

¿EXISTE LA NECESIDAD DE EVALUACIÓN DE SESGOS PROBABILÍSTICOS EN FUTUROS PROFESORES?

José Miguel Contreras
Universidad de Granada (España)
jmcontreras@ugr.es

La existencia de sesgos probabilísticos es un problema ampliamente extendido en la sociedad, llegado a considerarse hasta cotidiano. Estos razonamientos incorrectos deben ser conocidos por los formadores para, a parte de superarlos ellos mismos, evaluarlos en sus alumnos. El problema se agrava cuando estos errores llegan al punto de influir en el futuro académico del estudiante, ya no solo porque el alumno cometa estos sesgos, sino porque sea la institución que pretende evaluar al estudiante la que los comete. Este trabajo evalúa a estudiantes ante un problema de una prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años. El estudio compara los resultados de la muestra principal (alumnos de 4º y 5º de la licenciatura de matemáticas) con dos muestras de alumnos de primer año, que no cursaron aún docencia en probabilidad, y que poseen unos conocimientos probabilísticos adquiridos en su etapa preuniversitaria.

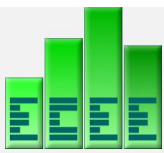
PALABRAS CLAVE

Probabilidad, probabilidad condicional, sesgos, evaluación.

INTRODUCCIÓN

La probabilidad, y la probabilidad condicional en particular, es una de las concepciones que más puede afectar la toma de decisiones en la vida cotidiana y por desgracia es común encontrar una variedad de errores de razonamiento, que pueden llevar a decisiones incorrectas. El problema es necesario que se trate desde la base y por tanto debe de ser el profesor que imparte este tema el que debiera ser capaz de reconocer estos sesgos en sus estudiantes, ayudarles a superarlos y prepararlos para la correcta toma de decisiones en su vida personal y profesional. Pero, como indica Stohl (2005), es posible que los mismos profesores tengan estos razonamientos erróneos, pudiendo repercutir en los conocimientos que adquieran sus futuros estudiantes. Esto es debido a que es todavía poco frecuente que los futuros profesores de matemáticas tengan una preparación específica suficiente para llevar a cabo su enseñanza.

La probabilidad es, en la actualidad, una parte importante de las orientaciones curriculares para la educación primaria, secundaria y bachillerato. Sin embargo, aunque muchos futuros profesores de educación secundaria y bachillerato tienen una licenciatura en matemáticas, la mayoría de ellos no recibe formación específica sobre el conocimiento didáctico relacionado con la enseñanza de probabilidad. La situación



es aún más crítica para los futuros profesores de educación primaria, puesto que algunos ni siquiera han seguido un curso completo de probabilidad durante su formación como maestros. Esto puede provocar en algunos casos concepciones incorrectas sobre las ideas de azar y probabilidad (Azcárate, 1995) y en otras lleva a los profesores, una vez incorporados a su labor docente, a tratar de reducir o incluso omitir la enseñanza de la probabilidad (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006). Es urgente ofrecer una mejor educación previa a estos profesores, si queremos que la enseñanza de la probabilidad en las escuelas mejore (Franklin y Mewborn, 2006), pero ello requiere un trabajo previo de evaluación de sus necesidades formativas.

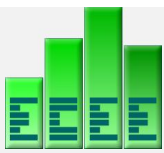
En este trabajo analizamos las dificultades ante un problema, que fue incluido en una prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años en una muestra de futuros profesores españoles de educación secundaria, otra de futuros profesores de educación primaria y una tercera de alumnos del grado de biología. Se comparan los resultados de la muestra principal (alumnos de 4º y 5º y agregados de la licenciatura de matemáticas) con dos muestras de alumnos de primer año, que no cursaron aún docencia en probabilidad, y que poseen unos conocimientos probabilísticos adquiridos en su etapa de secundaria y bachillerato.

INVESTIGACIONES PREVIAS

Los profesores de matemáticas de educación secundaria y bachillerato son mayoritariamente licenciados en matemáticas y estudiaron uno o más cursos de estadística en su etapa universitaria. Pero, en general, la formación que tuvieron fue teórica y no tienen experiencia con estudios de estadística aplicada, muestreo, o diseño de experimentos (Franklin y Mewborn, 2006). Generalmente, en pocos casos los profesores tienen formación específica en didáctica de la estadística, pues, aunque en España todos realizaron el Curso de aptitud pedagógica o el Master de formación del profesorado de educación secundaria, donde realizaron cursos de didáctica de la matemática, los principios generales que son válidos para otras áreas de las matemáticas no siempre pueden ser aplicados a la estadística (Batanero, Godino y Roa, 2004). La situación de los maestros de primaria respecto a la probabilidad, y no digamos ya la probabilidad condicionada, es preocupante, debido generalmente a la poca formación recibida en el campo de la probabilidad, pues hasta hace poco ni siquiera se incluía en el currículo de educación primaria.

