



## CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Emilse Gómez<sup>1</sup>, Carmen Batanero<sup>2</sup> y José Miguel Contreras<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Colombia - <sup>2</sup>Universidad de Granada (España)

egomezt@unal.edu.co, batanero@ugr.es, jmcontreras@ugr.es

*Esta experiencia formativa pretende desarrollar entre los participantes algunos componentes del modelo propuesto por Ball y colaboradores, en relación con contenidos probabilísticos incluidos en los currículos de educación primaria. Para llevarla a cabo se propone a los participantes una situación experimental y contextualizada que los confronte con sus propias intuiciones (correctas e incorrectas) en relación con el enfoque frecuencial de la probabilidad. Para prepararlos en la componente didáctica, se plantean situaciones relacionadas con la docencia al resolver en el aula el problema planteado. Este tipo de tareas permiten la práctica con actividades centrales a la enseñanza, como es la evaluación de los estudiantes y la identificación de sus formas de razonamiento y sus errores. Se espera que los participantes amplíen sus conocimientos de estos contenidos y de su enseñanza, en particular que reconozcan, en sus respuestas o en las de estudiantes, sesgos y concepciones erradas asociadas a la resolución del problema.*

### **PALABRAS CLAVE**

Formación de profesores, conocimiento matemático del contenido, conocimiento pedagógico del contenido, enseñanza de la probabilidad.

### **INTRODUCCIÓN**

La necesidad de ampliar la comprensión y el desarrollo del conocimiento del profesor en el campo de la probabilidad y la estadística, ha sido reconocida como paso necesario para mejorar la formación de los profesores en varios países (Jones, 2005; Batanero, Burril y Reading, 2011; Batanero, 2013). En cuanto a la componente pedagógica, se consideran de gran ayuda situaciones relacionadas con la docencia, como las usadas en este trabajo, dado que estas tareas tienen en cuenta los contextos en que el futuro maestro ha de aplicar su conocimiento en la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2009).

Nos basamos en el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza de Ball, Thames y Phelp (2008) y de Hill, Ball y Schilling (2008), matizado con algunas aportaciones del enfoque ontosemiótico (Godino, 2009), que también proporcionan criterios para su desarrollo y evaluación. Este taller se enfocará en la aplicación del citado modelo para contenidos de probabilidad, tomando como referente el currículo español para educación primaria (MEC, 2006).

El primer día se trabajará especialmente el componente de conocimiento matemático del contenido y el segundo día se abordará el componente de conocimiento pedagógico del contenido. Cada sesión se desarrollará en tres partes: en la primera



parte se expondrá y discutirá el marco de referencia, en la segunda los participantes enfrentarán una tarea y en la tercera se discutirán los resultados de la aplicación.

En lo que sigue describimos brevemente el modelo, así como la metodología propuesta para la realización del taller. Posteriormente planteamos la situación experimental que se trabajará con los participantes, describiendo el objetivo pretendido con cada consigna planteada. Finalmente, presentamos las conclusiones obtenidas en una aplicación previa (Gómez, Batanero y Contreras, 2014) y los resultados esperados con este taller.

### **MARCO DE REFERENCIA**

El modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) es una propuesta para caracterizar el ‘conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno’ (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Está conformado por el conocimiento matemático del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido.

En cada uno se distinguen tres componentes; el primero se desglosa en: el conocimiento común del contenido (CCK), es el que posee cualquier persona instruida en matemática, en el sentido de Godino (2009) se puede delimitar como el conocimiento requerido al finalizar el nivel de formación al cual se va a impartir la enseñanza, en este caso estaría dado por el currículo de educación primaria; el conocimiento especializado del contenido (SCK), aplicado por el profesor para articular tareas de enseñanza; y finalmente el conocimiento en el Horizonte Matemático, es una visión más amplia de la matemática que la requerida para la enseñanza. Esta última ha sido criticada por su amplitud, de modo que en lugar de ella adoptamos la denominación *conocimiento ampliado del contenido* (Godino, 2009), entendido como el conocimiento matemático que es más amplio que el correspondiente al nivel de formación en que se imparte la enseñanza y que los estudiantes debieran haber adquirido durante su preparación como profesores.

El conocimiento pedagógico del contenido se desglosa en: el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), que incluye el conocimiento de sesgos, errores y dificultades, estrategias y aprendizaje del alumno; el conocimiento del contenido y la enseñanza, que incluye aquellos aspectos relacionados con los procesos adecuados para enseñar y evaluar un tema; y conocimiento del currículo.

Asimismo, en este taller adoptamos las herramientas dadas por Godino (2009) con el fin de proporcionar posibilidades de análisis para la evaluación y desarrollo del conocimiento profesional del profesor. Las consignas que usamos en la Tarea 1, forman parte de las sugeridas por este autor para: (i) “valoración de situaciones introductorias en procesos formativos para el desarrollo de competencias profesionales”, (ii) como “cuestionario” de autoevaluación y reflexión del profesor sobre aspectos relevantes de su propia práctica, y (iii) “como instrumento de un evaluador externo para valorar un proceso de estudio implementado” (p. 25).



### *Metodología*

Tras una breve exposición del marco de referencia, la parte aplicada del taller se desarrollará de la siguiente forma: una vez resuelta la primera pregunta de la tarea en forma individual, se debaten colectivamente estas respuestas, diferenciando las correctas e incorrectas, con apoyo de experimentación, dejando que sean los propios participantes quienes lleguen a reconocer sus errores previos. Posteriormente, trabajando en parejas, los participantes realizan actividades de evaluación de respuestas de alumnos ficticios y justifican las razones por las que consideran cada respuesta correcta o incorrecta, razonando asimismo, sobre el contenido matemático requerido para la solución correcta de la tarea. Finalmente, se pedirá a los participantes que propongan una tarea con características similares, que involucre contenidos de probabilidad y se acompañe de algunas respuestas correctas e incorrectas con el fin de proponerlas en una actividad de formación de profesores.

