

CAPÍTULO 4

IDEA INTUITIVA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

JEFFERSSON BUSTOS, YENNY NARANJO, RUTH PISCO,
GERMÁN TORRES E ISABEL ROMERO

Introducción

En este capítulo, presentamos el informe de la unidad didáctica relacionada con la idea intuitiva de límite de una función en un punto. Describimos el diseño previo, la implementación y el nuevo diseño. A su vez, exponemos las modificaciones realizadas, la implementación y análisis de la información recolectada.

La unidad didáctica fue elaborada por un grupo de cuatro docentes en ejercicio de instituciones públicas y privadas que realizaron la Maestría en Educación de la Universidad de los Andes. Fue implementada a 45 estudiantes del grado once de educación media de la Institución Educativa Compartir Tintal de Bogotá.

Con este trabajo, intentamos dar respuesta a la pregunta ¿cómo utilizar la resolución de problemas para abordar la idea de límite de una función en un punto con estudiantes de educación media de la Institución Educativa Compartir Tintal? Para seleccionar el tema, consideramos nuestra experiencia docente y la dificultad didáctica de abordar el tema en las aulas de clase. Esto nos permitió abordar el tema mediante un enfoque que atiende a la necesidad de “relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista” (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998, p. 18).

Realizamos un análisis didáctico del tema. Este análisis didáctico se compone de cuatro análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. El análisis de contenido fue enfocado en la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología; el análisis cognitivo se relacionó con las expectativas, limitaciones e hipótesis de aprendizaje; y el análisis de instrucción se refirió al diseño de las tareas y su importancia dentro de la unidad didáctica. El análisis de actuación se centró en la caracterización de los indicadores de logro de la Institución Compartir Tintal, en el diseño de instrumentos para recolección de información (como tarea diagnóstica, diario del estudiante, diario del docente) y en instrumentos específicos de evaluación (como examen final y cuestionario final). Los instrumentos de recolección de información y evaluación tuvieron como propósito indagar sobre los conocimientos que poseían los estudiantes y que eran necesarios para abordar el tema que se iba a trabajar; conocer las apreciaciones de los estudiantes en cuanto a metodología, aprendizaje, expectativas afectivas; y, por último, evaluar tanto los procesos seguidos por los estudiantes como los resultados obtenidos.

Para la etapa de implementación, programamos ocho sesiones de clase, en las que implementamos cinco tareas que abordaron las expectativas de aprendizaje propuestas. Así mismo, establecimos procedimientos para analizar los datos recogidos: el alcance de los logros de los objetivos y los errores previstos en los que incurrieron en cada una de las tareas, junto con los resultados de los 45 estudiantes en las tareas y en el examen final. Para la última etapa del análisis de actuación, proponemos un nuevo diseño, fundamentado en el análisis DAFO (debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades), con el que identificamos y describimos las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades del diseño y la implementación de la unidad didáctica. Con el nuevo diseño de la unidad didáctica, presentamos una serie de recomendaciones y estrategias que nos permitieron aprovechar las fortalezas y oportunidades para mejorar en los aspectos débiles.

Este informe contiene cuatro partes: (a) diseño previo, (b) instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información, (c) descripción de la implementación y (d) nuevo diseño. En el diseño previo, nos centramos en la delimitación del tema matemático, la formulación de los objetivos y las tareas para lograr el aprendizaje. Con los instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información, evaluamos la actuación de los

estudiantes, el diseño y la implementación. En la descripción de la implementación, mostramos los cambios que realizamos al diseño previo durante la implementación con su respectiva justificación. Por último, en el nuevo diseño explicamos las mejoras que realizamos a las tareas con motivo del análisis de sus debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades.

1. Diseño previo

A la hora de ejecutar las directrices curriculares en cuanto a la gestión del profesor, se hace necesario explorar los contenidos que se van a implementar en el aula, proponer expectativas de alcance de los aprendizajes, diseñar tareas para el desarrollo de estos aprendizajes y proponer procedimientos para su evaluación. Para ello, el análisis didáctico es considerado por Gómez (2006) como la “organización y selección de los múltiples significados de un concepto matemático para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas” (p.15). Basados en el modelo del análisis didáctico, diseñamos la unidad didáctica de la idea de límite en un punto, atendiendo a los tres análisis iniciales: el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

1. Análisis de contenido

El análisis de contenido es “el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto” (Gómez, 2006, p. 27). En este análisis, consideramos la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología del tema de límite.

1.1. Noción de límite

La estructura conceptual nos permite identificar los conceptos relacionados con el tema general de límite. Con respecto al límite, identificamos cuatro conceptos: sistemas numéricos, función, procesos infinitos y sucesión. Dichos temas contienen otros subtemas vinculados en un segundo nivel. En la figura 1, presentamos un mapa conceptual que muestra la relación del concepto de límite con otros conceptos. Centramos nuestra atención en la noción de función, en la que destacamos las funciones continuas y discontinuas.

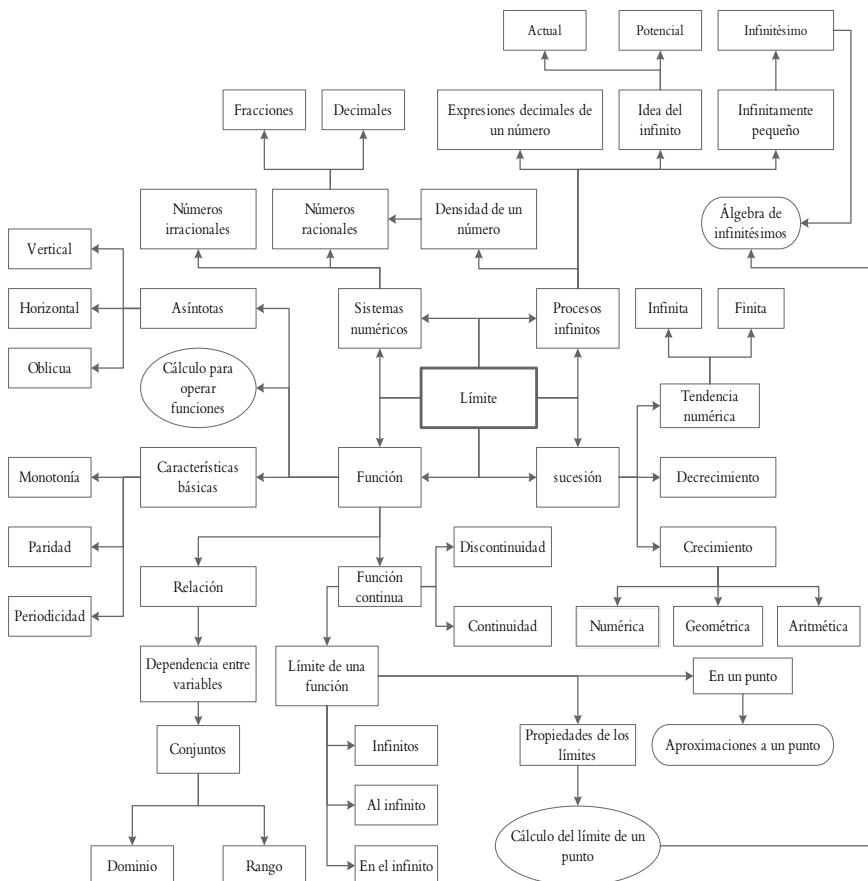


Figura 1. Relación del concepto de límite con otros conceptos

1.2. Estructura conceptual de la idea de límite de una función en un punto

En la estructura conceptual de la idea de límite consideramos dos campos: conceptual y procedimental. Estos campos nos permiten identificar los conceptos y procedimientos más relevantes del tema y las relaciones entre ellos.

Campo conceptual

En el campo conceptual, identificamos los hechos, los conceptos y las estructuras relacionadas con la idea de límite. En los hechos, involucramos términos, notaciones, convenios y resultados. En los términos, identificamos límite, infinito, función, tender a un punto, sucesión, asíntotas, límites de una función, límite de una función en un punto, indeterminaciones, plano

cartesiano, continuidad y número irracional. En las notaciones, consideramos límite de una función, infinito (∞), notación de función $f(x)$ o y , sucesión $[a_n]$, asíntotas verticales y horizontales ($y = a$ y $x = b$). En los convenios, establecimos el trabajo con la métrica usual, las funciones con su mayor dominio, el hecho de que en el límite de una función en un punto x solo intervienen las imágenes de los puntos próximos a un punto pero no la de dicho punto, y el hecho de que la función en los reales puede tomar cualquier valor o incluso no estar definida. En los resultados, establecimos que una función no puede aproximarse a dos valores distintos; que el límite de una función polinómica (con exponentes positivos en la variable) en un punto es la imagen del punto; que no todas las funciones en un punto tienen límite; que algunas funciones en un punto son la imagen del punto; que algunas funciones en un punto tienden al infinito; y que si los límites laterales de una función en un punto existen y son iguales, entonces el límite de la función en el punto existe y es igual a los límites laterales.

En lo que respecta a los conceptos, identificamos límite de una función, límite lateral de una función, asíntota vertical, discontinuidad en saltos, discontinuidad removible, discontinuidad esencial y operaciones con funciones. En las estructuras conceptuales, establecimos la R-álgebra de funciones continuas en los reales y la R-algebra de funciones continuas en un intervalo.

Campo procedimental

En el campo procedimental, identificamos destrezas, razonamientos y estrategias relacionadas con el tema. Proponemos las siguientes destrezas: representaciones de una función, cálculo de límites en un punto, estimación de límite por aproximación en tablas, límites laterales y asíntotas con límites al infinito. En los razonamientos, consideramos el deductivo (identifica las propiedades de los límites), el inductivo (reconoce la tendencia de una función en un punto), el figurativo (ve las asíntotas como “tendencia a”) y el argumentativo (relaciona los puntos próximos al punto con el límite de la función en dicho punto). En las estrategias, establecimos la aproximación intuitiva al concepto de límite, la estimación de tablas para calcular límites, la construcción de gráficas de funciones en los puntos indicados y el reconocimiento de estructuras recurrentes de tipo algebraico.

Foco del tema

Partimos de la idea intuitiva de límite de una función y consideramos las aproximaciones o acercamientos de imágenes y preimágenes a un punto. Un

primer acercamiento está estrechamente relacionado con la idea de límite propuesta por D'Alambert (citado por Ferrante, 2009, p. 50).

Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable.

Bajo esta definición presentamos cuatro casos.

- El límite en la discontinuidad por saltos o asintótica en el punto que se va a evaluar no existe.
- El límite de la función en el punto es la imagen del punto; es decir, la función es continua en el punto.
- El límite de una función en el punto cuando esta tiende al infinito.
- Cuando la discontinuidad en el punto es removible y los valores se acercan al punto, entonces las imágenes de los valores establecen el límite.

Los casos anteriores nos presentan las distintas maneras de ver el límite en un punto. Estos casos permiten dar sentido a la idea de aproximación y de acercamiento lateral y ponen de manifiesto que el cálculo del límite es una necesidad que surge, ya sea por aproximaciones sucesivas (como se evidencia en una tabla de valores), o por medio de la gráfica cartesiana, al indicar el límite como una línea recta, llamada asíntota.

Simbólicamente, el límite puede deducirse al hallar el valor de la imagen del punto evaluado. Pero, como mencionamos anteriormente, puede existir el caso de que haya discontinuidades en el punto o simplemente indeterminaciones del tipo $a/0$. Por lo tanto, consideramos necesario el manejo algebraico de las propiedades del límite, junto con otros procedimientos como la conjugación, la sustitución o la división de variables para hallar el límite exacto.

Además, la continuidad está inmersa en el límite como concepto clave, dado que la equivalencia del límite en un punto solo se da si la función es continua. Por tal motivo, determinamos indispensable involucrar significados de continuidad, pues sirven para evaluar e identificar casos propios del tema.

En la figura 2, presentamos la estructura conceptual que involucra los conceptos (enmarcados en rectángulos) y los procedimientos (enmarcados en óvalos) inmersos en la idea de límite de una función en un punto.

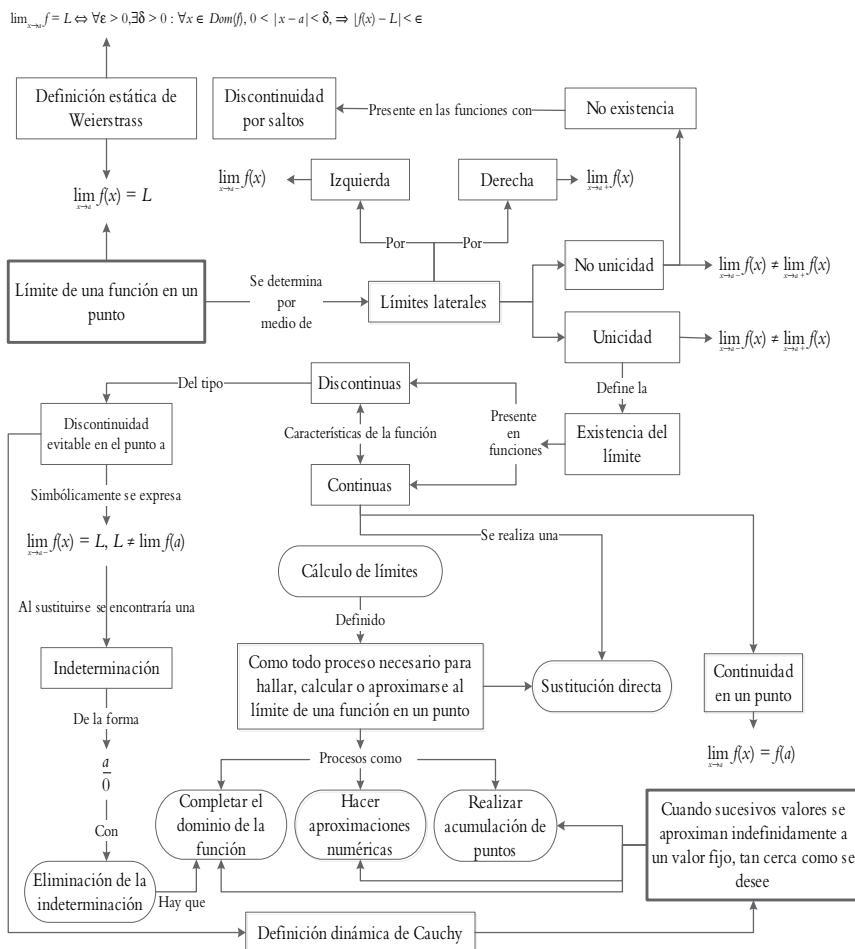


Figura 2. Estructura conceptual de la idea de límite

Para realizar la estructura conceptual, nos basamos en la evolución histórica de la idea de límite. Atendimos a fenómenos de movimiento de partículas y a la aritméticización del cálculo. Destacamos la idea de límite formal, dada por Weierstrass:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si y solo si, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$

Sin embargo, la definición de límite que predominó en el foco de estudio fue la planteada bajo la perspectiva dinámica de Cauchy, en la que se estipula que “cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás” (citado por Ferrante, 2009, p. 50).

Procesos como la acumulación de puntos o de imágenes alrededor del límite y la sucesiva aproximación de valores numéricos que pueden ser puestos en una tabla se pueden integrar a esta definición. Este conjunto de procesos, que permite hallar, calcular o aproximar el valor fijo de límite, se conoce como cálculo de límites.