Algunos estudios hacen referencia a la desigualdad de predilección por la enseñanza de conocimientos probabilísticos por parte de los dos grupos de profesores. Por ejemplo Watson (2001) y Pereira-Mendoza (2002), que evaluaron profesores de primaria y secundaria, indican que los profesores de secundaria tienen un nivel de seguridad significativamente más alto que los de primaria a la hora de enseñar conceptos básicos de probabilidad.

La mayoría de las investigaciones en este campo están relacionadas con la comprensión conceptual. Por ejemplo la de Maury (1986), en el mismo sentido que la de Totohasina (1992), que analizó la comprensión intuitiva de la probabilidad condicional en contexto de extracción de bolas en urnas y otro de ruletas, indica que



parte de los errores en la resolución de problemas de probabilidad condicional son debidos a dificultades de identificación y restricción del espacio muestral.

Respecto a los sesgos tratados en la investigación podemos encontrar diferentes investigaciones, como la de Díaz (2007) con alumnos de psicología o las de Contreras (2011) y Díaz, Contreras, Batanero, y Roa (2012) con alumnos matemáticas y futuros profesores de secundaria, que hacen hincapié en evaluar dificultades relacionadas con la probabilidad, principalmente respecto a la probabilidad condicionada, mediante diferentes ítems que identifican las falacias más comunes. Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) y Ojeda (1995) coinciden en que muchas de las dificultades respecto a la comprensión de la probabilidad condicional pueden deberse al lenguaje coloquial, por ejemplo en los enunciados que usan la conjunción 'y' que pueden llevar a confundir la probabilidad condicional con la conjunta, y resultar en la interpretación de la intersección como condicionamiento.

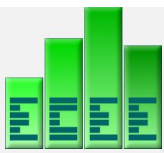
Algunas de las dificultades de comprensión de la probabilidad condicional son debidas en ocasiones a la falta de percepción de la independencia, por ejemplo creer que dos sucesos son independientes si y sólo si son excluyentes. Este error, según Kelly y Zwiers (1986), se debe a que en el lenguaje ordinario 'independiente' puede significar separado. Creencia errónea ya que dos sucesos excluyentes son justamente dependientes pues uno no puede ocurrir a la vez que el otro.

Otros sesgos son propios de la probabilidad condicional, por ejemplo la denominada 'falacia de las tasas base' (Tversky y Kahneman, 1982), consistente en ignorar la probabilidad *a priori* de un suceso, en problemas que involucran la probabilidad inversa. Es decir, consiste en calcular una probabilidad condicional como si fuese una probabilidad simple, ignorando datos del problema; este tipo de razonamiento también ha sido descrito por Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (2001), Díaz y de la Fuente (2007) y Contreras (2011). O la 'falacia de la condicional transpuesta', definida como la confusión de las probabilidades $P(A/B)$ y $P(B/A)$ (Falk, 1986). Pollatsek, Well, Konold y Hardiman. (1987) y Ojeda (1995), resaltan las dificultades de los estudiantes en el razonamiento de la probabilidad condicional a la hora de interpretar los sucesos condicionantes. Batanero, Estepa, Godino y Green (1996) encontraron esta misma confusión en la interpretación de tablas de contingencia donde se confunden las dos frecuencias condicionales relacionadas con una misma celda de datos. Otro sesgo es la 'falacia del eje de tiempo', consistente en creer que un suceso no puede condicionar otro que ocurra anteriormente. Gras y Totohasina (1995) indican que los estudiantes asocian el condicionamiento con el orden temporal de los sucesos y no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad. O la 'falacia de la conjunción', creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que cada uno de ellos por separado (Tversky y Kahneman, 1982).

EVALUACIÓN DE LA INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS PROBABILÍSTICOS

Muestra y contexto educativo

La recogida de datos se realizó durante el curso 2012-2013. La muestra completa, compuesta de estudiantes de la Universidad de Granada, está formada por un total de 270 alumnos, repartidos en tres submuestras de 90 alumnos, de la Licenciatura de



matemáticas (alumnos de 4º y 5º curso), grado de biología (alumnos de 1º curso) y grado de maestro en educación primaria (alumnos de 1º curso) de la Universidad de Granada. El porqué de estas muestras es debido al interés por evaluar si los futuros profesores de matemáticas, ya que el cuestionario se pasó en una jornada informativa del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas dentro de un proyecto docente sobre salidas profesionales para alumnos de la licenciatura de matemáticas, saben interpretar enunciados probabilísticos; también interesa comparar posteriormente esta muestra con dos muestras de alumnos de primer año de dos carreras diferentes, para discutir si la interpretación correcta o incorrecta del enunciado depende del tipo de estudio realizado, partiendo de la mejor formación en el campo de los futuros profesores de matemáticas, o del tipo de bachillerato realizado en la etapa preuniversitaria.