### **DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES**

Las tareas propuestas siguen la metodología sugerida por Godino (2009) para desarrollar y evaluar cada componente de conocimiento. Para el conocimiento común del contenido (CCC) se pide a los asistentes al taller resolver un problema (pregunta 1). Para el conocimiento especializado del contenido (CEC), se pide identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución (pregunta 2). Para el conocimiento del contenido y de los estudiantes (CCE), se pide describir posibles razonamientos o estrategias de los alumnos para resolver el problema, de manera correcta o no (preguntas 3 y 4).

El problema propuesto en la Tarea 1 del Anexo 1 es una adaptación del propuesto por Green (1983) y se utilizó en una investigación con futuros profesores españoles (Gómez, Batanero y Contreras, 2014). Esta pregunta permite valorar el reconocimiento del carácter aproximado de la estimación de la probabilidad en el significado frecuencial. Responder en forma correcta implica reconocer la ausencia de equiprobabilidad ocasionada por la asimetría física en el dispositivo, utilizar la información de la primera experimentación para predecir la frecuencia en repeticiones sucesivas, y estimar la variabilidad del muestreo.

### **CONCLUSIONES**

La aplicación previa con futuros maestros de primaria en España (Gómez, Batanero y Contreras, 2014) mostró los siguientes resultados:

En cuanto al conocimiento común de la probabilidad, sólo una tercera parte mostró una intuición simultánea de la convergencia al valor esperado y de la variabilidad muestral. El resto muestra diferentes sesgos, como la equiprobabilidad, la heurística de la representatividad o piensa que no es posible hacer una predicción. Una parte importante del grupo produce muestras de variabilidad extrema o de patrón determinista. Si bien, la identificación de las respuestas correctas e incorrectas de niños ficticios en la segunda parte del cuestionario, indica que su conocimiento mejora, lo que fue atribuido al aprendizaje logrado mediante la experiencia formativa.



Con respecto al conocimiento especializado del contenido, se observó falta de capacidad para identificar los objetos matemáticos en una tarea, incluso cuando los futuros maestros utilizaron dichos objetos al resolver correctamente los problemas planteados.

En relación al conocimiento del contenido y de los estudiantes, se observó que un alto porcentaje de los participantes fueron capaces de dar razones válidas para los errores en las respuestas de niños ficticios. Los razonamientos erróneos mejor identificados fueron la ausencia de variabilidad en los valores dados, su cercanía al 50% y la diferencia con frecuencias dadas por el profesor.

La resolución previa de los problemas y discusión colectiva de las soluciones apoyada en la simulación proporcionó también a los futuros maestros un modelo sobre la metodología de enseñanza de la probabilidad; donde conviene confrontar a los participantes con sus propios sesgos e intuiciones incorrectas, darles oportunidad de debatir estas ideas con sus compañeros y proporcionarles, por medio de la simulación, una mayor experiencia con los fenómenos aleatorios que les lleven a corregir y rechazar estas intuiciones incorrectas.

En el desarrollo de este taller se espera encontrar resultados similares, así como otros tipos de respuestas debido a las diferencias en el contexto de aplicación, por ejemplo por la participación de profesores en ejercicio o de estudiantes de licenciatura en matemáticas. Finalmente, esperamos promover el desarrollo de propuestas de enseñanza utilizando la metodología aplicada en este taller y con ello aportar al mejoramiento de la formación (inicial o continua) de los profesores.

## REFERENCIAS

- Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Batanero, C. (2013). Probability teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. New York: Springer. [springerreference.com/docs/html/chapterdbid/313307.html](http://springerreference.com/docs/html/chapterdbid/313307.html).
- Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. New York: Springer.
- Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*, 20, 13-31.
- Gómez, E., Batanero, C., y Contreras, J.M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28 (48), 209-229.
- Green, D.R. (1983). From thumbtacks to inference. *School Science and Mathematics*, 83 (7), 541 - 551.
- Hill, H.C., Ball, D.L., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400.
- Jones, G.A. (Ed.). (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.



Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 92-101.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. España: Ministerio de Educación y Cultura.

## ANEXOS

### Tarea 1.

**Parte 1.** Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68

caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo .

Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo.

1. Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

**Parte 2.** Cuatro alumnos completaron cada uno la tarea anterior. Estas fueron sus respuestas

Alumno 1	Daniel	Martín	Diana	María
	Punta arriba: 32	Punta arriba: 70	Punta arriba: 35	Punta arriba: 65
	Punta abajo: 68	Punta abajo: 30	Punta abajo: 65	Punta abajo: 35
Alumno 2	Daniel	Martín	Diana	María
	Punta arriba: 67	Punta arriba: 68	Punta arriba: 70	Punta arriba: 71
	Punta abajo: 33	Punta abajo: 32	Punta abajo: 30	Punta abajo: 29
Alumno 3	Daniel	Martín	Diana	María
	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68
	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32
Alumno 4	Daniel	Martín	Diana	María
	Punta arriba: 50	Punta arriba: 51	Punta arriba: 48	Punta arriba: 53
	Punta abajo: 50	Punta abajo: 49	Punta abajo: 52	Punta abajo: 47

- Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta
- Señala cuál o cuáles de estas respuestas son correctas
- Para cada una de las respuestas incorrectas explica cuáles son las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los participantes a dar una respuesta errónea