

EL SENTIDO ESTADÍSTICO DE LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES EN LOS NIVELES EDUCATIVOS

Hugo Alvarado

Universidad Católica de la Santísima Concepción (Chile)

alvaradomartinez@ucsc.cl

El currículo de matemática en el eje de 'datos y azar' actualmente está en un proceso de cambios importantes en la metodología de enseñanza e incorporación de nuevos contenidos en los programas escolares. Uno de los desafíos que surgen es cómo desarrollar la cultura estadística y el razonamiento estadístico de forma articulada en los niveles educativos. En esta conferencia se describe un proceso inicial de reflexión sobre la introducción de elementos de significados de las distribuciones muestrales en el currículo de estadística. Este tópico es considerado un campo investigación en estudios de experimentos de enseñanza por sus múltiples aplicaciones, variedad de lenguaje, representaciones y argumentos, y favorece la implementación de la metodología basada en proyectos concediendo sentido estadístico al trabajo de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE

Sentido estadístico, distribución muestral, formación de profesores.

INTRODUCCIÓN

Por lo general, en cursos de probabilidad y estadística de nivel universitario, un grupo importante de estudiantes no logra comprender las ideas estadísticas fundamentales y aplicar el razonamiento estadístico en situaciones contextualizadas (Alvarado y Batanero, 2007; Alvarado y Retamal, 2012). Al parecer, la enseñanza actual transmite una estadística sin sentido a los estudiantes, planteando un problema didáctico (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013). Los autores consideran el sentido estadístico, como unión de la cultura y razonamiento estadístico, que debe desarrollarse en forma progresiva desde la educación primaria, secundaria, bachillerato y hasta la universidad. No obstante, surgen las interrogantes ¿hasta qué punto las nuevas propuestas curriculares proporcionan una oportunidad de introducir gradualmente ideas estadísticas desde la educación primaria, aumentando hasta el nivel de formalización progresivamente?, ¿en las Escuelas de Educación, cuáles son los estándares orientadores que necesita el profesor de matemáticas para conducir con éxito el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos estocásticos?

¿Por qué el interés de analizar la enseñanza de las distribuciones muestrales en los distintos niveles educativos? La distribución muestral es considerada la piedra angular de la inferencia estadística (Gardfiel, delMas y Chance, 2004), donde los intervalos de confianza son pensados como un campo de problemas dentro de las distribuciones muestrales, mediante la selección adecuada de la distribución muestral en la estimación de parámetros (Alvarado, Galindo y Retamal, 2013). Tiene como



prerrequisito esencial para su comprensión, apropiarse de la idea de distribución y variabilidad (Pfannkuh y Wild, 2004) y familiarizarse con distribuciones comunes, como la binomial y la normal (Ramírez, 2008). Es un tópico de la estadística considerado difícil para los estudiantes universitarios, ya que conjuga muchos conceptos asociados, diversos tipos de lenguaje y representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos (Alvarado y Batanero, 2008). Específicamente, las distribuciones muestrales se consideran importantes en el trabajo profesional de las ciencias e ingeniería, al proporcionar herramientas metodológicas para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

En el caso de Chile, la presencia de esta área de estudio en el currículo escolar es nueva, lo que induce a llevar estudios de su enseñanza a nivel escolar y en la formación inicial de profesores. En este contexto, describimos los cambios recientes en el sistema escolar de Chile y los desafíos que involucra la enseñanza de las distribuciones muestrales en el sistema escolar y su articulación con el nivel universitario.

MARCO DE REFERENCIA

A continuación, se describen conceptos y propiedades importantes de las distribuciones muestrales consideradas como campo de investigación en estudios de experimentos de enseñanza, algunos análisis de libros de texto, y significados de conceptos asociados a ese tópico junto con su articulación a los intervalos de confianza.

