo del tema; y (c) las hipótesis del profesor sobre el modo como los estudiantes aprenderán el tema a través de lo que llamaremos caminos de aprendizaje.

### *2.1. Expectativas de tipo afectivo*

Las expectativas afectivas se relacionan con las creencias, actitudes y emociones. Como una estrategia fundamental en la que lo afectivo contribuya a potenciar el aprendizaje, nuestras expectativas afectivas se relacionan con el aumento de la autoestima y motivación del estudiante por el desarrollo de actividades de tipo matemático y geométrico. Enumeramos a continuación las expectativas afectivas que hemos establecido.

1. Demuestra actitud frente a su aprendizaje.
2. Reconoce la presencia de las matemáticas en situaciones de la vida cotidiana.
3. Siente confianza y persevera en el planteamiento y solución de situaciones problemáticas.
4. Establece retos que le permitan lograr un nivel de excelencia que corresponda a su etapa de desarrollo.
5. Utiliza un lenguaje apropiado que le permita comunicar de manera eficaz sus ideas y experiencias.
6. Genera ambientes de confianza que estimulen su autoestima y el libre pensamiento crítico-analítico.

### *2.2. Expectativas de tipo cognitivo*

Organizamos las expectativas de aprendizaje en tres niveles: competencias, objetivos, y capacidades y secuencias de capacidades.

#### *Competencias*

Una competencia es una meta que se alcanza tras un proceso de largo recorrido. Para nuestro tema, elegimos trabajar de acuerdo con los procesos generales (MEN, 2006, pp. 51-55), dado que son los que rigen nuestro sistema educativo. Con el desarrollo de nuestra unidad didáctica, pretendemos fortalecer principalmente los siguientes procesos generales: resolución y planteamiento de problemas, comunicación y razonamiento. Escogimos estas competencias como ejes en nuestro tema. No obstante, hay que tener en cuenta que no podemos desligar la modelación de la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Aunque estos procesos pueden ser activados por el escolar en un momento dado, el estudio está orientado al análisis y solución de figuras sombreadas mediante procesos aritméticos y geométricos.

*Objetivos*

Los objetivos son expectativas de aprendizaje que no pueden reducirse a la realización de procedimientos de tareas rutinarias en las que se involucra un contenido específico. Para nuestro tema pretendemos alcanzar el logro de los siguientes objetivos.

1. Utilizar métodos geométricos de descomposición y recomposición en regiones sombreadas entre polígonos y porciones circulares para generar áreas básicas como triángulos, rectángulos y círculos.
2. Utilizar procedimientos aritméticos para el cálculo de áreas de regiones sombreadas entre polígonos y porciones circulares.
3. Analizar y solucionar situaciones problema que hacen necesaria la optimización de recursos que involucran áreas de regiones sombreadas.

*Capacidades y secuencias de capacidades*

Las capacidades son actuaciones de los estudiantes cuando ejecutan procedimientos rutinarios con respecto a cierto tipo de tarea asociada a un tema matemático. Las capacidades se manifiestan mediante conductas observables que generan información. Las secuencias de capacidades son agrupaciones de capacidades para las que es posible interpretar su función en el proceso de resolución de una tarea, como mostramos en la tabla 2.

Tabla 2  
*Capacidades y secuencia de capacidades de tarea Carfisombras*

Capacidades		Secuencias de capacidades	
Cod.	Descripción	Cod.	Descripción
C1	Reconoce el círculo y sus porciones circulares como el sector circular (semicírculo, cuadrante y sector circular general) y segmento circular en figuras con superficies sombreadas		
C2	Identifica polígonos como el cuadrado, rectángulo, triángulo y polígono regular (pentágono y hexágono) en figuras con superficies sombreadas	SC1	Identifica formas planas, sus elementos y diferentes posiciones en una región sombreada
C3	Identifica la intersección de dos círculos como la unión de dos segmentos circulares		
C4	Identifica regiones sombreadas iguales ubicadas en diferente posición		
C8	Identifica sombras compuestas de regiones repetidas		



Capacidades		Secuencias de capacidades	
Cod.	Descripción	Cod.	Descripción
C5	Diferencia en una representación geométrica, una unión, una intersección y un complemento entre formas básicas de una región sombreada	SC2	Realiza procesos de descomposición y recomposición geométrica por medio de métodos de cuadriculación o triangulación y las representa
C6	Une, intersecta o sobrepone formas básicas para construir regiones sombreadas dadas		
C7	Reproduce regiones sombreadas a partir de uniones, intersecciones y sobreposiciones con formas básicas		

*Nota:* Cod. = código.

Antes de enunciar las capacidades, tomamos en cuenta los conocimientos previos necesarios para asegurar el éxito de las expectativas planificadas. En el anexo 1, presentamos el listado completo de capacidades y conocimientos previos. A continuación, presentamos los que se prevén para la tarea Carfisombras.

### *Tarea Carfisombras*

En grupos de cuatro estudiantes, se arman parejas para jugar en contra. Cada pareja toma una carta al azar y debe reproducir con las formas geométricas planas la sombra de la carta, utilizando uniones, intersecciones o sobreposiciones para lograrlo. El grupo que reproduzca más sombras es el ganador.

En esta tarea, se pretende que el estudiante reproduzca regiones sombreadas al utilizar material Carfisombras que nosotros elaboramos. Este material se compone de unas cartas, cada una con una sombra y formas geométricas planas básicas de dos colores, como más adelante se detallará. Para la ejecución de esta tarea, se requiere de unos conocimientos previos como los que enumeramos a continuación.

*CP1.* Identificar diferentes figuras planas.

*CP3.* Identificar los elementos y las clases de triángulos.

*CP7.* Identificar los elementos de la circunferencia y las relaciones entre ellos.

*CP8.* Reconocer las diferentes posiciones de dos circunferencias.

*CP9.* Identificar elementos de los polígonos regulares.

### 2.3. Limitaciones del aprendizaje

Las limitaciones de aprendizaje pueden estar originadas por distintas causas (sociales, familiares, debidas a la cultura escolar o a la secuenciación curricular). Para nuestro análisis, nos centraremos solo en la descripción cognitiva de dichas limitaciones en el ámbito de los contenidos matemáticos, sin tomar en cuenta las causas que las originan. Bajo este planteamiento, hablaremos de dificultades y errores.

#### *Dificultades y errores*

Una dificultad de aprendizaje es una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos y se manifiesta mediante los errores en los que incurren los estudiantes al realizar tareas matemáticas concretas. En el anexo 2, presentamos el listado completo de dificultades y errores planificados para nuestro tema. En la tabla 3, mostramos un ejemplo de las dificultades y errores que se prevén para la tarea Carfisombras.

Tabla 3  
*Dificultades y errores de una tarea*

Dificultades	Cod.	Errores
		Descripción
Dificultad para identificar algunos conceptos geométricos y sus propiedades en situaciones en las que no vienen dados de forma explícita	E1	Confunde la cuerda del segmento con el radio del círculo
	E2	Confunde el radio con el diámetro de un círculo
	E3	Supone que todos los radios de los círculos de una figura sombreada son iguales
	E4	Confunde la altura de un triángulo con la longitud del lado del polígono
	E5	Supone que el lado de un cuadrado y la longitud de su diagonal son iguales
Dificultades para descomponer y recomponer	E13	No incluye algún trozo sombreado
	E14	Añade algún trozo no sombreado
	E15	Se le dificulta unir, intersectar o sobreponer formas básicas para construir regiones sombreadas dadas

*Nota:* Cod. = código.

### 2.4. Caminos de aprendizaje

Los caminos de aprendizaje de una tarea representan todas las estrategias que se prevén que los estudiantes pueden activar para resolverla. A continuación,

mostramos cómo, a partir de los grafos de secuencias de capacidades de las tareas Carfisombras y Descompusombras, produjimos el grafo de secuencias de capacidades del objetivo 1.

#### *Grafos de secuencias de capacidades de tareas*

Para la elaboración del grafo de secuencias de capacidades de una tarea, se deben tener en cuenta todas las posibles secuencias de capacidades que el estudiante puede activar para solucionar una tarea. Asociamos a las secuencias de capacidades los errores en los que el estudiante puede incurrir al ejecutarlas durante el desarrollo de la tarea. En la figura 9, presentamos el camino de aprendizaje de la tarea Carfisombras.

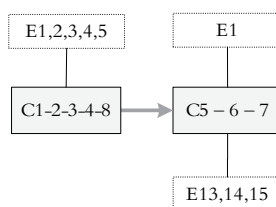


Figura 9. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea Carfisombras

El grafo está compuesto de dos secuencias de capacidades: una de identificación de figuras geométricas básicas y la otra del uso de uniones, intersecciones y superposiciones de figuras básicas para reproducir una sombra. Cada secuencia de capacidades tiene una agrupación de capacidades, como ya mostramos en la tabla 2. En este caso, el grafo es muy lineal y no presenta otras estrategias de solución de la tarea. En la figura 10, presentamos el grafo de secuencias de capacidades de la tarea Descompusombras. La ficha de esta tarea se encuentra en el anexo 3.

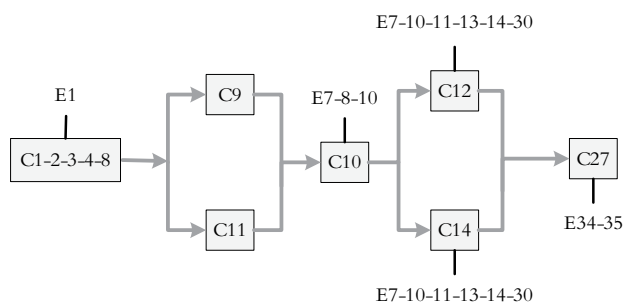
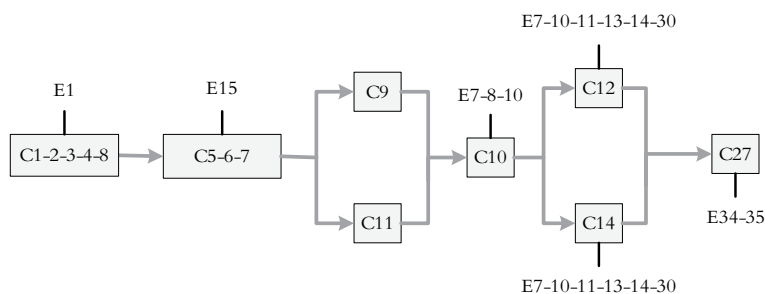


Figura 10. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea Descompusombras

Este grafo de secuencias de capacidades se inicia con la secuencia de capacidades de identificación de figuras geométricas básicas. Luego, hay dos posibles caminos para continuar: la capacidad de cuadrricular o triangular la región sombreada y la capacidad de identificar regiones sombreadas iguales. Posteriormente, estas capacidades convergen en la secuencia de capacidades de descomposición de una región sombreada, para luego desplegarse otros dos posibles caminos: descomponer y recomponer en una figura geométrica básica, y descomponer para reconfigurar otras regiones sombreadas. El grafo termina con la secuencia de capacidades de argumentación de los procedimientos realizados.

#### *Grafo de secuencias de capacidades de un objetivo*

Para elaborar el grafo de secuencias de capacidades de un objetivo, se deben tener en cuenta las secuencias de capacidades que conforman cada uno de los grafos de secuencias de capacidades de las tareas asociadas al objetivo. Es como si se superpusieran los dos grafos y se hiciera una unión entre ellos. Esto debe ser equivalente al recorrido de secuencias de capacidades necesarias para alcanzar el objetivo planeado. Para este caso, solo hay una secuencia de capacidades en común (la identificación de figuras geométricas básicas) que representamos una sola vez. En la figura 11, presentamos el grafo de secuencias de capacidades del objetivo 1.