Por tanto es conveniente conocer los conocimientos previos de estos estudiantes y, dado que no fue posible evaluarlos con antelación, para ello nos basaremos en las asignaturas relacionadas con la probabilidad que cada uno de ellos ha recibido con antelación en su etapa educativa.

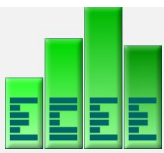
Alumnos de la Licenciatura de matemáticas

La muestra está formada por alumnos de 4º y 5º de la Licenciatura de matemáticas. Por la idiosincrasia de esta muestra, los futuros profesores han de poseer las competencias exigibles para la realización de tal actividad, ya que todos los participantes han realizado asignaturas en la que se trata explícitamente la probabilidad y se hace hincapié en la probabilidad condicional. Algunas de estas asignaturas son de carácter troncal, como la asignatura de segundo curso 'Probabilidades y estadística' o la de tercer curso 'Ampliación de estadística', las dos de carácter anual. Otras asignaturas, de carácter optativo, que incluyen la enseñanza de la probabilidad condicional, son las asignaturas de 'Seminario de Historia de la matemática' y 'Teoría de la probabilidad' de segundo ciclo, con seis créditos cada una. Además de estas materias, el alumno tiene la opción de elegir algunas otras asignaturas en las que, aunque no se imparte la probabilidad condicional en el temario, sí aparece implícita en los contenidos. Estas asignaturas son 'Análisis de datos' de primer ciclo y 'Análisis multivariante', 'Estadística computacional', 'Inferencia estadística', 'Modelos de la investigación operativa' y 'Procesos estocásticos', incluidas en el segundo ciclo.

Alumnos del Grado de biología

La muestra de 90 alumnos de biología está formada por alumnos de dos grupos de la asignatura de bioestadística que se oferta en el primer curso de la titulación. En la fecha de realización de la prueba, este grupo de alumnos aún no había cursado ninguna materia relacionada con el tema en cuestión por lo que, *a priori*, los únicos conocimientos probabilísticos son los obtenidos en su etapa pre-universitaria.

Dentro de los criterios de acceso a la titulación, descritos por el informe Verifica de la ANECA (2010a) para la titulación del Grado de biología de la Universidad de Granada, el perfil del estudiante de la titulación corresponde a los estudiantes que hayan escogido en la enseñanza de bachillerato la opción científico-tecnológica. En esta



opción, los alumnos han de realizar la asignatura 'Matemáticas I' (obligatoria). En ella se especifica que los contenidos relacionados con las propiedades generales de los números y su relación con las operaciones, deben ser trabajados con herramientas para el estudio de la estadística y la probabilidad, culminando así todos los campos introducidos en la educación secundaria obligatoria (MEC, 2007). En el apartado de contenidos número 4, 'Estadística y Probabilidad', se hace referencia a que el alumno debe realizar un estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y *a posteriori*, y conocer las herramientas adecuadas para asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos.

Alumnos del Grado de maestro en educación primaria

Al igual que la muestra de biología, la muestra de 90 alumnos de primaria está formada por alumnos de dos grupos de la asignatura de 'Bases matemáticas para la educación primaria' que se oferta en el primer curso de la titulación. Como ocurre con los alumnos de biología, estos aún no habían cursado el tema en cuestión por lo que, *a priori*, los únicos conocimientos probabilísticos son los obtenidos en su etapa pre-universitaria.

En los criterios de acceso a la titulación, descritos por el informe Verifica de la ANECA (2010b) para la titulación de Grado de maestro en educación primaria de la Universidad de Granada, el perfil del estudiante que realiza estos estudios puede estar asociado a cualquier tipo de bachillerato ya sea arte (en el que no se estudia la probabilidad), ciencias y tecnología (ya descrita anteriormente) y humanidades y ciencias sociales, siendo ésta última la mayoritaria entre los estudiantes evaluados (1,1%, 9% y 88,9% respectivamente). Dentro de esta opción de bachillerato los alumnos pueden realizar las asignaturas 'Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I y II', la primera de ella es optativa ya que los alumnos tienen que elegir dos materias entre 'Historia del mundo contemporáneo', 'Latín I' y 'Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I'. En la asignatura 'Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I' se especifica que se ha de evaluar si los alumnos son capaces de determinar la probabilidad de un suceso, analizar una situación y decidir la opción más adecuada. En el apartado número 3, 'Probabilidad y estadística', se describe como contenido de la asignatura la asignación de probabilidades a sucesos. En el mismo apartado de la asignatura 'Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II', aparecen como contenidos la profundización en los conceptos de probabilidades *a priori* y *a posteriori*, probabilidad compuesta, condicionada y total, Teorema de Bayes. Como criterio de evaluación se especifica que el alumno ha de saber asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, utilizando diagramas de árbol o tablas de contingencia.