Experimentos de enseñanza con uso de la informática. Variadas investigaciones confirman la importancia de apropiarse de conceptos previos de la distribución muestral, que según Gardfiel, delMas y Chance (2004) corresponden al análisis de gráficos, medidas de tendencia central y de dispersión, construcción de la distribución normal, cálculo de probabilidades como área bajo la curva, noción de muestreo aleatorio y exploración de la variabilidad. En particular, Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina (2007) resaltan el apoyo que pueden entregar los recursos informáticos en actividades de: automatización de cálculos y gráficos, exploración de datos, visualización de conceptos abstractos, simulación de fenómenos aleatorios, investigación de problemas reales. Otros resultados de investigaciones de enseñanza de conceptos y propiedades de las distribuciones muestrales son: Batanero, Tauber y Sánchez (2001) en su experiencia de enseñanza de la distribución normal con el uso de ordenadores y dirigido a estudiantes universitarios, que observaron dificultades en la discriminación entre los datos empíricos y los modelos matemáticos, en interpretar ciertos gráficos y resúmenes estadísticos y escasa capacidad de análisis y síntesis. DelMas, Garfield, y Chance (2004), quienes tras una enseñanza basada en la simulación, destacan la falta de comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral y confusión entre la media de la población (parámetro) y la media muestral. Inzunza (2006), que analiza el significado de las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional



mediante el software Fathom, y destaca que los estudiantes cometen errores frecuentes en el uso de representaciones numéricas, tienen un manejo superficial de los conceptos y propiedades de las distribuciones muestrales y presentan pocos elementos argumentativos. Retamal, Alvarado y Rebolledo (2007) que utilizaron el programa @risk en su experimento de enseñanza contextualizada en situaciones de la ingeniería. Ramírez (2008) estudia la distribución normal mediante la simulación con el software Fathom. Inzunza (2010) que utilizó dos herramientas de *software* (Fathom y Excel) para la enseñanza y aprendizaje de la estimación de parámetros por intervalos de confianza.

Los trabajos anteriores, sugieren el uso de recursos informáticos para abordar el aprendizaje de la distribución muestral, por ejemplo la utilización de *applets* disponibles en ambiente web (Inzunza, 2007; Garfield y Ben-Zvi, 2008).

Análisis de textos sobre las distribuciones muestrales. Esta metodología provee ideas para enriquecer la actividad docente en el aula, atendiendo a las dificultades que podrían tener los estudiantes en distintos tópicos al estudiar libros de textos. Alvarado y Segura (2012) analizaron el significado de las distribuciones muestrales en 22 libros de texto de probabilidad y estadística dirigidos a ingenieros. Acerca del estudio de otros conceptos estadísticos, se utilizó la metodología de análisis de textos por investigadores (Tauber, 2001; Cobo y Batanero, 2004; Alvarado y Batanero, 2008). Los resultados obtenidos fueron caracterizar veinticinco situaciones-problema relacionadas con la distribución de la suma de dos variables aleatorias y su extensión al caso de la media muestral y varianza muestral obtenidas de poblaciones normales; las situaciones que están directamente relacionados con la evolución histórica del teorema central del límite (Alvarado y Batanero, 2006), y las situaciones-problemas indirectas cuyas soluciones llevan a la búsqueda de una distribución que aproxime la suma de variables aleatorias de poblaciones que no son normales (Alvarado y Batanero, 2008). Además, describen cuatro tipos de lenguaje y representaciones (Ortiz, 1999) y ocho procedimientos para resolver los problemas. Establecen catorce proposiciones de la distribución de la suma de variables aleatorias asociada a poblaciones normales, de las cuales seis están en correspondencia con las propiedades de la distribución normal encontradas por Tauber (2001, p. 139-144), y siete tratan aplicaciones del teorema central del límite (Alvarado y Batanero, 2008). También, se obtuvieron cinco tipos de argumentos para comprobar las soluciones de los problemas de aplicación de las distribuciones muestrales.

