REPRESENTACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL

Hugo Alvarado y María Lidia Retamal
Universidad Católica de la Santísima Concepción (Chile)
alvaradomartinez@ucsc.cl, lretamal@ucsc.cl

El currículo de estadística en el sistema escolar sugiere desde la infancia un cambio metodológico de enseñanza hacia el desarrollo de los aspectos intuitivos de lo estocástico en situaciones de incertidumbre. El Taller tiene dos propósitos, presentar actividades de experimentos aleatorios con dispositivos manipulativos, algebraico y computacional para familiarizarse con la noción de distribución de probabilidad binomial. También, ilustrar que su enseñanza en la educación secundaria por medio de variadas representaciones proporciona una mayor potencia en el cálculo de probabilidades y la introducción de las ideas de parámetro, estadístico, simulación, variable aleatoria y aproximación.

PALABRAS CLAVE

Formación de profesores, enseñanza, representaciones, distribución binomial.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la probabilidad en la escuela está en una etapa de replantearse un cambio en los métodos de enseñanza que se utilizan, producto de que sus alumnos usan comúnmente el lenguaje de la tecnología. Esto conduce al profesor de matemáticas modificar su actuar en el aula, teniendo presente que algunas veces estos recursos informáticos aumentan los problemas educativos en vez de resolverlos. Por lo general, se presenta la probabilidad en el contexto de juegos de azar con resultados equiprobables. No obstante, muchas situaciones probabilísticas conllevan una serie de experimentos aleatorios donde la simulación permite obtener una estimación de la solución, y contribuye a conocer las diferencias entre la probabilidad experimental y la teórica. Surgen preguntas básicas en la exploración de experimentos aleatorios acerca de, qué efecto tiene la informática a favor de un aprendizaje significativo, qué dispositivos didácticos (dados, fichas, Excel, software, plataforma virtual, Internet, libros de textos, etc.) son los adecuados para la enseñanza de la probabilidad en los distintos niveles educativos.

El Taller tiene por objetivo generar experimentos aleatorios para familiarizarse con la noción de modelo de probabilidad binomial por medio de situaciones tales como estimar la proporción de alumnos que optan por estudiar matemáticas. Se proponen actividades, a desarrollar en el aula y laboratorio de computación, de correspondencia entre experimentos aleatorios sencillos y su aplicabilidad a situaciones reales por medio de representaciones con dispositivos manipulativos, algebraico y computacional usando la planilla Excel y un *applet* del modelo binomial. La enseñanza de la probabilidad en la educación secundaria con apoyo informático proporciona una mayor potencia en el cálculo de probabilidades, las representaciones gráficas y la introducción de ideas de parámetro, estadístico, simulación, variables aleatorias e ilustrar la aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal.

MARCO DE REFERENCIA

Las actividades pretendidas en el Taller promueven los diversos elementos del significado para el conocimiento estocástico, que se describen en: problemas, definiciones, propiedades, algoritmos, lenguaje y argumentación. Estas entidades primarias están relacionadas entre sí formando *configuraciones*, concebidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Las actividades propuestas de los experimentos aleatorios mediante tres tipos de representaciones conducen a la apropiación progresiva de la distribución binomial. Entenderemos por recursos didácticos a todos aquellos instrumentos que facilitan la comunicación hacia la exploración, aplicación y argumentación de conceptos estocásticos en el aula.

- *Representación manipulativa* el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas,...), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico. Aparecen la noción de experimento aleatorio y estadístico, y se argumenta mediante ejemplos y contraejemplos. Los procedimientos son empíricos y gráficos y el lenguaje se reduce a expresiones verbales y gráficas en papel y lápiz.
- La *representación computacional* amplía la variedad de gráficas dinámicas. Además, del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y permite trabajar con las variables estadísticas y aleatorias simultáneamente. No posibilita el lenguaje algebraico ni la demostración deductiva. El argumento preferible es inductivo, estudio de ejemplos, contraejemplos y la generalización. Aparecen algunos conceptos como la aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad normal.
- La *representación algebraica* se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso a elementos de álgebra, los procedimientos serían analíticos.