*Figura 11.* Grafo de secuencias de capacidades del objetivo 1

El grafo de secuencias de capacidades del objetivo 1 está compuesto por secuencias de capacidades que activan los conocimientos necesarios para el cálculo de áreas de regiones sombreadas. La primera secuencia contiene capacidades que se relacionan con la identificación de figuras geométricas básicas y sus elementos. La segunda secuencia de capacidades permite reconocer

representaciones geométricas menores en el interior de un área sombreada. La tercera y cuarta secuencia de capacidades son de paso —se refieren a la cuadriculación y congruencia de áreas— y conllevan a una quinta secuencia de capacidades relacionada con la descomposición de áreas. La sexta y séptima representan dos estrategias diferentes de descomposición y recomposición de áreas básicas. Estas secuencias de capacidades convergen en las dos secuencias de capacidades que involucran la relación de la descomposición de diferentes formas planas y la argumentación de los procesos realizados. En el anexo 4, presentamos los grafos de secuencias de capacidades de todas las tareas y objetivos.

### 3. Análisis de instrucción

En el análisis de instrucción, nos centramos en la enseñanza. Se trata de planificar las tareas y la selección de los medios con los que el profesor puede contribuir al logro de los objetivos de aprendizaje por parte de sus estudiantes. Para alcanzar este propósito, a continuación, describimos los materiales y recursos que usaremos en la unidad didáctica, describimos las tareas y sus componentes, y analizamos en qué medida y de qué forma esas tareas contribuyen al desarrollo de los objetivos de aprendizaje.

#### 3.1. *Materiales y recursos de la unidad didáctica*

Los materiales y recursos son los elementos utilizados en el aula que contribuyen a potenciar el proceso de enseñanza y a influir en la dimensión afectiva del aprendizaje para lograr una mejor actitud y motivación. Los recursos son elementos que no han sido diseñados específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado. Los materiales son instrumentos que han sido diseñados con fines educativos. Para nuestra unidad didáctica, utilizamos como recursos: marcador, tablero, libro de texto, cuaderno, lápices, esferos, instrumentos de medición calculadora, tijeras y video beam.

Como material utilizamos guías de trabajo y el Carfisombras. El Carfisombras fue un material diseñado por los miembros del grupo. Está compuesto por 24 cartas elaboradas en cartón e impresas en color, y un conjunto de figuras básicas elaboradas en plástico de color negro y blanco, como se observa en la figura 12. Las figuras básicas están compuestas por círculos, semicírculos, cuadrantes, triángulos, cuadrados y sectores de  $30^\circ$ , y segmentos circulares de varios tamaños.

Este material contribuye al aprendizaje de la construcción de áreas sombreadas y motiva a los estudiantes. Además, permite que el estudiante utilice y relacione los sistemas de representación pictórico, geométrico y verbal. Los estudiantes ponen en juego los sistemas de representación pictórico y geométrico cuando reproducen la región sombreada que está representada en la carta, y el sistema de representación verbal, cuando expresan o justifican los procedimientos realizados.

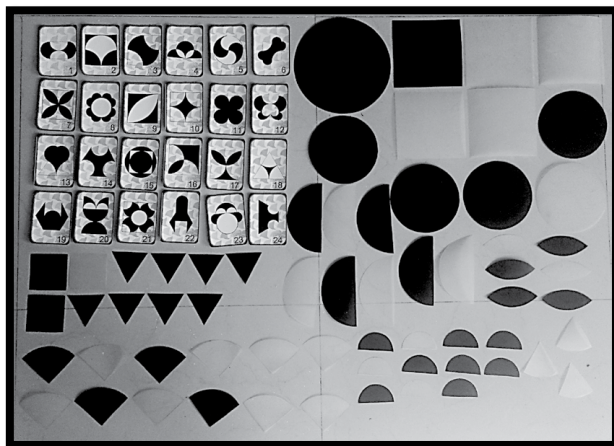


Figura 12. Cartas y fichas de Carfisombras

### 3.2. Tareas y sus componentes

Llamamos tarea a una propuesta que demanda del estudiante una actividad relacionada con las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje. Las tareas de nuestra unidad didáctica se complementan entre ellas y configuran una secuencia. Es decir, el éxito de una tarea depende del éxito de la anterior. Proponemos dos tareas para cada objetivo: Carfisombras y Descompusombras para el objetivo 1; Calcusombras e Igualdades para el objetivo 2; y Vitral y Poporo para el objetivo 3.

Una tarea matemática se puede describir en términos de ocho componentes: (a) su formulación (es decir, los estímulos que inducen a los alumnos a realizar la actividad de aprendizaje); (b) su meta (que establece de qué manera la tarea pretende contribuir a los objetivos de aprendizaje); (c) los materiales y recursos; (d) las capacidades que se activan al usar los materiales y recursos para lograr la meta; (e) el contenido matemático que desarrolla

la tarea, tanto en su intención educativa como el necesario para resolver la tarea matemática; (f) la situación de aprendizaje (es decir, el contexto en el que adquieren significados las acciones que se contemplan en la tarea); (g) los agrupamientos de los alumnos para realizar las tareas; y (h) la interacción que se promueve entre los alumnos y el profesor y entre los alumnos. En la tabla 4, presentamos la descripción de cada componente de la tarea Carfisombras. En el anexo 5, presentamos los componentes de las demás tareas.

Tabla 4  
*Componentes de la tarea Carfisombras*

Componente	Descripción
Formulación	Se presenta una actividad en la que los estudiantes deben reproducir una región sombreada con el material Carfisombras, dada una representación pictórica. Posteriormente, los estudiantes deben justificar los procedimientos realizados
Meta	Que el estudiante con el material de Carfisombras, identifique y reproduzca una región sombreada a partir de procedimientos de unión, intersección y superposición de figuras geométricas básicas
Materiales y recursos	Carfisombras (cartas y fichas con las figuras geométricas básicas)
Capacidades	Las capacidades que consideramos se activan en esta tarea son la C1, C2, C3, C4, C8, C5, C6 y C7 (véase la tabla 2)
Contenido matemático	Uniones, intersecciones y complementos entre figuras geométricas básicas y la representación geométrica de las regiones sombreadas
Situación de aprendizaje	A pesar de que la tarea se plantea en un contexto de matemáticas académicas, los estudiantes responden a la propuesta del profesor en una situación de actividad lúdica muy motivadora
Agrupamiento	Cuatro estudiantes, por pares en contra
Interacciones	El profesor interviene al comienzo para presentar el material y la tarea que se pretende que los alumnos resuelvan. En el desarrollo de la tarea, el docente actúa como conductor, impone el ritmo, motiva, soluciona inquietudes o dificultades, estimula para que todos los integrantes del grupo participen y favorece la superación de los errores en los que incurran. Por su lado, los alumnos interactúan entre ellos, discuten acerca de la mejor forma de resolver la tarea, coordinan los movimientos de las figuras geométricas básicas para reproducir la región sombreada y argumentan sobre los procedimientos realizados.

### *3.3. Análisis de las tareas*

Analizamos la tarea desde tres perspectivas. Primero, con base en el grafo de secuencias de capacidades de la tarea, establecimos la medida en que ella contribuye a lograr conocimientos específicos, activar secuencias de capacidades y superar errores para los que se ha diseñado. Segundo, establecimos la complejidad de la tarea, en términos del grado en que ella contribuye a las competencias previstas. Para hacer esta valoración, utilizamos los niveles de complejidad de PISA (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE], 2003, pp. 42-49): reproducción, conexión y reflexión. En el nivel de reproducción, las tareas son ejercicios relativamente familiares que exigen básicamente la reiteración de conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes. En el nivel de conexión, las tareas plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación. En el nivel de reflexión, las tareas requieren creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distinta procedencia, y exigen generalizaciones y justificación de resultados. Finalmente, determinamos la significatividad de la tarea, en términos de qué tan familiar la tarea es para los estudiantes, en qué medida implica conocimientos previos, si plantea retos y si les permite a los estudiantes reconocer su nivel de aporte a la solución de la tarea. A continuación, presentamos el análisis de la tarea Carfisombras. Presentamos el análisis de las demás tareas en el anexo 6, en el que se incluyen las fichas de planificación.

#### *Previsiones*

La tarea Carfisombras activa secuencias de capacidades de identificación y uso de procedimientos de unión, intersección y sobreposición entre figuras geométricas básicas para la reproducción de regiones sombreadas y para la argumentación de los procedimientos. Estas secuencias de capacidades contribuyen parcialmente al objetivo 1, ya que hasta aquí solo se logra que el estudiante construya regiones sombreadas y el objetivo pretende que luego descomponga y recomponga las regiones sombreadas. La tarea también ayuda a superar errores de identificación y posición de figuras geométricas al reproducir una región sombreada dada.



### *Complejidad*

El nivel de complejidad en el que se encuentra la tarea Carfisombras depende de la dificultad de la construcción de las sombras de las cartas. Así, por ejemplo, las sombras de las cartas 4, 10 y 15 son del nivel de reproducción, ya que son familiares para los estudiantes, dado que las figuras que componen las regiones sombreadas son fáciles de identificar. Las sombras de las cartas 1, 6 y 8 se ubican en el nivel de conexión, debido a que se requiere de composiciones de figuras geométricas. Y las sombras de las cartas 7, 9 y 17 se ubican en el nivel de reflexión, debido a que requieren de creatividad y justificación de resultados para generar los segmentos circulares de los que se componen las sombras.

### *Significatividad*

La tarea Carfisombras es significativa porque (a) propone identificar figuras geométricas básicas que son familiares a los estudiantes como los triángulos, los cuadriláteros y los círculos; (b) requiere utilizar conocimientos matemáticos previos relacionados con la unión, intersección y la superposición, junto con la identificación de las figuras geométricas básicas que son necesarias para la reproducción de regiones sombreadas; (c) plantea un reto, ya que los estudiantes deben reproducir la figura en un tiempo menor que el de su oponente, lo que le genera una competencia con su par y lo motiva a actuar; y (d) permite que el mismo estudiante pueda comparar sus respuestas, al comparar la representación de la carta con lo que él realizó.

## **4. Diseño definitivo para la implementación**

En la tabla 5, presentamos el diseño de las sesiones que conforman la unidad didáctica del tema. Incluimos en la tabla la presentación del tema, la tarea diagnóstica, los objetivos y las tareas, la recolección de información, el examen parcial, el examen final de la unidad didáctica, los procesos de realimentación y el cuestionario de la unidad. El conjunto de tareas, procedimientos e instrumentos de evaluación será desarrollado en sesiones de sesenta minutos y se estima un tiempo aproximado de 13 sesiones para el desarrollo de la unidad didáctica.

Tabla 5  
*Diseño de la unidad didáctica*

Actividades y tareas	Función	Sesión	Min
Inicio			
Presentación del tema: objetivos, tareas, metodología, evaluación e instrumentos	Compartir y explicar a los estudiantes el modo como se desarrollará y evaluará la unidad didáctica	1	20
TD: El cuadro artístico	Indagar los conocimientos previos de los estudiantes, necesarios para el desarrollo de la unidad		40
Realimentación de la tarea diagnóstica	Reforzar conocimientos previos	2	15
Objetivo 1			
Criterios de logro del objetivo	Compartir y explicar a estudiantes	2 y 3	10
Carfisombras	Reconocimiento de figuras básicas que componen una región sombreada		95
Descompusombras	Cuadriculación o triangulación de regiones sombreadas para descomponer o recomponer	4	50
Examen parcial del objetivo	Actividad individual	5	60
Realimentación del objetivo	Actividad gran grupo	6	60
Objetivo 2			
Recapitulación del objetivo 1	Interrelacionar los objetivos 1 y 2	7 y 8	10
Criterios de logro del objetivo	Compartir y explicar a estudiantes		10
Calculusombras	Encontrar el área de una región sombreada	9	80
Igualdades	Probar una igualdad entre regiones sombreadas		50
Realimentación del objetivo	Actividad gran grupo	10	60
Objetivo 3			
Recapitulación	Interrelacionar los objetivos 2 y 3	11 y 12	15
Criterios de logro del objetivo	Compartir y explicar a estudiantes		
Vitral	Aplicación de las regiones sombreadas a un contexto	12	65
Poporo			
Realimentación del objetivo	Actividad de gran grupo		60

Actividades y tareas	Función	Sesión	Min
Final			
Examen final del objetivo	Actividad individual	13	60
Cuestionario final y observaciones	Actividad de gran grupo	14	60

## 5. Justificación del diseño previo

Las tareas contribuyen tanto a los objetivos de aprendizaje como a las expectativas afectivas. Basamos el diseño de las tareas para la unidad didáctica en tres de los cinco procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje matemático según el MEN (1998): razonamiento, resolución y planteamiento de problemas y comunicación. En la tabla 6, presentamos la contribución de las tareas a los procesos generales del MEN escogidos para el desarrollo de la unidad didáctica.