1.3. Sistemas de representación

Consideramos cuatro sistemas de representación: numérico-tabular, simbólico, gráfico y manipulativo ejecutable. Además, presentamos transformaciones dentro de un sistema de representación y las traducciones entre los distintos sistemas de representación.

Sistema de representación numérico-tabular

El sistema de representación numérico-tabular facilita las aproximaciones al punto que se va a evaluar. En la tabulación, implementamos aproximaciones con números reales cercanos al punto que cada vez se acercan más al límite deseado. Presentamos un ejemplo en la tabla 1 para la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x = 1 \\ x^2 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Tabla 1
Tabulación de la función $f(x)$ con valores más cercanos a 1

x	0,9	0,99	0,999	1	1,00001	1,0001	1,001
y	0,81	0,9801	0,998001	3	1,00002	1,0002	1,002001

La tabla 1 muestra las aproximaciones haciendo uso de números reales cercanos al punto que se va a evaluar.

Sistema de representación simbólico

En el sistema de representación simbólico, consideramos las siguientes notaciones relacionadas con la idea de límite de una función en un punto.

$$1. \quad x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow L$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a^-} (f(x)) = L$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow a^+} (f(x)) = L$$

La primera notación muestra la idea intuitiva del concepto de límite y resalta la necesaria consecuencia lógica sin tener que recurrir a la definición clásica de ϵ y δ . Empleamos la segunda notación en el momento en que existe el límite de una función. La tercera y la cuarta notaciones nos permiten expresar simbólicamente los límites laterales por izquierda y derecha respectivamente.

Sistema de representación gráfico

El sistema de representación gráfico permite establecer si las funciones son continuas o discontinuas y posibilita tener una idea de la unicidad del límite con las imágenes de los entornos. En la figura 3, presentamos la función $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x = 1 \\ x^2, & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$. La idea es evaluar el punto $x = 1$, donde se observa la discontinuidad de la función.

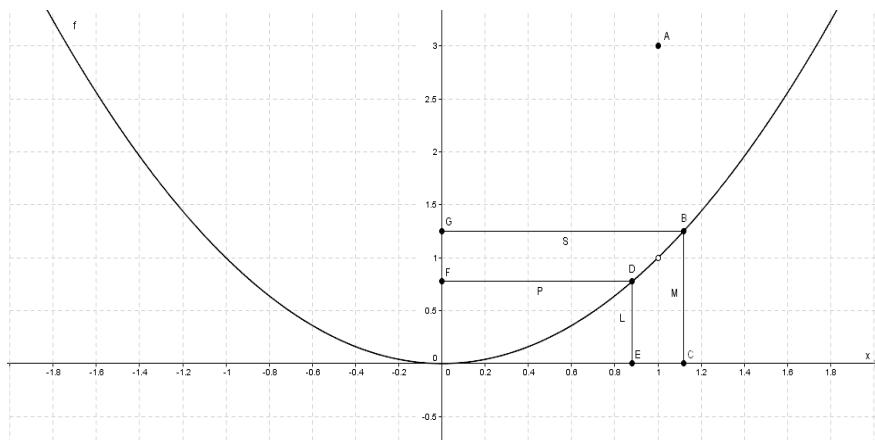


Figura 3. Gráfica de la función $f(x)$

Mediante la representación gráfica, se observa que, a pesar de que la función es discontinua en el punto a evaluar, los acercamientos laterales evidencian que el límite de la función en dicho punto es 1.

Sistema de representación ejecutable

Consideramos los recursos tecnológicos útiles en el trabajo de límite como sistemas de representación ejecutables. El programa GeoGebra nos facilita delimitar intervalos (figura 4). Al dinamizar los intervalos por medio de deslizadores y animaciones, es posible apreciar cómo los puntos tienden a un punto determinado que es equivalente al límite de la función.

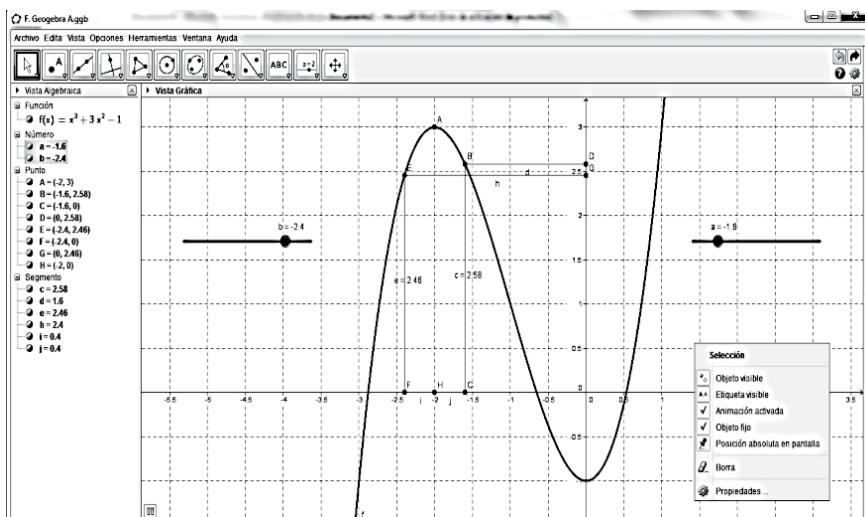


Figura 4. Representación en GeoGebra de una función

Traducciones entre los sistemas de representación simbólico, gráfico y tabular

Presentamos un ejemplo de las traducciones entre los sistemas de representación simbólico, gráfico y tabular. Para ello, consideramos los límites de funciones equivalentes. Resumimos estas ideas en la figura 5.

A partir de las tres ideas más relevantes de la estructura conceptual (límite, existencia y continuidad), se establecen transformaciones invariantes, variantes y traducciones entre distintos sistemas de representación. Estas operaciones entre los sistemas de representación permiten identificar procedimientos como los siguientes:

- aproximaciones numéricas,
- gráfica de la función a partir de sus coordenadas,
- expresiones verbales del comportamiento del límite a partir de la definición dada de Cauchy, y
- transformación invariante del límite a la definición formal de Weierstrass.

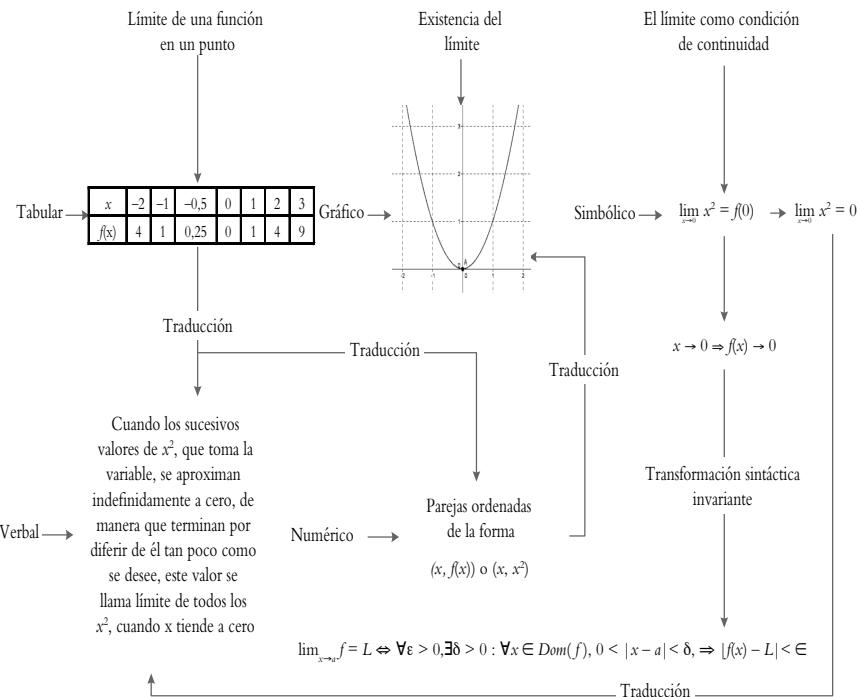


Figura 5. Traducción entre sistemas tabular, simbólico y gráfico

1.4. Fenomenología

La idea de límite se enseña usualmente a partir de situaciones científicas relacionadas con la ejercitación de los procedimientos del límite. Estructuramos nuestro tema en los fenómenos relacionados con la resolución de problemas como los siguientes.

- Se quiere construir una caja sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 30 cm de largo por 20 cm de ancho. Para ello, se recortará un cuadrado en cada esquina de lado x y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

- Teniendo en cuenta la fuerza gravitacional ejercida por la tierra sobre un objeto que tiene masa m que se encuentra a una distancia del centro de la tierra, ¿qué ocurre cada vez que el radio disminuye?
- Un avión sobrevuela a lo largo de la pista y su altura va disminuyendo hasta hacerse 0.
- Si se depositan \$1000 en un banco que paga un interés compuesto del 6%, entonces la cantidad en depósito después de un año está dada por la función $C(t) = 1000(1 + 0.06t)^{1/t}$, donde t es el tiempo ¿Qué ocurre cada vez que t se acerca a 0?
- El trabajo que realiza una balanza está dado según la función $W = \frac{f^2 - 1}{f - 1}$, donde f es la fuerza que se ejerce sobre la balanza expresada en newtons. ¿A qué valor se aproxima el trabajo de la balanza cuando la fuerza ejercida sobre ella se aproxima a 1 newton?
- Considere un resorte colgado por uno de sus extremos en una barra y con un peso p en el otro extremo. Se sabe que el resorte se rompe si el peso p es igual o mayor que 5 kilos. Supongamos que deseamos determinar la longitud máxima l que se estira considerando que el resorte no se puede romper. Para resolver esta cuestión realizaremos el experimento de cambiar el peso p colocado en el extremo libre del resorte de manera creciente y medir la longitud l que se estira con cada peso.
- Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad del producto cobra la cantidad de 5000 pesos. No obstante si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad y por cada x unidades cobra $C(x) = 5x$, si $0 < x \leq 10$ y $C(x) = ax^2 + 500$, si $x > 10$. ¿Para qué valor de a el precio varía de forma continua, al variar el número de unidades que se compra?
- Hallar la máxima capacidad de una canal, realizando aproximaciones al ancho y al alto, manteniendo el largo.

La fenomenología nos dotó de contextos y subestructuras de la idea de límite. De acuerdo con el análisis de la estructura conceptual, establecimos tres grandes subestructuras que dieron paso a los demás conceptos y procesos: límite, existencia y continuidad. En figura 6, presentamos la organización de la estructura conceptual conforme con dichas subestructuras.

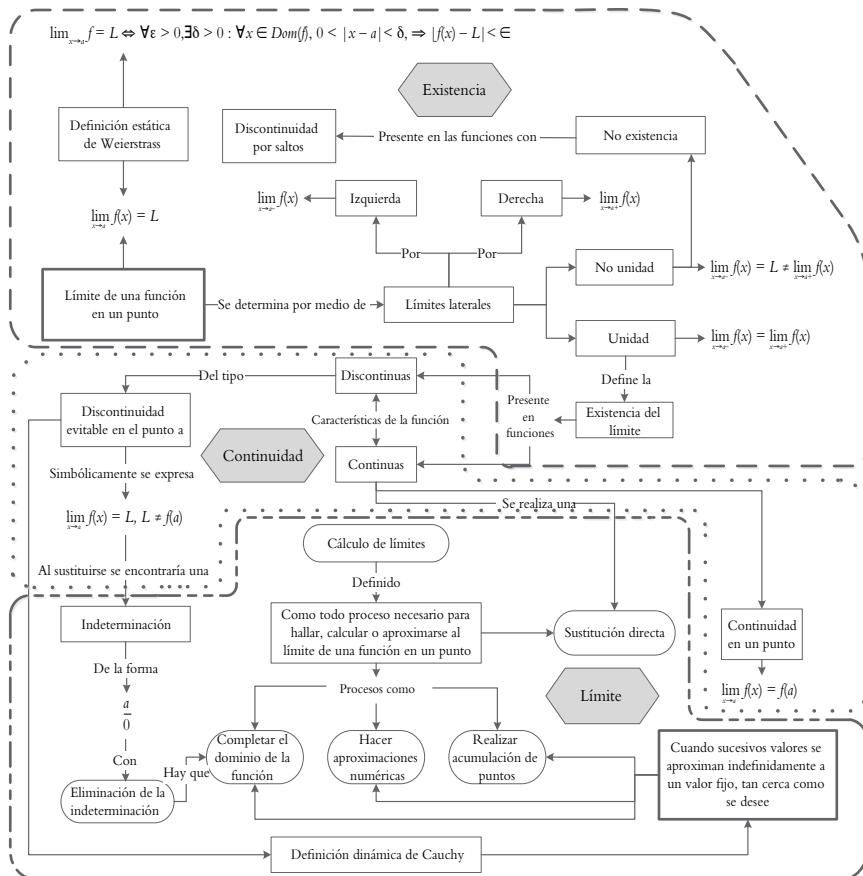


Figura 6. Relación estructura conceptual y análisis fenomenológico

De acuerdo con las tres subestructuras, establecimos tres contextos que organizan los fenómenos: (a) los fenómenos en que interesa saber si la primera cantidad se approxima o no un valor específico, (b) los fenómenos en los que interesa determinar el valor al que se approxima la primera cantidad y (c) los fenómenos en los que la variación de la primera cantidad en el valor determinado es continua o no.

A continuación, estipulamos los fenómenos asociados con cada uno de los contextos y subestructuras, la tabla 2 presenta la relación.

Tabla 2
Análisis fenomenológico de la idea intuitiva de límite

Contexto	Subestructura	Pregunta	Fenómenos
Los fenómenos en que interesa saber si la primera cantidad se aproxima o no a un valor específico	Existencia de límite	¿Existe o no existe el límite de una función en el punto?	Estimación de un resorte dado su peso Cálculo de límites laterales Aproximación a la decena Máximos y mínimos por aproximación
Los fenómenos en los que interesa determinar el valor al que se aproxima la primera cantidad	Cálculo límite	¿Cuál es el límite de la función en el punto?	Agrupación de datos de un experimento aleatorio Interés compuesto El cálculo de límite en un punto La razón de cambio en un punto a una curva Problemas de proporcionalidad inversa
Los fenómenos en los que la variación de la primera cantidad en el valor determinado es continua o no.	Continuidad	¿Es la función continua o discontinua en el punto dado?	Volumen de un líquido con respecto a su altura Ingresos mensuales en relación con la cantidad de productos fabricados El trabajo realizado por un cuerpo

2. Análisis cognitivo

Realizamos el análisis cognitivo de nuestro tema. Con este análisis, (a) establecimos las expectativas de aprendizaje (competencias, objetivos y capacidades), (b) determinamos las limitaciones de aprendizaje, (c) identificamos las expectativas en el ámbito afectivo y (d) expresamos las hipótesis sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje de los escolares.

2.1. Expectativas de aprendizaje

Al reflexionar sobre las diversas expectativas que se pueden dar en el aprendizaje, establecimos tres tipos: las competencias matemáticas a las cuales se pretende contribuir, los objetivos que se quieren lograr y las capacidades que el escolar puede activar. Establecemos inicialmente los objetivos de aprendizaje que pretendemos lograr y las capacidades que prevemos que los escolares pueden activar. Después, establecemos las competencias que se pueden desarrollar con los objetivos propuestos.