A continuación, se ilustran con ejemplos las tres representaciones.

Ejemplo 1. Cuantifique la posibilidad de obtener 4 caras al lanzar una moneda 6 veces.

Ejemplo 2. Representaciones gráficas de seis distribuciones binomiales. *B (n,p)* para distintos valores de sus parámetros *n* y *p.* La figura siguiente muestra valores para *p = 0,3 con n = 4, 8, 24 y para p = 0,1 con n = 4, 8 y 50.* ¿Qué observa de las gráficas para los distintos valores de los parámetros?

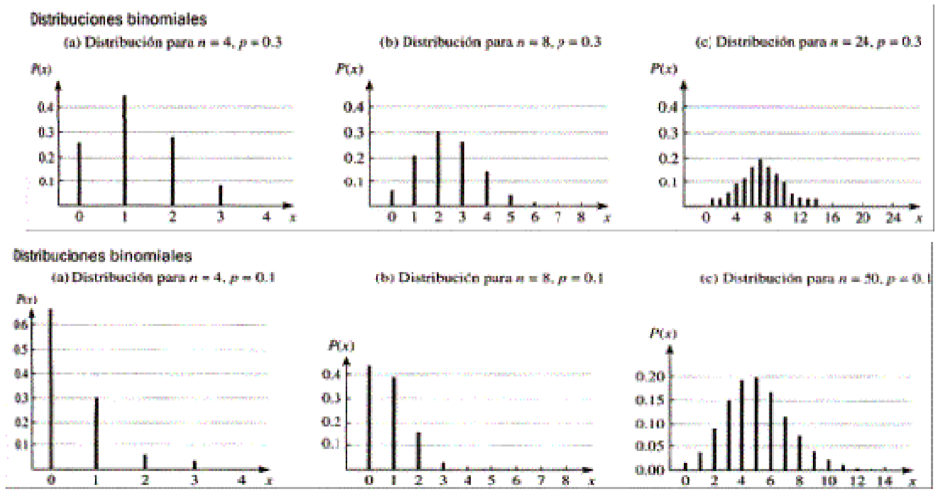


Figura 1. Representaciones computacionales de la distribución binomial

Ejemplo 3. Estudios médicos indican que 30% de los escolares de una ciudad padecerá de gripe el próximo invierno. Si seleccionamos al azar un grupo de 12 estudiantes, justifique si esperamos obtener una probabilidad alta de encontrar entre tres y cinco estudiantes con tal enfermedad este invierno.

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

A continuación se mencionan los conceptos básicos para el estudio de las nociones de modelos de probabilidad y la ilustración de actividades de la experimentación a la generalización de experimentos aleatorios que se tratarán en este taller.

1. Experimento aleatorio. Hay que diferenciar dos tipos de experimentos. En un experimento determinista, a partir de las mismas condiciones iniciales se obtienen los mismos resultados, mientras que en un ***experimento aleatorio*** se conocen todos los posibles resultados pero no se puede determinar cuál va a ser el resultado que se va a obtener. Un *suceso* es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio; será elemental cuando no puede descomponerse en otros más simples, en caso contrario se denominan sucesos compuestos.

Es importante, antes de entrar en la iniciación al cálculo de probabilidades, describir de forma adecuada en qué consiste el experimento aleatorio y luego identificar todos los posibles resultados que constituyen el espacio muestral. Esto facilitará la simulación de fenómenos aleatorios realistas con diversos materiales. La idea de aleatoriedad en sus comienzos se entendía como aquello cuyas causas son desconocidas y el 'azar' estaría personificado como las causa de los fenómenos aleatorios.

2. *Simulación*. Llamamos simulación a la sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente con el cual se experimenta para obtener estimaciones de probabilidades de sucesos asociados al primer experimento. La estimación de probabilidad que se obtiene con el experimento simulado es tan válida como si tratase del experimento real.

