NIVELES DE RAZONAMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE TIPO BINOMIAL

Silvia Mayén y Ariana Salazar
CINVESTAV - IPN (México)
mayazuc@gmail.com, arianasalazar1@gmail.com

El propósito de este estudio es explorar el razonamiento de estudiantes de bachillerato y profesores de secundaria en formación inicial con instrucción y sin instrucción, al resolver dos problemas de probabilidad de tipo binomial. Se muestran resultados del análisis de las respuestas de tres grupos de sujetos. Para dicho análisis, se identificaron los elementos de conocimiento necesarios para resolver cada tarea y después de repetidas revisiones a las respuestas se elaboró una jerarquía de razonamiento aplicando la taxonomía SOLO. Se concluye que el progreso en el desempeño de problemas en los que la herramienta es la fórmula binomial depende de la instrucción recibida, y que el elemento de conocimiento fundamental que hace la diferencia en la calidad de las respuestas es el uso de diagramas de árbol, los cuales llevan a las combinaciones y a la regla del producto y, ambas a su vez, al domino de la fórmula binomial.

PALABRAS CLAVE

Fórmula binomial, razonamiento, jerarquía, estudiantes de bachillerato y profesores en formación.

INTRODUCCIÓN

La distribución binomial es la más importante distribución discreta y forma parte del contenido curricular de matemáticas de bachillerato y de cualquier curso introductorio de probabilidad y estadística. Los objetivos de la mayoría de programas de bachillerato establecen que los estudiantes aprendan a construir distribuciones de probabilidad de variables aleatorias elementales; a calcular e interpretar su valor esperado y su variancia; y a utilizar distribuciones en la solución de problemas (Jones, Langrall y Mooney, 2007). Esto presupone una comprensión y dominio de la fórmula binomial y de los elementos de conocimiento que la constituyen.

La literatura de investigación empírica referente al razonamiento de la fórmula binomial es escasa. Van Dooren *et al*. (2003) exploran la presencia de la ilusión de linealidad y muestran que hay estudiantes de bachillerato que a pesar de haber tenido algún curso de probabilidad, caen en este sesgo cuando se les plantea problemas binomiales, cuyo enunciado contiene datos que aparentan ser o son proporcionales. Abrahamson (2009a) realiza tres estudios de caso sobre el razonamiento de estudiantes universitarios frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi-binomial). En Abrahamson (2009b y 2009c) se reporta una entrevista a profundidad con un niño de 11.5 años; utiliza dispositivos de mediación cuya comprensión requiere diferente niveles de abstracción. Landín y

Sánchez (2010) informan de las respuestas de 66 estudiantes de bachillerato a 4 tareas relacionadas con la fórmula binomial. Tres de esas tareas inducían un sesgo cognitivo. Proponen una jerarquía para evaluar las respuestas de los estudiantes a tareas relacionadas con la fórmula binomial. En Sánchez y Landín (2011), se describe un proceso para mejorar la fiabilidad de la jerarquía de razonamiento reportada en Landín y Sánchez (2010).

El objetivo del presente estudio es explorar el pensamiento de los estudiantes frente a problemas binomiales y determinar los elementos de conocimiento clave que utilizan para resolverlos, así como presentar un cuadro que muestra la gama de razonamientos que se presentan, desde aquellos muy alejados de la solución hasta los más sofisticados.

MARCO DE REFERENCIA

El razonamiento de estudiantes frente a una tarea refleja la comprensión conceptual que han alcanzado y se expresa en el uso de elementos de conocimiento relacionados con la tarea y con el (o los) concepto (s) en cuestión. Las inferencias y explicaciones que realizan estudiantes de un grupo de edad similar y del mismo nivel educativo al resolver una tarea, se pueden organizar en una jerarquía para dar cuenta de los diferentes grados de integración de esos elementos; los procedimientos más eficientes que desarrollan algunos estudiantes del grupo son un indicio, sin ser determinante, de los niveles de desempeño que pueden ser alcanzados por los sujetos de ese rango de edad y nivel educativo; mientras que los niveles inferiores ofrecen indicaciones de las dificultades que encuentran y los conocimientos clave que permiten superarlas y mejorar sus niveles de desempeño. Tarr y Jones (1997) presentan una jerarquía de las nociones de probabilidad condicional e independencia; en Jones, Thornton, Langrall, y Tarr (1999), se extiende a tareas de espacio muestral, probabilidad teórica, probabilidad experimental, comparación de probabilidades, independencia y probabilidad condicional.