Distribuciones muestrales y articulación con los intervalos de confianza. Olivo y Batanero (2007) describen el significado que tiene un intervalo de confianza como procedimiento y resaltan para su comprensión la adquisición de conceptos previos como el de la distribución muestral. Enfatizan errores de los estudiantes como pensar que para distintas muestras se obtendrá el mismo intervalo y que el coeficiente de confianza no hace cambiar el intervalo. Los autores recomiendan diseñar unidades didácticas basadas en la simulación para incrementar la relevancia del aprendizaje. Alvarado, Galindo y Retamal (2013) realizaron un estudio sobre la comprensión de las distribuciones muestrales y su vinculación con la estimación de parámetros por intervalos de confianza en estudiantes universitarios, al finalizar una experiencia de



enseñanza basada en la simulación y en la representación algebraica. Partieron de la base que los intervalos de confianza son uno de los campos de problemas dentro de las distribuciones muestrales, mediante la selección adecuada de la distribución muestral en la estimación de parámetros. En particular, aplicaron dos problemas abiertos y un cuestionario de intervalos de confianza propuesto por Olivo, Batanero y Díaz (2008) a un grupo de 113 estudiantes. Los resultados indicaron mejoras en la comprensión de la estimación de parámetros, de la relación con los coeficientes de confianza y de la elección de la distribución muestral adecuada para la construcción de intervalos de confianza. No obstante, confirmaron las dificultades de procedimientos algebraicos en las distribuciones muestrales. Si bien, Batanero, Tauber y Sánchez (2001) analizaron los errores de estandarización de una variable aleatoria con distribución normal, Alvarado, Galindo y Retamal (2013) extendieron este conflicto para el caso de la estandarización de la distribución de la media muestral para el caso de población normal.

SENTIDO ESTADÍSTICO

La presencia e importancia de la estadística y las probabilidades en el currículo escolar es una tendencia internacional, reconocida por contribuir en los aspectos de la toma de decisión a partir de la información, desarrollo del pensamiento crítico y como conocimiento base de todas las disciplinas. No obstante, es un área temática considerada difícil para los estudiantes, quienes a su vez reciben habitualmente una enseñanza descontextualizada y sin sentido.

Investigadores en educación estadística (Batanero, Arteaga y Contreras, 2011; Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013; Sanchez y Hoyos, 2013) conciben el sentido estadístico como unión de la cultura estadística (Watson, 2006) y razonamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Burrill y Biehler (2011) resaltan que la cultura estadística debe considerar la componente de la apropiación correcta de las siguientes ideas fundamentales: datos, gráficos, variabilidad aleatoria, distribución, asociación y correlación, probabilidad, muestreo e inferencia. El sentido estadístico involucra desarrollar el razonamiento estadístico para la aplicación adecuada de las ideas fundamentales en la resolución de situaciones estadísticas. Wild y Pfannkuch (1999) mencionan cinco modos básicos de razonamiento estadístico: reconocer la necesidad de los datos; transnumeración; percepción de la variación; razonamiento con modelos estadísticos, e integración de la estadística y el contexto.

Lo anterior, permite plantear la cuestión ¿cómo desarrollar el sentido estadístico en la enseñanza de las distribuciones muestrales? Una primera aproximación sería identificaren las componentes de la cultura estadística y el razonamiento estadístico los elementos relacionados con el tópic de las distribuciones muestrales y analizar su pertinencia en los niveles educativos. Las propuestas de enseñanza de las distribuciones muestrales debieran incluir un conocimiento del lenguaje estadístico, las representaciones de conceptos y propiedades en el sistema de las ideas estadísticas fundamentales y desarrollar formas de razonamiento estadístico. A continuación, se describen algunas componentes específicas necesarias que confieren sentido estadístico a la enseñanza de las distribuciones muestrales.

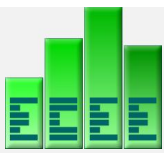


- Razonar a partir de datos empíricos, mediante el trabajo con datos de situaciones reales de interés de los estudiantes.
- Analizar gráficos estadísticos para distintas muestras.
- Razonar a partir de distribuciones de datos, cuyo proceso estadístico relaciona los datos y su población de origen.
- Comparar dos distribuciones de datos por medio de medidas estadísticas.
- Relacionar las características de las muestras con las de la población.
- Analizar la relación de distribuciones de poblaciones según la sensibilidad de los parámetros.
- Implementar los proyectos de iniciación científica con apoyo de representaciones computacionales.

Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) sugieren que la mejor forma de ayudar a los estudiantes a desarrollar su sentido estadístico en el aula es mediante el trabajo con proyectos, planteados por el profesor o escogidos libremente por los estudiantes. En la literatura encontramos variados ejemplos de análisis e implementación de esta metodología (Batanero y Díaz, 2011; Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007; Alvarado, 2013, etc.).

Los libros de textos en el nivel universitario presentan el estudio de las distribuciones muestrales organizado en dos grandes lecciones: distribuciones de estimadores obtenidos de poblaciones normales y distribuciones de estimadores obtenidos de poblaciones no normales. Con el objeto de motivar la reflexión a la hora de diseñar actividades de razonamiento estadístico de las distribuciones muestrales, la Tabla 1 muestra las conexiones de elementos involucrados en el significado de las distribuciones muestrales, en poblaciones desconocidas mediante tres configuraciones epistémicas (Alvarado, Galindo y Retamal, 2013), que tendrían que tomarse en cuenta en el diseño de unidades didácticas según el nivel educativo.

<i>Elemento de Significado</i>	<i>Configuración manipulativa</i>	<i>Configuración computacional</i>	<i>Configuración algebraica</i>
Problemas	- Estudio empírico de distribuciones de la suma de variables aleatorias	- Obtención experimental de distribuciones muestrales asintóticas - Investigar el comportamiento de las distribuciones muestrales cuando cambian los parámetros	- Obtener modelos matemáticos para la distribución de estadísticos
Lenguaje	- Expresiones verbales - Gráficas de barra, cajas, ...	- Representaciones dinámicas - Términos e íconos del programa	-Representación simbólica -Expresiones matemáticas específicas
Procedimiento	- Experimentación con dispositivos manipulables - Obtención de distribuciones muestrales empíricas - Cálculo frecuencial de probabilidades	-Simulación, variación de parámetros, experimentación	-Cálculo de probabilidades -Transformaciones algebraica
Conceptos	- Experimento estadístico, muestreo, muestras - Variable estadística,	- Aproximación, distribución muestral asintótica - Función de densidad	- Variables y convergencia - Modelo y parámetros



	distribución de frecuencias, distribución muestral		
Propiedades	- Media y varianza muestral - Estimador insesgado, distribución aproximada	- Aproximación normal de distribuciones clásicas - Efecto de los parámetros sobre la aproximación	- Tamaño muestral y efecto en la convergencia - Buen estimador y corrección de continuidad
Argumentos	- Comprobación de ejemplos - Generalizar conclusiones de la experiencia.	- Visuales, generalización y comprobación de ejemplos	Demostración deductiva

Tabla 1. Configuraciones epistémica: manipulativa, computacional y algebraica

EL CURRÍCULUM DE MATEMÁTICAS DE CHILE

Las orientaciones curriculares de matemáticas de Chile en el eje de Datos y Azar están en un proceso de cambios significativos con énfasis en un aumento de los contenidos de probabilidad y estadística en la educación media. El Ministerio de Educación (Mineduc, 2014) ha realizado ajustes curriculares que incluyen nuevos contenidos de estocástica. A continuación, se describen, según el ciclo escolar (14 a 17 años), aquellos contenidos que están relacionados con las distribuciones muestrales, y que pone un gran desafío de su implementación para los profesores.

Primer año medio:

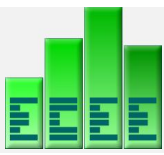
- Medidas estadísticas: obtención de información a partir de análisis de datos presentados en histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición; organización y representación de datos extraídos de diversas fuentes, bien sea construidos manualmente o con herramientas tecnológicas.
- Medias muestrales: utilización y establecimiento de estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, con y sin reemplazo; formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias muestrales de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo.