3. *Variable aleatoria*. La variable estadística representa únicamente los*n* resultados de *n* realizaciones de un experimento aleatorio. Si el experimento se repite infinidad de resultados posibles da origen a la noción de variable aleatoria asociada al experimento. En general, cada resultado de un experimento puede ser asociado con un número que es especificado por una regla de asociación. Por ejemplo, se cuenta el número total de caras en el lanzamiento de una moneda 100 veces. Esta regla de asociación es llamada una variable aleatoria; una *variable* ya que valores numéricos diferentes son posibles y *aleatoria*, pues el valor observado depende de cuáles de los resultados posibles del experimento ocurre. Una variable aleatoria es *discreta* si su recorrido es un conjunto discreto de números (finito o numerable), es decir, sus elementos pueden ser listados de manera que hay un primer elemento, un segundo elemento, etc., en la lista (asumen sólo ciertos valores, comúnmente número enteros y resulta principalmente del conteo).

4. *Función de probabilidad*. Sea X una variable aleatoria discreta con recorrido R_X. Sea f una función que asigna a cada x $\in R_X$ un número $f(x) = P(X = x)$ llamado probabilidad de x. La función de probabilidad f de la v.a. X debe satisfacer las siguientes propiedades:

a) $f(x) > 0$; $\forall x \in R_X$, $\forall x \in$ IR b) $\sum f(x) = 1$;$x \in R_X$

La función f es expresada usualmente como los pares $(x, f(x))$ $\forall x \in R_X$, llamada *distribución de probabilidades*, que es una lista de todos los resultados posibles de un experimento y de la probabilidad relacionada con cada resultado.

5. *Esperanza matemática*. Así como en estadística descriptiva se calcula la media de un conjunto de datos, también se puede determinar la media de una distribución de probabilidad. La esperanza matemática de una variable aleatoria discreta es la media ponderada de todos los posibles resultados en los cuales los pesos son las probabilidades respectivas de tales resultados, y se refiere al centro de gravedad de una distribución de masa a través de una línea. Tanto el valor esperado como la varianza de una variable son llamados parámetros de una distribución y sirven para especificar completamente la distribución de probabilidad. En términos simbólicos el *valor esperado* de X se define por:

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in R_X} x \cdot f(x)$$

La varianza de una distribución de probabilidad es el promedio de las desviaciones al cuadrado con respecto de la media, y se escribe como:

$$V(x) = E[(x-\mu)^2] = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 \cdot f(x) = E(X^2) - \mu^2$$

Consideremos un experimento aleatorio que produce, en cada ensayo, únicamente uno de dos resultados mutuamente excluyentes. Por ejemplo:

- El nacimiento de un niño. Los resultados posibles son: ‘hombre’ y ‘mujer’.
- Se elige al azar un niño entre un grupo en el que *m* niñas realizan actividades deportivas superior al promedio y *k* niñas desarrollan actividades deportivas igual o inferior al promedio. Los resultados posibles son: ‘niña con actividades deportivas superior al promedio’ y ‘niña con actividades deportivas igual o inferior al promedio’.
- Se selecciona al azar un paquete de cereales de los que están en un estante de un almacén de comestibles que contiene *a* paquetes de marca A y *b* paquetes de marca B. Los resultados posibles son: ‘paquete de cereales de marca A’ y ‘paquete de cereales de marca B’.
- Un estudiante presenta un examen final. Los resultados posibles son:’ aprobar’ y ‘reprobar’.

Los experimento de este tipo, en los que se produce, en cada ensayo, sólo uno de dos resultados mutuamente excluyentes se denomina *ensayos de Bernoulli,* en honor al matemático suizo Jakob Bernoulli (1654-1705), considerado como uno de los fundadores de la teoría de la probabilidad. Por conveniencia, se suele denominar arbitrariamente uno de los resultados de un ensayo de Bernoulli como éxito (E) y al otro como fracaso (F).