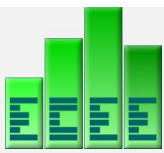
Análisis del ítem

El problema utilizado para el estudio, es un ejercicio propuesto para la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años, curso 2009/2010, del distrito andaluz.

EJERCICIO 6

- a) (5 puntos) En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?

Figura 1. Enunciado original del ejercicio



Este típico problema de evaluación, que es común encontrarlo en las pruebas de acceso, pretende obtener una solución para una probabilidad condicionada a partir de los datos proporcionados: una probabilidad simple $P(\text{'ser mujer'})$ y una conjunta $P(\text{'ser mujer y mayor de edad'})$. La pretensión en este tipo de problemas es que el evaluado interprete que para su resolución es necesaria la utilización del Teorema de Bayes. Por tanto una resolución matemática del mismo sería la siguiente:

$$P(\text{"ser mujer"}|\text{"ser mayor de edad"}) = \frac{P(\text{"ser mujer"} \cap \text{"ser mayor de edad"})}{P(\text{"ser mayor de edad"})}$$

Conocido que $P(\text{"ser mujer"} \cap \text{"ser mayor de edad"}) = 0,4$, el problema radica en calcular $P(\text{"ser mayor de edad"})$. Teniendo en cuenta que

$$P(\text{"mujer"}) = 0,55; \quad P(\text{"hombre"}) = 1 - P(\text{"mujer"}) = 0,45 \text{ y}$$
$$P(\text{"ser m. e."}|\text{"mujer"}) = \frac{P(\text{"ser m. e."} \cap \text{"mujer"})}{P(\text{"mujer"})} = \frac{0,4}{0,55} = 0,73.$$

Podemos utilizar el Teorema de la probabilidad total para descomponer $P(\text{"ser m. e."})$ como:

$$P(\text{"ser m. e."}) = P(\text{"mujer"})P(\text{"ser m. e."}|\text{"mujer"}) + P(\text{"hombre"})P(\text{"ser m. e."}|\text{"hombre"}).$$

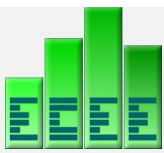
Por tanto:

$$P(\text{"ser m. e."}) = 0,55 \cdot 0,73 + P(\text{"ser m. e."} \cap \text{"hombre"}).$$

Como en este caso desconocemos $P(\text{"ser mayor de edad"} \cap \text{"hombre"})$ es, por tanto, imposible calcular la $P(\text{"ser mujer"}|\text{"ser mayor de edad"})$. Otra forma de verlo es que no conocemos la $P(\text{"ser mayor de edad"})$, llegando a la misma conclusión. Es decir, nos encontramos con un enunciado de imposible resolución, que engloba muchos de los conocimientos básicos que un alumno de estas titulaciones, y no digamos un profesor o futuro profesor, necesitaría conocer.

Resultados de la evaluación

En este apartado se muestran y se clasifican las distintas respuestas de los estudiantes ante la cuestión planteada. En la Tabla 1 se resume el número de estudiantes que responden de manera correcta, parcialmente correcta (es decir, identifican la falta de elementos para la solución correcta pero no llegan a hacer una interpretación) y de forma incorrecta, de forma global o segregada por tipo de muestra. Como se observa el porcentaje de alumnos que es capaz de encontrar que el problema es irresoluble apenas llega al 9,6% (15,2% si tenemos en cuenta las respuestas parcialmente correctas). Los resultados muestran una gran dificultad para el análisis del problema, sobre todo en los alumnos de biología y primaria que han debido de superar, apenas unos meses antes, una prueba de acceso similar a la que se evalúa. Respecto a la muestra principal de futuros profesores de matemáticas encontramos que, aunque los resultados son mejores que en las otras muestras debido a sus conocimientos previos y mayor formación en el tema, muestran una dificultad preocupante de razonamiento probabilístico, ya que un 65,6% de ellos no es capaz de interpretar la irresolubilidad del enunciado.



	Matemáticas	Biología	Primaria	Totales
Correcta	19 (21,1%)	6 (6,7%)	1 (1,1%)	26 (9,6%)
Incorrecta	59 (65,6%)	82 (91,1%)	88 (97,8%)	229 (84,8%)
Parcialmente correcta	12 (13,3%)	2 (2,2%)	1 (1,1%)	15 (5,6%)
Nº de estudiantes	90	90	90	270

Tabla 1. Tipos de respuestas al problema

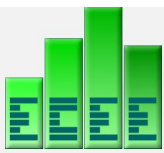
La importancia radica en conocer el porqué de tan alto porcentaje de respuestas incorrectas. En la Tabla 2 se observan para la muestra, algunas características consideradas importantes para interpretar el enunciado, como: identifica probabilidades iniciales, identifica que hay que calcular una probabilidad condicional, identifica la falta de $P(\text{"ser mayor de edad"})$ o de $P(\text{"ser mujer"} | \text{"ser mayor de edad"})$, utiliza el teorema de la probabilidad total o calcula el resultado.