Segundo año medio:

- Medidas estadísticas: determinación del rango, varianza y desviación estándar, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando, en forma manual y mediante el uso de herramientas tecnológicas.
- Medias muestrales: análisis de las características de dos o más muestras de datos, haciendo uso de indicadores de tendencia central, posición y dispersión; empleo de elementos básicos del muestreo aleatorio simple, en diversos experimentos, para inferir sobre la media de una población finita a partir de muestras extraídas; aplicación del concepto de variable aleatoria en diferentes situaciones que involucran azar e identificación de ésta como una función.

Tercer año medio:

- Variable aleatoria discreta: utilización de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecimiento de la relación con la función de distribución; exploración de la relación entre la distribución teórica de una variable aleatoria y la



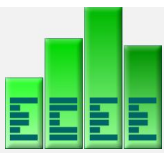
correspondiente gráfica de frecuencias, en experimentos aleatorios discretos, haciendo uso de simulaciones digitales; aplicación e interpretación gráfica de los conceptos de valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta.

- Distribución de probabilidad: determinación de la distribución de una variable aleatoria discreta en contextos diversos y de la media, varianza y desviación estándar a partir de esas distribuciones; uso del modelo binomial para analizar situaciones o experimentos, cuyos resultados son dicotómicos: cara o sello, éxito o fracaso o bien cero o uno.

Cuarto año medio:

- Variable aleatoria continua: interpretación del concepto de variable aleatoria continua y de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal; estudio y aplicación de elementos básicos de la distribución normal, a partir de diversas situaciones en contextos tales como: mediciones de peso y estatura en adolescentes; puntajes de pruebas nacionales e internacionales; datos meteorológicos de temperatura o precipitaciones. Relacionar la distribución normal y la distribución normal estándar.
- Distribución de medias muestrales:
 - realización de conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales; verificación mediante experimentos donde se extraen muestras aleatorias de igual tamaño de una población, mediante el uso de herramientas tecnológicas;
 - estimación de intervalos de confianza, para la media de una población con distribución normal y varianza conocida, a partir de una muestra y un nivel de confianza dado;
 - análisis crítico de las inferencias realizadas a partir de encuestas, estudios estadísticos o experimentos, usando criterios de representatividad de la muestra.
 - descripción de los resultados de repeticiones de un experimento aleatorio, aplicando las distribuciones de probabilidad normal y binomial mediante el uso de herramientas tecnológicas.
 - aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal, aplicación al cálculo de experimentos binomiales.

Muchos de los conceptos y propiedades que pueden ser tratados experimentalmente en el contexto escolar, son formalizados en el nivel universitario. El nuevo marco curricular de matemáticas en Chile introduce, en el eje de Datos y Azar, el tratamiento de datos y modelos para el razonamiento en situaciones de incerteza. El tratamiento estadístico se inicia en primero básico y el azar a partir de quinto. En la educación media se propone desarrollar conceptos y técnicas propias de la estadística y la teoría de probabilidades, que incluyen el uso de tecnologías digitales, de Internet y software estadísticos. Esto supone dar espacio a la exploración, la experimentación y la investigación. Cobra relevancia, entonces, el trabajo en equipo, la comunicación y la confrontación de ideas, los argumentos y el apoyo en elementos tecnológicos. Los contenidos mínimos obligatorios en el último año de Educación Media comprenden:



interpretación del concepto de variable aleatoria continua y función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal; estimación de intervalos de confianza para la media de una población con distribución normal y varianza conocida a partir de una muestra y un nivel de confianza dado; aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal, aplicación al cálculo de experimentos binomiales.

ESTÁNDARES ORIENTADORES PARA CARRERAS DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MEDIA

El Ministerio de Educación de Chile, con motivo de proporcionar a las Facultades y Escuelas de Educación orientaciones sobre los contenidos disciplinarios y pedagógicos que debe saber todo profesor o profesora para ser competente en su ejercicio de su profesión, impulsó la elaboración de un conjunto de estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media en las distintas áreas de estudio. Considerando como referencia las bases curriculares de matemática de 2009, se identificaron los conocimientos mínimos imprescindibles que cada profesor debe saber en la disciplina y de la enseñanza de la misma, para desempeñarse eficazmente en los seis niveles escolares (12 a 17 años) que comprenderá la Educación Media (Mineduc, 2012).