Tabla 6

*Contribución al desarrollo de los procesos generales del MEN*

Proceso general	Razonamiento	Resolución de problemas	Comunicación
Objetivo 1			
Carfisombras			✓
Descompusombras			✓
Objetivo 2			
Calculusombras	✓		
Igualdades	✓		
Objetivo 3			
Vitral	✓	✓	
Poporo	✓	✓	

Diseñamos las tareas del objetivo 1 con el fin de motivar y generar interacciones entre estudiantes, y entre estudiantes y el docente. Por esta razón, estas tareas contribuyen a la competencia de comunicación. Las tareas del objetivo 2 y del objetivo 3 desarrollan en gran parte el razonamiento del

estudiante. En estas actividades, él debe relacionar los procedimientos aritméticos con los geométricos para poder determinar el área de una región sombreada. Diseñamos el objetivo 3 con el fin de contribuir a la competencia de resolución de problemas. Estas tareas también desarrollan el razonamiento.

### *5.1. Contribución de las tareas al logro de los objetivos*

Además de motivar a los estudiantes, las tareas del objetivo 1 (Carfisombras y Descompusombras) inducen a los estudiantes a activar las siguientes secuencias de capacidades: identificación de figuras geométricas básicas y sus elementos, cuadriculación y triangulación de regiones sombreadas, y descomposición y recomposición de áreas básicas por medio de procedimientos netamente geométricos.

Las tareas del objetivo 2 (Calculusombras e Igualdades) están en el núcleo de la unidad didáctica. Estas tareas inducen a los estudiantes, a partir de los procedimientos desarrollados en las tareas anteriores, a encontrar el área de una región sombreada por medio de procedimientos algebraicos.

Con las tareas del objetivo 3 (Vital y Poporo), buscamos contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Son tareas dentro de contextos no matemáticos que activan procedimientos geométricos y algebraicos para encontrar el área de una región sombreada.

### *5.2. Contribución de las tareas al desarrollo de las expectativas de tipo afectivo*

Con las tareas Carfisombras y Descompusombras, buscamos generar ambientes de confianza que estimulen la autoestima y el libre pensamiento crítico-analítico de los estudiantes. Por esa razón, son tareas sencillas, visualmente llamativas, sin procedimientos aritméticos y con múltiples soluciones.

Con las tareas Calculusombras e Igualdades, buscamos contribuir al logro del segundo objetivo, sin descuidar la motivación adquirida y el proceso realizado en las tareas anteriores. Estas tareas tienen diseños que son llamativos para los estudiantes e implican contextos cercanos al estudiante. Es el caso de la tarea Calculusombras que fue contextualizada con uno de los edificios de la institución educativa.

Las tareas Vital y Poporo aportan a las expectativas de tipo afectivo desde el momento en que el estudiante relaciona el Vital con una imagen decorativa común en las iglesias y el Poporo con una imagen precolombina que muchos conocen o han visto. Las tareas están dentro de un problema

en el que, aparte de utilizar los procedimientos geométricos y aritméticos, también deben comprender y llegar a una respuesta acorde con el enunciado.

## **6. Instrumentos de recolección y análisis de la información**

El análisis de actuación se centra en la planificación del seguimiento del aprendizaje de los estudiantes y del mismo proceso de enseñanza. A continuación, presentamos los instrumentos de recolección y análisis de la información, junto con sus procedimientos y el sistema de evaluación.

### ***6.1. Instrumentos de recolección de la información***

Los instrumentos para la recolección de la información se planifican de acuerdo con tres intenciones de evaluación: (a) activación de conocimientos en los estudiantes; (b) percepción de los estudiantes sobre lo que aprenden y cómo lo aprenden; y (c) percepción del profesor sobre el aprendizaje de los estudiantes y el diseño de la unidad didáctica. A continuación, describimos cuatro instrumentos de recolección de información: las tareas y exámenes, el diario del estudiante, el cuestionario final y el diario del profesor.

#### ***Tareas y exámenes***

La tarea diagnóstica recoge información sobre los conocimientos previos que se requieren para el buen desarrollo de la unidad didáctica. Las tareas de aprendizaje y el examen recogen información sobre la activación de las secuencias de capacidades necesarias para lograr los objetivos. El examen se encuentra en el anexo 7.

#### ***Diario del estudiante***

El diario del estudiante recoge información sobre los dominios cognitivos y afectivos de los estudiantes. El estudiante lo diligencia de forma individual, cada vez que se termina una tarea. El profesor comparte la información del diario del estudiante en la siguiente sesión.

Para registrar información del dominio cognitivo, diseñamos un grafo con los criterios de logro. En este grafo, el estudiante indica su percepción del grado con el que logró cada criterio en cada tarea. Para ello, el estudiante marca su percepción de acuerdo con unas convenciones, como mostramos en la figura 13.

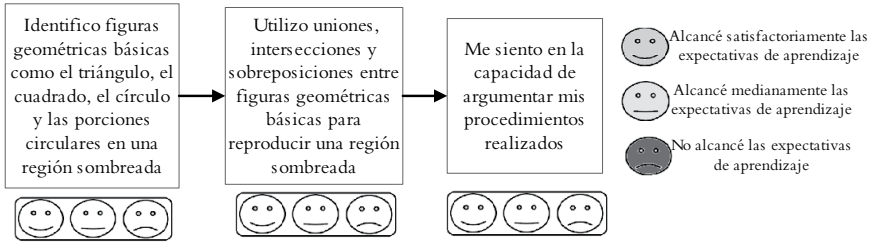


Figura 13. Diario del estudiante

Para recolectar información del dominio afectivo, elaboramos un matematógrafo. Esta herramienta permite conocer la percepción del estudiante en relación con cada uno de los aspectos de la significatividad de las tareas. El estudiante debe marcar o rellenar cada círculo de acuerdo con el nivel de satisfacción asociado a la expresión de cada pantera, como mostramos en la figura 14.

	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	Las regiones sombreadas de la tarea Carfisombras me parecieron cercanas y familiares	La tarea Carfisombra me pedía la utilización de conocimientos que ya tenía	Comprendí lo que la tarea Carfisombras me pedía y su propósito	La tarea Carfisombras me planteó reto y me despertó motivación para resolverla	Mis respuestas a la tarea Carfisombras, me permitieron reconocer mi nivel de conocimiento

Figura 14. Panterógrafo

Por último, planteamos unas preguntas que pretendían recoger información adicional a las expectativas del dominio afectivo, como ¿te gustó la actividad?, ¿sentiste frustración?, ¿se te permitió discutir y dar tus puntos de vista?, entre otras. Incluimos el diseño completo del diario del estudiante en el anexo 8.

### **6.2. Cuestionario final**

El cuestionario final nos permite recoger información sobre el grado del cumplimiento de las expectativas cognitivas y afectivas al final de la implementación de la unidad didáctica. También nos permite recoger información sobre la percepción del estudiante acerca de la metodología y los procesos de enseñanza. Para nuestro caso y en cumplimiento de lo que contempla el sistema de evaluación institucional, el cuestionario final cumple con la función de autoevaluar y coevaluar la unidad didáctica. Cada enunciado se valora de acuerdo con la escala numérica de la institución en la que se implementó la unidad didáctica.

Para diligenciarlo, se organizaron grupos de cuatro estudiantes. Estos son los mismos grupos que trabajaron durante el desarrollo de la unidad didáctica, con el fin de que la coevaluación sea lo más justa posible. Cada estudiante llena su autoevaluación y, posteriormente, dos de sus compañeros le llenan la coevaluación. Luego, el estudiante evalúa la metodología y, finalmente, saca promedios para obtener una sola valoración final cognitiva y afectiva. Presentamos el diseño del cuestionario final en el anexo 10.

### **6.3. Diario del profesor**

El diario del profesor es una planilla de observación que elaboramos para cada tarea. En esta plantilla podemos registrar las percepciones del profesor sobre los resultados o posibles ajustes que se puedan dar durante el desarrollo de la unidad didáctica. La plantilla incluye aspectos sobre la meta de la tarea, las previsiones, los materiales, los agrupamientos e interacciones, los tiempos, la complejidad, la significatividad, la función de la tarea y los ajustes. Presentamos el diseño del diario del profesor en el anexo 9.

## **7. Procedimientos de análisis de la información**

A continuación, describimos los procedimientos que utilizamos para registrar, organizar y analizar la información que recogimos con los instrumentos que presentamos en el apartado anterior.

### **7.1. Tablas de respuestas esperadas**

Para cada tarea, produjimos una tabla de respuestas esperadas. En estas tablas, registramos para cada estudiante el nivel de activación de cada secuencia de capacidades que configura el grafo de secuencias de capacidades de la tarea.

Establecimos el nivel de activación de una secuencia de capacidades con base en el número de sombras que se deben reproducir en la tarea. Explicaremos más adelante las rúbricas que dan lugar a los rangos que determinan cuándo una secuencia de capacidades se activa total o parcialmente, o no se activa. En el anexo 11, presentamos las tablas de respuestas esperadas de todas las tareas y exámenes. En la tabla 7, presentamos un ejemplo con la tabla de respuestas esperadas para la tarea Carfisombras. En esta tabla, describimos cada secuencia de capacidades (primera columna), enumeramos las respuestas esperadas (segunda columna), establecemos los criterios para cada nivel de activación (tercera columna) e indicamos el nivel de activación (cuarta columna).

Tabla 7  
*Respuestas esperadas para la tarea de Carfisombras*

Descripción	Respuestas esperadas	Criterio de activación	Niv
Secuencia de capacidades 1			
Identifica figuras geométricas básicas en un área sombreada	Identifica círculos, semicírculos y cuadrantes	Identifica cada una de las formas básicas del material didáctico	AT
	Identifica sectores de 60° y segmentos	Relaciona qué fichas del Carfisombras componen la representación pictórica de las cartas	
	Identifica cuadrados y triángulos	Identifica cada una de las formas básicas del material didáctico	AP
	Relaciona las figuras básicas identificadas con las formas que componen una región sombreada	No relaciona qué fichas del Carfisombras componen la representación pictórica de las cartas	NA
Secuencia de capacidades 2			
Reconoce mediante procedimientos como la intersección, la unión o la sobreposición de figuras geométricas básicas un área sombreada determinada	Une formas básicas para componer una región sombreada	Hace uniones, intersecciones o sobreposiciones adecuadamente entre las porciones circulares y polígonos para componer la región sombreada de la carta	AT
	Hace intersecciones entre formas básicas para componer una región sombreada	Hace uniones, intersecciones o sobreposiciones inadecuadamente entre las porciones circulares y polígonos para componer la región sombreada de la carta	AP
	Sobrepone formas básicas para componer una región sombreada	No hace uniones, intersecciones o sobreposiciones entre las porciones circulares y polígonos para componer la región sombreada de la carta	NA



Descripción	Respuestas esperadas	Criterio de activación	Niv
Secuencia de capacidades 3			
Contrasta la solución de la región sombreada con la propuesta	Contrasta la solución de su región sombreada con la representación pictórica propuesta	La reproducción realizada es igual a la representación de la carta propuesta	AT
		La reproducción realizada es parcialmente igual a la representación de la carta propuesta	AP
		La reproducción realizada no es igual a la representación de la carta propuesta	NA

*Nota:* AT = activación total; AP = activación parcial; NA = activación nula; Niv = nivel de activación.

## 7.2. Rúbricas

Una rúbrica es una guía para evaluar la actuación de un alumno ante una tarea con base en una gama amplia de criterios cualitativos. Es una alternativa al procedimiento usual de evaluar la tarea con una cantidad que representa la opinión del profesor sobre la calidad de la respuesta del alumno. Diseñamos rúbricas para todas las tareas y exámenes de la unidad didáctica. Se encuentran en el anexo 12.