Objetivos de aprendizaje

Para plantear los objetivos de aprendizaje, identificamos los aspectos más relevantes que surgieron del análisis de contenido. Al tener en cuenta los sistemas de representación (gráfico, tabular y simbólico) y los fenómenos asociados al cálculo de máximos y mínimos, establecimos tres objetivos de aprendizaje: el primero, asociado a los sistemas de representación gráfico y tabular; el segundo, al sistema de representación simbólico; y, el tercero, a la resolución de problemas.

Objetivo 1. Identificar la idea de límite en un punto a partir de datos tabulados y gráficas que describen comportamientos de una función.

Objetivo 2. Calcular simbólicamente el límite de una función.

Objetivo 3. Resolver problemas que impliquen la idea de límite.

En el primer objetivo, contrastamos las subestructuras de la existencia y hallazgo del valor del límite de una función en un punto. Con el segundo, pretendemos relacionar las ideas de continuidad, aproximaciones y valores que puede tomar el límite. El tercero surge de la idea de dotar de sentido el límite por medio de su aplicación en la resolución de problemas.

Capacidades

Para cada objetivo de aprendizaje, identificamos un conjunto de capacidades. Una capacidad se define como una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea de tipo rutinario asociada a un tema matemático (González y Gómez, 2013, p. 10). Las capacidades se manifiestan mediante conductas observables de los estudiantes. Por ejemplo, el listado de capacidades del tercer objetivo que presentamos en la tabla 3 está relacionado con acciones propias de la resolución de problemas que implican la idea de límite.

Tabla 3
Capacidades relacionadas con el objetivo 3

C	Descripción
3.25	Calcula el cambio instantáneo por medio del cálculo de límites
3.26	Estima máximos y mínimos como puntos críticos de la función
3.27	Usa adecuadamente los signos
3.28	Estima el valor del límite

C	Descripción
3.29	Identifica que dos funciones son equivalentes cuando comparten el límite en cualquier punto que se evalúe
3.30	Representa simbólicamente una función
3.31	Reconoce que la no unicidad del límite es la no existencia de este
3.40	Utiliza el límite de una función para describir y justificar el comportamiento y características de una función
3.41	Hace uso de los sistemas de representación gráfico, tabular y simbólico como ayudas para solucionar un problema
3.42	Utiliza algún material manipulable con el fin de simular las condiciones de la tarea

Nota: C = capacidad

El listado completo de capacidades puestas en juego por el escolar para el desarrollo de los tres objetivos se encuentra en el anexo 1.

Competencias

Para evaluar las contribuciones de los objetivos a las competencias, partimos de los descriptores establecidos para cada una de los procesos generales o competencias establecidas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006). De ellos, logramos inferir que las competencias intrínsecas en el desarrollo de los objetivos de aprendizaje de la idea de límite son la resolución, planteamiento y formulación de tareas, la ejercitación y comparación de procedimientos, y la comunicación.

Con ello, esperamos aproximar al escolar al desarrollo de los procesos generales. De esta forma, facilitaremos que los estudiantes reconozcan la idea de límite a partir del uso de los sistemas de representación y de las traducciones entre ellos; argumenten de manera clara y organizada sobre el valor del límite, a partir de características propias de la función en el punto; y resuelvan problemas en donde se ponga en juego el tema.

2.2. Limitaciones de aprendizaje

Determinamos un grupo de dificultades asociadas al concepto, a los procesos propios del pensamiento matemático, a los procesos de enseñanza, a procesos cognitivos y a las actitudes afectivas hacia las matemáticas que presentamos en la tabla 4.

Tabla 4
Dificultades de la noción de límite

Tipo de dificultad	Descripción
Asociadas al concepto matemático	Dificultad para reconocer el límite como un proceso infinito, mediante el acercamiento de las imágenes al punto
	Dificultad en interpretar las gráficas con respecto a la idea de límite
	Dificultad en deducir el límite de una función a partir de algoritmos y procesos simbólicos
	Dificultad en implementar adecuadamente los sistemas de representación ejecutable
Asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático	Dificultad en considerar que el proceso de límite no se puede transformar en una simple operación aritmética o algebraica, sino que involucra un proceso infinito
	Dificultad relacionada con la idea de si el límite es alcanzado o no
Asociadas a los procesos de enseñanza	Dificultad como consecuencia de que la idea de límite se enseña a partir del sistema de representación simbólico, sin apoyarse en otros sistemas de representación
Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos	Dificultad en la abstracción de la terminología propia del límite
	Dificultad en interpretar y argumentar los procesos realizados para obtener el límite de una función en un punto
Asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas	Dificultad para explorar, comprobar y aplicar ideas en torno a la idea de límite de una función en un punto
	Dificultad en adquirir seguridad para hacer conjecturas, para explicar sus razonamientos y para resolver problemas, en lo que respecta a la idea de límite de una función en un punto

Con la caracterización de las dificultades, decidimos clasificar el conjunto de errores de acuerdo con el sistema de representación que más se relacionaba. Por ejemplo, al sistema de representación gráfico asociamos errores en los que puedecurrir el estudiante al construir e interpretar una gráfica cartesiana. Presentamos estos errores en la tabla 5.

Tabla 5
Errores relacionados con el sistema de representación gráfico

E	Descripción
E2.1	Deducir dos o más límites de una función discontinua en un punto
E2.2	Considerar la discontinuidad removible o evitable como la inexistencia del
E2.3	Desligar la unicidad de límite de los límites laterales
E2.4	Ubicar preimágenes como ordenadas y abscisas como imágenes

E	Descripción
E2.5	Ubicar una indeterminación como un punto en la gráfica
E2.6	Deducir que en algún punto la función tocará la asíntota vertical
E2.7	Suponer que toda función discontinua tiene asíntota vertical
E2.8	Interpretar puntos abiertos y cerrados como imágenes de un solo elemento
E2.9	Escoger un entorno lateral para hallar el valor del límite
E2.10	Afirmar que el límite es el punto discontinuo en la función
E2.11	Deducir que toda función expresada en una representación simbólica es continua
E2.12	Considerar que el límite se presenta exclusivamente en la variación de las abscisas, sin considerar las ordenadas

Nota: E = error

De la misma manera, asociamos un conjunto de errores a los otros sistemas de representación —simbólico y tabular— que pueden verse en el anexo 1.

2.3. Expectativas afectivas

Para identificar las capacidades de tipo afectivo, consideramos los cambios que conlleva la alfabetización emocional, propuestos por Goleman (2012) y formulamos las expectativas afectivas del tema. A continuación, exponemos algunas de ellas. El listado completo se encuentra en el anexo 3.

F1. Mayor tolerancia a la frustración y mejor manejo de la ira cuando se resuelven problemas de límite.

F2. Sentimientos más positivos con respecto a ver la idea de límite.

F3. Capacidad de asumir el punto de vista de otra persona, para argumentar la idea de límite de una función en un punto.

F11. Mayor capacidad de escuchar al otro y sus propuestas de solución a los problemas.

De acuerdo con las expectativas de tipo afectivo, esperamos abordar aspectos actitudinales con las tareas propuestas, como la participación e interacción entre los estudiantes y la motivación al resolver situaciones de límite.

2.4. Hipótesis de aprendizaje

Al establecer las mínimas acciones observables por los escolares como capacidades, adoptamos la idea de secuencias de capacidades como una sucesión de capacidades que cumplen una función dentro de la resolución de una tarea. Con ellas, estructuramos caminos de aprendizaje que muestran las posibles formas como el escolar puede abordar las tareas que corresponden a un objetivo. De esta forma, construimos los grafos de secuencias de capacidades de cada objetivo que presentamos en las figura 7, 8 y 9. Describimos de manera general los grafos. El detalle de su contenido requiere hacer referencia a los listados de capacidades y errores que se encuentran en los anexos 1 y 2.

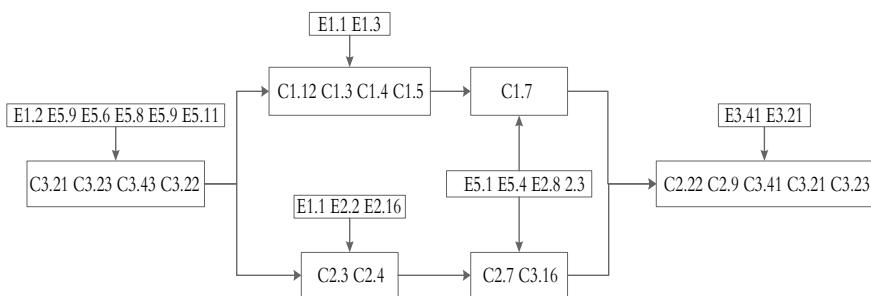


Figura 7. Grafo de secuencias de capacidades del objetivo 1

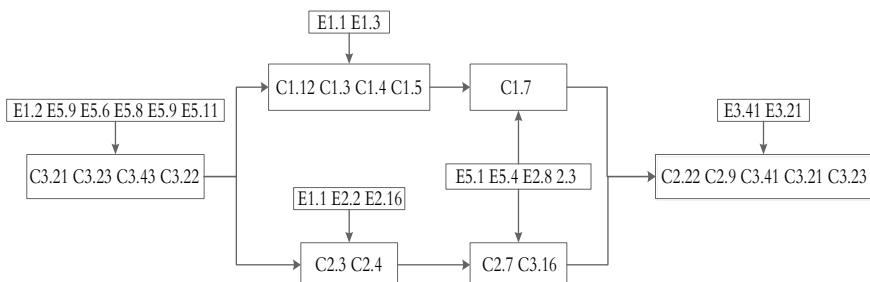


Figura 8. Grafo de secuencias de capacidades del objetivo 2

Con el objetivo 1, asociado a representaciones tabulares y gráficas, esperamos que el estudiante aborde distintas secuencias de capacidades, como la exploración de las condiciones dadas en el problema y las incógnitas que este provee. Posteriormente, buscamos que él pueda utilizar sistemas de representación como el gráfico o tabular, con algunos recursos ejecutables

como Excel o GeoGebra. Como fase final, prevemos que él explore la idea de límite para poder determinar las posibles situaciones de la tarea a partir de los sistemas de representación.

El segundo objetivo de aprendizaje está asociado al sistema de representación simbólico. Esperamos que el estudiante comience explorando las variables del problema por medio de recursos como GeoGebra, Excel o calculadora (activación del primer bloque de capacidades). Posteriormente, esperamos que halle el valor del límite. Para ello, el estudiante puede optar por elegir alguno de los sistemas de representación gráfico, tabular o simbólico para justificar la respuesta. En cada sistema de representación, se activarán capacidades específicas a la representación empleada, se obtendrá el límite por el método de eliminación de la forma indeterminada o por aproximaciones laterales. En cualquiera de los casos, al finalizar, el escolar debería hallar una relación de equivalencia entre las funciones propuestas (últimas capacidades).

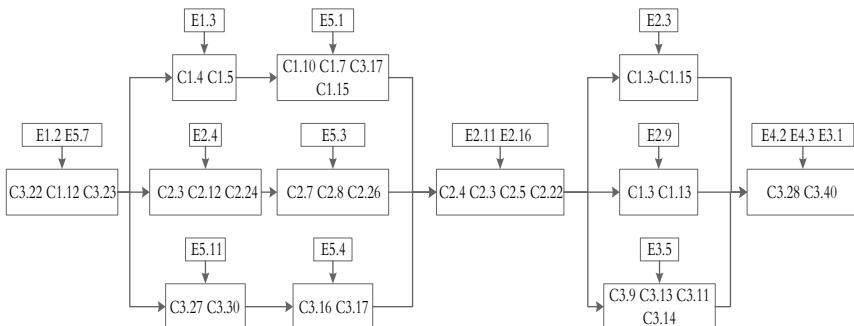


Figura 9. Grafo de secuencias de capacidades del objetivo 3

El tercer objetivo se refiere a la resolución de problemas relacionados con la idea de límite. En el inicio del grafo, incluimos una secuencia de capacidades relacionadas con el reconocimiento de las variables de un problema. Después, el estudiante puede elegir alguno de los tres caminos relacionados con las formas de representación tabular, gráfica o simbólica. Él puede utilizar inicialmente papel y lápiz, para luego pasar a hacer uso de los aplicativos GeoGebra o Excel. El estudiante determina así un intervalo de la función en el que se encuentra el máximo local (caja central) para posteriormente volver a aplicar cualquiera de los procesos anteriormente propuestos. Finalmente, el escolar determina el valor máximo, al utilizar aproximaciones laterales, y expresa la solución como el límite de la función. Posteriormente, prevemos

que el estudiante active una secuencia de capacidades relacionada con el uso de recursos ejecutables y explore los valores asignados a las variables. A continuación, desplegamos secuencias de capacidades para describir las principales características de la función. Después, prevemos un conjunto de capacidades relacionadas con la evaluación de los valores de x que tienen sentido en la función. Finalmente, el escolar determina el valor máximo, al utilizar aproximaciones laterales y expresa la solución como el límite de la función. A lo largo de los caminos, aparecen los errores (E) y las capacidades afectivas (F) que pueden emergir en el proceso de resolución de la tarea.

Los grafos de los objetivos presentan nuestra previsión sobre los posibles caminos de aprendizaje que los escolares pueden activar al resolver una tarea y lograr el desarrollo de un objetivo.

3. Análisis de instrucción

Una vez desarrollados los análisis anteriores, el docente debe poner en práctica todos los recursos a su alcance para lograr los objetivos de aprendizaje. La enseñanza es entonces el centro de atención. Hicimos una aproximación práctica, al seleccionar unas tareas de enseñanza y describir sus componentes básicos. Este proceso exigió una revisión continua de las tareas, con el fin de lograr los objetivos de aprendizaje propuestos, así como superar las limitaciones de aprendizaje (Flores, Gómez y Marín, 2013, pp. 1-2).

Consideramos los máximos y mínimos, tablas, gráficos y aplicativos como los elementos centrales en el acercamiento a la idea de límite. Pudimos establecer, en indagaciones preliminares, que una gran parte de la dificultad para asimilar la idea de límite es causada por un excesivo formalismo con ejercicios rutinarios. Este hecho es evidente en casi todos los textos escolares que, en un intento vano de simplificación, se remiten a exponer reglas y procedimientos que resultan insustanciales. Consideramos un aporte importante el hecho de plantear tareas con situaciones cercanas al estudiante en un contexto matemático específico. Igualmente, con el manejo tabular y gráfico, apoyado en el uso de aplicativos, pretendemos brindar una experiencia más cercana a la intuición de los escolares.

Inicialmente, seleccionamos tareas tomadas de diferentes fuentes y las adaptamos de acuerdo con los objetivos propuestos. A partir de estas tareas, generamos un listado de capacidades, para diseñar los caminos de aprendizaje que expresan nuestras previsiones sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje. Posteriormente, en un proceso de revisión y ajuste, incorporamos la

utilización de recursos como GeoGebra y Excel. Estos cambios nos permitieron generar relaciones muy dinámicas entre los sistemas de representación y, por tanto, proporcionar oportunidades para una mejor comprensión del concepto de límite. Adicionalmente, reemplazamos varias de las tareas iniciales con otras más retadoras y próximas al estudiante, para motivar su interés. Estos cambios generaron así mismo ajustes en las capacidades incluidas y en los caminos de aprendizaje.