En este trabajo se propone una jerarquía elaborada a partir de la intención de organizar respuestas de los estudiantes a problemas relacionados con la fórmula binomial. En la literatura de educación estadística frecuentemente se ha aplicado la taxonomía *SOLO, Structure of the Observed Learning Outcome* (Biggs y Collis, 1991) para el análisis o evaluación de diferentes conceptos probabilísticos y estadísticos o se han presentado propuestas de jerarquías inspiradas en SOLO. Este modelo se compone de cuatro niveles jerárquicos y su principal objetivo es describir las respuestas que da un individuo a una tarea dada; se debe enfatizar que una jerarquía SOLO permite describir y clasificar las respuestas, pero no a los estudiantes. Sus niveles son: *Preestructural,* el estudiante que da una respuesta preestructural tiene menos exigencias, puede manifestar confusión o no estar relacionada con la tarea en cuestión. *Uniestructural,* con el fin de responder a la pregunta de manera adecuada, el estudiante debe, al menos, realizar una operación lógica, es decir, la respuesta relaciona un dato relevante para la cuestión. *Multiestructural,* consiste en dos o más conceptos o datos que incluyen los problemas sin relacionarlos. *Relacional,* va más allá e interrelaciona los conceptos; el estudiante puede *inducir*, puede *generalizar* en determinado contexto o experimento usando aspectos relacionados.

METODOLOGÍA

Seleccionamos una muestra compuesta por 77 estudiantes de tres grupos: uno de 31 estudiantes de bachillerato sin cursos previos de probabilidad; uno de 28 estudiantes de bachillerato y otro de 18 profesores de secundaria en formación inicial, ambos con algún curso previo.

Aplicamos un cuestionario de 10 problemas de probabilidad, pero para este trabajo solo presentaremos dos de ellos: problemas 7 y 9 de dicho cuestionario, los cuales son tareas de aplicación binomial, que como rasgo particular contienen eventos no equiprobables representados con porcentajes y números decimales respectivamente en experimentos de azar. Los problemas son los siguientes:

7. Un tirador tiene 70% de probabilidad de pegar en el blanco y 30% de fallar. Dispara 5 veces ¿Cuál es su probabilidad de pegar al blanco exactamente 3 veces?	9. Se lanzan 8 monedas en las que la probabilidad de salir 'sol' es 0.7. a) ¿Cuál es el número de soles que tiene mayor probabilidad de ocurrir? b) Calcula la probabilidad de que salga dicho número.
Problema 7	**Problema 9**

El problema 7 es una aplicación directa de la fórmula *B(5; 0.7, 3).* En el problema 9 se requiere el cálculo del valor esperado de la binomial (un concepto fundamental en el estudio de las distribuciones de probabilidad), determinado por el producto: *np= (8)*(0.7)=5.6*. Luego, calcular *B(8; 0.7, 5)* y *B(8; 0.7; 6),* comparar y elegir el segundo, que tiene mayor probabilidad.

Los problemas se aplicaron a los estudiantes de la muestra en presencia de sus profesores y de los investigadores. El proceso de análisis de las respuestas es de tipo cualitativo y cíclico, y consiste en una revisión sistemática de todas las respuestas para formar un sistema de categorías hasta clasificarlas en los diferentes niveles jerárquicos de la taxonomía SOLO (preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional), en función de los elementos de conocimiento que se ponen en juego y de la precisión de su ejecución, en particular, de la regla del producto y la fórmula binomial. Finalmente se obtuvo una nueva jerarquía de cada problema, en la que se incluyen subcategorías para cada nivel de dicho modelo.

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados del análisis de las respuestas de ambos problemas. Se incluyen las tablas que exhiben la jerarquía obtenida para cada problema, así como las respuestas que caracterizan cada nivel jerárquico con un ejemplo representativo de cada categoría o sub-categoría. Se completa el análisis con una tabla de frecuencias de respuestas.