## 7.3. Planillas de observación de logros

Elaboramos en Excel las planillas de observación de logros y caminos de aprendizaje con el propósito de registrar la activación de las secuencias de capacidades y los errores en los que los alumnos incurrieron. Los datos se recogieron por estudiante o grupo, según el esquema de agrupación de la tarea. Para diligenciarla, registramos con AT (activación total), AP (activación parcial) o NA (no activación) cada secuencia de capacidades a partir de la evidencia que encontramos en las tareas y los exámenes. Marcamos cada activación de secuencias de capacidades o errores con un número 1, para facilitar el conteo vertical y poder analizar cuál fue el error en que más incurrieron o la secuencia menos activada. Finalmente, de acuerdo con la tabla de respuestas esperadas y la rúbrica establecimos la evaluación del estudiante, como se muestra en la figura 15. En el anexo 13, presentamos todas las planillas de observación de logros de la unidad didáctica.

I.E.D. DE BACHILLERATO TÉCNICO COMERCIAL																	
Grado Noveno																	
Planilla de observación de logros y caminos de aprendizaje																	
		iden figuras geometr					union inters					contrasta					
Objetivo 1	GRUPO	SC1					SC2					SC3			Observaciones	Evaluación alumno	
Tarea Carfisombras		Activación			Errores		Activación			Errores		Activación					
ALUMNOS		AT	AP	NA	E1	E8	E13	AT	AP	NA	E1	E8	E13	AT			AP
Estudiante 1	Grupo 1	1				1	1			1			1	1			Superior
Estudiante 2																	
Estudiante 3																	
Estudiante 4																	
Estudiante 5	Grupo 2																Superior
Estudiante 6		1					1			1		1	1				
Estudiante 7																	
Estudiante 8																	
Estudiante 9	Grupo 3																Alto
Estudiante 10																	
Estudiante 11		1					1			1		1	1				
Estudiante 12																	
Estudiante 13	Grupo 4																Superior
Estudiante 14		1					1			1		1	1				
Estudiante 15																	
Estudiante 16																	
Estudiante 17	Grupo 5																Alto
Estudiante 18																	
Estudiante 19		1					1	1		1		1	1				
Estudiante 20																	
Estudiante 21	Grupo 6																Alto
Estudiante 22																	
Estudiante 23		1						1		1		1	X				
Estudiante 24																	
Estudiante 25	Grupo 7																Superior
Estudiante 26																	
Estudiante 27		1					1	1				1	1				
Estudiante 28																	
Estudiante 29	Grupo 8																Alto
Estudiante 30																	
Estudiante 31		1					1	1		1		1	1				
Estudiante 32																	
Estudiante 33																	

Figura 15. Planilla de observación de logros y caminos de aprendizaje de la tarea Carfisombras

## 8. Sistema de evaluación

En la IED Técnico Comercial de Tocancipá, un estudiante reprueba una asignatura o un área cuando su valoración final está en el rango de 1 a 6,4 inclusive. Este rango corresponde a desempeño bajo en la escala nacional. La evaluación final debe corresponder a una valoración integral del estudiante, que tenga en cuenta si alcanzó o no los logros y adquirió o no las competencias básicas necesarias. En la tabla 8, presentamos la equivalencia institucional con la escala nacional.

Tabla 8  
*Escala de desempeños de la evaluación institucional*

Escala institucional	Escala nacional
9,5 a 10	Superior
8,0 a 9,4	Alto
6,5 a 7,9	Básico
1 a 6,4	Bajo

Organizamos el sistema de evaluación de la unidad didáctica de acuerdo con los lineamientos generales del sistema de evaluación de la institución. Por esta razón, se valora por objetivos. Para la valoración de la unidad didáctica, se tienen en cuenta el 15 % para la dimensión afectiva (autoevaluación y coevaluación) y el 85 % para la dimensión cognitiva (tareas y exámenes), de acuerdo con lo establecido en el área de matemáticas de la institución. En la tabla 9, presentamos el sistema de evaluación de la unidad didáctica.

Tabla 9  
*Sistema de evaluación de la unidad didáctica*

Aspectos que se evalúan	Instrumentos	
	Recolección de la información	Valoración de la información
De tipo cognitivo (85 %)		
Objetivo 1	Tarea Carfisombras Tarea Descompusombras	Planilla de observación Rúbrica de la tarea
Objetivo 2	Tareas Calcusombras Tarea Igualdades Examen parcial	Planilla de observación Rúbrica de la tarea Rúbrica del examen parcial
Objetivo 3	Tarea Vitral Tarea Poporo	Planilla de observación Rúbrica de las tareas
Unidad didáctica	Examen final	Rúbrica del examen final
De tipo afectivo (15 %)		
Expectativas afectivas	Cuestionario final	Formato de autoevaluación y coevaluación

### 3. Implementación de la unidad didáctica

En este apartado, describimos el proceso de implementación de la unidad didáctica, establecemos las diferencias entre lo planificado y lo implementado, y presentamos los cambios realizados sobre la marcha durante la implementación.

#### 1. Descripción del proceso de implementación

La tarea diagnóstica, con la que iniciamos la implementación, nos permitió verificar los conocimientos previos y plantear una realimentación a los estudiantes antes de iniciar la unidad didáctica. Presentamos la unidad didáctica por medio de una introducción visual en la que mostramos las posibles utilidades del tema, las tareas asociadas a los objetivos, el diario del estudiante como nuevo instrumento de evaluación y el sistema de evaluación de toda la unidad didáctica.

Al iniciar cada una de las tareas, siempre dimos a conocer la meta de la tarea, el objetivo al que pretendía contribuir y el grafo de criterios de logro de ese objetivo de aprendizaje. Al iniciar una nueva tarea, realizamos una recapitulación con el fin de conectar tareas y objetivos. Terminada cada una de las tareas, los estudiantes diligenciaron su diario y el profesor recapituló sobre el trabajo realizado hasta el momento.

Cada objetivo se evaluó por medio de un examen. Los estudiantes también respondieron un cuestionario final. La información de tipo afectivo se recogió mediante el diario del profesor, las observaciones de clase y algunos videos. Recogimos la información cognitiva por medio de las producciones escritas de los estudiantes y sus sustentaciones verbales. Las ayudas previstas, como las visuales, las fichas mnemotécnicas y las aclaraciones del profesor, fueron fundamentales en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. La dificultad que más se presentó fue la aplicación del teorema de Pitágoras.

#### 2. Diferencias entre la planificación y la implementación

A continuación, describimos detalladamente las diferencias entre lo planificado y lo implementado para cada una de las tareas.

##### 2.1. *Carfisombras*

La tarea Carfisombras necesitó dos horas para su desarrollo, debido a que demandó más tiempo del previsto. Por otro lado, improvisamos un formato para

recoger información de resultados, debido a que la tarea no tenía planificado ningún instrumento que cumpliera con esta función.

## *2.2. Descompusombras*

La tarea Descompusombras necesitó más tiempo por dos razones. En primer lugar, la reproducción de la sombra generó demora. En segundo lugar, se evidenció en los estudiantes dificultades con los procesos de descomposición y recomposición de las áreas sombreadas propuestas. Con el propósito de lograr un mejor desempeño y equidad en el trabajo, se conformaron grupos de dos estudiantes.

## *2.3. Calcusombras*

Durante el desarrollo de la tarea Calcusombras, hubo tres docentes que acompañaron y ayudaron a orientar a los estudiantes. Cambiamos el diario del estudiante, porque los caminos de aprendizaje y los criterios de logro cambiaron, debido a que detectamos errores en la agrupación de capacidades. Aumentamos el tiempo previsto, debido a que los estudiantes manifestaron dificultades para calcular longitudes utilizando el teorema de Pitágoras. Modificamos la tarea. Eliminamos dos sombras con el propósito de que la tarea se ajustara a los niveles de complejidad pretendidos y contribuyera a la misma meta. Adicionamos un anexo con las sombras para evitar su reproducción pictórica. La experiencia con la tarea de Descompusombras nos mostró que este procedimiento requiere tiempo. Además, eliminamos algunas instrucciones de las tareas que se podían orientar de forma verbal. Es el caso, por ejemplo, de la instrucción “omitir indicaciones y aspectos sobre agrupamientos, interacciones, etc.”.

## *2.4. Igualdades*

En la tarea Igualdades, modificamos el diario del estudiante, para ajustarlo a los cambios en los grafos de secuencias de capacidades y de criterios de logro. Eliminamos una sombra. La tarea requirió más tiempo del previsto, porque los estudiantes manifestaron dificultades para determinar la igualdad entre las dos regiones indicadas.

## *2.5. Vitral y Poporo*

Estas dos tareas no se implementaron debido a que el desarrollo de la unidad didáctica nos permitió observar que las demandas cognitivas asociadas a las

tareas del objetivo 3 ya estaban contempladas en el objetivo 2. Por tanto, el aprendizaje pretendido ya había sido desarrollado.

#### **4. Análisis y evaluación de la unidad didáctica implementada**

En este apartado, analizamos los logros cognitivos y afectivos, con base en la información que recogimos durante la implementación de la unidad didáctica. Esta información surge del desarrollo de las tareas, los exámenes, el cuestionario final y los diarios del escolar y del profesor. Abordamos el análisis y valoración de resultados por tareas y objetivos. Describimos la valoración de logros para las tareas de Carfisombras, Descompusombras y el examen parcial del objetivo 1. Presentamos el análisis de las demás tareas y objetivos en el anexo 14.

Tabulamos los resultados alcanzados por los estudiantes durante la implementación de la unidad didáctica en las planillas de observación de logros, activación de secuencias de capacidades y errores presentados. Hacemos la valoración de acuerdo con el nivel de desempeño en el desarrollo de las tareas y los exámenes y atendiendo a la activación total, parcial y nula de las secuencias de capacidades más determinantes en cada tarea. En el caso de los errores, centramos la atención en aquellos que presentaron un mayor promedio porcentual.

##### **1. Valoración de logros cognitivos del objetivo 1**

Para establecer la valoración de logros cognitivos en los estudiantes, analizamos la información recogida con base en las respuestas esperadas, las rúbricas de las tareas y exámenes, y el sistema de evaluación de la institución. Valoramos cada uno de estos aspectos a partir de la activación de secuencias de capacidades de mayor peso en la tarea y los errores presentados. La valoración de los alcances de logro obtenidos en las dos tareas y el examen generan el nivel de alcance de logros cognitivos por objetivo. Al tener en cuenta los logros de los dos objetivos, obtenemos la valoración de logros de la unidad didáctica.

##### ***1.1. Carfisombras y Descompusombras***

En las tablas 10 y 11, presentamos los ponderados de activación total, parcial y nula de las secuencias de capacidades y los errores de mayor frecuencia para las tareas Carfisombras y Descompusombras del objetivo 1.

Tabla 10

*Activación de secuencias de capacidades y errores de la tarea Carfisombras*

SdC	Activación			Errores más frecuentes			
	T	P	N	E1	E8	E13	E15
1	100 %			13 %	75 %	50 %	
2	50 %	50 %					100 %
3	100 %						

*Nota:* SdC = secuencia de capacidades; T = activación total, P = activación parcial; N = activación nula

De acuerdo con los datos de la tabla 10, en las secuencias de capacidades 1 y 3, los estudiantes activaron totalmente las secuencias de capacidades, aunque incurrieron en errores que no eran determinantes para el alcance de la tarea. En la secuencia 2, la mitad de los estudiantes presentó dificultades al identificar formas sombreadas compuestas por medio de uniones, intersecciones y sobreposiciones. Este resultado pareciera ser contradictorio con la activación obtenida en la secuencia 3, pues la activación de una secuencia de capacidades es prerequisite para la siguiente. Este hecho se explica porque, a pesar de que los estudiantes incurrieran en errores, las ayudas brindadas en su momento por los docentes permitieron superar esas dificultades y continuar con la activación de la siguiente secuencia.

En cuanto a los errores más recurrentes, observamos que el 100 % de estudiantes presentó el error E15 que pone de manifiesto sus dificultades para realizar procedimientos de unión, intersección y sobreposición, al reproducir con el material Carfisombras el modelo dado. De la misma manera, un 75 % de los estudiantes incurrió en el error E8 (ignorar las formas básicas que componen la región dada) y la mitad de los estudiantes incurrió en el error E13 (no distinguir las diferencias entre el modelo dado y la reproducción realizada). En la tabla 11, presentamos el análisis de la tarea Descompusombras.