Los resultados muestran dificultades iniciales, como el alto porcentaje de alumnos, un 50%, que ni siquiera es capaz de identificar las probabilidades del enunciado. El problema principal, en la mayoría de los casos, radica en la interpretación a partir del enunciado de probabilidad conjunta. La interpretación del término 'y', lo que concuerda con las investigaciones de Einhorn y Hogarth (1986), Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) u Ojeda (1995), puede llevar a confusión, ya que en el lenguaje coloquial es posible interpretar la intersección como condicionamiento.

	Frecuencia (%)
El alumno identifica las probabilidades iniciales	135 (50%)
El alumno identifica que hay que calcular una probabilidad condicional	109 (40,4%)
El alumno identifica la falta de la probabilidad $P(\text{"ser mayor de edad"})$	30 (11,1 %)
El alumno identifica la falta de la probabilidad $P(\text{"ser mujer"} \text{"ser mayor de edad"})$,	9 (3,3%)
El alumno utiliza el teorema de la probabilidad total	32 (11,9%)
El alumno utiliza el teorema de Bayes	72 (26,7%)
El alumno calcula el resultado (aunque no dé una respuesta correcta)	194 (72,1%)

Tabla 2. Características globales de la muestra total

Los porcentajes muestran unas limitaciones grandes de los alumnos a la hora de interpretar el problema. Es destacable el 59,6% que no identifica que el problema pide calcular una probabilidad condicional para resolverlo. En muchos de estos casos, como vemos en la Tabla 3, esto es debido a la confusión de la probabilidad de la condicional con la simple o con la conjunta. Respecto a los dos teoremas necesarios para la resolución (Teorema de la probabilidad total y de Bayes) se observa en la Tabla 2, que apenas son utilizados por el 11,9% y el 26,7% respectivamente, lo que nos lleva a plantear que o no saben de la existencia de estos teoremas o simplemente no saben utilizarlos. Es destacable que solo un 14,4% identifica la falta de las probabilidades necesarias para la resolución del problema y que un 71,9% la calcula y da una solución, aunque no tenga respuesta posible.

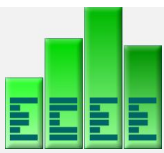


Por tanto, y dados estos resultados, se quiso comprobar cuáles eran los errores cometidos y si se identificaban con algunos de los sesgos más comunes de la literatura relacionada con el tema. Los resultados, que se muestran en la Tabla 3, hacen referencia a algunos de los sesgos previamente tratados y se destacan: si el estudiante comete la falacia de la condicional traspuesta, si calcula la probabilidad condicional traspuesta, si confunde la probabilidad conjunta con la simple o con la condicional, si confunde la probabilidad condicional con la simple, si identifica los sucesos como dependientes o independientes y si confunde la fórmula del Teorema de Bayes.

Como se muestra en la Tabla 3, el sesgo de confundir la probabilidad conjunta con la condicional destaca con un 49,3%. Y debido principalmente a la ocurrencia de este sesgo, uno de cada dos estudiantes no identifica correctamente el enunciado, como se observó en la Tabla 2. La ocurrencia de tan alto porcentaje puede deberse a la incorrecta interpretación de los enunciados (Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987; Einhorn y Hogarth, 1986), o a la ambigüedad del lenguaje coloquial que afecta a la interpretación (Falk, 1986), y no tanto a una relación con la falacia de la conjunción, como indican las investigaciones de Tversky y Kahneman (1982) y de Díaz (2007). También se destaca, aunque en menor porcentaje, la confusión entre la probabilidad conjunta y la condicional con una simple, con un 16,3% en ambos casos. Respecto a este último caso, Totohasina (1992) expone que el error radica principalmente en la estrategia generalizada de cambio de referencia, consistente en restringir el espacio muestral para tratar el problema como si se tratase de un problema de probabilidad simple. Una causa de estos sesgos (Zazkis y Leikin, 2008; Batanero, Contreras, Díaz y Cañadas, 2013) es la dificultad por parte de los estudiantes de definir, y por tanto interpretar, correctamente los distintos tipos de probabilidades. Contreras (2011) estima que esos sesgos están relacionados principalmente con errores en la interpretación de la independencia y dependencia entre sucesos, lo que también ocurre en la resolución de este problema, donde un 15,2% identifica automáticamente los sucesos como independientes que, como indica Kelly y Zwiers (1986), puede ser debido a la confusión entre independencia y exclusividad. Otro sesgo es el de confusión en las formulas, principalmente el Teorema de Bayes o el Teorema de la probabilidad total, donde un 26,3% tiene problemas. Díaz y de la Fuente (2007) hacen hincapié en este sesgo, y destacan que se debe a un mal razonamiento proporcional, causado por dificultades en operar con fracciones o hallar el inverso de una fracción.