Generalmente, tiene importancia poder determinar la probabilidad de que se observen *x* números de éxitos cuando se repite un experimento *n* veces bajo las condiciones que se acaban de establecer.

Supongamos por ejemplo, el 70% de los adultos que viven en una comuna tiene más de 25 años de edad. Se selecciona cinco adultos al azar. ¿Qué probabilidad hay de que tres tengan más de 25 años?

El número de secuencias de cinco adultos que viven en una comuna en las que tres tiene más de 25 años (designadas con el evento E de éxito y el resto con la F de fracaso), está dado por

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

Podemos enumerar estas secuencias así:

1. EEEFF	2. EFEEF	3. EFFEE	4. EEFEF	5. EEFFE	6. EFEFE
7. FEEEF	8. FFEEE	9. FEFEE	10. FEEFE		

La probabilidad de que ocurra un éxito (adulto seleccionado tiene más de 25 años) es 0,7 y la de que ocurra un fracaso es 0.3.

Resultarían exactamente 3 éxitos sobre 5 ensayos si ocurriera la secuencia Nº1 o la secuencia Nº2,…, o la secuencia Nº10. Según el axioma de Probabilidad para la suma, entonces, la probabilidad de observar exactamente 3 éxitos sobre 5 ensayos de Bernoulli es igual a la probabilidad de la secuencia Nº1 más la probabilidad de la secuencia Nº2,……….., más la probabilidad de la secuencia Nº10. Hay un total de $\binom{5}{3}$ secuencias y la probabilidad de ocurrencias de cada una es igual a 0.7×0.7×0.7×0.3×0.3 = $0.7^3 \times 0.3^2$.

La probabilidad de que tres adultos de los cinco que viven en una comuna tengan más de 25 años es

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} [0.7]^3 [0.3]^2 = 0.3087.$$

Generalización

El espacio muestral natural para un experimento Binomial es el producto cartesiano de los espacios muestrales de los ensayos Bernoulli consigo mismo *n* veces,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \ldots\Omega_n \text{; donde } \Omega_i = \{E, F\} \text{ i} = 1,n$$

Cada evento elemental es una *n*-upla que contiene (0,0,0,1,0....,1,0) con *x*-éxito y *n-x* fracasos y la probabilidad del evento elemental es : E,E,..,E,F,F....,F $\rightarrow \quad p^x(1-p)^{n-x}$

Pero el número de n-uplas que contienen x éxitos es $\binom{n}{x}$

Si una n-upla tiene la probabilidad $p^x(1-p)^{n-x}$ de ocurrir entonces $\binom{n}{x} n-$ uplas tiene la probabilidad de $\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ de ocurrir. Luego,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \quad ; \; x = 0,1,2,3,\ldots\ldots,n$$

Observemos que $f(x)$ cumple con ser una función de probabilidad:

a) $f(x) > 0$; b) $\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1$

6. *Experimento de probabilidad Binomial*. Es el experimento integrado por ensayos repetidos, que posee las siguientes propiedades:

- Hay n ensayos repetidos independientes e idénticos
- Cada ensayo tiene dos resultados posibles (éxito o fracaso)
- Prob (éxito) = p, Prob (fracaso) = 1- p = q
- La variable aleatoria binomial X es el conteo del número de ensayos con éxito que ocurren, donde x puede adoptar cualquier valor entero de 0 a n.

La propiedad de ensayos independientes significa que el resultado de un ensayo no afecta la probabilidad de éxito de cualquier otro ensayo en el experimento. En otras palabras, la probabilidad de 'éxito' permanece constante a lo largo de todo el experimento. Las propiedades c) y d) están relacionadas con la notación algebraica de cada ensayo de todo el experimento. Es importante notar que x y p estén asociadas con 'éxito'.