Análisis al problema 7

Los resultados por categoría de este problema se presentan en la Tabla 1 que muestra los niveles jerárquicos obtenidos del modelo SOLO y sus respectivas subcategorías, así como la descripción de la respuesta típica escrita de los elementos de conocimiento encontrados.

Nivel SOLO y Sub-categorías	Respuesta
Preestructural	
P1	Respuesta no relacionada con la situación
P2	Exhibe cierto conocimiento pertinente pero sin ningún fin
Uniestructural	
U1	Realiza un diagrama de árbol inadecuado o incompleto.
U2	Elabora un diagrama de árbol completo, pero cuenta mal los casos posibles o los favorables o ambos
U3	Hace un diagrama de árbol, cuenta casos posibles y favorables. Determina la probabilidad mediante Laplace pero asumiendo equiprobabilidad de los eventos.
Multiestructural	
M1	Reconoce la situación de Bernoulli, aplica la regla del producto considerando probabilidades de éxitos y fracasos sin tomar en cuenta posibles combinaciones.
Relacional	
R1	Realiza un diagrama de árbol, extrae la lista completa de los casos posibles y favorables y aplica la regla del producto y la regla de la suma
R2	Realiza un diagrama de árbol, extrae la lista completa de los casos posibles y aplica la regla del producto y de la suma y confirma su resultado con la fórmula de combinaciones.

Tabla 1. Jerarquía obtenida del problema 7

A continuación se presentan ejemplos de respuestas de los estudiantes por nivel y sub-categoría definidos en la Tabla 1.

Nivel preestructural. En el primer ejemplo (P1), la respuesta tiene una relación ajena a la situación; mientras que en el segundo (P2), la respuesta muestra que el estudiante sabe que requiere un diagrama de árbol, pero desconoce las normas de su construcción (Tabla 2).

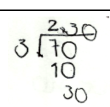
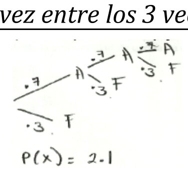
Categoría	Respuesta	Descripción
P1	*70% / 3=23 porciento de pegar exactamente en el blanco. Dividir su posibilidad de una sola vez entre los 3 veces.* 	Respuesta no relacionada con la situación. Sólo toma en cuenta la probabilidad dada de pegar en el blanco y la divide entre 3.
P2		Presenta un diagrama de árbol inadecuado. Su respuesta es 2.1 pero no la justifica. Al parecer, multiplica (7)*(.3) ó (3)*(.7)

Tabla 2. Ejemplos de respuesta de nivel preestructural

Nivel uniestructural. Las respuestas son parciales, es decir, los estudiantes sólo identifican alguno de los elementos del problema: *combinan diagramas de árbol con la regla del producto, diagramas de árbol o árboles de probabilidad con regla de Laplace,* ya sea correcta o incorrectamente, como los ejemplos de la Tabla 3.

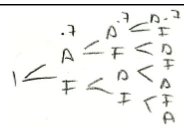
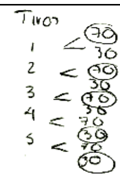
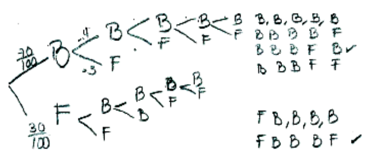
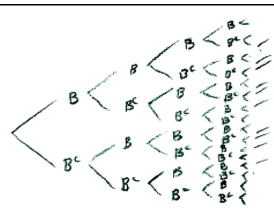
Categoría	Respuesta	Descripción
U1	 *3/5 Probabi lidad (.7)(.7)(.7)=0.34*  *3=34%*	Presenta un diagrama de árbol inadecuado. Considera sólo los casos de éxito aplicando la regla del producto.
U2	 *R= P = 2/32*	Presenta un diagrama de árbol y una lista de casos posibles incompletos; Obtiene la probabilidad mediante la regla de Laplace considerando todos los casos posibles, pero no todos los casos favorables, ni tampoco usa las probabilidades dadas en el problema.
U3	 *La probabilidad de pegar al blanco exactamente 3 veces es de 10/32.*	Realiza un diagrama de árbol del cual extrae una lista completa de los casos posibles y obtiene correctamente el número de casos favorables. Determina la probabilidad mediante Laplace, pero cae en el sesgo de la equiprobabilidad, pues no toma en cuenta probabilidades dadas en el problema.