Los estándares de matemática se presentan organizados en torno a cinco áreas temáticas, siendo una de ellas Datos y Azar. En este eje temático se han definido cinco estándares que describen los conocimientos, habilidades y competencias que el futuro profesor o profesora necesita para conducir con éxito el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de Enseñanza Media en los tópicos básicos de estadística descriptiva y de inferencia estadística.

- Se contemplan la identificación, concepción y formulación de problemas que requieren de la recolección de datos, su descripción y análisis, y su comunicación gráfica y resumida.
- Asimismo, el profesor debe tener la capacidad de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas.
- Está preparado para conducir el aprendizaje de las variables aleatorias discretas.
- Está preparado para conducir el aprendizaje de la distribución normal y teoremas límite.
- Está preparado para conducir el aprendizaje de inferencia estadística.

Retomando nuestro tópico de las distribuciones muestrales, los desafíos en la implementación y apropiación de conceptos relacionados con el tema, no son menores. El futuro profesor o profesora debiera dar cuenta de estos estándares y mostrarlo cuando:

- Conoce las dificultades de los alumno(a)s con los conceptos: muestra, estadístico y tablas de frecuencias.
- Diseña instrumentos para evaluar el aprendizaje del concepto de muestra aleatoria.
- Calcula esperanza, varianza y desviación estándar de variables aleatorias



discretas.

- Elabora y analiza problemas para la enseñanza de la distribución binomial.
- Conoce elementos del desarrollo histórico del Teorema Central del Límite.
- Conoce dificultades que tienen los estudiantes con conceptos de variables aleatorias y de aproximación para muestras grandes.
- Planifica actividades con base en problemas que permitan explicar e ilustrar la convergencia de la distribución de probabilidad binomial a la distribución de probabilidad normal.
- Utiliza estrategias de simulación que permitan a los estudiantes conjeturar la distribución de medias muestrales.
- Conduce actividades para que los estudiantes comprendan la aproximación de la distribución binomial por una distribución normal.
- Diseña actividades de evaluación relacionadas con las propiedades básicas de la distribución normal y del teorema central del límite.
- Describe y ordena los contenidos necesarios del currículo para que los alumno(a)s aborden el tema de intervalos de confianza.

Con base en este nuevo escenario educativo nos vemos enfrentados a replantear e indagar acerca de la actitud del profesor de matemática en la enseñanza de las ideas estadísticas fundamentales, y si en el eje de Datos y Azar se favorece la comprensión de los conceptos y enunciados, como el aspecto intuitivo del teorema central del límite, considerando más de una forma de acercarnos al significado institucional implementado (o previsto). La práctica docente debe ser reflexiva, entendida en el sentido que el profesor analice las distintas variables involucradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística y, consecuentemente, sus formas de intervenir en ellas (Alvarado y Retamal, 2010). Enseñar conceptos y propiedades básicas de probabilidad y estadística de una manera práctica y con apoyo de recursos informáticos es aún, un desafío para el profesorado en los distintos niveles educativos.

CONCLUSIONES

El presente trabajo ha tenido por objetivo iniciar el diálogo y la reflexión acerca de cómo llevar a cabo la implementación y apropiación de las ideas estadísticas fundamentales por parte de los estudiantes, frente a los cambios que se están produciendo en el currículo de estadística en varios países. La tarea no es fácil para los profesores de matemáticas en ejercicio que enseñan estadística y probabilidades, y más aún para las Escuelas de Educación que deben promover la cultura y razonamiento estadístico en la formación inicial de profesores. Se han planteado algunos elementos que deben ser considerados para desarrollar el sentido estadístico de un tópico importante en el currículum de estadística, las distribuciones muestrales, considerada en el nivel terciario como el puente entre las distribuciones de probabilidades y la inferencia estadística, así también abordar la problemática de articulación de contenidos en la etapa de transición con la educación media. Los retos que plantean los estándares curriculares de la estadística y su enseñanza sugieren analizar el conocimiento didáctico de tópicos importantes de la estadística de los profesores que enseñan esta disciplina en distintos niveles educativos, y a su vez