Lo fundamental para trabajar con cualquier experimento de probabilidad es su distribución de probabilidad, pues permite encontrar las probabilidades para cada valor posible de x. En particular, se define la *función de probabilidad binomial*:

Para un experimento binomial, sean p la probabilidad de un 'éxito' y
q la probabilidad de un 'fracaso' en un solo ensayo; entonces
P (X = x), la probabilidad de que haya exactamente x éxitos en n ensayos, es

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ para } x = 0,1,2,3,\ldots.,n.$$

Ejemplo 4. Un profesor aplica a sus estudiantes un cuestionario sorpresa con cinco *ítems*de opción múltiple. Uno de los estudiantes no ha estudiado el material del cuestionario, y por tanto decide contestar los cinco ítems al azar, adivinando las respuestas sin leer las preguntas ni las opciones de respuestas.

Hoja de respuestas del cuestionario. Instrucciones: encierre en un círculo la mejor respuesta de cada ítem

1.	A	B	C
2.	A	B	C
3.	A	B	C
4.	A	B	C
5.	A	B	C

Antes de ver las respuestas correctas del cuestionario y encontrar cómo le fue a este estudiante, se considerarán algunos hechos que podrían suceder si un cuestionario se contesta de esta forma.

- ¿Cuántos de los cinco ítems es probable contestar correctamente?
- ¿Cuán probable es contestar de manera adecuada más de la mitad de los ítems?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir las respuestas acertadas de los cinco ítems?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir las respuestas incorrectas de los cinco ítems?
- Si todo un grupo contesta al azar el cuestionario, ¿cuál cree que será el número promedio de respuestas correctas del grupo?

Para responder estas interrogantes, de forma algebraica, se obtiene el espacio muestral Ω de 32 formas. Cada ítem fue contestado correcta(C) o incorrectamente (I).

Ω = {CCCCC, CCCCI, CCCIC, CCICC, CICCC, ICCCC, CCCII, CICIC, ICICC, CCIIC, CIICC, IICCC, ICCCI, ICCIC, CICCI, CCICI, CCIII, CIIIC, IIICC, ICICI, IICIC, CIICI, IICCI, ICCII, CICII, ICIIC, CIIII, ICIII, IICII, IIICI, IIIIC, IIIII}

Considere la variable aleatoria, X el 'número de respuestas correctas' en el cuestionario cuando éste fue contestado al azar por alguna persona. La variable X puede adoptar cualquiera de los valores: 0, 1, 2, 3, 4 y 5 para cada cuestionario. Debido a que cada ítem individual tiene una sola respuesta correcta de las tres posibles, la probabilidad de elegir la respuesta correcta de un ítem individual es 1/3. La probabilidad de elegir una respuesta incorrecta en cada ítem es 2/3. Las probabilidades de cada valor X es:

La probabilidad de que cero ítems hayan sido contestados correctamente y que cinco hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X = 0) = 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = 0.13169$$

La respuesta a cada ítem individual es un evento separado e independiente, por lo que es posible multiplicar las probabilidades.
La probabilidad de que un ítem haya sido contestado correctamente y los otros cuatro hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X = 1) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243} = 0.32922.$$

La probabilidad de que dos ítems hayan sido contestados correctamente y los otros tres hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X = 2) = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 10\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243} = 0.32922.$$

La probabilidad de que tres ítems hayan sido contestados correctamente y los otros dos hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X=3) = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 10\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243} = 0.16461.$$

La probabilidad de que cuatro ítems hayan sido contestados correctamente y tres hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X=4) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 5\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243} = 0.04115$$

Finalmente, la probabilidad de que los cinco ítems hayan sido contestados correctamente es:

$$P(X=5) = 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} = 0.00412$$

Así, se obtiene la distribución de probabilidad para el cuestionario de cinco ítems.
Las respuestas a las interrogantes son:

- La ocurrencia más probable es obtener una o dos respuestas correctas.
- Tener más de la mitad de las respuestas correctas se representa con 2 ó 3, su probabilidad total es 0.49383. Es decir, el cuestionario se aprueba sólo el 49% de las veces, si se contesta al azar.
- Todas las respuestas son correctas $P(X=5)$ sólo el 0.4% de las veces.
- Las cinco respuestas son incorrectas $P(X=0)$ sólo el 13% de las veces.
- Puede esperarse que el promedio del grupo sea 1/3 de 5, o 1.666, respuestas correctas.