En lo que sigue, entenderemos por tarea “una propuesta para el alumno que implica una actividad de él en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje” (Flores et al., 2013, p. 10). Las tareas se describen con unas características básicas, denominadas componentes. Incluimos también el análisis de sus condiciones de ejecución, grado de significatividad y complejidad (p. 12). Estas ideas serán ilustradas mediante la exposición detallada de la tarea Emparejamiento. Las tareas restantes pueden ser consultadas en el anexo 4.

Por último, organizamos las tareas en sesiones de clase. En cada sesión, destinamos una parte inicial a compartir la meta de la tarea con los estudiantes y aclarar las inquietudes que ellos consignan en su diario. Dedicamos la parte intermedia al desarrollo de la tarea y, hacia el final de la sesión, los estudiantes registran en su diario sus apreciaciones con respecto a la jornada. Esta serie de sesiones conforman la unidad didáctica del tema, de acuerdo con la secuencia habitual de un proceso formativo. Para el diseño previo, adicionamos una sesión de clase destinada a hacer una actividad diagnóstica. Igualmente, al final de la unidad didáctica, incluimos dos sesiones de clase, una dedicada a hacer una recapitulación del proceso adelantado, y otra sesión, para efectuar una actividad evaluativa, denominada examen final. Incluimos en el anexo 4 la descripción detallada de las tareas que no aparecen aquí, así como una descripción detallada, tanto de la actividad diagnóstica como del examen final. En la parte final de este apartado, expondremos con detalle la secuencia de las tareas de la unidad didáctica.

3.1. Tareas, componentes básicos y elementos de análisis

A continuación, presentamos la tarea Emparejamiento. Mostramos el proceso de análisis de instrucción aplicado en la unidad didáctica. En ella, hemos identificado algunos de los componentes básicos de una tarea matemática: (a) formulación, (b) meta, (c) materiales y recursos, (d) capacidades, (e) contenido matemático, (f) situación de aprendizaje, (g) agrupación y (h) interacciones.

Igualmente, exponemos las expectativas de aprendizaje y previsiones, así como la coherencia de la tarea con los análisis previos, específicamente en cuanto a función, complejidad y significatividad.

Como expusimos previamente en el análisis cognitivo, hemos recogido las expectativas e hipótesis de aprendizaje en un grafo de secuencias de capacidades para cada objetivo y cada tarea. Los grafos están compuestos por secuencias de capacidades, que pretendíamos fueran desarrolladas por los escolares, así como por limitaciones de aprendizaje que debían ser superadas. La complejidad de cada tarea se estableció de acuerdo con la clasificación hecha por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE, 2003, pp. 42-49). A continuación, exponemos los componentes básicos de la tarea Emparejamiento.

Formulación

Se entregará al estudiante una guía con la formulación del problema y algunas indicaciones sobre la forma de trabajar. También, se realizarán algunas aclaraciones verbalmente.

Encontrar equivalencias

De las siguientes funciones expresadas en forma simbólica (véase la figura 10), busca, en la columna izquierda, una expresión equivalente a una de la columna de la derecha. Luego, con un compañero desarrolla la actividad. Hacia el final de la actividad, se hará una socialización de la tarea. Con tu compañero prepara un informe de los hallazgos, que describa la forma en que fueron hechos, para poderlos compartir con el resto de la clase.

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

$$f(x) = \frac{x - 4}{x - 3}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 3)(2x - 1)}{x^2 - 4}$$

Figura 10. Datos de la tarea Emparejamiento

Meta

Esperamos que el estudiante observe que dos funciones son equivalentes cuando, en cualquier punto seleccionado (incluyendo el punto abierto), se obtiene el mismo límite. De esta forma, la tarea contribuye al logro del objetivo 2.

Recursos

Los recursos que proponemos son tablero, memofichas de factorización, lápiz, papel, ordenadores, GeoGebra y Excel.

Capacidades

Mostramos un listado de las capacidades que intervienen en el desarrollo de la tarea. Lo hemos organizado por secuencias de capacidades. En el apartado dedicado a las previsiones ampliamos la información sobre su organización y contenido.

C1.2-C1.1-C1.4, C3.6-C3.7-C3.8-C3.10, C2.1-C2.7-C2.2-C2.3-C2.24-C1.8, C1.3-C1.4-C1.5-C1.6-C1.9, C3.1-C2.9-C1.13.

Contenido matemático y situación de aprendizaje

El contenido matemático de esta tarea pertenece a equivalencia de funciones, cálculo de límites y continuidad. Está planteada bajo una situación que puede ser considerada como científica.

Agrupamientos

Proponemos inicialmente un agrupamiento en parejas para desarrollar la tarea. Luego se hará una socialización en gran grupo.

Interacciones

El docente entregará una guía impresa con la formulación del problema. Los estudiantes la leerán y analizarán. Después de un tiempo pertinente, el profesor hará algunas aclaraciones. Los escolares discutirán sus puntos de vista y plantearán una conjetura sobre las soluciones al problema. Cada grupo solicitará orientaciones del docente cuando lo considere necesario. El profesor se acercará a cada grupo y, mediante las ayudas previstas, que presentamos más adelante, orientará el trabajo de los estudiantes. Varios grupos expondrán los resultados obtenidos a toda la clase y estos serán convalidados por los demás grupos. El profesor guiará el proceso.

En lo que sigue, presentamos los elementos de análisis para la tarea Emparejamiento.

Objetivo

La tarea Emparejamiento está asociada al objetivo 2: calcular simbólicamente el límite de una función.

Grafo de secuencia de capacidades de la tarea

Como podemos observar en la figura 11, la primera secuencia de capacidades que proponemos se refiere al reconocimiento por parte del escolar de las variables que intervienen en las funciones propuestas en la tarea. Después, el estudiante puede elegir uno de los tres caminos para identificar el límite. El primero está relacionado con la sustitución, la eliminación de la indeterminación y el cálculo del límite. El segundo, se refiere a realizar las gráficas en GeoGebra e identificar las que se relacionan a pesar del punto de indeterminación. El tercero, tiene que ver con la tabulación de las funciones en Excel. Este procedimiento permite comparar los mismos puntos del dominio, identificar los datos que se relacionan y la diferencia (que es el punto de indeterminación y aparece con un #####). En la siguiente secuencia de capacidades, después de haber tomado alguno de los caminos anteriores, relacionamos capacidades de semejanza entre dos funciones y la unicidad del límite en cada punto, para así llegar a la última secuencia de capacidades en la que el estudiante conjectura que dos funciones son semejantes si tienen el mismo límite en todos sus puntos.

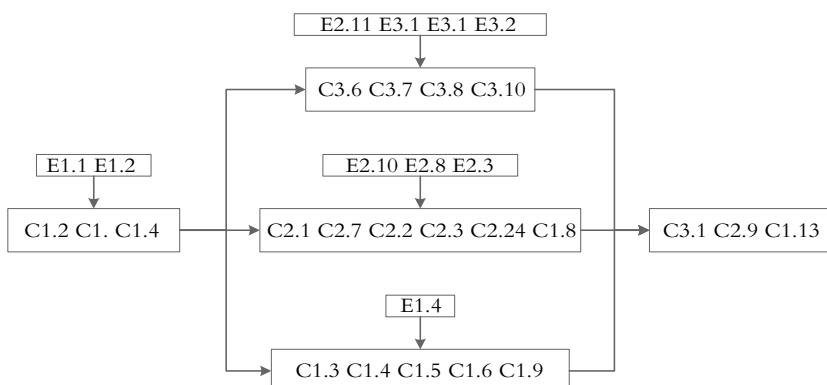


Figura 11. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea Emparejamiento

Ayudas

Dispondremos de una serie de ayudas que suministraremos a los estudiantes durante el desarrollo de la tarea, según se vayan presentando las dificultades. Estas ayudas son las siguientes.

1. Al observar las gráficas en GeoGebra o tablas en Excel, ¿qué puedes decir acerca de la continuidad, crecimiento o decrecimiento de las dos funciones? Argumenta tu respuesta.
2. Dada la expresión que conforma la función algebraica, ¿cómo puedes factorizarla, simplificarla o amplificarla, según sea el caso, para obtener una equivalencia de funciones?
3. Un punto de indeterminación es un punto que, al ser sustituido, no puede ser hallado, dado que se cumple alguna de las indeterminaciones ¿Cuál es el punto de indeterminación de estas dos funciones?
4. Puedes ayudarte hallando el límite de las funciones en el punto de indeterminación y tabulando valores próximos al punto.
5. ¿Qué criterios tienes en cuenta para saber que dos funciones son iguales?
6. Puedes recordar los métodos de factorización vistos en cursos anteriores.
7. Al tomar un punto diferente al punto de indeterminación, ¿cuál es el límite?
8. ¿Qué ocurre si tomas otros puntos de la función y encuentras el límite?
9. ¿Qué conclusión puedes extraer del trabajo realizado en lo que respecta a las dos funciones?
10. ¿Puedes dar ejemplos de funciones equivalentes?
11. ¿Cómo puedes organizar un escrito para exponer los resultados encontrados?

Función dentro de las secuencias de tareas

Diseñamos esta tarea con el fin de observar cómo los estudiantes usan la idea de límite de una función en un punto en situaciones matemáticas en las que se requiere el uso de simbología. Sin embargo, la idea también puede ser expresada en palabras, en cuyo caso se mostraría un dominio de la idea construida en las tareas anteriores.

Relación con las tareas anteriores

Dado que esta es la única tarea en la que los estudiantes no se enfrentarán a una situación cotidiana, la colocamos hacia el final de la unidad didáctica, para observar las características de la noción de límite construida por los estudiantes y para determinar si ellos pueden aplicarla en contextos matemáticos.

Significatividad

Buscamos poner un reto a los estudiantes: identificar que el límite cobra utilidad en el momento de justificar que las dos funciones, a pesar del punto abierto, comparten los límites en todos sus puntos, y proporcionar, de esta manera, una forma de ver la equivalencia entre dos funciones. Además, buscamos que los estudiantes creen nuevas funciones equivalentes y puedan observar el límite de las funciones antes de plantearlas.

Complejidad

Los estudiantes argumentarán y establecerán relaciones; deducirán que las dos funciones comparten sus límites en todos los puntos incluyendo el punto de indeterminación y crearán nuevas funciones que deberán cumplir con características de las funciones dadas. Por tanto, ubicamos esta tarea dentro del grupo de reflexión.

3.2. Descripción global de las sesiones de clase

A continuación, explicamos la estructura global de la unidad didáctica en términos de sesiones, objetivos, tareas y metas. Las sesiones de clase tienen una duración de ochenta minutos, como lo requiere la institución educativa donde fue aplicada la unidad didáctica.

Inicio

Esta parte de la unidad está conformada por las dos primeras sesiones y es de carácter diagnóstico e introductorio.

Sesión 1. Haremos la presentación de la unidad didáctica. Daremos a conocer la metodología, los objetivos, las tareas propuestas y el sistema de evaluación. Posteriormente, realizaremos la aplicación de la actividad diagnóstica, con el fin de evaluar los conocimientos previos necesarios para poder afrontar el tema. Además, prepararemos ayudas que permitirán a los estudiantes la superación de las dificultades detectadas en la actividad diagnóstica.

Sesión 2. Para esta sesión, seleccionamos la tarea La canal, asociada al objetivo 1 (comprender la idea de límite en un punto a partir de datos tabulados y gráficas asociadas, para describir comportamientos de una función). Durante su desarrollo, el estudiante podrá realizar la estimación del límite por medio de aproximaciones que involucran, tanto la observación de gráficas, como el manejo en tablas de valores que tienden o que son cercanos (lateralmente) al punto que se va a evaluar. Pretendemos motivar al estudiante. Para ello,

le ofrecemos el apoyo de programas informáticos, y, a la vez, le planteamos situaciones de exploración y reto en las que construirá una noción de límite. La meta de esta actividad es hallar la capacidad máxima de la canal utilizando la noción de límite.

Desarrollo

En esta sección de la unidad didáctica, proponemos tres tareas en tres sesiones.

Sesión 3. En esta sesión, implementamos la tarea El terreno, asociada también al objetivo 1. Esta tarea presenta un grado mayor de complejidad y busca establecer una conexión con el siguiente objetivo. Su meta es hallar el área máxima de un terreno utilizando la noción de límite.

Sesión 4. En esta sesión, desarrollamos la tarea Emparejamiento, asociada al objetivo 2 (calcular analíticamente el límite de una función). Esperamos que el estudiante, después de haber tenido la posibilidad de experimentar la noción de tendencia bajo diferentes sistemas de representación, se apropie de la idea de límite mediante la ejercitación. Su meta es observar que dos funciones son equivalentes cuando en cualquier punto seleccionado (incluyendo el punto abierto) se obtiene el mismo límite.

Sesión 5. En esta sesión, los estudiantes abordan la tarea La caja, asociada al objetivo 3 (utilizar la idea de límite para dar solución a situaciones problema). Por medio de esta tarea, se pretende brindar una situación más cercana al estudiante, con un mayor grado de complejidad y en la que tendrá que poner a prueba las capacidades y la comprensión desarrollada hasta el momento. Su meta es hallar el volumen máximo de la caja utilizando la noción de límite.

Cierre

Para esta sección, dispondremos tres sesiones.

Sesión 6. En esta sesión, realizaremos una realimentación de todo el proceso y llegaremos a establecer conclusiones, con el fin de preparar la evaluación final.

Sesión 7. Entregaremos a cada estudiante el examen final para determinar la comprensión que tiene del uso del límite y de su existencia dada su unicidad. Además, los estudiantes deberán justificar sus resultados.

Sesión 8. Realizaremos una realimentación en cuanto a todo el desarrollo de la unidad, teniendo en cuenta los objetivos, las tareas realizadas y los aspectos más relevantes de cada sesión. Los estudiantes responderán el cuestionario final y sus respuestas serán discutidas con todo el grupo. En la tabla 6, resumimos la organización de las tareas en sesiones de clase.

Tabla 6
Sesiones de clase del diseño previo

Sesiones	Objetivos	Tareas	Metas
1		Diagnóstica	Revisión de conocimientos previos: números reales, funciones y factorización
2	O1	La canal	Hallar la capacidad máxima de la canal utilizando la noción de límite
3	O1	El terreno	Utilizar el límite para describir situaciones de superficie utilizando gráficas y tablas
4	O2	Emparejamiento	Observar que dos funciones son equivalentes cuando, en cualquier punto seleccionado (incluyendo el punto abierto), se obtiene el mismo límite
5	O3	La caja	Encontrar el volumen máximo de la caja utilizando el límite
6	O1, O2 y O3	Realimentación	Recapitulación de todo el trabajo realizado durante la unidad didáctica, teniendo en cuenta los objetivos y cada una de las tareas
7	O1, O2 y O3	Examen final	Evaluar los procedimientos, conceptos y representaciones puestos en juego durante la resolución
8		Cuestionario final	Evaluación de los procesos cognitivo y afectivo

Las sesiones 6 y 7 abarcan todos los objetivos propuestos como lo muestra la tabla 6, puesto que involucran todo el trabajo realizado durante la unidad didáctica.

2. Instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información

En el análisis de actuación, consideramos el diseño de los instrumentos y los procedimientos para recoger la información, junto con los procedimientos para organizar y analizar la información obtenida. Los instrumentos se dirigen a recoger información de los estudiantes o de los docentes y los procedimientos

para establecer la forma en que se obtiene y analiza la información. Las plantillas sirven como medio de organización y de análisis de la información.