	Frecuencia (%)
El alumno identifica al empezar a resolver que hay que calcular la probabilidad condicional traspuesta	42 (15,6%)
El alumno calcula la probabilidad condicional traspuesta	70 (25,9 %)
Confunde la probabilidad conjunta con una simple	44 (16,3%)
Confunde la probabilidad conjunta con una condicional	133 (49,3 %)
Confunde la probabilidad condicional con una simple	44 (16,3%)
Identifica los sucesos como independientes	41 (15,2 %)
Confunde la fórmulas	71 (26,3%)

Tabla 3. Sesgos probabilísticos



Los resultados muestran resultados similares a los obtenidos por Díaz (2007) con estudiantes de psicología y a los de Contreras (2011) y Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012), con futuros profesores de matemáticas, lo que indica que estos sesgos son un problema intrínseco del razonamiento probabilístico y en especial del condicional.

El interés radica en ver el comportamiento de cada una de las muestras. En este caso, como indica la Tabla 4, la mayor preparación formal de los futuros profesores de matemáticas no fue suficiente para no cometer razonamientos erróneos, aunque se observa un mayor desempeño en éstos respecto al resto de estudiantes.

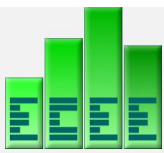
Los futuros profesores de matemáticas identifican correctamente las probabilidades iniciales dos de cada tres veces; en este aspecto destacan los resultados similares de los estudiantes de biología y el preocupante porcentaje, apenas un 20%, de futuros profesores de primaria, que identifican correctamente las probabilidades del enunciado.

Uno de los intereses principales es conocer si los alumnos son capaces de identificar que el enunciado pide calcular una probabilidad condicional: el 71,1% de los futuros profesores de matemáticas lo hace. No ocurre lo mismo con los alumnos de primero de biología, con apenas un 35,6%, y no digamos los futuros profesores de primaria, donde solo lo percibe un 14,4%. En este aspecto todos los alumnos de primaria y biología que identifican que se ha de calcular una probabilidad condicional, también identifican las probabilidades iniciales, no ocurriendo lo mismo con los futuros profesores de matemáticas.

En el caso de la falacia de las tasas base referente al hecho de ignorar la probabilidad *a priori* de un suceso en problemas que involucran la probabilidad inversa, un 85,6% de los futuros profesores de primaria intentan calcular una probabilidad simple, por lo que incurrir en este sesgo. Ocurre lo mismo en el 28,9% de los futuros profesores de matemáticas y en el 64,4% de los alumnos de biología. Como indica Contreras (2011), por lo general, este sesgo ocurre debido a una percepción incorrecta de la dependencia entre los sucesos implicados.

	Matemáticas	Biología	Primaria
El alumno identifica las probabilidades iniciales	60 (66,7%)	57 (63,3%)	18 (20,0%)
El alumno identifica que hay que calcular una probabilidad condicional	64 (71,1%)	32 (35,6%)	13 (14,4%)
El alumno identifica la falta de la probabilidad $P(\text{"ser mayor de edad"})$	20 (22,2%)	8 (8,9%)	2 (2,2%)
El alumno identifica la falta de la probabilidad $P(\text{"ser mujer"} \text{"ser mayor de edad"})$,	9 (3,3%)	-	-
El alumno utiliza el teorema de la probabilidad total	28 (31,1%)	1 (1,1%)	3 (3,3%)
El alumno utiliza el teorema de Bayes	62 (68,9%)	9 (10%)	3 (3,3%)
El alumno calcula el resultado (aunque no de una respuesta correcta)	41 (46,1%)	75 (83,3%)	78 (86,7%)

Tabla 4. Características globales por muestra



Respecto a la falta de alguna de las probabilidades necesarias para resolver el problema, nos encontramos, como es normal dada la preparación de los futuros profesores de matemáticas, con un porcentaje mayor de estos alumnos que identifican una u otra probabilidad respecto a las otras dos muestras. Hay que destacar que aunque el 25,5% de estos identifica la falta de las probabilidades, solo un 21,1% es capaz de interpretar correctamente el enunciado, como se observa en la Tabla 1. Es decir solo un 82,7% de los que identifican la falta de las probabilidades es capaz de concluir la irresolubilidad del problema. Ocurre lo mismo en las otras muestras en las que apenas un 8,9% de los alumnos de biología y un 2,2% de los de primaria interpretan la falta de alguna de las probabilidades. En estos casos el 75% y el 50%, respectivamente, de los que identifican que no se pueden calcular las probabilidades necesarias, son capaces de concluir que no se puede dar una solución correcta.