X	Elementos de Ω	Probabilidad de X	$X \cdot P(X)$
0	IIIII	0.13169	0
1	CIIII, ICIII, IICII, IIICI, IIIIC	0.32922	0.32922
2	CCIII, CIIIC, IIICC, ICICI, IICIC, CIICI, IICCI, ICCII, CICII, ICIIC	0.32922	0.65844
3	CCCII, CICIC, ICICC, CCIIC, CIICC, IICCC, ICCCI, ICCIC, CICCI, CCICI	0.16461	0.49383
4	CCCCI, CCCIC, CCICC, CICCC, ICCCC	0.04115	0.1646
5	CCCCC	0.00412	0.0206
suma	32 elementos	1	1.66669

Muchos experimentos están compuestos de ensayos repetidos cuyos resultados pueden clasificarse en alguna de las siguientes categorías: éxito o fracaso. Estos experimentos se denominan experimentos de probabilidad binomial. Así, X se distribuye binomial con $n = 5$ y $p = 1/3$. La probabilidad de que tres ítems hayan sido contestados correctamente y los otros dos hayan sido contestados incorrectamente es:

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \times \frac{4}{243} = 0.16461.$$

La esperanza de la variable aleatoria X está dada por $E(X) = np = 5 \times \frac{1}{3} = 1.666$

CONCLUSIONES

Las directrices curriculares en Latinoamérica sugieren en el eje de Datos y Azar un cambio metodológico de enseñanza hacia el desarrollo de los aspectos intuitivos de lo estocástico en ambiente de incertidumbre. La motivación de iniciar este Taller se debe a que el azar y los experimentos aleatorios están presentes en nuestra realidad y coincidimos que en el sistema escolar se debe proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde la infancia. Los desafíos en la enseñanza de la distribución binomial consisten en presentar actividades de representaciones progresivas de aproximación a su significado según el contexto escolar.

Un caso particular de lo que hoy es el teorema central del límite es la aproximación de la distribución binomial a la normal (llamado Teorema de Laplace De-Moivre), pues se puede considerar la distribución binomial $bin(n,p)$ como la suma de variables aleatorias Bernoulli independientes idénticamente distribuidas $B(p)$. Pensamos que las nociones de este teorema pueden ser desarrolladas en la educación media.

REFERENCIAS

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números*, 67.

Alvarado, H. y Retamal, L. (2012). Dificultades de comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, *24* (3), 119-130.

Alvarado, H. y Retamal, L. (2010). La aproximación binomial por la normal: una experiencia de reflexión sobre la práctica. *Paradigma*, *31* (2), 89-108.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, *83*, 7-18.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf.

ANEXOS

A continuación se presentan las actividades pretendidas a desarrollar con los participantes del Taller y se proponen actividades complementarias que según el tiempo disponible del Taller se guiarán en las dos sesiones.

Actividad 1. Asigne valores (probabilidades) a cada una de las circunstancias dadas a continuación, con la escala adjunta. Reserve el valor de cero para aquellas que se consideran imposibles de ocurrir y el valor de 1 para aquellas donde se tenga la certeza absoluta de su ocurrencia. El valor de 0,5 se podrá asignar a los casos en que tanto la ocurrencia de la situación descrita como su no ocurrencia tengan el mismo peso (suele decirse que es una situación con probabilidad 50-50).