Tabla 3. Ejemplos de respuesta de nivel uniestructural

Nivel multiestructural. De toda la muestra solo apareció una respuesta clasificada en este nivel, en ella se utiliza la *regla del producto,* sin embargo, no consideran las combinaciones posibles. El avance respecto a los anteriores es que el alumno aplica la regla del producto sin necesidad de utilizar un diagrama de árbol (Tabla 4).

Categoría	Respuesta	Descripción
M1	*P(pegar 3 y fallar 2) = (0.7) (0.7) (0.7) (0.3) (0.3) = 0.03087*	Aplica la regla del producto considerando probabilidades de 3 éxitos y 2 fracasos, pero no toma en cuenta las posibles combinaciones.

Tabla 4. Ejemplo de respuesta de nivel multiestructural

Nivel relacional. También de este nivel se obtuvieron dos sub-categorías: R1 y R2, y sólo se encontraron dos respuestas, que aunque incluyen todos los elementos del problema: *diagramas de árbol, situación de Bernoulli, regla del producto y fórmula de combinaciones,* son distintas, pero relacionadas (Tabla 5).

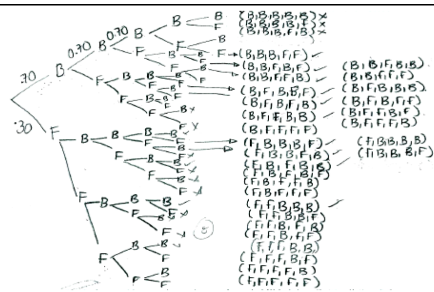
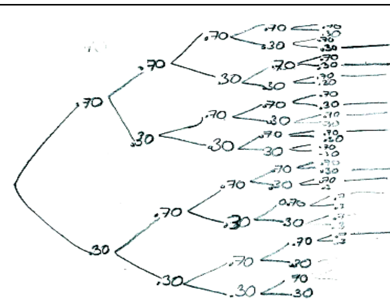
Categoría	Respuesta	Descripción
R1	 *P = (.7) (.7) (.7) (.3) (.3) = 0.03087 P(dar al blanco 3 veces) = (0.03087)(10); P = 0.3087*	Realiza un diagrama de árbol del cual extrae una lista completa de los casos posibles. Aplica la regla del producto para obtener la probabilidad del evento (PPPFF; P-pegar, F-fallar); luego multiplica por el número de casos posibles.
R2	 10 casos donde le da al blanco 3 veces, si cada una tiene probabilidad de $(0.7)^3(0.3)^2 = 0.03087$. P(E) = 10(0.03087). P(E) = 0.3087. ${}_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5x4x3!}{3!x2!} = \frac{20}{2}$ ${}_5C_3 = 10$	Realiza un diagrama de árbol, del cual extrae una lista completa de los casos posibles. Aplica la regla del producto para obtener la probabilidad del evento (PPPFF; P-pegar, F-fallar); luego multiplica por los casos favorables. Al final, confirma su resultado con la fórmula de combinaciones.

Tabla 5. Ejemplos de respuesta de nivel relacional

Una vez aclarado cómo se clasificaron las respuestas, se presenta en la Tabla 6 las frecuencias de respuestas obtenidas en cada nivel y sub-categoría.

Categoría	P1	P2	U1	U2	U3	M1	R1	R2	Nc	Total
Grupo A	15	5	1	7	-	-	-	-	3	31
Grupo B	2	6	7	3	5	-	-	-	5	28
Grupo C	2	4	1	4	4	1	1	1	-	18
Total	19	15	9	14	9	1	1	1	8	77

Tabla 6. Frecuencia de respuestas por categoría de los tres grupos en el problema 7

Se observa que en el grupo A (estudiantes sin curso previo), 20 respuestas se ubicaron en nivel preestructural y sólo 8 en el nivel uniestructural. En el grupo B, 8 respuestas son de tipo preestructural y 15 de nivel uniestructural. Respecto al grupo C, hay 6 respuestas de nivel preestructural, 9 uniestructural, la única multiestructural y 2 relacionales. Estos resultados muestran que el problema ha sido difícil aún para aquellos estudiantes que ya han tenido algún curso de probabilidad.