1. Instrumentos de recolección de la información

Los instrumentos que empleamos van dirigidos a obtener información. El diario del estudiante, el matematógrafo, las guías de las tareas y el examen final contribuyen a la recolección de información de la actuación de los estudiantes y su aprendizaje. El diario del profesor y el cuestionario final son instrumentos dirigidos a revisar la actuación del docente en el aula.

1.1. Diario del estudiante

Con el fin de sintetizar la meta de cada tarea, diseñamos los criterios de logro de cada tarea de acuerdo con el grafo de secuencias de capacidades de cada tarea, adaptado a un lenguaje comprensible para los escolares. Este instrumento nos permitió ver el proceso autoevaluativo por parte del escolar. En la figura 12, mostramos el modelo aplicado a la tarea Emparejamiento.

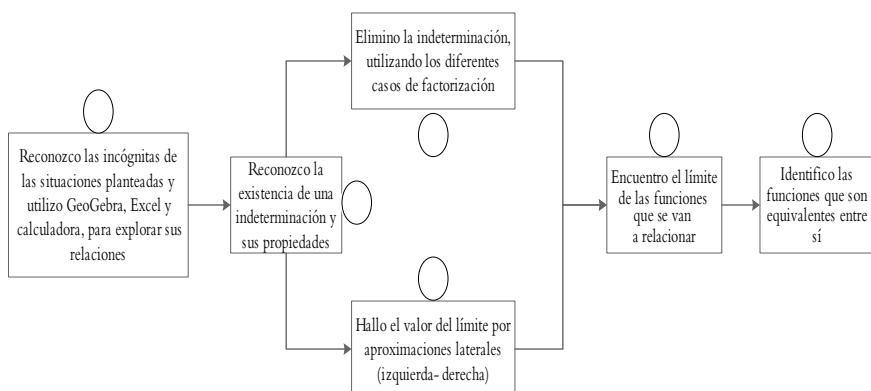


Figura 12. Criterios de logro de la tarea Emparejamiento

El grafo muestra los criterios de logro propuestos para los estudiantes. Ellos tenían que colorear de rojo, amarillo o verde de acuerdo con su percepción del cumplimiento de cada criterio: rojo para no cumplimiento, amarillo para el cumplimiento parcial y verde para el cumplimiento.

1.2. Matematógrafo

En el matematógrafo (anexo 6) consideramos algunas de las expectativas de tipo afectivo planteadas en el análisis cognitivo. Con este instrumento, buscábamos identificar cómo se sentían los estudiantes cuando abordaron cada una de las tareas. Evaluamos seis aspectos en el ámbito motivacional: (a) comprender el grafo, (b) utilizar conocimientos previos, (c) la tarea fue retadora y motivadora, (d) se sentía frustrado, (e) atender el punto de vista de sus compañeros y (f) ver multiplicidad de soluciones. En la figura 13, mostramos un ejemplo de un matematógrafo.

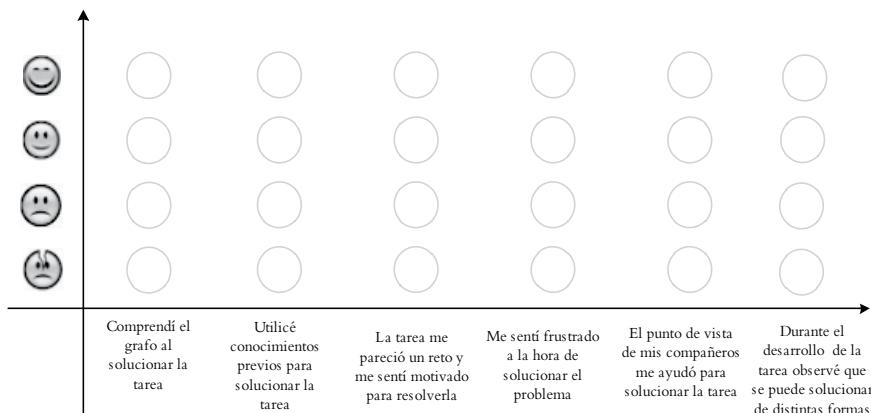


Figura 13. Matematógrafo

En el momento de diligenciar el matematógrafo, el estudiante tuvo que seleccionar una expresión o rostro (😊 😃 😐 😔) para cada expectativa por evaluar.

1.3. Guías de las tareas

Consideramos como instrumentos de recolección de información las guías desarrolladas por los estudiantes. Ellos registraron en estas guías los procedimientos que utilizaron para resolver los problemas. Mediante este instrumento observamos las secuencias de capacidades que se activaron.

1.4. Examen final

Diseñamos el examen final como instrumento de recolección de la información y de evaluación de la implementación de la unidad didáctica. Este

instrumento nos permitió comparar lo obtenido en el proceso de desarrollo de las tareas y lo obtenido al finalizar el proceso de ejecución de la unidad didáctica.

1.5. Diario del docente

En el diario del docente, consideramos los aspectos relevantes que se deberían tener en cuenta en las sesiones de clase, como se puede apreciar en el anexo 6. En este diario, presentamos preguntas relacionadas con compartir la meta, caminos de aprendizaje, ayudas, materiales y recursos, agrupamientos y gestión de las interacciones, complejidad, significatividad, función de la tarea, ajustes y temporalización.

Por ejemplo, en materiales y recursos, presentamos las siguientes preguntas: ¿el uso de los materiales y recursos transcurrió según lo planteado?, ¿cuál fue la repercusión en el aspecto cognitivo? y ¿cuál fue la repercusión en el aspecto afectivo? Diseñamos estas preguntas con el objetivo de evaluar la utilidad y pertinencia de los materiales y recursos implementados en el aula.

1.6. Cuestionario final

Elaboramos el cuestionario final con el propósito de indagar las apreciaciones elaboradas por el estudiante en todo el proceso de desarrollo de la unidad didáctica. Por lo tanto, este cuestionario se resolvió de forma individual. Organizamos las preguntas de este instrumento en tres apartados: (a) metodología utilizada, (b) aprendizaje de los estudiantes y (c) expectativas afectivas.

2. Procedimientos de recolección de información

Los procedimientos de recolección permitieron obtener información de manera sistemática. Para cada instrumento, diseñamos un proceso de recolección de la información que detallamos a continuación.

2.1. Diario del estudiante (semáforo y matematógrafo)

Entregamos el diario del estudiante al inicio de cada sesión de clase para dar a conocer los criterios de logro estipulados en los semáforos. Después de cada sesión, recogimos los diarios, los evaluamos y, en la siguiente sesión, dedicamos quince minutos a socializar con los estudiantes los aspectos más relevantes y a hacer la realimentación.

2.2. Guías de las tareas

Durante cada sesión de clase, llevamos la guía de la tarea (anexo 7) con el fin de que los estudiantes escribieran parte de los procesos. Al finalizar cada sesión de clase, recogimos la información que los estudiantes registraron en las guías y el uso de los recursos ejecutables.

2.3. Examen final

Realizamos el examen final en la penúltima sesión de clase. Dedicamos ochenta minutos a esta evaluación, con el propósito de recoger información detallada sobre los procesos realizados por los estudiantes.

2.4. Diario del profesor

Después de terminada cada sesión de clase, el docente que aplicó la unidad didáctica diligenció el formato del diario del profesor. La idea era recolectar la información del proceder en el aula. Para ello, el docente contó con máximo quince minutos. Se consideró importante tomar algunos apuntes durante el desarrollo de cada sesión.

2.5. Cuestionario final

El cuestionario final se tramitó en la última sesión, como forma de evaluación de la metodología. Los estudiantes contaban para el desarrollo del cuestionario con cuarenta y cinco minutos de clase. Después se socializaron las respuestas.

3. Instrumentos para el análisis de la información

Diseñamos instrumentos de análisis de la información utilizando Excel para organizar y analizar los datos recolectados.

3.1. Plantilla para análisis de la información

De acuerdo con las valoraciones dispuestas en las repuestas esperadas (ver también los anexos 14 a 17), el formato de la plantilla incluyó la valoración de todas las secuencias de capacidades involucradas en los caminos de aprendizaje. Analizamos la actuación de los 45 estudiantes para obtener la valoración de las secuencias de capacidades. Con base en esa información, generamos una valoración global del cumplimiento de cada objetivo.

Diseñamos un mismo formato de plantilla para registrar los datos de las tareas La canal y El terreno que pertenecen al mismo objetivo. Asignamos

una valoración final para cada uno de los escolares. Establecimos los siguientes criterios: (a) superior, cuando el estudiante activa todas las secuencias de capacidades; (b) alto, cuando activa por lo menos cuatro secuencias de capacidades, (c) básico, cuando activa dos o tres secuencias de capacidades; y (d) bajo, cuando no llega a activar más de una secuencia de capacidades. De igual manera, dimos mayor importancia a la activación de las secuencias de capacidades 2 y 3 del grafo del objetivo 1. Estas secuencias de capacidades están asociadas con los sistemas de representación gráfico y tabular.

Realizamos por separado el registro de las tareas La canal y El terreno. Para evaluar los niveles superior, alto, básico y bajo tuvimos en cuenta un avance o continuidad en la valoración de la tarea de La canal y El terreno. El objetivo obtuvo la valoración del avance presentado en la segunda tarea y, en los casos en que se presentaron diferencias significativas, buscamos una valoración intermedia para obtener el alcance del objetivo.

Adecuamos el diseño de las plantillas de observación de las tareas Emparejamiento y La caja a las planillas que utilizamos para las tareas del objetivo 1. Además, dimos prioridad a la activación de la secuencia de capacidades (del camino relacionado con el objetivo 2) asociada al registro simbólico y a la secuencia de capacidades (del camino relacionado con el objetivo 3) relacionada con la interpretación del límite.

En la tabla de Excel, consideramos las tareas, los estudiantes que participaron en su desarrollo, las secuencias de capacidades, la activación total, la activación parcial y no activación, y la evaluación en relación con lo propuesto en el sistema de evaluación colombiano. Además, presentamos unas filas debajo de los objetivos que contienen el total, su equivalencia decimal y el porcentaje.

3.2. Plantilla para análisis de los resultados de los semáforos

Diseñamos una plantilla en Excel para el conteo de los resultados obtenidos en los semáforos. Indicamos mediante cada color la comprensión que el estudiante manifestó de los criterios de logro. Por lo tanto, en la plantilla asociamos a cada secuencia de capacidad, como criterio de evaluación, los tres colores del semáforo.

3.3. Plantilla para análisis de los resultados de los matematógrafos

Usamos una tabla para registrar las respuestas de los estudiantes al matematógrafo de acuerdo con las expresiones ☺ ☻ ☹ ☻. A cada una de estas

expresiones se le otorgó un valor numérico para facilitar el análisis: 5, 3, 1, y 0, respectivamente.

4. Procedimientos de análisis de la información

Consideramos pertinente planificar la forma como íbamos a proceder para analizar la información. De acuerdo con la recolección de la información, establecimos los criterios de logros relacionados con las secuencias de capacidades, una forma de valorar los logros, las respuestas esperadas y los errores que se podrían presentar.

4.1. Criterios de logro asociados a las tareas

Para expresar los criterios de logro, consideramos el recorrido que el estudiante debía realizar al solucionar la tarea. Establecimos una relación entre las secuencias de capacidades y lo que se esperaba que el estudiante hiciera. Además, relacionamos estos criterios con la meta de cada tarea. Obtuvimos esta información del diario del estudiante. La figura 14 muestra los criterios de logro de la tarea Emparejamiento.

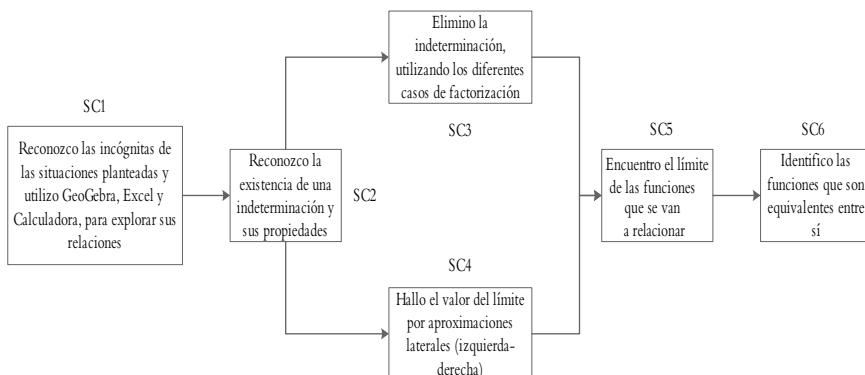


Figura 14. Criterios de logro de la tarea Emparejamiento

4.2. Valoración del logro del objetivo, respuestas esperadas y errores asociados

Consideramos las evidencias que daban indicio de la respuesta esperada (activación total), algunos intentos de evidenciar la respuesta con algunas inconsistencias de interpretación o la omisión de algún procedimiento (activación parcial) y los intentos fallidos o ausencia de respuesta en la mayoría de los casos (activación nula). De acuerdo con estas activaciones, diseñamos la

tabla 7 para el objetivo 2, en la que categorizamos la activación de respuestas esperadas en cada una de las secuencias de capacidades, junto con los errores más significativos en los que podían ocurrir los escolares. Implementamos sistemáticamente los procedimientos de recolección de información. Cada instrumento tuvo una función determinada en ese proceso.

Tabla 7
Valoración de las respuestas esperadas para la tarea Emparejamiento

	Secuencias de capacidades	Activación total	Activación parcial	No activación	Errores
O2 T3 SC1	Tabula y gráfica las funciones, y concluye que $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes	Tabula y grafica las funciones sin encontrar sus similitudes	Tabula de forma inadecuada las funciones o no puede graficar ni encontrar sus similitudes		E1.1 Determina el dominio solamente en los números enteros E5.2 Considera funciones continuas en puntos indeterminados en GeoGebra
O2 T3 SC2	Tabula y grafica $f(x)$ y $g(x)$, las compara y concluye que $f(x)$ no es continua en $x = 3$ y $x = -3$, mientras que establece que $g(x)$ no es continua en $x = -3$	Tabula y grafica $f(x)$ y $g(x)$ y las compara, sin identificar los puntos en los que no son continuas	Tabula de forma inadecuada las funciones. No puede graficar ni encontrar los puntos discontinuos		E2.2. Considera la discontinuidad removible o evitable como la inexistencia del límite
O2 T3 SC4	Factoriza y simplifica $f(x)$ para obtener $g(x)$	Factoriza $f(x)$, sin simplificar y, por ende, no puede obtener $g(x)$	No factoriza ni simplifica $f(x)$		E3.10. Amplía o reduce una fracción algebraica de manera equivocada E2.4. Ubica preimágenes como ordenadas y abscisas como imágenes
O2 T3 SC4	Utiliza algunas propiedades de los límites para hallar el límite de $f(x)$ y $g(x)$	Utiliza las tablas y gráficas elaboradas para hallar el límite	Utiliza tablas y gráficas mal elaboradas y no puede hallar el límite de las funciones		E2.13. Argumenta la existencia de dos o más límites en un punto ubicando un entorno próximo a ellos

Secuencias de capacidades	Activación total	Activación parcial	No activación	Errores
O2 T3 SC5	Concluye que $f(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo límite; $f(x)$ es continua si $[x/x \neq \pm 3]$, mientras que $\frac{g(x)}{x}$ es continua si $\frac{x}{x} \neq -3$	Concluye que $f(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo límite (0,17)	No puede concluir cuál es el límite de $f(x)$ y $g(x)$	E2.1. Deduce dos o más límites de una función discontinua en un punto
O2 T3 SC6	Concluye que $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes y que la indeterminación es evitable en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$	Concluye que $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes	No presenta conclusiones	E3.2. Deduce que todas las formas indeterminadas implican la inexistencia del límite

Nota: O2 = objetivo 2; T3 = tarea Emparejamiento; SC = secuencia de capacidades

3. Descripción de la implementación

A continuación, describimos los cambios realizados al diseño previo y los que surgieron durante la implementación de la unidad didáctica.