En la tabla 11, podemos observar, como aspecto relevante, que la secuencia de capacidades 1, relacionada con la identificación de figuras geométricas básicas, no presentó mayor dificultad para los estudiantes. No obstante, las secuencias de capacidades 4, 5, 6 y 7, relacionadas con los procesos de descomposición y recomposición de áreas sombreadas, presentan porcentajes altos de activación parcial y nula, mientras que la activación total disminuye. Observamos porcentajes relativamente bajos de errores frecuentes. Esto se debe a que la tarea se desarrolló en grupo y, por ende, todo el grupo incurría

en el mismo error. El error E35 fue el que presentó un porcentaje mayor. Este error está relacionado con dificultades para justificar los procedimientos realizados y llevarlos a un contexto.

Tabla 11

*Activación de secuencias de capacidades y errores de la tarea Descompusombras*

SdC	Activación			Errores más frecuentes								
	T	P	N	E1	E8	E11	E14	E35	E39	E43	E45	E46
1	65 %	35 %		6 %	6 %							
4	41 %	35 %	24 %		6 %							
5	53 %	35 %	12 %			6 %	6 %			6 %	18 %	
6	53 %	35 %	12 %			6 %	12 %	65 %	12 %	18 %		18 %
7	35 %	65 %										

*Nota:* SdC = secuencia de capacidades; T = activación total, P = activación parcial; N = activación nula

## 1.2. Examen parcial

En la tabla 12, presentamos los porcentajes de activación total, parcial y nula de las secuencias de capacidades y los errores de mayor frecuencia en el examen parcial del objetivo 1. Los porcentajes resultan de la valoración del examen parcial de acuerdo con la rúbrica y las respuestas esperadas. En la rúbrica, se consideran criterios específicos sobre la activación de secuencias de capacidades relevantes en cada parte del examen.

Tabla 12

*Activación de secuencias de capacidades y errores del examen parcial para el objetivo 1*

SdC	Activación			Errores más frecuentes					
	T	P	N	E1	E8	E9	E12	E13	E45
1	44 %	66 %		18 %	27 %				
4	32 %	56 %	12 %		18 %	36 %	42 %	15 %	
5	21 %	44 %	35 %						21 %
6	18 %	52 %	30 %				45 %	15 %	

*Nota:* SdC = secuencia de capacidades; T = activación total, P = activación parcial; N = activación nula



Observamos en la tabla 12 que en las secuencias de capacidades 1 y 2, relacionadas con la identificación de figuras geométricas básicas, los estudiantes no presentan mayor dificultad; pero en las secuencias 3 y 4, relacionadas con la descomposición y recomposición de formas sombreadas, los estudiantes registran cerca del 80 % de activación parcial y nula. Con respecto a los errores, constatamos que entre los de mayor recurrencia se encuentran el E8 y el E12. Estos errores están relacionados con dificultades para descomponer en formas básicas una forma sombreada compuesta, y sumar algo que debe restarse y viceversa.

### *1.3. Nivel de logro de las tareas y el examen del objetivo 1*

En la tabla 13, presentamos el análisis del nivel de logro del objetivo 1. Esta tabla incluye los niveles porcentuales de logro de los estudiantes en las dos tareas y el examen parcial del objetivo 1. También incluye el cálculo global del logro de este objetivo. La ponderación para cada una de las tareas y el examen surge de los niveles de desempeño obtenidos por los estudiantes en esos instrumentos.

Tabla 13  
*Resultados de niveles de logro del objetivo 1*

Tareas	Nivel de logro			
	Bajo	Básico	Alto	Superior
Carfisombras			50 %	50 %
Descompusombras	6 %	38 %	25 %	31 %
Examen parcial	26 %	29 %	26 %	19 %
Global		38 %	50 %	12 %

Los logros para la tarea Carfisombras se ubican en los niveles alto y superior. Esto se debe a que esta tarea fue diseñada para motivar e incentivar a los estudiantes al iniciar la unidad didáctica. Los estudiantes contaron con material didáctico y uso de ayudas planificadas, en especial la asesoría y apoyo de los docentes acompañantes.

Los resultados presentados por los estudiantes en la tarea Descompusombras muestran que hay una disminución en los porcentajes del nivel alto y superior, y un aumento en los niveles básico y bajo. Estos resultados fueron producto de la dificultad que los estudiantes manifestaron para identificar figuras

geométricas básicas que conforman un área sombreada. De hecho, la tarea Descompusombras se diseñó con el fin de valorar el proceso del estudiante al descomponer y recomponer una figura sombreada.

Los niveles porcentuales de desempeño del examen parcial mantienen la tendencia de la tarea Descompusombras, aunque, de manera más notoria, disminuyen los porcentajes en los niveles alto y superior y aumentan los porcentajes en los niveles básico y bajo. Esta situación se presentó con motivo de la ausencia de ayudas en el momento en que el estudiante representaba geométrica y simbólicamente la descomposición de la figura sombreada.

En los resultados globales, el nivel superior fue alcanzado por el 12% de los estudiantes, mientras que el 88% de los estudiantes se ubicó en el nivel alto y básico. Estos estudiantes incurrieron en errores como sumar formas geométricas que debían restarse y viceversa; no incluir algún trozo sombreado; y, en algunos casos, no reproducir la figura sombreada de forma adecuada o proporcional. Los estudiantes que se ubicaron en nivel básico incurrieron en errores considerados esenciales para el cumplimiento del objetivo. Estos son errores relacionados con la identificación de formas geométricas básicas y con procedimientos de descomposición de áreas de regiones sombreadas en figuras de mayor complejidad.

## **2. Valoración de logros afectivos del objetivo 1**

Para establecer la valoración de los logros afectivos tuvimos en cuenta la percepción de logros manifestada por los estudiantes a través del esquema de los semáforos, el matematógrafo de las tareas y el cuestionario final de la unidad didáctica. Para determinar la percepción de los estudiantes en las preguntas del cuestionario final, establecimos un rango numérico (rojo de 4 a 5,9, amarillo de 6 a 7,9 y verde de 8 a 10). Las preguntas del cuestionario final (véase el anexo 9) interrogan al estudiante sobre secuencias de capacidades determinantes para el logro de los objetivos. Registramos la percepción de los estudiantes después de la aplicación de los exámenes parcial y final.

### ***2.1. Comparación de la percepción de logros del estudiante con los logros valorados por el profesor***

En las tablas 14 y 15, comparamos los niveles de logros cognitivos de los estudiantes (valorados por el profesor) y la percepción de logros del estudiante, para el objetivo 1. Obtuvimos estos datos de la información que registramos en las planillas de observación de logros de aprendizaje, el panterógrafo y el

cuestionario final. Establecemos la comparación, al relacionar el color verde con la activación total, el amarillo con la activación parcial y el rojo con la no activación de las secuencias de capacidades correspondientes.

Tabla 14

*Percepción de logros afectivos frente a logros de aprendizaje del objetivo 1*

SdC	Percepción			Logro de la tarea		
	Verde	Amarillo	Rojo	AT	AP	NA
Tarea Carfisombras						
1	82 %	18 %		100 %		
2	61 %	39 %		50 %	50 %	
3	48 %	45 %	6 %	100 %		
Tarea Descompusombras						
1	79 %	21 %		65 %	35 %	
4	85 %	15 %		41 %	35 %	24 %
5	64 %	36 %		35 %	41 %	24 %
6	58 %	42 %		42 %	32 %	12 %
7	52 %	39 %	9 %	35 %	65 %	

*Nota:* SdC = secuencia de capacidades; T = activación total; P = activación parcial; N = activación nula

En la tabla 14, observamos que la percepción de logro de los estudiantes para la tarea de Carfisombras es inferior al alcance de logros de aprendizaje que surge de la valoración que el profesor hizo de la activación de las secuencias de capacidades. Conjeturamos que esta diferencia pudo surgir con motivo de dos circunstancias. Por un lado, los estudiantes dieron más importancia a las dificultades que tuvieron al reproducir sombras y valoraron su actuación con base en la cantidad de sombras que desarrollaron adecuadamente. Por otro lado, la actividad se realizó en grupos de cuatro personas y cada estudiante valoró su actuación individual, mientras que el profesor valoró la actuación del grupo.

Para la tarea Descompusombras, observamos que la percepción de logro de los estudiantes es mayor que la valoración realizada por el profesor. La percepción de logro de los estudiantes disminuye a medida que se avanza en las secuencias de capacidades que se activan en la tarea. En este sentido, a

medida que realizan la tarea, los escolares empiezan a sentir cierto nivel de frustración, pero tienen la percepción de haber alcanzado ciertos logros y por tanto no se ubican en el color rojo. Es posible que los porcentajes mayores del 50 % en la percepción de los escolares en algunas secuencias de capacidades se deban al apoyo y la seguridad transmitida por el docente acompañante y a las ayudas que los docentes les proporcionaron.

El buen desempeño en el desarrollo de las tareas de este objetivo también se puede explicar con motivo de los esquemas de agrupamiento e interacción con los que los escolares trabajaron. Los papeles que desempeñaron los estudiantes en cada grupo y los procesos de interacción con otros grupos y con el docente les permitieron adquirir más confianza en los procesos de solución de tareas.

## 2.2. Percepción de logro del objetivo 1

En la tabla 15, resumimos la percepción de logro que se obtiene a partir de los resultados recogidos con el esquema de semáforos para el objetivo 1.

Tabla 15

*Percepción de logro de las tareas del objetivo 1*

Tareas	Verde	Amarillo	Rojo
Carfisombras	64 %	34 %	2 %
Descompusombras	67 %	31 %	2 %
Cf p1, p2 y p3	39 %	61 %	0 %
Promedio	57 %	42 %	1 %

*Nota:* Cf = cuestionario final; Pn = pregunta n

En la tabla 15, observamos que los estudiantes percibieron que lograron en buena medida el objetivo 1. Consideramos que estos resultados se deben a que estas tareas se desarrollaron por medio de actividades lúdicas y procesos geométricos donde se requería identificar y reproducir figuras geométricas básicas, dada una región sombreada. En el anexo 14, presentamos los resultados para el objetivo 2.





## 2.3. Logros afectivos para el objetivo 1

En la tabla 16, presentamos los resultados del matematógrafo para la variable de motivación (descomponer y recomponer me planteó un reto y me sentí

motivado para resolverla) para las tareas del objetivo 1, de acuerdo con los procedimientos que describimos en el apartado anterior

Tabla 16

*Logros afectivos en motivación para el objetivo 1*

Tareas	Valores de la variable				Promedio por tarea
					
Carfisombras	30	3	0	0	4,8
Descompusombras	22	11	0	0	4,3
Promedio global					4,55

Los resultados de la tabla 16 ponen en evidencia un alto grado de motivación para la tarea de Carfisombras, con un 4,8 de nivel de satisfacción. La información recogida en los diarios de los escolares muestra que 30 de los 34 estudiantes rellenaron la primera carita del matematógrafo. La tarea Descompusombras registra 4,3 de promedio de satisfacción (22 estudiantes percibieron el máximo nivel de satisfacción de la tarea y un grupo menor de 11 estudiantes percibió un grado menor de satisfacción). Conjeturamos que esto se debe a que la tarea fue aumentando de complejidad. A pesar de lo anterior, los estudiantes manifiestan un promedio de 4,55 en la variable motivación para este objetivo.

En la tabla 17, presentamos los resultados en las otras variables afectivas para las tareas del objetivo 1.

Tabla 17

*Resultados del panterógrafo en variables afectivas para el objetivo 1*

Tarea	Familiar	Previos	Propósito	Motivación	Nivel
Carfisombras	4,4	4,0	4,2	4,8	4,3
Descompusombras	3,9	4,2	4,5	4,3	3,9

*Nota:* Familiar = la tarea me pareció cercana y familiar; Previos = la tarea me pedía conocimientos que ya tenía; Propósito = comprendí lo que la tarea me pedía y su propósito; Motivación = la tarea me planteó un reto y me sentí motivado para resolverla; Nivel = mis respuestas a la tarea me permitieron reconocer mi nivel de conocimiento.