0 0,25 0,5 0,75 1

Imposible Seguro

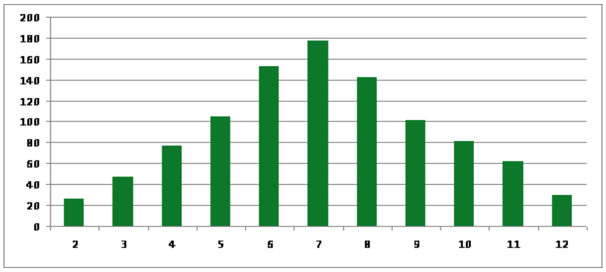
a) Que el primer hijo de una pareja sea mujer: ___________________
b) Tener un accidente automovilístico si maneja ebrio: ______________
c) Se tiene una bolsa con 10 bolitas negras y 20 bolitas blancas; se agita y sin ver se extrae una bolita, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?: _____________
d) Que al lanzar una moneda al aire, salga cara: ___________________

Actividad 2. Indicar qué tienen en común los siguientes experimentos:
a) Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.
b) Se lanza una moneda cuatro veces y se cuenta el número total de caras obtenidas.
c) Se lanza una moneda cuatro veces y se observa la sucesión de caras y sellos obtenidos.
d) Se fabrican artículos en una línea de producción y se cuenta el número de artículos defectuosos producidos en un periodo de 24 horas.
e) Se fabrican ampolletas y luego se prueba su duración en una casa anotando el tiempo transcurrido (en horas) hasta que se quema.
f) En un lote de 10 artículos hay 3 defectuosos. Se elige un artículo después de otro (sin sustituir el artículo elegido) hasta que se obtiene el último artículo defectuoso. Se cuenta el número total de artículos sacados del lote.
g) Se fabrican artículos hasta producir 10 no defectuosos. Se cuenta el número total de artículos manufacturados.
h) De una urna que contiene sólo bolitas negras, se escoge una bola y se anota su color.

Actividad 3. *Intuiciones sobre el azar*. Determinar la probabilidad de encontrar entre 13 y 17 caras en el lanzamiento de una moneda 30 veces. ¿Al ejecutar el experimento dónde la probabilidad es mayor, en una secuencia inventada o en una secuencia real llevada a cabo en una clase con 30 estudiantes?

Actividad 4. Generar números aleatorios con la planilla Excel. Del experimento del lanzamiento de dos dados, simular la suma en 1000 lanzamientos. Una representación obtenida en el laboratorio fue la siguiente:

D_1+D_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencia	26	47	77	105	153	177	142	101	81	62	29



Actividad 5. La posibilidad de que asista un estudiante a este Taller es 1/2. ¿Cuál de estos casos te parece más probable? Justifique su alternativa.
a) Que entre los próximos 5 asistentes al taller 2 o más sean estudiantes
b) Que entre los próximos 50 asistentes al taller 20 o más sean estudiantes
c) Los dos casos anteriores son igual de probables.

Actividad 6. Cuantificar la posibilidad de obtener 4 caras al lanzar una moneda 6 veces.

Actividad 7. Se realizan tres pruebas de Bernoulli independientes. Suponga que las probabilidades de obtener éxito es p. Determine la probabilidad de obtener dos éxitos en términos de p.

Actividad 8. Un profesor toma muestras de alumnos de 2do medio para determinar si están preparados para la prueba de síntesis de Matemática; cada alumno lo clasifica como preparado o no preparado. Sea X_i =0 si el alumno no está preparado y X_i =1 si el alumno está preparado. Suponga que ambos sucesos tienen igual probabilidad.
a) Si el profesor toma una muestra de 5 alumnos, determine la probabilidad de obtener a lo más un alumno preparado, a lo más dos alumnos preparados.
b) Si el profesor toma una muestra de 60 alumnos, calcule la probabilidad de obtener entre 5 y 15 alumnos preparados; entre 25 y 35; entre 50 y 60; de obtener a lo más un alumno preparado; a lo más dos alumnos preparados. ¿Qué observas?
c) Calcule la probabilidad de obtener un total superior a 105 alumnos preparados al considerar 6 cursos de 20 alumnos.