1. Cambios al diseño previo

En el análisis cognitivo del diseño previo, propusimos como expectativas de aprendizaje tres objetivos de aprendizaje. Posteriormente, en el análisis de instrucción, reformulamos los objetivos: fusionamos los dos primeros y agregamos uno nuevo. Los objetivos resultantes son los siguientes.

Objetivo 1. Comprender la idea de límite en un punto, a partir de datos tabulados y gráficas asociadas, para describir comportamientos de una función.

Objetivo 2. Calcular simbólicamente el límite de una función.

Objetivo 3. Resolver problemas que impliquen la idea de límite.

Incluimos el tercer objetivo porque la resolución de problemas es un elemento clave en el aprendizaje de las matemáticas y es una manera sencilla de contextualizar el tema de idea intuitiva de límite de una función en un punto.

2. Cambios durante la implementación

Modificamos algunos componentes de la unidad didáctica durante la implementación.

2.1. Tarea especial *La caja*

En la tarea especial, cambiamos algunas indicaciones que hacían parte de la formulación y pasaron a ser ayudas. Realizamos este cambio debido a que la tarea se estaba presentando de una manera muy dirigida que obligaba a los estudiantes a seguir los mismos caminos de aprendizaje. El docente que implementó la unidad didáctica realizó algunos cuestionamientos, con el fin de mostrar los avances obtenidos por algunos grupos y, de esta manera, avanzar en el proceso y lograr que se respetara el tiempo establecido para la aplicación de la tarea.

2.2. Grafos de criterios de logro de los objetivos

El docente compartió los grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje a medida que se iniciaban las tareas correspondientes a cada objetivo, en lugar de hacerlo al iniciar la unidad didáctica, como lo habíamos propuesto en el diseño previo.

2.3. Recursos

Dentro de los recursos propuestos para cada una de las tareas está el uso de Excel. Los estudiantes presentaron problemas en su manejo, cuando se trabajaba con funciones cúbicas. Fue necesario dar algunas indicaciones al detectar el problema.

2.4. Secuencias de capacidades

Inicialmente nos habíamos propuesto asignar un peso porcentual a las secuencias de capacidades de cada uno de los objetivos propuestos. Esto generó distorsión en los datos y en la valoración final de los estudiantes. Por tal motivo, fue necesario realizar una reestructuración que consistió en seleccionar las secuencias de capacidades más relevantes en los grafos de cada uno de los objetivos y darles un peso mayor.

4. Evaluación del diseño y la implementación

En este apartado, exponemos los resultados obtenidos en la implementación de la unidad didáctica (véanse los anexos 18 a 22), que se obtuvieron por medio de los instrumentos y procedimientos de evaluación previamente diseñados. A partir de estos resultados, presentamos una propuesta de balance con base en un análisis de las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades identificadas durante la implementación de la unidad didáctica (análisis DAFO). De acuerdo con ello, proponemos una serie de modificaciones, con el fin de presentar una mejora de la unidad didáctica de la idea de límite.

1. Análisis de logros de expectativas

Presentamos el análisis de los logros de las expectativas cognitivas y afectivas.

1.1. Logros en el aspecto cognitivo

En este apartado, resumimos los resultados de los logros de aprendizaje para cada uno de los objetivos, detectamos aquellos que presentan un menor nivel de logro e identificamos las secuencias de capacidades relevantes y las dificultades manifestadas por los estudiantes. Por último, abordamos la percepción de los escolares por medio del instrumento diseñado para este fin (esquema de semáforos).

Nivel de logro de los objetivos de aprendizaje

Tal como especificamos anteriormente, los instrumentos y procedimientos de recolección de información fueron la base para el análisis de los datos y permitieron establecer el nivel de alcance de logros comparado con los resultados encontrados en el examen final. En la tabla 8, consideramos todas las secuencias de capacidades destacadas y sintetizamos de manera global el análisis conforme a la evaluación de desempeños.

Tabla 8
Nivel de logro y errores frecuentes

Instrumento	Nivel de logro del objetivo				Errores más frecuentes			
	BJ	BA	A	S	E	%	E	%
Objetivo 1								
Tareas	2 %	22 %	67 %	9 %	2.9	49 %	3.1	27 %
Examen	9 %	22 %	47 %	22 %	2.9	16 %	3.1	12 %

Instrumento	Nivel de logro del objetivo				Errores más frecuentes			
	BJ	BA	A	S	E	%	E	%
Objetivo 2								
Tarea	6 %	67 %	9 %	18 %	2.13	27 %	2.4	31 %
Examen	4 %	40 %	31 %	25 %	2.13	22 %	2.4	22 %
Objetivo 3								
Tarea	16 %	42 %	22 %	20 %	5.11	64 %		
Examen	6 %	29 %	40 %	25 %	5.11	44 %	2.9	27 %

Nota: EF = evaluación final; BJ = bajo; BA = básico; A = alto; S = superior; E = error.

En comparación con lo logrado en el examen final, constatamos que, en el objetivo 1, hay un aumento no significativo en el nivel bajo, permanece el nivel básico, disminuye el nivel alto y se presenta un aumento significativo en el superior. En el objetivo 2, hubo una disminución en los niveles bajo y básico y aumentó el nivel alto y superior. Esto muestra un avance en el desarrollo del objetivo. En el objetivo 3, observamos una disminución en los niveles bajo y básico, pero un aumento significativo en alto y no tan significativo en superior. Concluimos que, a lo largo del proceso desarrollado con la unidad didáctica, los escolares manifestaron avances en el desarrollo de los objetivos asociados a los sistemas de representación y a la resolución de problemas de la idea de límite, mediante la exploración de los límites laterales.

Nivel de activación de secuencias de capacidades y errores más frecuentes

Para realizar el análisis más detallado de activación de secuencias de capacidades y de los errores más representativos en la implementación, diseñamos la tabla 9, en la que sintetizamos la información encontrada en las planillas. Allí, los objetivos 1 y 3 presentan menor nivel de desarrollo.

Tabla 9
Activación de secuencias de capacidades y errores en las tareas y el examen final

T	SC	Activación			Errores					
		To	P	N	E	%	E	%	E	%
Objetivo 1										
T1	SC3	100 %	0 %	0 %	E5.1	0 %	E1.2	0 %		
T2	SC3	65 %	33 %	2 %	E2.17	4 %	E5.3	4 %		

T	SC	Activación			Errores					
		To	P	N	E	%	E	%	E	%
EF	SC3	62%	27%	11 %	E2.16	2 %				
T1	SC5	7%	93%	0 %	E2.9	49 %	E3.1	27 %		
T2	SC5	73%	11 %	6%	E2.9	2%	E3.1	7%		
EF	SC5	36%	55%	9 %	E2.9	16 %	E3.1	12%		
Objetivo 2										
T3	SC2	44%	40%	16 %	E2.2	27 %				
EF	SC2	89 %	11%	0 %	E2.2	8 %				
T3	SC3	29 %	42%	29%	E3.10	42%				
EF	SC3	0 %	0%	0%	E3.10	3%				
T3	SC4	31%	60%	9 %	E2.13	27 %	E2.4	31 %		
EF	SC4	65%	22 %	13%	E2.13	22 %	E2.4	22 %		
T3	SC6	29%	42 %	29 %	E3.2	22 %				
EF	SC6	0 %	0%	0%	E3.2	10 %				
Objetivo 3										
T4	SC2	64%	29 %	7%	E1.3	0 %				
EF	SC2	67%	31 %	2%	E1.3	0 %				
T4	SC3	27 %	24%	49%	E2.4	0 %				
EF	SC3	53 %	40 %	7%	E2.4	0 %				
T4	SC4	24 %	51 %	24 %	E5.11	64%				
EF	SC4	27 %	56 %	17%	E5.11	44 %				
T4	SC8	33 %	51 %	16 %	E2.3	24%	E2.9	29%	E3.5	26 %
EF	SC8	58 %	33 %	9%	E2.9	27%	E3.5	11 %		

Nota: T=Tarea. SC=Secuencia de capacidad. To=Total. P=Parcial. N=Nulo. E=Error.

Con base en la información de la tabla 9, podemos afirmar que un 7% de los estudiantes activó la secuencia de capacidades relacionada con determinar el valor máximo por aproximaciones laterales (SC5 de T1), mientras que en el examen final, un 36% de los escolares activó la misma secuencia de capacidades. Ello indica que menos de la mitad de los escolares logró superarla. Por esta razón, evidenciamos la falencia en el alcance del objetivo 1,

pues dicha secuencia de capacidades es indispensable para su alcance. Con las observaciones realizadas en el diario del profesor, podemos conjeturar que esto se debió a la poca familiaridad con procesos de análisis que utilizan números reales con variaciones decimales muy pequeñas.

A su vez, en el tercer objetivo, observamos que, en la secuencia asociada con expresar en forma simbólica las relaciones halladas entre variables del problema (SC4 de T4), una cuarta parte de los estudiantes (24 %) presentó dificultad en el uso de signos y utilización de simbología de límite como forma de solución al problema planteado. Observamos la misma dificultad en el examen final (27 %) con esta secuencia de capacidades.

Los errores asociados al mal uso algebraico de sustituir valores (utilizando únicamente números enteros) y la falta de manejo de transformaciones algebraicas son los más comunes. Dicha apreciación fue corroborada por los resultados mostrados en la tarea de La canal (T2) asociada al objetivo 1, pues allí observamos la reiteración de los mismos errores.

Para el tercer objetivo, observamos que los principales errores están asociados a la forma incompleta e inadecuada de la expresión simbólica. De acuerdo con ello, conjeturamos que los estudiantes presentaron una marcada dificultad en expresar sus ideas matemáticas, sobre todo en el manejo del formalismo simbólico. Los objetivos no se lograron de manera importante: cada uno de ellos se logró en un término medio. Esto se pone de manifiesto en el diario del docente y en los videos. Pero es evidente que al elegir cualquier camino de solución al implementar las gráficas, tablas o símbolo, el estudiante se le presentan inconvenientes en el momento de identificar claramente el límite.

Resultados en la percepción de logro

El semáforo fue el instrumento principal que mostró con mayor detalle la percepción de logro por parte de los escolares. Registramos los resultados encontrados en dicho instrumento en los procedimientos y la plantilla de recolección de datos. Sintetizamos estos resultados en la tabla 10.

Tabla 10
Resultados percepción de logro por parte del estudiante

Tarea	Secuencia de capacidades	% Verde	% Amarillo	% Rojo
Objetivo 1				
El terreno	SC2	64	16	20
	SC5	56	13	31

Tarea	Secuencia de capacidades	% Verde	% Amarillo	% Rojo
La canal	SC3	89	0	11
	SC5	44	13	42
Objetivo 2				
Emparejamiento	SC2	64	9	27
	SC3	9	31	60
	SC4	62	0	38
	SC6	47	7	47
Objetivo 3				
La caja	SC2	56	4	40
	SC3	53	4	42
	SC4	24	24	51
	SC8	60	0	40

Con el fin de identificar la percepción de logro de los estudiantes, consideramos relevante las secuencias de capacidades relacionadas con la tabulación, con hacer gráficas, con las representaciones simbólicas del límite y con la resolución de problemas para cada uno de los objetivos, respectivamente.

Para la secuencia de capacidades asociada al uso de GeoGebra para graficar e interpretar el comportamiento de una función del objetivo 2, observamos que la percepción de los escolares se inclina hacia una activación total con un 64 % frente a un 20 % para su no activación. Al parecer, el uso de recursos facilitó la comprensión de los datos del problema. Un 16 % consideró que el uso de dicho recurso no representó una necesidad para la resolución de la tarea.

En el mismo objetivo, más de la mitad de los estudiantes (56 %) activó totalmente la secuencia de capacidades asociada con la descripción del límite. Ello se debe a que los escolares asociaron la aproximación de valores por medio de tablas y gráficas e identificaron el límite que daba respuesta a la tarea de La canal.

Respecto al objetivo 2, encontramos que la percepción de los escolares se inclina de manera negativa en la secuencia de capacidades que describe el límite por medio de la eliminación de la indeterminación por factorización, con un 60 %. Mientras que un 9 % y un 31 % de estudiantes responden de manera positiva y parcial respectivamente. Ello se debe, a que el manejo

operacional y simbólico para los escolares no cobró sentido en la búsqueda del límite, pues, como se describió en el resultado de errores frecuentes, hubo dificultad en procesos como la factorización y la transformación sintáctica en el sistema de representación simbólico.

Los escolares percibieron de manera negativa la activación de la secuencia de capacidades relacionada con la representación simbólica del tercer objetivo. Esto se justifica porque los estudiantes encontraron relaciones equivocadas entre las condiciones y variables del problema al expresarlas de manera simbólica. Ello dificultó en gran medida la comprensión del problema.

1.2. Logros en el aspecto afectivo

Para resumir el alcance de las expectativas en el ámbito afectivo, tuvimos en cuenta los instrumentos diseñados para ello: el matematógrafo, el diario del estudiante y el diario del profesor.

Resultados en el aspecto motivacional (matematógrafo)

Para valorar las expectativas en el aspecto afectivo, utilizamos el matematógrafo diligenciado por el estudiante. A través de este instrumento, esperamos que el escolar evaluará los aspectos motivacionales de acuerdo con su experiencia en la resolución de las tareas en los seis aspectos mencionados anteriormente.

Resumimos los resultados que surgieron en el matematógrafo, con especial atención a la motivación (aspecto c). Con lo anterior, por cada matematógrafo de cada tarea realizamos un promedio, lo que nos permitió analizar los resultados obtenidos. La tabla 11 resume los promedios para los seis aspectos considerados.

Tabla 11
Motivación en los matematógrafos

Tarea	Objetivo	a	b	c	d	e	f
El terreno	O1	3,2	3,7	3,2	1,5	3,1	3,3
La canal	O1	3,5	3,2	3,1	2,1	3,2	3,0
Emparejamiento	O2	3,6	2,7	3,1	1,7	3,2	3,2
La caja	O3	3,2	3,1	2,9	1,1	3,9	3,6

Nota: a = comprender el grafo; b = utilizar conocimientos previos; c = la tarea fue retadora y motivadora; d = se sentía frustrado; e = atender el punto de vista de sus compañeros; f = ver multiplicidad de soluciones.

Centramos el análisis de estos resultados en la variable motivación. Observamos que, en cada una las tareas, el reto y la motivación oscilan en valores en torno a 3, lo que significa que los estudiantes se sienten en un término medio de motivación en el momento de resolver dichas tareas.