apropiarse del trabajo de iniciación científica de los estudiantes mediante la estrategia de proyectos con apoyo de recursos informáticos. La formación estadística y didáctica de los profesores constituye un campo de investigación en la comunidad de Didáctica de la Matemática. Algunas directrices de reflexión-acción que se podrían abordar para mejorar la acción didáctica: analizar los significados de las ideas estadísticas fundamentales que se pretende enseñar; establecer los diversos niveles de comprensión, por ejemplo de las distribuciones muestrales, mediante el estudio de las transformaciones de conceptos y propiedades estadísticas importantes para adaptarlos en los distintos ciclos y niveles educativos; estudiar las estrategias de los estudiantes en la resolución de problemas a objeto de orientar de buena forma la actividades de aprendizaje; analizar constantemente el currículo de estadística y la metodología de enseñanza mediante configuraciones didácticas. Debemos considerar la enseñanza de la estadística y probabilidad como una actividad crítica, pasar de preocuparse del cómo hacer, al por qué lo planteo así, y revisar constantemente las propuestas de acción educativa.

REFERENCIAS

- Alvarado, H. (2013). Didáctica de la Estadística en la educación superior. En A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas* (pp. 319-342). Caracas: Universidad Central de Venezuela.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos*, 34 (2), 7-28.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números*, 67.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2006). El significado del teorema central del límite: evolución histórica a partir de sus campos de problemas. En A. Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas/ Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 257-277). Jaén, España: Universidad de Jaén.
- Alvarado, H., Galindo, M. y Retamal, L. (2013). Comprensión de la distribución muestral mediante configuraciones didácticas y su implicación en la inferencia estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (2), 75-91.
- Alvarado, H. y Retamal, L. (2012). Dificultades de comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24 (3), 119-130.
- Alvarado, H. y Retamal, L. (2010). La aproximación binomial por la normal: una experiencia de reflexión sobre la práctica. *Paradigma*, 31 (2), 89-108.
- Alvarado, H. y Segura, N. (2012). Significado de las distribuciones muestrales en textos universitarios de estadística. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 7 (2), 54-71.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Contreras, J. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2 (2), 1-20.
- Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18.
- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Cuadrante*, 10 (1), 59-91.



- Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht, the Netherlands: Springer.
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1 (1). <http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol1/iss1/art2>.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). Creating statistical reasoning environments. En J. Garfield, y D. Ben-Zvi (Eds.), *Developing students statistical reasoning* (pp.91-114). New York: Springer Science+Business Media.
- Garfield, J., DelMas, R. y Chance, B. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Inzunsa, S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje: un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 15 (45), 423-452.
- Inzunsa, S. (2007). Recursos de Internet para apoyo de la investigación y la educación estadística. *Revista Iberoamericana de Educación*, 41 (4). <http://www.rieoei.org/experiencias142.htm>.
- Inzunsa, S. (2006). Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica. Tesis de doctorado. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV – IPN.
- Mineduc (2012). Ministerio de Educación. <http://www.cpeip.cl/>.
- Olivo, E. y Batanero, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *UNION*, 12.
- Olivo, E., Batanero, C. y Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios: *Educación Matemática*, 20(3), 5-32.
- Ortiz, J.J. (1999). Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato. Tesis de doctorado. Granada: Universidad de Granada.
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards and understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17-46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Ramírez, G. (2008). Formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría de matemática educativa sobre la distribución normal mediante problemas de simulación de Fathom. *Revista electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3 (1), 10-23.
- Retamal, L., Alvarado, H. y Rebolledo, R. (2007). Understanding of sample distributions for a course on statistics for engineers. *Ingeniare*, 15, 6-17.
- Sánchez, E. y Hoyos, V. (2013). La estadística y la propuesta de un currículo por competencias. En A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas* (pp. 211-227). Caracas: Universidad Central de Venezuela.
- Tauber, L. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos. Tesis de doctorado. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Watson, J.M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265.