Los datos de la tabla 17 nos permiten concluir que los estudiantes se sintieron motivados con las tareas, consideraron que requerían conocimientos que ellos tenían y comprendieron sus propósitos. No obstante, reconocieron que ese tipo de tareas no les era familiar y no les permitió reconocer completamente su nivel de conocimiento.

### 3. Valoración de logros cognitivos y afectivos del objetivo 2

Evaluamos los logros cognitivos y afectivos para el objetivo 2 con los mismos procedimientos. En la tabla 18, presentamos la valoración de alcance de logros cognitivos en las tareas del objetivo 2 y el examen final.

Tabla 18

*Resultados de niveles de logro del objetivo 2*

Tareas	Bajo	Básico	Alto	Superior
Calculusombras	12 %	0 %	0 %	88 %
Igualdades	16 %	32 %	13 %	39 %
Examen final	55 %	16 %	13 %	16 %

Los resultados de la tabla 18 ponen en evidencia el buen desempeño de los estudiantes al abordar la tarea Calculusombras e indican la presencia de dificultades en la tarea Igualdades. Conjeturamos que este último resultado se debe a que la tarea Igualdades se planificó como tarea de evaluación y, por consiguiente, los estudiantes no tuvieron acceso a las ayudas ofrecidas en la tarea Calculusombras. Los resultados del examen final registran un bajo desempeño. De nuevo, esto se explica, al menos en parte, por la ausencia de ayudas y el cambio de agrupamiento, de parejas o tríos a individual.

### 4. Análisis y valoración de la unidad didáctica

Obtenemos la valoración de la unidad didáctica con base en la valoración de los logros cognitivos y afectivos alcanzados por los estudiantes durante el desarrollo de los dos objetivos. En la tabla 19, mostramos los resultados globales obtenidos por desempeño académico con respecto a los niveles de logro en los objetivos 1 y 2.

Tabla 19

*Resultados de niveles de logro cognitivos de la unidad didáctica*

Objetivo	Bajo	Básico	Alto	Superior
1	0 %	38 %	50 %	13 %
2	24 %	42 %	21 %	12 %

Los resultados porcentuales muestran un buen desempeño en el alcance del objetivo 1: ningún estudiante obtiene desempeño bajo y el 63 % de los estudiantes se ubica en los niveles alto y superior. Esto indica que los estudiantes incurrieron en errores de menor trascendencia en el desarrollo de las tareas. Para el objetivo 2, los resultados obtenidos reflejan que el 24 % de los estudiantes obtuvo nivel bajo como consecuencia de su dificultad en la utilización de procesos de descomposición que no les permitieron identificar las figuras geométricas básicas y su posterior recomposición. El 42 % de los escolares alcanzó el nivel básico. Estos estudiantes solamente lograron identificar figuras básicas y realizar algunos procesos de descomposición. El resto de los estudiantes (33 %) se ubicó en niveles alto y superior.

A continuación presentamos la tabla 20, en la que mostramos la percepción del propio proceso de aprendizaje manifestado por los estudiantes sobre el desarrollo de los dos objetivos de la unidad didáctica.

Tabla 20

*Resultados de la percepción de logros afectivos de la unidad didáctica*

Tareas	Verde	Amarillo	Rojo
Objetivo 1			
Carfisombras	64 %	34 %	2 %
Descompusombras	67 %	31 %	2 %
Cf P1 a P3	39 %	61 %	0 %
Promedio	57 %	42 %	1 %
Objetivo 2			
Calculusombras	49 %	47 %	3 %
Igualdades	55 %	27 %	18 %
Cf P4 a P8	32 %	68 %	
Promedio	45 %	47 %	7 %

*Nota:* Cf = cuestionario final; Pn = pregunta n

Los resultados de la tabla 20 muestran que hubo mayor confianza en el desarrollo del objetivo 1, hecho que se explica por las dificultades que se generaron en la medida en que aumentó la complejidad de las tareas. También se observa que los estudiantes sintieron mayor confianza en el desarrollo de las tareas Descompusombras e Igualdades, a pesar de que eran tareas de evaluación y no contaron con ayudas.

Los resultados que hemos presentado en este apartado nos permiten concluir que el logro de la unidad se cumplió en un alto porcentaje, ya que de los 33 estudiantes evaluados durante la implementación, solo cuatro obtuvieron desempeño bajo. Por tanto el diseño y la planificación de la unidad didáctica arrojó resultados positivos a pesar de que el grupo de estudiantes registraba bajo desempeño académico previo y que aproximadamente el 30 % de los estudiantes ya tenía, en ese momento del año escolar, el área de matemáticas perdida. El análisis anterior nos da un buen indicio de la efectividad de la propuesta didáctica.

## **5. Balance del diseño e implementación de la unidad didáctica**

En este apartado, realizamos una síntesis crítica de los aspectos fuertes y débiles de la planificación e implementación de la unidad didáctica, con base en el análisis de sus debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades. Los resultados de este análisis nos permitirán proponer mejoras para un nuevo diseño.

### **1. Balance estratégico (análisis dafo)**

El análisis DAFO se desarrolla en torno a las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades de la propuesta. Atiende, por tanto, a los aspectos positivos que se deben promover y los aspectos negativos que se deben mejorar. Utilizamos este tipo de análisis para evaluar la planificación e implementación de la unidad didáctica, con base en los resultados sobre los logros de aprendizaje y afectivos que presentamos en el apartado anterior.

#### ***1.1. Debilidades***

En este apartado, describimos las debilidades que identificamos en el diseño e implementación de la unidad didáctica. Cuando implementamos el diseño, constatamos que el objetivo 3 estaba contenido dentro del objetivo 2. Es decir,



el objetivo 3 pretendía aplicar el cálculo de áreas de regiones sombreadas en la solución de problemas, pero, al plantear esos problemas con sus representaciones geométricas, observamos que se convertían en tareas similares a las que habíamos diseñado para el objetivo 2.

La tarea diagnóstica no incluyó algunos conocimientos previos que eran necesarios para la unidad (por ejemplo, área del hexágono, teorema de Pitágoras, área de un segmento circular, sistemas de representación y justificación de los resultados). En algunas tareas, como Descompusombras y Calculusombras, propusimos demasiadas regiones sombreadas y algunas de ellas tenían el mismo grado de complejidad.

En la implementación, el tiempo planificado no fue acorde con las necesidades de las tareas y los estudiantes. Incurrimos en algunos errores al agrupar capacidades para formar las secuencias de capacidades. Esto implicó que tuviéramos que modificar sobre la marcha las secuencias de capacidades y, por lo tanto, los caminos de aprendizaje de las tareas y los grafos de criterios de logro para los estudiantes. Los agrupamientos de cuatro estudiantes indujeron a algunos estudiantes a trabajar más que otros y a generar dependencia de unos estudiantes hacia otros. Hizo falta una sombra en el examen parcial que evidenciara la activación de capacidades de descomposición y recomposición. El docente omitió explicar el uso de unidades de medida para determinar las áreas sombreadas. Formulamos preguntas en el diario del estudiante que no aportaron al análisis de las expectativas afectivas.

### *1.2. Amenazas*

Identificamos las siguientes amenazas, con motivo de la experiencia. Los estudiantes no tenían todos los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de la unidad didáctica. A los estudiantes se les dificulta comprender instrucciones escritas. Al haber implementado en un curso que históricamente ha demostrado un bajo rendimiento académico, la falta de responsabilidad, interés y actitud pueden convertirse en una amenaza para el desarrollo de la unidad didáctica. Constatamos cierta falta de conciencia por parte de los padres sobre la importancia de acompañar a sus hijos en el proceso de aprendizaje. No todos los participantes de los equipos lo hacen activamente en el desarrollo de las tareas, lo que generó mucha diferencia en alcance de objetivos entre los integrantes del equipo. Tuvimos interrupciones continuas de clase por el desarrollo de actividades extracurriculares que no permitieron desarrollar apropiadamente la unidad didáctica.

### *1.3. Fortalezas*

La implementación de la unidad didáctica nos permitió identificar algunas de sus fortalezas. Consideramos que las tareas que propusimos son novedosas y están situadas en contextos reales. Las tareas fueron analizadas detalladamente y secuenciadas con fundamento en esos análisis. La presentación de la unidad didáctica (metas, tareas, metodología y evaluaciones) con ayuda de medios audiovisuales permitió que los estudiantes conocieran lo que se esperaba que ellos aprendieran. El material Carfisombras es original y novedoso. Este material generó motivación en los estudiantes y permitió que tuvieran una buena disposición para el desarrollo de las tareas posteriores. Los conocimientos alcanzados en una tarea se convirtieron en conocimientos previos para la siguiente. Las ayudas, que usamos constantemente, fueron oportunas y motivaron la superación de dificultades. Los pequeños grupos permitieron apoyar la comprensión del tema y promovieron la participación y la interacción entre los estudiantes. El desarrollo de tareas contó con mínimo dos docentes. Esta circunstancia contribuyó a la interacción docente-estudiante, lo que permitió la superación de dificultades y la supervisión del buen desarrollo de la unidad didáctica. El matematógrafo fue atractivo y motivador, y generó información de calidad para el análisis del logro de las expectativas afectivas. La planificación y desarrollo de los exámenes parciales para los dos objetivos permitieron un análisis más detallado de los logros alcanzados.

### *1.4. Oportunidades*

Las reflexiones y análisis anteriores nos dan luces sobre las oportunidades que surgen de la experiencia. Consideramos que nuestra propuesta se puede implementar en otros grados e instituciones. Los directivos del plantel donde se implementó siempre demostraron interés y disposición para que se llevara a cabo el desarrollo de la unidad didáctica y facilitaron los recursos necesarios (video beam, espacios y tiempos). La unidad didáctica desarrolla un tema que está poco explorado. Esto la convierte en una nueva herramienta al servicio de docentes para la mejora de sus prácticas de enseñanza y del aprendizaje de sus estudiantes. Tanto la unidad didáctica como su análisis sirven de modelo para la elaboración de nuevas unidades didácticas. La unidad didáctica se puede ampliar o modificar con programas interactivos como GeoGebra para calcular el área de regiones sombreadas. También se pueden crear aplicativos informáticos que generen mayores niveles de motivación en los estudiantes o que faciliten el análisis de resultados del diario del escolar.

## 6. Nuevo diseño de la unidad didáctica

Teniendo como referente el balance realizado anteriormente, en este apartado describimos el nuevo diseño de la unidad didáctica y justificamos los cambios realizados. Describimos el nuevo diseño atendiendo a sus aspectos globales y específicos.

### 1. Aspectos globales

En este apartado, presentamos la nueva unidad didáctica, las sesiones de clase —con sus respectivos objetivos, tareas y tiempos planificados— y los aspectos generales que sufrieron modificaciones y que afectan transversalmente su diseño.

#### 1.1. Aspectos generales de la unidad didáctica

Introducimos cambios transversales que afectan a todas las tareas. Estas modificaciones recaen en los objetivos, los diarios del profesor y del estudiante, y las rúbricas. Los caminos de aprendizaje y grafos del estudiante también presentan cambios, dado que se modificaron capacidades y secuencias de capacidades que más adelante se detallarán para cada tarea. A continuación, describimos las modificaciones y las justificamos.

##### *Objetivos*

Las tareas del objetivo 3, Vitral y Poporo, son situaciones problema en las que se requiere del cálculo de áreas de regiones sombreadas. Inicialmente consideramos que se requería de una secuencia de capacidades adicional en la que se utilizaban traducciones entre las representaciones verbal y geométrica. Con el transcurso de la implementación, se evidenció que el hecho de que los problemas estuviesen planteados con la representación geométrica no promovía esa activación. Esto las convertía en tareas correspondientes al objetivo 2. Esta debilidad en el planteamiento de las tareas del objetivo 3 y la limitada descripción del alcance que se le dio al objetivo 2 generaron la necesidad de reformular los objetivos de la unidad didáctica como exponemos a continuación.

*Objetivo 1.* Utilizar métodos geométricos de descomposición y recomposición en regiones sombreadas entre polígonos y porciones circulares para generar áreas básicas como triángulos, rectángulos, círculos y hexágonos.

*Objetivo 2.* Utilizar procedimientos geométricos y aritméticos para la solución de problemas que involucren el cálculo de áreas de regiones sombreadas entre polígonos y porciones circulares.