Sin embargo, vemos que en la tarea La caja, relacionada con el objetivo 3, los estudiantes manifestaron no sentirse tan motivados, con un promedio leve de 2,9. En el diario del docente de esta actividad, identificamos que los estudiantes disminuyeron su motivación, dado que había inconformidad con el tiempo de resolución, la similitud de los problemas y la calidad de los computadores en el momento de la implementación.

2. Balance estratégico

Posteriormente a la descripción de los datos, buscamos evaluar la implementación de la unidad didáctica. Para ello, realizamos un balance atendiendo a un conjunto de debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades. A partir de dicho balance, planteamos los aspectos más relevantes para la mejora de la unidad didáctica y, seguidamente, propusimos un conjunto de mejoras.

2.1. *Balance estratégico DAFO*

Para identificar los resultados obtenidos en la implementación de la unidad didáctica, realizamos un análisis DAFO. Logramos estructurar dicho análisis con base en unas debilidades y oportunidades, como aspectos locales dentro de la unidad didáctica que pueden ser abordados por el profesor, y unas amenazas y fortalezas, como aspectos externos a la unidad didáctica y que difícilmente pueden ser controlados por el profesor. En la tabla 12, presentamos la lista de debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades.

En lo que respecta a las debilidades, observamos que el tiempo de planeación y el número de sesiones en que se ejecutó la unidad didáctica fue insuficiente, los estudiantes manifestaron pocos conocimientos previos, la tarea diagnóstica presentó deficiencias, los escolares desconocieron materiales y recursos tecnológicos como Excel y GeoGebra, los materiales y recursos requirieron más tiempo del previsto y la tarea Emparejamiento daba demasiadas instrucciones dirigidas. Las tareas de La caja, La canal y El terreno contaron con pocas instrucciones para su desarrollo y, de acuerdo con el alcance de logros, las situaciones y contextos propuestos en el examen final no se articulan con las tareas de la unidad didáctica.

Identificamos dentro de las fortalezas la forma con que abordamos la idea de límite desde los sistemas de representación gráfico y tabular. De igual manera, consideramos como fortalezas las siguientes características de la unidad didáctica: la interacción se promovió con recursos como GeoGebra y Excel, las tareas presentaron situaciones y contextos familiares para los escolares, el diseño de los semáforos fue claro para los escolares y permitió darle una visión retrospectiva sobre la solución de la tarea, las expectativas en el aspecto afectivo fueron importantes para el diseño de la unidad didáctica, diseñamos la evaluación por procesos, y la participación y la interacción en grupo por parte de los escolares ayudó a la solución de las tareas.

Caracterizamos como amenazas el contexto sociocultural al que pertenecía el escolar, el sistema de creencias frente a las matemáticas considerado por el escolar, las fallas presentadas por parte de la gestión administrativa y académica de los establecimientos públicos educativos, el hacinamiento escolar con el que contaba la institución, la deficiencia en la formación docente y la poca motivación de los docentes para renovar su práctica pedagógica en el aula.

Finalmente, consideramos como oportunidades el que la contextualización facilita la comprensión y aplicación de los contenidos matemáticos y permite establecer una relación con el entorno; que los recursos tecnológicos permiten la profundización de los procesos generales y el pensamiento matemático; que los cambios de sistemas de representación permiten generar significados sobre los contenidos matemáticos; y que las capacidades en el aspecto afectivo determinaron las reacciones de los estudiantes frente a lo que ocurre en la resolución de situaciones problema.

De acuerdo con el balance anterior, presentamos a continuación una propuesta justificada de mejora que atiende a las debilidades y amenazas encontradas.

2.2. Propuesta justificada de mejora

A partir del balance estratégico, propusimos una serie de recomendaciones con el fin de mejorar el diseño de la unidad didáctica. Dichas recomendaciones fueron tomadas como base y sustento en la adecuación del nuevo diseño de la unidad didáctica. Buscamos minimizar las debilidades, aprovechar las oportunidades y neutralizar las amenazas.

El nuevo diseño potencia las fortalezas del diseño: la contextualización de los contenidos matemáticos, el uso de materiales y recursos, y el manejo de los diferentes sistemas de representación. También buscamos promover el desarrollo de los procesos generales.

Con el balance estratégico, pudimos establecer que, dadas las oportunidades y fortalezas, se pueden sobrelevar los aspectos negativos. Con el fin de minimizar las debilidades, consideramos el siguiente listado de estrategias.

- Para complementar el trabajo con los recursos tecnológicos, debemos contar con materiales tangibles.
- Para maximizar el tiempo y los resultados, debemos reducir el número de tareas.
- Para hacer patente las falencias de los estudiantes en conocimientos previos y poder desarrollarlas al inicio del año escolar de undécimo, debemos crear una actividad diagnóstica al iniciar el año. Además, debemos diseñar la actividad diagnóstica como un refuerzo para la implementación de la unidad.
- Para optimizar el alcance de los objetivos, debemos utilizar máximo dos materiales por sesión de clase.
- Para mejorar el uso de los recursos, debemos realizar, al inicio de la unidad didáctica, una sesión de introducción sobre el manejo de recursos como GeoGebra y Excel.
- Para dar un mejor manejo del tiempo, debemos reducir el número de tareas. La propuesta consiste en mantener las tareas de La canal, Emparejamiento y La caja. La tarea de El terreno se convierte en el examen final.

Así mismo, debemos promover la motivación y las expectativas afectivas, y hacer uso adecuado de los tiempos requeridos para las tareas.

5. Nuevo diseño

A continuación, presentamos el nuevo diseño de la unidad didáctica. Nos basamos en los resultados del análisis DAFO y en las recomendaciones de mejora que realizamos en el apartado anterior.

1. Presentación global

Hacemos una presentación global del nuevo diseño de la unidad didáctica. No hicimos cambios al tema matemático, ni a los objetivos. En cuanto a las sesiones de clase previstas, incluimos una sesión adicional, para un total de nueve sesiones de clase. Cada sesión de clase tiene una duración aproximada de ochenta minutos. La sesión adicional fue introducida con el fin de hacer

una realimentación de la actividad diagnóstica. Debido a su naturaleza, dimos especial atención a los cambios hechos en las siguientes partes: la actividad diagnóstica, que fue modificada sustancialmente; la tarea Emparejamiento, por encontrarse en relación directa con una de las dificultades principales evidenciadas; y el examen final, que remplazamos por la antigua tarea El terreno. Describimos y justificamos los detalles de estos cambios y otros de menor escala, más adelante.

Objetivos

Los siguientes son los tres objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.

Objetivo 1. Comprender la idea de límite en un punto a partir de datos tabulados y gráficas asociadas, para describir comportamientos de una función.

Objetivo 2. Calcular simbólicamente el límite de una función.

Objetivo 3. Resolver problemas que impliquen la idea de límite.

A continuación, presentamos los grafos de secuencias de capacidades de cada uno de los objetivos en su versión final. Dado que tenemos una tarea asignada para cada objetivo, el grafo de la tarea coincide con el grafo del objetivo. En estos grafos, incluimos las expectativas afectivas que se muestran con una F y un número. En el anexo 3, presentamos el listado completo de expectativas afectivas que mencionamos en el apartado de análisis cognitivo.

En el grafo de la figura 15, presentamos los caminos que puede escoger el estudiante en el momento de solucionar la tarea de La canal. La primera secuencia de capacidades (C3.21) implica el reconocimiento de las variables que intervienen en el problema. Después, el estudiante puede elegir uno de los tres caminos de aprendizaje. Relacionamos el primero con implementar la representación tabular en el que se activan capacidades relacionadas con el uso de enteros y densidad. El segundo camino de aprendizaje está relacionado con la realización de la gráfica con la ayuda de GeoGebra. Las capacidades que se activan tienen relación con realizar la gráfica correspondiente con los datos planteados del problema y colocar puntos que le permitan acercamientos por derecha y por izquierda. El tercer camino de aprendizaje se refiere al procedimiento matemático del cálculo del límite, en el que la última caja se refiere a su identificación y unicidad.

En el grafo de la figura 16, proponemos el reconocimiento por parte del escolar de las variables que intervienen en las funciones propuestas en la tarea. Después, el estudiante puede elegir uno de los tres caminos de aprendizaje

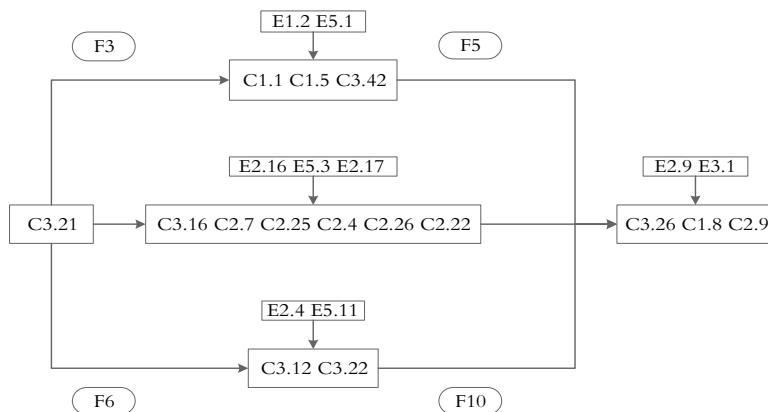


Figura 15. Grafo de secuencias de capacidades del objetivo O1

para identificar el límite. El primer camino de aprendizaje está relacionado con la sustitución, eliminación de la indeterminación y cálculo del límite. El segundo camino de aprendizaje se refiere a realizar las gráficas en GeoGebra e identificar las que se relacionan a pesar del punto de indeterminación. El tercer camino de aprendizaje está relacionado con la tabulación de las funciones en Excel. Este procedimiento permite la comparación de los mismos puntos del dominio e identificar los datos que se relacionan y la diferencia que es el punto de indeterminación y aparece con un #####. En la siguiente secuencia de capacidades, después de haber tomado alguno de estos caminos de solución, relacionamos capacidades de semejanza entre dos funciones y la unicidad del límite en cada punto para así llegar a la última caja de capacidades, donde el estudiante conjectura que dos funciones son semejantes si tienen el mismo límite en todos sus puntos.

En el inicio del grafo de la figura 17, incluimos secuencias de capacidades relacionadas con el reconocimiento de las variables de un problema. Después, el estudiante puede elegir alguno de los tres caminos relacionados con las formas de representación tabular, gráfica o simbólica. Puede utilizar, en un primer momento, el papel y lápiz, para luego pasar a hacer uso de los aplicativos. El estudiante determina así un intervalo de la función en el que se encuentra el máximo local, caja central, para posteriormente volver a aplicar cualquiera de los procesos anteriormente propuestos. Finalmente, el escolar determina el valor máximo, utilizando aproximaciones laterales y expresa la solución como el límite de la función.

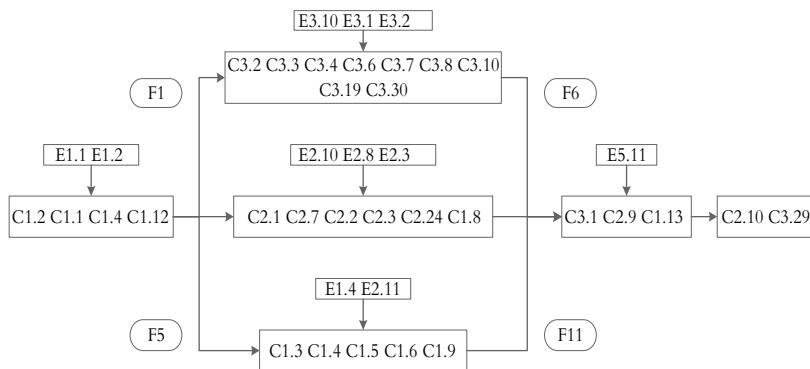


Figura 16. Grafo de secuencias de capacidades del objetivo O2

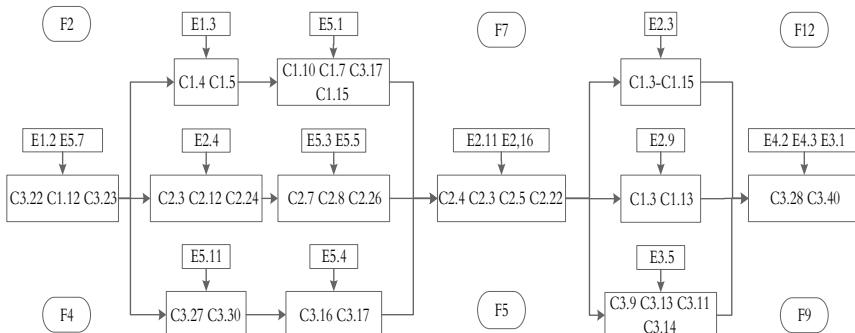


Figura 17. Grafo de secuencias de capacidades del O3

A lo largo de los caminos aparecen errores (E) y aparecen las capacidades afectivas (F) que consideramos emergen en el proceso de resolución de la tarea.

2. Justificación de los cambios

A continuación, describimos y justificamos los cambios realizados. Debido a que una de las principales dificultades evidenciadas en los análisis previos se focaliza en la expresión simbólica, consideramos detalladamente los cambios que realizamos a la tarea Emparejamiento.

2.1. Actividad diagnóstica

La actividad diagnóstica del diseño previo no permitió evaluar los conocimientos previos correctamente y tampoco aportó elementos de superación para el escolar. Por esa razón, realizamos modificaciones sustanciales a su

formulación para el diseño definitivo. Para su nueva versión, decidimos establecer una serie de tareas rutinarias que nos permita indagar el nivel de desarrollo en que se encuentra el escolar frente a tres temas principales: orden en los reales, representaciones de una función y sus diversas transformaciones sintácticas. De igual manera, formulamos una serie de ayudas. Buscamos que el estudiante valore por sí mismo su conocimiento y reconozca las dificultades y los errores en los que incurre, con el propósito de que pueda superarlos. Proponemos una interacción más dinámica con los recursos (calculadora, GeoGebra, libros de referencia, información y tutoriales por Internet) y con el docente. Anexa a esta tarea, incluimos una sesión adicional con el fin de hacer una realimentación de los temas considerados, como se indica en el aparte correspondiente a la sesión 2.

2.2. Tarea *La canal*

En el caso de la tarea La canal, según el análisis previo, evidenciamos debilidades en las secuencias de capacidades 3 y 5. Para contrarrestarlas, hicimos un cambio amplio en la actividad diagnóstica con el propósito de revisar con más detalle los procesos de elaboración de gráficas y manejo de la expresión simbólica, y proporcionar una realimentación efectiva. Igualmente, hicimos cambios en las secuencias de capacidades 2 y 4, al incluir capacidades relacionadas con el manejo de materiales y el manejo de la expresión simbólica previa (C3.42 y C3.24, véase el anexo 1). También, incluimos dentro de las previsiones el error 5.11 (anexo 1), relacionado con la omisión de elementos en la expresión simbólica.

2.3. Tarea *El emparejamiento*

Para la tarea Emparejamiento, realizamos las siguientes modificaciones: (a) presentamos las fracciones algebraicas como funciones, (b) remitimos el uso de los aplicativos exclusivamente a Excel, con el objetivo de mostrar la indeterminación y poder identificar los límites que se deben hallar, (c) incluimos, como parte de la tarea, algunas de las ayudas que habíamos propuesto originalmente, y (d) agregamos dos ayudas.