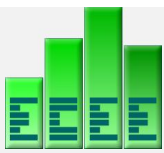
En referencia al uso de los dos teoremas necesarios, Teorema de la probabilidad total y de Bayes, observamos que el 68,9% de los futuros profesores de matemáticas utilizan el Teorema de Bayes, e implícitamente el Teorema de la probabilidad total, y que el 31,1% se decanta para resolverlo aplicando el Teorema de la probabilidad total. Como ocurre en el resto de aspectos, los alumnos de las otras muestras apenas tienen en cuenta el uso de los dos teoremas. Llama la atención el alto porcentaje en las tres muestras, algo menor en el caso de matemáticas pero que alcanza el 41,6%, que resuelve numéricamente de forma incorrecta el problema. Esto puede ser debido a la necesidad de dar un resultado al planteamiento, ya que tradicionalmente no se plantean problemas irresolubles en la enseñanza de las matemáticas, y de la probabilidad en particular.

Al igual que ocurría con la muestra completa, la falacia de la condicional traspuesta se repite en aquellas muestras, matemáticas y biología, donde mayoritariamente se interpretaba que había que calcular una probabilidad condicional, Tabla 5.

	Matemáticas	Biología	Primaria
El alumno identifica al empezar a resolver que hay que calcular la probabilidad condicional traspuesta	14 (15,6%)	20 (22,2%)	8 (8,9%)
El alumno calcula la probabilidad condicional traspuesta	29 (32,2%)	27 (30,0%)	14 (15,6%)
Confunde la probabilidad conjunta con una simple	5 (5,6%)	20 (22,2%)	19 (21,1%)
Confunde la probabilidad conjunta con una condicional	21 (23,3%)	40 (44,4%)	72 (80%)
Confunde la probabilidad condicional con una simple	8 (8,9%)	17 (18,9%)	19 (21,1%)
Identifica los sucesos como independientes	4 (4,4%)	30 (33,3%)	7 (7,8%)
Confunde la fórmula	25 (27,8%)	30 (33,3%)	16 (17,8%)

Tabla 5. Sesgos probabilísticos por muestra

Las confusiones de probabilidades predominan en las tres muestras, destacando la confusión entre probabilidad conjunta y condicional. En este caso destacan los futuros



profesores de primaria con un 80%, aunque uno de cada cuatro futuros profesores de matemáticas tiene este sesgo. Las otras dos confusiones se dan en mayor cuantía en los alumnos de biología y primaria, siempre alrededor del 20%.

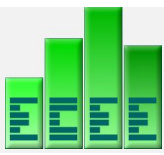
En el caso de identificar los sucesos como independientes, destacan los alumnos de biología en los que uno de cada tres estudiantes comete este error. En el caso de las otras dos muestras el porcentaje es pequeño, debido, en el caso de los futuros profesores de primaria, a que pocos llegaron a utilizar elementos probabilísticos donde estuviera en juego la independencia.

También destaca el caso de aquellos que confunden fórmulas, siendo preocupante en el caso de los futuros profesores de matemáticas con un 27,8% y en el de los estudiantes de biología, con uno de cada tres. En el caso de los futuros profesores de primaria el porcentaje es menor ya que en la mayoría de los casos solo aplicaban la regla de Laplace.

CONCLUSIONES

Los resultados de esta pequeña evaluación indican que la existencia de estos sesgos probabilísticos está implícita en la mayoría de los estudiantes, sea cual sea su formación. En este caso, y dado las características del problema en cuestión, los sesgos se centran en la identificación de las probabilidades, la confusión entre ellas, la falacia de la condicional transpuesta y errores en las fórmulas utilizadas. Pero como indican otros estudios realizados por el grupo de Investigación en Educación Estadística, tales como los de Díaz (2007), Contreras (2011), Batanero, Contreras, y Díaz (2011), Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012), Contreras, Batanero, Díaz y Arteaga (2012), Batanero, Contreras y Díaz (2012) o Batanero, Contreras, Díaz, C. y Cañadas (2013), más otros ya descritos anteriormente, existen numerosos sesgos que han de ser estudiados por parte de los investigadores en el área y principalmente por los profesores encargados de la enseñanza del tema. Este tema es de gran importancia, ya que como indica Stohl (2005) es posible que los propios profesores no sean conscientes de estos sesgos y por tanto de la causa de las dificultades de los alumnos. Por tanto, si los profesores no son capaces de identificar estos razonamientos erróneos, puede ser debido a que ellos mismos los cometan y por tanto podrían transmitirlos a sus alumnos.

Los resultados de las diferentes muestras indican, que la formación influye, pero que en muchos casos los sesgos perviven en el razonamiento probabilístico, ya que como hemos visto, los porcentajes de futuros profesores de matemáticas en cada uno de los sesgos son preocupantes, principalmente porque en ese momento estaban a punto de finalizar su formación. Es importante destacar que este tipo de ejercicio es frecuente, no su carácter irresoluble, en las pruebas de acceso a la universidad en España, y sobre todo en el distrito andaluz donde se llevó a cabo. Por tanto, todos los estudiantes de la muestra, dado el carácter de los requisitos de acceso a sus titulaciones descritos anteriormente, han debido superar en su etapa preuniversitaria, una prueba de acceso con problemas parecidos y contenidos probabilísticos similares a los aquí evaluados.