Análisis al problema 9

La Tabla 7 describe las sub-categorías obtenidas de las respuestas de este problema y a continuación, un ejemplo representativo.

Nivel SOLO y Subcategoría	Respuesta
Preestructural	
P1	Respuesta no relacionada con el problema; sin justificación u opinión personal.
P2	Respuestas basadas en algún sesgo:
Uniestructural	
U1	Demuestra la probabilidad dada mediante definición clásica (Laplace).
U2	Respuesta parcial o parcialmente correcta
Multiestructural	Respuesta correcta (no modula variabilidad):
M1	Obtiene el valor esperado, es decir, relaciona la probabilidad de obtener águila con el número de repeticiones realizadas; usa la fórmula de la frecuencia esperada

Tabla 7. Jerarquía obtenida del ítem 9

Nivel preestructural. En este nivel las respuestas están muy lejos de la solución y del método para obtenerla. En la Tabla 8 se presentan dos ejemplos.

Categoría	Respuesta	Descripción
P1	*a)* *7 soles.* *b)* *P(s) = .7* $\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10}x\frac{7}{10} = \frac{7^8}{10^8}$ $.7$	Respuesta que no se relaciona con el problema. Realiza operaciones sin ninguna relación con algún procedimiento correcto.
P2	*el mayor # de soles que podrían salir son 5 a 4 soles. La probabilidad es de la mitad a que me salga sol o águila*	En esta respuesta sólo se formula una afirmación, y, no toma en cuenta los datos del problema.

Tabla 8. Ejemplos de respuesta de nivel preestructural

Nivel uniestructural. Estas respuestas se caracterizan por reconocer al menos un elemento del problema, como en los siguientes casos de la Tabla 9:

Categoría	Respuesta	Descripción
U1	*6 o 7* *Porque su probabilidad es 0.7 mientras que aguila 0.3 durante 8 tiros*	La respuesta es parcialmente correcta e intenta justificarla con base en la probabilidad dada.
U2	*6 soles* *8*7=5.6 redondeo y es 6* *de 8 veces solo multiplico* *.8 veces por* la probabilidad .7	Respuesta es correcta. Obtiene el valor esperado y redondea; pero no calcula probabilidades para verificar.

Tabla 9. Ejemplos de respuesta de nivel uniestructural

Nivel multiestructural. Sólo dos respuestas se clasificaron en este nivel, uno se presenta a continuación (Tabla 10).

Categoría	Respuesta	Descripción
M1	1 - 8 .7 - 5.6 *a) R = 5 soles* *b) R = 0.16807* *P(5 soles) =(.7) (.7) (.7) (.7) (.7).= 0.16807*	Respuesta parcialmente correcta. Obtiene el valor esperado: relaciona la probabilidad de obtener águila con el número de repeticiones realizadas mediante una regla de tres y calcula su probabilidad tomando en cuenta sólo casos de éxito, sin combinaciones.

Tabla 10. Ejemplos de respuesta de nivel multiestructural

La Tabla 11 concentra la frecuencia de respuestas a este problema por nivel jerárquico y grupo de estudiantes.

Categoría	P1	P2	U1	U2	U3	M1	R1	R2	Nc	Total
Grupo A	15	5	1	7	-	-	-	-	3	31
Grupo B	2	6	7	3	5	-	-	-	5	28
Grupo C	2	4	1	4	4	1	1	1	-	18
Total	19	15	9	14	9	1	1	1	8	77

Tabla 11. Frecuencia de respuestas por categoría de los tres grupos en el problema 9

La frecuencia de respuestas a este problema nos indica que también ha sido difícil de resolver, principalmente para aquellos estudiantes que no han estudiado probabilidad, grupo A, pues la mayoría son de tipo preestructural, y resueltas mediante la intuición o basadas en el sesgo de equiprobabilidad. En el grupo B, ya hay respuestas parciales, se observa que sólo identifican un elemento, con 10 respuestas de tipo uniestructural. En cuanto al grupo C, como se esperaba, los resultados mejoran, ya que aunque la mayoría son de nivel uniestructural, ya aparece alguna respuesta del multiestructural y 2 del relacional.