### *Expectativas afectivas*

Las expectativas afectivas que formulamos para la unidad didáctica fueron repetitivas y descuidaban otros aspectos importantes, como la comunicación y la participación de los estudiantes. Esta debilidad afectó el desarrollo y evaluación del dominio afectivo de los estudiantes. Por esta razón, formulamos una nueva lista de expectativas afectivas que presentamos a continuación.

1. Demuestra actitud frente a su aprendizaje.
2. Siente confianza en el desarrollo de actividades matemáticas.
3. Persevera en las dificultades que se presentan en situaciones matemáticas.
4. Respeto la opinión de sus compañeros.
5. Establece retos personales de superación en sus procesos de aprendizaje.
6. Participa activamente en todas las fases de las actividades.
7. Comunica de manera eficaz sus ideas y experiencias.

### *Diario del estudiante*

En el diario del estudiante modificamos las preguntas de información adicional del dominio afectivo, ya que no brindaron un aporte significativo de cara al análisis de las expectativas afectivas. Estos interrogantes no dieron un indicador de alcance de esas expectativas. Por consiguiente, fue necesario replantearlas. Introdujimos las siguientes preguntas en el diario del estudiante.

- ¿Tu actitud frente al aprendizaje, fue activa y adecuada?
- ¿Sentiste confianza en el desarrollo de la actividad?
- ¿Ante las dificultades presentadas en la actividad fuiste perseverante?
- ¿Participaste activamente en todas las fases de las actividades?
- ¿Te pareció interesante recomponer con las fichas una región sombreada?
- ¿Lograste expresar tus dudas e ideas?
- ¿Lograste escuchar y aprender de las preguntas e ideas de tus compañeros?

Dado que produjimos nuevos caminos de aprendizaje para cada tarea, tuvimos que modificar los grafos de los criterios de logro para los estudiantes. En la figura 16, presentamos los cambios en el grafo de criterios de logro para el objetivo 1. En el anexo 15, presentamos la nueva versión del diario del estudiante para las tareas.

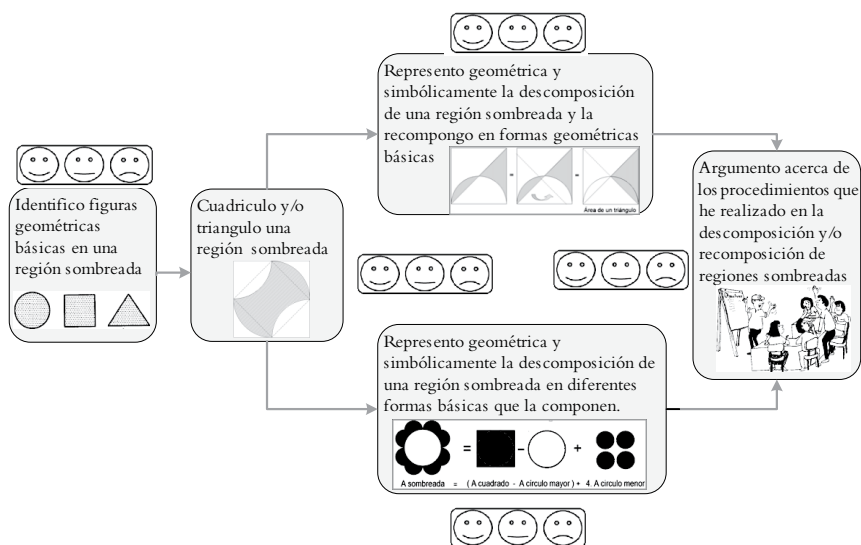


Figura 16. Nuevo grafo de criterios de logro para el objetivo 1

### *Diario del profesor*

Elaboramos un diario del profesor para cada tarea. Sin embargo, al utilizarlo, se evidenció que no era necesario, ya que lo único que variaba era la codificación de las capacidades, errores, ayudas y materiales de acuerdo con la planificación de cada tarea. Por esta razón, planteamos un único diario del profesor con interrogantes abiertos para que se adapten a cualquier tarea, como mostramos en la figura 17 y en el anexo 16.

### *Rúbricas*

Eliminamos los aspectos de participación y organización en las rúbricas, dado que no fueron funcionales.

### *1.2. Sesiones de la nueva unidad didáctica*

En la tabla 21, describimos las sesiones de la nueva unidad didáctica y su relación con los objetivos, tareas, metas y tiempos.

	PREGUNTA	SÍ	NO	¿Por qué? Observaciones
1. Meta de la tarea	¿Resultó significativo compartir la meta?			
	¿La meta fue comprendida?			
2. Caminos de aprendizaje	¿Siguieron los caminos de aprendizaje previstos?			
	Errores en los que incurrieron: E _____			
	Errores no previstos _____			
3. Ayudas	Ayudas utilizadas: A _____			
	Ayudas nuevas _____			
4. Materiales y recursos	Materiales y recurso		¿Contribuyó a la motivación?	¿Fue productivo en el nivel cognitivo?
	Cartas Carfisombras			
	Fichas Carfisombras			
	Viseo beam			
	Instrumentos de medición			
	Copias			

Figura 17. Cambios en el diario del profesor

Tabla 21  
*Descripción de las sesiones de la unidad didáctica*

Actividades y tareas	Meta	Sesión	Min
Presentación y diagnóstico			
Presentación la unidad didáctica	Presentación de objetivos, tareas, metodología, evaluación e instrumentos.	1	60
Poporo	Determinar el nivel de conocimientos previos de los estudiantes		90
Realimentación de la tarea diagnóstica	Reforzar conocimientos previos	2 y 3	30
Objetivo 1			
Criterios de logro del objetivo	Compartir y explicar a estudiantes		10
Carfisombras	Reproducir regiones sombreadas dadas pictóricamente	4	50
Descompusombras	Descomposición y recomposición de figuras sombreadas	5	60

Actividades y tareas	Meta	Sesión	Min
Examen parcial del objetivo	Determinar el nivel de conocimiento en la descomposición y recomposición de áreas sombreadas	6	60
Recapitulación y realimentación del objetivo 1	Actividad gran grupo	7	30
Objetivo 2			
Recapitulación del objetivo 1	Interrelacionar el objetivo 1 con el objetivo 2 y superar dificultades		30
Criterios de logro del objetivo	Compartir y explicar a estudiantes	7 y 8	10
Calculusombras	Determinar la expresión algebraica para el cálculo del área sombreada		80
Igualdades	Interpretar una situación problema en la que demuestre una igualdad a través procedimientos aritméticos	9	60
Final			
Examen final	Determinar el nivel de conocimiento de procesos aritméticos para el cálculo de regiones sombreadas	10	60
Realimentación del objetivo 2	Superar dificultades presentadas durante el objetivo		30
Cuestionario final	Determinar el nivel afectivo de los estudiantes en el desarrollo de la unidad didáctica	11	30

## 2. Aspectos específicos

En este apartado, describimos detalladamente el nuevo diseño de la unidad didáctica para la tarea diagnóstica y para cada una de las tareas y exámenes correspondientes a los dos objetivos.

### 2.1. Mejoras a la tarea diagnóstica

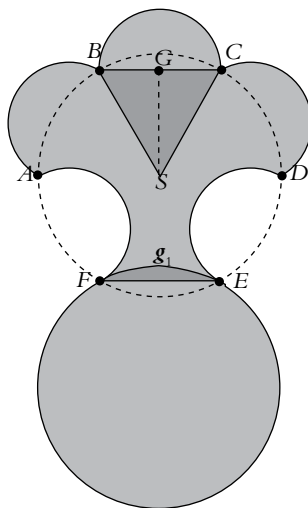
A pesar de que la tarea diagnóstica que se planificó pretendía incluir la mayoría de conceptos previos que se creían necesarios, la tarea no cumplió con esta expectativa. Por esta razón, presentamos un nuevo diseño de esta tarea.

### *Diseño*

A la luz de la implementación de la unidad didáctica, nos dimos cuenta de la importancia de que los estudiantes estuvieran en la capacidad de hallar medidas por inferencia (los triángulos que componen un hexágono regular son equiláteros) o por cálculo (hallar la apotema de un hexágono regular utilizando el teorema de Pitágoras). El hecho de que los estudiantes no tenían estos conocimientos les generó dificultades en el cálculo de áreas del sector circular, del segmento circular y del hexágono regular. Por esta razón, en el nuevo diseño de la tarea diagnóstica hacemos énfasis en estos conocimientos. A continuación, presentamos un nuevo diseño de la tarea diagnóstica, en la que, además de mejorar el planteamiento de cada una de las actividades, incluimos la evaluación específica de estos conocimientos previos.

### *Tarea Poporo*

La silueta del poporo corresponde a una figura precolombina muy representativa de nuestro país. La figura es una representación geométrica plana que está formada con base en un hexágono regular y contiene figuras geométricas básicas, como el círculo y sus sectores circulares, rectángulos y triángulos. Observe detenidamente la figura del poporo.



- A. Identifique las figuras geométricas planas que lo conforman y elabore un listado de ellas.



- B. Si el lado del hexágono  $ABCDEF$  mide 4 cm, infiera los diámetros y radios de los círculos.
- C. Haciendo uso del teorema de Pitágoras, encuentre la apotema o segmento  $SG$  del triángulo más sombreado u oscuro del hexágono y halle su área.
- D. Con el área del triángulo interno hallado, calcule el área del hexágono.
- E. Halle el área del sector circular.
- F. Halle el segmento circular formado entre los puntos  $EF$  y el arco  $g_1$ .

### *Evaluación de la tarea diagnóstica*

La tarea diagnóstica se puede plantear de una forma organizada que permita hacer visible con facilidad aquellas fortalezas y debilidades cognitivas y afectivas que se deben identificar previamente a la implementación de la unidad didáctica y lograr convertirlas en herramientas a favor de la futura implementación. Para sistematizar la evaluación, hay dos aspectos de mejora: plantear cada pregunta o acción de la tarea de tal forma que indague por una capacidad o conocimiento previo y diseñar un diario del profesor en el que se pueda registrar evidencia de las condiciones cognitivas iniciales del grupo con el que se va a trabajar. Para este último, se puede emplear un gráfico de barras (pregunta frente a cantidad de estudiantes con aciertos o activaciones totales) e interrogantes que den información sobre aspectos afectivos relacionados directamente con las expectativas afectivas que se tienen planificadas para la unidad didáctica. El gráfico permite organizar los datos que surgen de la evaluación de la tarea y de las observaciones realizadas por el docente. Con base en estos resultados, proponemos una actividad de realimentación en la que el docente explique o aclare dudas de los estudiantes. Para ello, puede utilizar gráficos en el tablero, ayudas visuales como formas básicas grandes (realizadas en cartulina para identificación de figuras) y videos con los que se muestre cómo hallar áreas de formas básicas; puede explicar el uso del teorema de Pitágoras, la noción de áreas de sector y segmento circular, entre otras, de acuerdo con los conocimientos previos en los que demostraron menos activaciones. En el anexo 17, presentamos el diario del profesor completo para la tarea diagnóstica.

### *Tiempo*

Dada la importancia de establecer los conocimientos previos de los estudiantes y contribuir a su desarrollo, extendimos el tiempo dedicado a la tarea diagnóstica a 120 minutos.

## 2.2. Mejoras a las tareas del objetivo 1

Realizamos varias mejoras a las tareas del objetivo 1 que describimos a continuación.

### *Tarea Carfisombras*

El uso del material didáctico Carfisombras dio excelentes resultados como actividad de motivación. Sin embargo, también tenía un propósito cognitivo. No obstante, el diseño no incluyó los instrumentos y procedimientos necesarios para establecer el alcance de ese propósito. Por esta razón, proponemos agregar a la tarea una ficha en la que los estudiantes pongan en evidencia sus dificultades y logros. Estas son preguntas que se refieren a la sombra que más se les dificultó armar, la que fue más fácil, la que definitivamente no armó (por dificultad o por tiempo), como mostramos a continuación (cada sombra de las cartas está numerada).

### *Tarea Carfisombras*

Coloree con negro las celdas de los números de las cartas del juego que, al azar, no le correspondió.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24

Clasifique todas las cartas del juego que le correspondió, según la condición dada.