El carácter irresoluble del ejercicio en sí, puede ser debido a un deficiente razonamiento probabilístico por parte de los coordinadores encargados del diseño de la prueba de evaluación, dado que en un análisis reciente de los diferentes problemas probabilísticos en pruebas de evaluación, Carretero (2014), todos los problemas relacionados con la probabilidad condicional son resolubles; más aún, en las resoluciones de la prueba de evaluación proporcionadas por la Consejería de educación, cultura y deporte de la Junta de Andalucía, aparece una frase nueva que da sentido a la resolución del problema. Todo ello nos lleva a replantear la importancia de este tipo de sesgos, ya que, como es este caso, puede afectar la nota que alcance el alumno para acceder a la universidad.

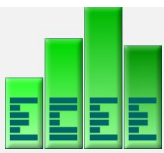
Para finalizar, sería recomendable fomentar la realización de situaciones didácticas para profesores, que les permitan concienciarse de sus propios sesgos y les ayuden a superarlos. Y recordar la necesidad de seguir investigando sobre los componentes esenciales en la preparación de los profesores y los métodos adecuados para enseñar en cualquier campo, pero en especial en la probabilidad, ya que aunque en la educación matemática se ha realizado un esfuerzo importante centrado en la investigación en el desarrollo profesional del docente (Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Wood, 2008), éste no se ha reflejado en la educación probabilística. Todo ello contribuirá a mejorar la educación estadística a todos los niveles.

Agradecimientos

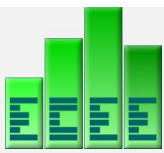
Proyecto EDU2013-41141-P (Ministerio de Economía y Competitividad) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

- ANECA (2010a). Informe Verifica para la titulación de Grado de Biología. Granada: Universidad de Granada. <http://grados.ugr.es/biologia/pages/infoacademica/archivos/verificabiologia/>.
- ANECA (2010b). Informe Verifica para la titulación de Grado de maestro en educación primaria. Granada: Universidad de Granada. <http://grados.ugr.es/primaria/>.
- Azcárate, P. (1995). El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Tesis de doctorado. España: Universidad de Cádiz.
- Batanero, C., Contreras, J.M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 12 (2), 1-13.
- Batanero, C., Contreras, J.M. y Díaz, C. (2011). Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Revista del Centro de Investigaciones Educativas, PARADIGMA*, 32 (2), 51-66.
- Batanero, C., Contreras, J.M., Díaz, C. y Cañadas, G. (2013). Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: un estudio con futuros profesores. *Revemat*, 8 (1), 75-91.
- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D.R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 151-169.
- Batanero, C., Godino, J. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12 (1). <http://www.amstat.org/publications/jse/>.



- Carretero, M. (2014). Análisis de problemas de probabilidad en las pruebas de acceso de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales de Andalucía. Tesis de maestría. Granada: Universidad de Granada.
- Consejería de educación, cultura y deporte de la Junta de Andalucía (2014). http://www.juntadeandalucia.es/innovacioncienciayempresa/sguitg_b_examenes_anteriores.php?tipo_asig=M25.
- Contreras, J.M. (2011). Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional. Tesis de doctorado. Granada: Universidad de Granada.
- Contreras, J.M., Batanero, C., Díaz, C. y Arteaga, P. (2012). Evaluación de la Falacia del Eje Temporal en futuros profesores de educación secundaria. *Acta Scientiae*, 14 (3), 346-362.
- Díaz, C. (2007). Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología. Tesis de doctorado. Granada: Universidad de Granada.
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2007). Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. *Rema*, 12 (1), 1-15.
- Díaz, C., Contreras, J.M., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Bolema*, 26 (44), 1207-1225.
- Einhorn, H.J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*, 99, 3-19.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance. NCTM 2006 Yearbook* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.
- Gras, R. y Totahasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15 (19), 49-95.
- Hill, H., Ball, D.L., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teacher's topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Kelly, I.W. y Zwiers, F.W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics*, 8, 96-100.
- Maury, S. (1986). Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes. Tesis de doctorado. Francia: Universidad de Montpellier II.
- MEC (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. España.
- Ojeda, A.M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.
- Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*. Voorburg, The Netherlands.
- Pollatsek, A., Well, A.D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.



- Ponte, J.P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishers.
- Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/>.
- Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J.J. y Cañizares, M. J. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma*, 36, 23-32.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). New York: Springer.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Totohasina, A. (1992). Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle. Tesis de doctorado. Francia: Universidad Rennes I.
- Watson, J.M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 305-337.
- Wood, T. (Ed.). (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 131-148.