Conclusiones

El progreso en el desempeño de problemas en los que la herramienta es la fórmula binomial, depende de la instrucción que reciben los estudiantes. En efecto, se observa una creciente calidad de respuestas de ambas preguntas en los grupos de acuerdo al orden siguiente: las respuestas de los que no han llevado probabilidad se concentran predominantemente en el nivel preestructural. Mientras que las respuestas de los grupos B y C, que han llevado el curso, se concentran en su mayoría en el nivel uniestructural, sin embargo, en el grupo C se presentan algunos casos que llegan a multiestructural y relacional. No obstante, el desempeño general logrado por estos grupos (B y C) dista aún de los objetivos que se proponen los cursos, pues lo deseable sería que sus respuestas fueran de nivel relacional.

La organización de las respuestas de acuerdo a los niveles de la taxonomía SOLO ha permitido detectar los elementos clave que permiten a los estudiantes ofrecer respuestas de mejor calidad y, por lo tanto, tener mejor comprensión y posibilidades de desarrollar sus razonamientos en problemas binomiales. El elemento de conocimiento central que permite a los estudiantes organizar sus conocimientos y razonamientos sobre la situación, es el diagrama de árbol. Aunque es posible que sea por el tipo de enseñanza que llevaron los sujetos examinados, el uso de diagrama de árbol fue el principal elemento de conocimiento que hizo la diferencia entre las respuestas del nivel preestructural y las uniestructurales. Es muy probable que la posesión de esta herramienta y el concepto de probabilidad clásica, les permita a los estudiantes percibir cuándo una situación-problema es de tipo binomial.

El progreso a partir de esta herramienta se logra cuando se construyen los dos elementos de conocimiento más: las combinaciones y la regla del producto. Se puede apreciar que los estudiantes que alcanzan la solución, lo hacen gracias a que con la ayuda del diagrama de árbol pudieron organizar y contar los casos favorables; los estudiantes más avanzados esquematizan este procedimiento dando lugar al uso de la fórmula para calcular combinaciones. Por otro lado, el recurso del diagrama de árbol se vuelve inoperante para situaciones donde n es grande (como $n=8$ del segundo problema). En estos casos, la regla del producto sustituye al uso del árbol para contar; el diagrama de árbol entonces se puede utilizar sólo como un instrumento para organizar de manera general la situación y no para calcular. Cuando los estudiantes son capaces de prescindir del diagrama de árbol y resolver los problemas, es muy probable que hayan encapsulado o esquematizado todo el procedimiento en la fórmula de las combinaciones.

REFERENCIAS

Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: Constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *70* (1), 27-47.

Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning – The case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction, 27* (3), 175-224.

Abrahamson, D. (2009c). A student’s synthesis of tacita and mathematical knowledge as a researchers’ lens on bridging learning theory. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4* (3), 195-226. http://www.iejme.com.

Biggs, J. y Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H.A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Landín, P.R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa, 12*

(3). http://www.revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842.

Jones, G.A., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in probability. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. *909-955).* Charlotte, NC: Information Age-NCTM.

Jones, G.A., Thornton, C.A., Langrall, C.W. y Tarr, J.E. (1999). Understanding students' probabilistic reasoning. En L.V. Stiff y F.R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12*. *NCTM 1999 Yearbook* (pp. 146-155). Reston, VA: NCTM.

Salazar, A. (2013). Razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato y profesores en formación sobre la regla del producto y distribución binomial. Tesis de maestría. México: CINVESTAV - IPN.

Sánchez, E. y Landín, P. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV.* Ciudad Real, España.

Tarr, J.E. y Jones, G.A. (1997). A framework for assessing middle school students´ thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, *9* (1), 39-59.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *53* (2), 113-138.