¿Cuál fue la sombra que le fue más fácil reproducir?

¿Cuál fue la sombra que logró reproducir, pero que fue la más difícil?

¿Qué sombra no pudo reproducir? Indique la razón (tiempo, dificultad, otras razones).

Proponemos que el profesor ejemplifique el uso del material para armar las sombras al utilizar ejemplos diferentes a los que posteriormente serán propuestos al estudiante. Esta mejora ayuda a evitar confusión en los estudiantes sobre el uso del material. Además, se deben hacer cambios en los caminos de aprendizaje debido a las modificaciones en el agrupamiento de capacidades

para formar secuencias. Presentamos el grafo de caminos de aprendizaje de esta tarea y el grafo de criterios de logro en el anexo 18.

### *Tarea Descompusombras*

Tuvimos que reformular los grafos de secuencias de capacidades y de criterios de logro para la tarea Descompusombras. Estos grafos se encuentran en el anexo 18. Con el propósito de equilibrar el trabajo de los miembros de los grupos, proponemos que la tarea se realice en parejas. Este cambio permitirá tener una visión particularizada de los logros y dificultades de los estudiantes. Para esta tarea, resulta más práctico generar una guía de trabajo en la que el estudiante simplemente vea la figura con su región sombreada y luego, por medio de dibujos, flechas, colores o recortando, realice la descomposición o recomposición y su representación geométrica. Introducimos este ajuste debido a que los estudiantes tardan demasiado tiempo en reproducir la sombra y este procedimiento no contribuye a la meta de la tarea. También disminuimos la cantidad de sombras, teniendo en cuenta su nivel de complejidad. Presentamos el nuevo formato de la tarea en el anexo 19.

### *Examen parcial*

Planteamos el examen parcial con el propósito de verificar la activación de dos secuencias de capacidades: descomponer, y descomponer y recomponer en formas básicas. Al evaluar esta tarea constatamos una diferencia notable entre las dos secuencias, ya que había solo una sombra que activaba la secuencia de capacidades de descomponer y recomponer en figuras básicas y dos sombras que activaban la secuencia de capacidades de descomposición. Proponemos incluir una sombra adicional para equilibrar la activación de las dos secuencias de capacidades (véase la figura 18). Presentamos el formato completo del nuevo examen parcial en el anexo 20.

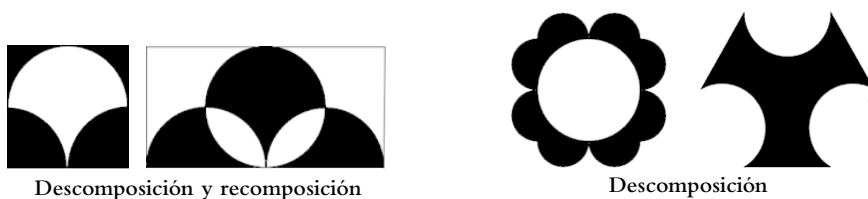


Figura 18. Nueva sombra para el examen parcial

### 2.3. Mejoras a las tareas del objetivo 2

Introducimos varios cambios en las tareas correspondientes al objetivo 2 que describimos a continuación.

#### *Tarea Calcosombras*

Definimos la secuencia de capacidades de la siguiente manera: verifico información que tengo de acuerdo con datos que me proporciona la representación y determino los datos que faltan para determinar el área sombreada. No obstante, la tarea sí induce a los estudiantes a activar las secuencias de capacidades 13 y 14 sobre uso del teorema de Pitágoras y sobre la inferencia de medidas a partir de otras. Por esta razón, eliminamos la secuencia de capacidades 12 e incluimos una nueva capacidad en las secuencias de capacidades 13 y 14. Presentamos el grafo de secuencias de capacidades de la tarea en el anexo 18.

El tiempo que previmos para el desarrollo de esta tarea no fue suficiente. Por esa razón proponemos disminuir una sombra en cada bloque del plano del colegio de la tarea, como se observa en la figura 19. En todo caso, contemplamos la complejidad de las sombras que se seleccionan, para que la evaluación de la tarea sea igual de efectiva que en la anterior. Presentamos el nuevo diseño de la tarea Calcosombras en el anexo 19.

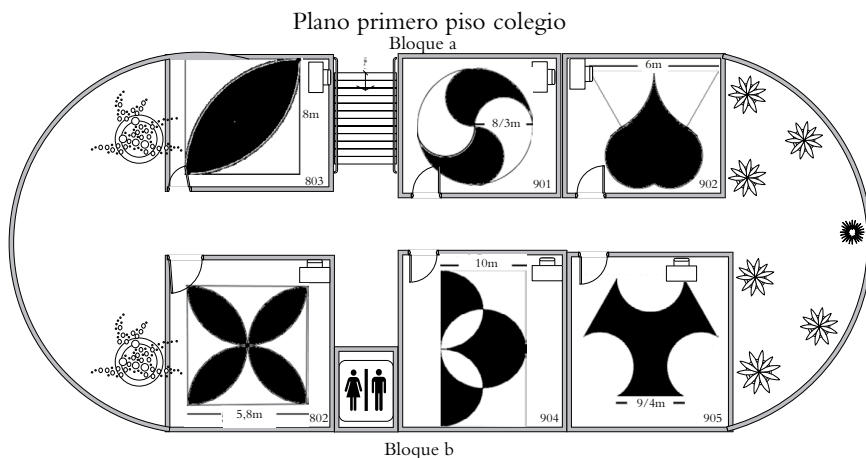


Figura 19. Nuevo plano del bloque del colegio

### *Tarea Igualdades*

En esta tarea, también eliminamos la secuencia de capacidades 12, por las mismas razones que presentamos para la tarea Calculusombras. Con el fin de complementar la idea de solucionar problemas y darles un contexto, proponemos que los dos ejercicios de la tarea Igualdades se adapten dentro de una situación problema, sin perder la esencia de la comparación entre áreas de regiones sombreadas. Presentamos el nuevo diseño de la tarea en el anexo 19 y su grafo de secuencias de capacidades en el anexo 18.

### *Examen final*

Teniendo en cuenta que todas las tareas de la unidad didáctica se desarrollan en equipo, proponemos que el examen final se trabaje en parejas. Además, con el fin de darle más posibilidades al estudiante y poder establecer con mayor precisión el nivel de logro que alcanza, incluimos una nueva figura en la que se requiere la activación de la secuencia de capacidades de descomposición, pero no se requiere hallar segmentos circulares. Esta es una sombra de nivel de complejidad inferior a las dos que ya están planteadas, como se muestra en la figura 20. Presentamos el nuevo diseño del examen final en el anexo 20.

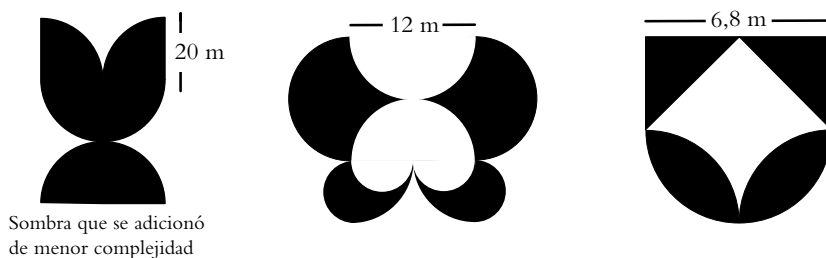


Figura 20. Nueva sombra para el examen final

## 7. Conclusiones

La elaboración de una unidad didáctica, basada en las estrategias metodológicas propuestas en MAD 2, exige la realización de un análisis didáctico con el que el docente indague sobre los diversos significados del tema, lo que espera que sus estudiantes aprendan, el modo como va a desarrollar ese aprendizaje, los medios de los que dispone para realizar la enseñanza y la forma como se evalúa el aprendizaje. Todo lo anterior requiere de un proceso cuidadoso de

planificación, que tenga en cuenta el diseño, la implementación, el análisis y valoración de resultados. Tras haber llevado a cabo estos procesos, hemos obtenido algunas conclusiones para nuestra unidad didáctica que describimos en este apartado.

El proceso de análisis, evaluación y mejora de la planificación y la implementación permite perfeccionar las estrategias didácticas y favorecer el proceso de la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. La motivación y el uso de material didáctico desempeñan un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes. La motivación aporta interés por el aprendizaje. Los materiales y recursos contribuyen a aportar significatividad a lo que se aprende.

El análisis de los sistemas de representación en la planificación de un tema permite ofrecer varias posibilidades de aprendizaje en los estudiantes. Para el tema de áreas de regiones sombreadas, los sistemas de representación de mayor relevancia fueron el geométrico y el simbólico. Estos sistemas de representación se activan cuando se relacionan dos formas sombreadas y se combina la descomposición geométrica y la escritura simbólica de la descomposición.

El trabajo realizado con la unidad didáctica nos permitió determinar que la teoría de conjuntos es una herramienta básica para manipular las formas geométricas sombreadas propuestas para noveno grado. Las sombras se forman por uniones, intersecciones, diferencias y sobreposiciones entre diferentes figuras geométricas planas básicas.

El desarrollo del trabajo nos puso de manifiesto dos estrategias básicas para abordar la solución de las figuras sombreadas: el primero, por descomposición, al segmentar las figuras en formas geométricas básicas sin volver a juntarlas; y el segundo, por descomposición y recomposición, al segmentar las figuras en formas geométricas para luego unir las formando otras formas geométricas básicas.

Los instrumentos y procedimientos de evaluación que pusimos en práctica en el desarrollo de la unidad didáctica permitieron propiciar ambientes de valoración más cualitativa y concienzuda del proceso de aprendizaje. Estos instrumentos y procedimientos tienen en cuenta la percepción y motivación que tiene el escolar de su propio aprendizaje. El examen no debe ser el instrumento con el que se cierra una temática. Por el contrario, este es el instrumento que permite al docente tener una visión amplia de los alcances y limitaciones del aprendizaje de sus alumnos. Las dificultades y errores en que incurrieron los estudiantes en el desarrollo de cada una de las tareas y exámenes de la unidad didáctica permitieron evidenciar la importancia de la planificación de ayudas y del desarrollo de los procesos de realimentación.

Obtuvimos resultados satisfactorios en los niveles de desempeño del grupo, los cuales consideramos satisfactorios dado que este grupo presentaba históricamente bajo rendimiento académico.

Finalmente, el trabajo realizado durante dos años en MAD 2 ha contribuido a nuestra práctica docente con estrategias metodológicas para la cualificación de la enseñanza de las matemáticas. Algunos ejemplos que ya estamos aplicando con nuestros estudiantes son el planteamiento de expectativas afectivas, la aplicación de procesos de realimentación de tareas y exámenes, la planificación de ayudas y la previsión de errores, entre otros.

## 8. Anexos

Anexo 1. Capacidades y conocimientos previos

Anexo 2. Errores y dificultades

Anexo 3. Ficha de una tarea

Anexo 4. Grafos de secuencias de capacidades de tareas y objetivos

Anexo 5. Componentes de las tareas

Anexo 6. Análisis de las tareas

Anexo 7. Exámenes

Anexo 8. Diario del estudiante

Anexo 9. Diario del profesor

Anexo 10. Cuestionario final

Anexo 11. Tabla de respuestas esperadas de las tareas

Anexo 12. Rúbricas

Anexo 13. Planillas de observación de logros

Anexo 14. Valoración y análisis de resultados de tareas y objetivos

Anexo 15. Nueva versión del diario del estudiante

Anexo 16. Nueva versión del diario del profesor

Anexo 17. Diario del profesor para la tarea diagnóstica

Anexo 18. Nuevos grafos de secuencias de capacidades y criterios de logro de las tareas

Anexo 19. Nueva versión de las tareas

Anexo 20. Nueva versión de los exámenes

## 9. Referencias

- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Autor. Disponible en <http://tinyurl.com/7t988s5>.
- MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en <http://is.gd/kqjT0a>.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003: Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. París: OCDE. Disponible en <http://tinyurl.com/9wmr4ct>.
- Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis. Disponible en <http://tinyurl.com/bpy3cvr>.

★ ★ ★

Los anexos de este capítulo se encuentran disponibles en <http://funes.unian-des.edu.co/6506/>