Por otra parte, modificamos el grafo de secuencia de capacidades. Dado que el objetivo es potenciar el uso de la simbología, agregamos las capacidades C3.2, C3.3, C3.4 y C3.19. Estas capacidades se refieren a la identificación de la indeterminación y su eliminación para el posterior cálculo del límite. Además, cambiamos el error 2.11 relacionado con la tabulación de puntos

removibles, y agregamos los errores E3.10 (ampliar o reducir una fracción algebraica) y 5.11 (omitar elementos necesarios de una expresión simbólica), que fueron identificados en la práctica de la unidad didáctica con frecuencia. A continuación, presentamos las principales modificaciones hechas a la tarea en su versión final.

Formulación

Se le dará al estudiante una guía con la formulación del problema (véase la figura 18) y algunas indicaciones sobre la forma de trabajar. También se efectuarán algunas aclaraciones verbalmente.

Encontrar equivalencias

De las siguientes funciones expresadas en forma simbólica, busca e indica, en la columna izquierda, una expresión equivalente en la columna de la derecha. Solo encontrarás una pareja.

$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$	$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 1}$
$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$	$f(x) = \frac{x - 4}{x - 3}$
$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$	$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 3)(2x - 1)}{x^2 - 4}$

Figura 18. Datos de la tarea Emparejamiento

1. Si empleas el mismo dominio y tabulas en Excel, ¿qué puedes decir de las dos funciones? Argumenta tu respuesta.
2. Dado que las expresiones están conformadas por una función algebraica ¿cómo puedes factorizarla, simplificarla o amplificarla, según sea el caso, para obtener una equivalencia algebraica de funciones?
3. Un punto de indeterminación es un punto que, sustituido en las dos funciones equivalentes, no da la misma imagen. ¿Cuál es el punto de indeterminación de estas dos funciones?
4. Al tomar un punto diferente al punto de indeterminación, ¿cuál es el límite? Identifícalo en las dos funciones.
5. ¿Qué ocurre si tomas otros puntos de las funciones y encuentras el límite?
6. ¿Puedes dar ejemplos de funciones equivalentes por su límite?

Grafo de secuencias de capacidades de la tarea en su versión final

En la figura 19, mostramos el grafo de secuencias de capacidades de la tarea Emparejamiento, con las modificaciones anteriormente señaladas. Ya que ésta es la única tarea propuesta para la consecución del objetivo O2, su grafo coincide con el del objetivo (véase la explicación del grafo anterior).

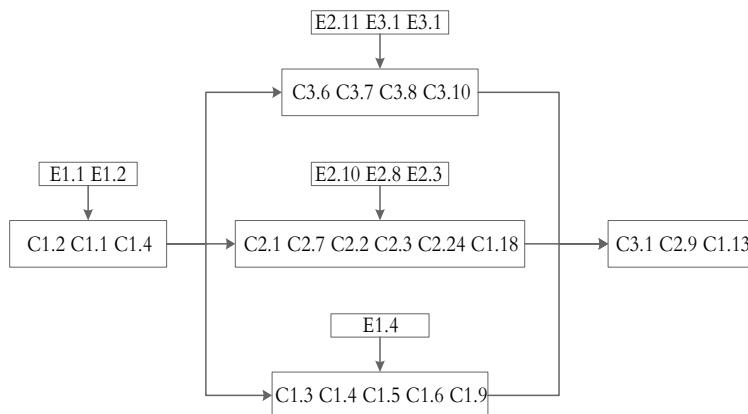


Figura 19. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea El emparejamiento

Ayudas

Con el fin de dar más libertad a los escolares, proponemos dar ayudas abiertas. Así, sugerimos a los estudiantes que realicen gráficas de las funciones. También, proponemos la construcción de una tabla de valores de aproximación a un punto específico de la función en relación con la expresión simbólica.

Función dentro de la secuencia de tareas

La tarea Emparejamiento fue diseñada con el fin de observar cómo los estudiantes usan la idea de límite de una función en un punto en situaciones matemáticas, en las que se requiere el uso de simbología.

Relación con las tareas anteriores

Dado que ésta es la única tarea en la que los estudiantes no se enfrentan a una situación cotidiana, la hemos dejado hacia el final, para observar características de la noción que el estudiante ha construido de límite y para determinar si puede aplicarla en contextos matemáticos.

2.4. Tarea La caja

En la formulación de la tarea La caja, introdujimos como ayuda el uso de papel milimetrado para el apartado c, con el fin de activar la secuencia de capacidades 3 que hace referencia al sistema de representación gráfico. Los estudiantes no activaron esta secuencia, debido a inconvenientes con el aplicativo de GeoGebra, en el momento de realizar la tarea. Decidimos utilizar las preguntas propuestas como ayudas, con el fin de brindar herramientas que faciliten la comprensión, el desarrollo y el logro del objetivo. También sustituimos el error E2.4 (ubica preimágenes como ordenadas y abscisas como imágenes), asociado a la secuencia de capacidades 3 por el error 5.5 (usa diferentes escalas para representar la información), porque observamos una gran incidencia de este error.

2.5. Examen final

Sustituimos la versión previa del examen final por la tarea El terreno, ya que el examen final original presentaba situaciones que no se asemejaban a los contextos propuestos en las tareas. Esta diferencia creó distorsión en el análisis del logro de los objetivos. Igualmente, hicimos cambios en la nueva formulación al incluir variantes en las instrucciones, pues, en el caso anterior, la tarea era muy abierta y daba lugar a diversas interpretaciones por parte del escolar. Al generar apartados en la tarea, pretendimos garantizar los caminos de aprendizaje establecidos para cada uno de los objetivos. Buscamos motivar a escolares a que exploren diferentes estrategias que se apoyen en los diversos sistemas de representación. Finalmente, los estudiantes deben basarse en la idea de límite para concluir cuál es el punto máximo.

Los materiales y recursos fueron modificados, ya que queremos tener evidencias escritas de la actuación de los escolares, de cara a la evaluación. Por esa razón, la nueva versión del examen final no incluye el uso de GeoGebra o Excel, aunque sí recomendamos el uso de la calculadora y de otros recursos de uso común del escolar. La descripción completa de la versión final de las tareas se encuentra en el anexo 6.

3. Nuevo diseño de la secuencia de tareas

A continuación, presentamos la estructura global del nuevo diseño de la unidad didáctica en términos de sesiones, objetivos, tareas y metas.

3.1. Contenido de cada sesión

A continuación, describimos el contenido resumido de cada sesión.

Inicio

Esta parte de la unidad didáctica está conformada por las dos primeras sesiones.

Sesión 1. Realizamos la presentación de la unidad didáctica y damos a conocer la metodología, los objetivos y las tareas propuestas. Posteriormente, hacemos la presentación de la tarea diagnóstica e iniciamos su desarrollo.

Sesión 2. Efectuamos la realimentación de la tarea diagnóstica. Para ello, compartimos la solución de la tarea y buscamos reforzar los conocimientos previos necesarios para lograr esa solución. Proporcionaremos tareas adicionales a los estudiantes que no logren superar sus dificultades. Dejaremos constancia de los avances de estos estudiantes en los diarios del estudiante y del profesor.

Desarrollo

Esta parte de la unidad didáctica está compuesta por cuatro sesiones.

Sesión 3. Para esta sesión, proponemos el desarrollo de la tarea La canal que promueve el desarrollo del objetivo O1. Con esta tarea, pretendemos que el estudiante halle la capacidad máxima de la canal al utilizar la noción de límite.

Sesión 4. En esta sesión, abordamos la tarea Emparejamiento. Por medio de esta tarea, pretendemos contribuir el logro del objetivo O2. Así mismo, planteamos como meta que el estudiante observe que dos funciones son equivalentes cuando en cualquier punto seleccionado (incluyendo el punto abierto) se obtiene el mismo límite.

Sesión 5. En esta sesión, implementamos la tarea La caja. Con esta tarea, pretendemos desarrollar el objetivo O3 y planteamos como meta que el estudiante halle el volumen máximo de una caja utilizando la noción de límite.

Sesión 6. Los estudiantes continúan la resolución de la tarea La caja hasta finalizar su desarrollo.

Cierre

Esta etapa final está compuesta por tres sesiones.

Sesión 7. Inicialmente, realizamos la realimentación del diario del estudiante. Después, efectuamos una exposición en audiovisuales que dará inicio con la

presentación en PowerPoint de los objetivos, las tareas y sus metas. Después, presentamos la primera tarea y algunas de las respuestas que los estudiantes pueden producir. Discutiremos entre todos la validez, total o parcial, de la solución presentada. Realizamos el mismo proceso con las otras tareas. Las conclusiones del trabajo se irán exponiendo a lo largo de la presentación.

Sesión 8. Entregamos a cada estudiante una guía del examen final, con la tarea El terreno. Su meta es hallar el área máxima de un terreno utilizando la noción de límite. El objetivo propuesto es determinar la comprensión alcanzada del uso del límite y de su existencia, dada su unicidad.

Sesión 9. Realizamos una realimentación global para la unidad didáctica. Tendremos en cuenta los objetivos, las tareas realizadas y los aspectos más relevantes de cada sesión. Para esta sesión, tenemos diseñado un instrumento, el cuestionario final, que los estudiantes deben llenar y entregar.

6. Conclusiones

Habitualmente, la idea de límite de una función en un punto se enseña en las aulas de matemáticas mediante situaciones científicas, basadas en la ejercitación de procedimientos rutinarios despojados de sentido para el estudiante. Por esa razón, decidimos diseñar una unidad didáctica que proporcione oportunidades de aprendizaje a los estudiantes mediante el uso de fenómenos relacionados con máximos y mínimos, y promueva el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.

Dados los fenómenos de máximos y mínimos por acercamientos laterales, establecimos una serie de expectativas basadas en los objetivos de aprendizaje y secuencias de capacidades que daban cuenta de su desarrollo. Logramos distinguir los errores más comunes en que incurren los escolares al solucionar tareas. Propusimos unas expectativas en el ámbito afectivo asociadas a la motivación de la actuación del estudiante frente al cumplimiento de sus expectativas escolares. Todo lo anterior nos permitió destacar la importancia de los caminos de aprendizaje como herramienta para prever la actuación de los escolares cuando abordan las tareas y la medida en que las tareas pueden contribuir al logro de los objetivos de aprendizaje de la idea de límite.

En el proceso de análisis de instrucción, planteamos una secuencia de tareas basada en problemas prácticos de máximos y mínimos con utilización amplia de recursos tecnológicos. La utilización de estos recursos resultó fundamental

para abordar la complejidad de la idea límite de una función. Diseñamos un conjunto de instrumentos con los que recogimos información sobre la actuación de los estudiantes y el docente. Elaboramos unas plantillas que nos facilitaron el registro, organización y análisis de la información. Diseñamos un conjunto de instrumentos y procedimientos para recolectar la información asociada a los alcances de logro de los objetivos y a la percepción del alcance de logro de los escolares.

En cuanto a la percepción de cumplimiento de logro de objetivo, reestructuramos las secuencias de capacidades en criterios de logro, de tal manera que estos sirvieran como instrumento de reflexión al escolar en el momento de evaluar el desarrollo de la tarea. El matematógrafo nos permitió indagar las expectativas en el aspecto emocional asociadas a la resolución de la tarea. En asocio con el alcance de logro, diseñamos unas plantillas que plasmaban la activación total, parcial o nula de cada secuencia de capacidad de todos los escolares. Estas plantillas fueron diligenciadas en concordancia con lo resuelto en la guía de la tarea de La canal, La caja, y Emparejamiento, del examen final y de las observaciones registradas en el diario del docente. Al diligenciar las planillas, tuvimos en cuenta la valoración de cada uno de los criterios de logros o secuencias de capacidades por medio de unas respuestas esperadas y errores en los que se puede incurrir en cada uno.

Expusimos los resultados obtenidos en la implementación de la unidad didáctica que se obtuvieron por medio de los instrumentos y procedimientos de evaluación previamente diseñados. A partir de estos resultados, mostramos la propuesta de balance con base en un análisis de las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades identificadas durante la implementación de la unidad didáctica (análisis DAFO).

En cuanto a los logros en el aspecto cognitivo encontramos que menos de la mitad de los escolares logró el alcance del objetivo 1, pues la secuencia de capacidades SC5 T1 es indispensable para su alcance y la mayoría de los estudiantes la activó de manera parcial y nula. Se observó otra dificultad en el alcance del segundo objetivo, pues los estudiantes no activaron la secuencia de capacidades asociada a la simbolización. En cuanto al segundo objetivo, en el desarrollo de las tareas, concluimos que hubo un alcance del logro de manera significativa, pues la experiencia lograda en el desarrollo de las anteriores tareas fue fundamento del desarrollo de nuevas secuencias de capacidades.

En la percepción de alcance de cada uno de los logros, observamos que la percepción de los escolares se inclinó a considerar una activación total para la secuencia asociada al uso de GeoGebra del objetivo 2. Al parecer, el uso

de recursos facilitó la comprensión de los datos del problema. Los escolares percibieron de manera negativa la activación de la secuencia de capacidades relacionada con la representación simbólica del objetivo 1 y 2. Ello se justifica en que los estudiantes encontraron relaciones equívocas entre las condiciones y variables, lo cual concuerda con los resultados de alcance de logro de los objetivos en el aspecto cognitivo.

Buscamos evaluar la implementación de la unidad didáctica. Para ello, realizamos un balance atendiendo a un conjunto de debilidades (los estudiantes desconocieron los materiales y recursos tecnológicos), amenazas (p. ej., el sistema de creencias frente a las matemáticas), fortalezas (la forma como abordamos la idea de límite desde los sistemas de representación gráfico y tabular) y oportunidades (la contextualización facilitó la comprensión y aplicación de los contenidos matemáticos). A partir de este balance, planteamos los aspectos más relevantes para la mejora de la unidad didáctica que se centró en complementar el trabajo con los recursos tecnológicos, utilizar máximo dos materiales por sesión de clase y reducir el número de tareas asociadas a la idea de límite.

Por otra parte, en la labor pedagógica que actualmente adelantamos, hemos tenido la oportunidad de compartir nuestras experiencias y aprendizajes con nuestros colegas. Este compromiso con nuestros colegas ya ha dado frutos. Una de nuestras colegas obtuvo el botón de oro de la Fundación Compartir con motivo del diseño curricular que ella realizó sobre el tema de la función cuadrática.

7. Referencias

- Ferrante, J. (2009). *Una introducción al concepto de límite (dos mil años en un renglón)*. Buenos Aires: Editorial de la U.T. N. Disponible en <http://www.edutecne.utn.edu.ar>.
- Flores, P., Gómez, P. y Marín, A. (2013). *Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 de MAD*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/2061/>.
- Goleman, D. (2012). *Inteligencia emocional*. Buenos Aires: Editorial Kairós.
- Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca, España: Instituto de Estudios Aragoneses. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1278/>.

- González, M. J. y Gómez, P. (2013). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD.* Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://tinyurl.com/n4zgncc>.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas.* Bogotá: Autor. Disponible en <http://tinyurl.com/7t988s5>.
- MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Autor. Disponible en <http://is.gd/kqjT0a>.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas.* París: OCDE. Disponible en <http://tinyurl.com/9wmr4ct>.

★ ★ ★

Los anexos de este capítulo se encuentran disponibles en <http://funes.uniandes.edu.co/6507/>