Actividad 9. Estudios médicos actuales indican que 30% de la población padecerá de gripe cada invierno. Se selecciona al azar un grupo de 12 personas. ¿Cuál es la probabilidad que al menos cinco padecerá de tal enfermedad este invierno?
a) 0,8821 b) 0,1178 c) 0,7236 d) 0,2311 e) 0,1584 f) Ninguna de las anteriores

Actividad 10. Proponga situaciones en el ámbito escolar que pueden ser modeladas mediante la distribución binomial.

Actividad 11. Identifique las propiedades comunes de los siguientes experimentos.
a) Lanzar una moneda 50 veces y llevar un registro de las caras que se obtienen.
b) Si usted fuera un inspector en una línea de producción de una fábrica de televisores, estaría preocupado por identificar el número de televisores defectuosos.
c) Lanzar tres monedas. Calcular la probabilidad de obtener al menos dos caras.
d) Supongamos que el 10% de lámparas de una fábrica es defectuosa. Las lámparas se venden en cajas de 4 unidades. Simular el experimento consistente en abrir una caja y contar el número de defectos.
e) Un comerciante garantiza que ninguno de sus paquetes con 12 huevos contiene más de uno en mal estado. Si un paquete contiene más de un huevo en mal estado, él sustituirá toda la docena y permitirá que el cliente se lleve los huevos originales. Si la probabilidad de que un huevo individual esté en mal estado es de 0.05, ¿cuál es la probabilidad de que el comerciante tenga que reemplazar un paquete de huevos?

Actividad 12. Con apoyo de Excel, simular la aplicación del cuestionario de selección múltiple a 20 alumnos (Ejemplo 4), de manera independiente.

a) Elabore una distribución de frecuencias de la variable 'número de respuestas correctas en cada cuestionario' y grafique.
b) Estimar el número de respuestas correctas por alumno.
c) La próxima semana los 20 alumnos deben desarrollar otro cuestionario compuesto de cinco preguntas de verdadero y falso. Estime el número de respuestas correctas por alumno y compare.
d) Compare los resultados de cálculo de probabilidades obtenidos mediante la planilla Excel y el *applet* del modelo binomial.

Actividad 13. El entrenador de Voleibol de la UCSC tiene 10 jugadores. Dos de ellos son seleccionados nacionales. Recientemente el equipo se adjudicó el campeonato nacional universitario y el entrenador decide seleccionar los nombres de seis jugadores para dar una exhibición en colegios de educación media en Concepción. ¿Cuál es la probabilidad que participen los dos seleccionados de la exhibición deportiva?

a) 0,666
b) 0,245
c) 0,754
d) 0,901
e) 0,098
f) Ninguna de las anteriores

Actividad 14. *Representación computacional.* Estudiar la convergencia gráfica de la distribución de probabilidad binomial a la distribución normal (Teorema de Laplace De Moivre) para distintos valores de sus parámetros n y p.

Actividad 15. *Experimento con dados*. Suponga que gana si obtiene un número impar al lanzar un dado normal. Usted gana si obtiene más del 70% de números impares del total de lanzamientos. Considere los ensayos para n = 10, 30, 60 y 100.

a) Calcular la probabilidad de ganar en los cuatro casos. Para el número de lanzamientos grandes utilice el *applet* de la distribución de probabilidad binomial.
b) Mediante la generación de números aleatorios en Excel y la condición de p = P(E) de variables aleatorias Bernoulli, determine las posibilidades de ganar en los casos anteriores, a través de la probabilidad como frecuencia relativa.

Actividad 16. El Director de un colegio tiene una confianza de 80% que los 100 alumnos que rendirán la PSU serán clasificados como exitosos. Asumimos que el puntaje obtenido de cada alumno es independiente de otro alumno. El Director obtendrá una carita feliz cuando al menos 80 alumnos de su colegio obtengan dicha clasificación.

a) ¿Será premiado el Director del Colegio?
b) ¿Cómo desarrollarías esta actividad con los conocimientos previos del Taller?
c) ¿Qué aspectos destacarías en este problema?