LOS BERNOULLI Y SUS APORTES A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD. EL CASO DE LA PARADOJA DE SAN PETERSBURGO

Guillermo Rincón y Sebastián López
Universidad del Valle (Colombia)
guillermo.rincon@correounivalle.edu.co, sebaslpz93@hotmail.com

La historia de las matemáticas, particularmente el caso de las paradojas, pueden ser introducidas como situaciones problemas enriquecedoras para los estudiantes, mediante un trabajo guiado por el docente, porque además de reforzar algunas temáticas vistas, también permite evidenciar los problemas a los que se enfrentaron los antiguos pensadores y reconocer su importancia en desarrollo de nuevas teorías. Un claro ejemplo es el caso de la paradoja de San Petersburgo, cuyo intento de solución planteado por Daniel Bernoulli, aportó los primeros elementos para que se fundamentara la Teoría de la utilidad, muy utilizada actualmente en las ciencias de la administración.

PALABRAS CLAVE

Familia Bernoulli, esperanza matemática, paradoja de San Petersburgo, paradojas en las aulas de clase.

INTRODUCCIÓN

En las aulas de clase es fundamental motivar a los estudiantes para incentivar su aprendizaje pero muchas veces no sabemos cómo empezar esta motivación, sobre todo en la clase de matemáticas, y olvidamos que la historia nos brinda numerosas situaciones problema, a las cuales se enfrentaron famosos personajes, en donde su solución o posibles soluciones dieron nacimiento a nuevos conceptos, nuevas teorías, nuevos estudios e incluso nuevas ciencias -i.e. la leyenda de Arquímedes y la corona de Hieron como nacimiento de la hidrostática; la leyenda de la observación de la caída de las manzanas y el nacimiento de la teoría de la gravitación de Sir. Isaac Newton; o, en un caso más de nuestro interés, la observación de los juegos de azar como nacimiento de la Teoría de la probabilidad. En el nacimiento de esta última teoría varios miembros de la prestigiosa familia Bernoulli hicieron aportes importantes para el desarrollo de la misma en sus primeros años y con algunos elementos de esta teoría dieron nacimiento a otras teorías. El objetivo de esta comunicación es mostrar como la historia es un gran recurso para el desarrollo de las clases y mostrar como las matemáticas se usan en la vida diaria; de manera más particular, como el uso de las paradojas en las aulas puede resultar interesante para los estudiantes, aún más cuando la solución a estas paradojas dieron nacimiento a nuevas teorías.

MARCO DE REFERENCIA

Paradoja. Una paradoja es un resultado o idea que, aparentemente, es opuesta a la opinión general, porque lleva implícita una contradicción lógica que, a primera vista, no se percibe. Una vez resuelta, generalmente se produce un aprendizaje, bien de un concepto que no se conocía o de una relación entre conceptos que aparecía oculta en el problema (Batanero, Contreras, Cañadas y Gea, 2012)

Esperanza matemática. Huygens necesitaba saber la *espectatio*, o sea, el valor de cualquier juego en particular. Huygens pensaba que en una lotería justa está claro que cada apostador paga el mismo precio por cualquier billete. Más aún, si el premio es z entonces cada uno de los n billetes debería costar z/n. si los billetes cuestan más, el dueño de la lotería obtendría ganancias sin riesgo. Si los billetes cuestan menos, los apostadores podrían formar una asociación que obtendría ganancias sin riesgo. Un juego o experimento aleatorio se dice justo o equilibrado si su esperanza global es cero, si un juego no es equilibrado se dice que es un juego con ventajas (Ruiz, 1999). En otras palabras podríamos definir la esperanza matemática de la siguiente manera: Cuando la variable aleatoria es discreta, la esperanza es igual a la suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicado por el valor de dicho suceso.

Utilidad. "Una función de utilidad es una función real que mide la 'satisfacción' o 'utilidad' obtenida por un consumidor cuando disfruta vía consumo de cierta cantidad de bienes" (Wikipedia, 2013). Cabe resaltar que, "por lo general, en el mundo real las personas muestran comportamientos de aversión al riesgo, y prefieren resultados más seguros - solo toman riesgos si esperan obtener recompensa la mayoría de las veces. Los programas de concursos proveen ejemplos de aversión al riesgo. Por ejemplo, si una persona tiene 1 oportunidad de 3 de ganar 50.000 puntos, o puede tomar 10.000 puntos sin arriesgar, mucha gente tomará la opción de los 10.000 puntos, aunque la esperanza matemática sea superior (concretamente, $\frac{50000}{3} \approx 16\mathbf{666}$ puntos). Esto es especialmente cierto si los puntos son canjeables por dinero" (Wikipedia, 2010).

Los Bernoulli y sus aportes a la probabilidad:

- Jacob Bernoulli: hermano de Nicolaus y Johann, en 1913 publica, por medio de su sobrino Nicolau I, la obra *ArsConjectandi*.
- Nicolau I Bernoulli, hijo de Nicolaus y sobrino de Jacob, fue el encargado de editar las notas de su tío y de hacerla públicas en la obra titulada *ArsConjectandi.* También fue el encargado de plantear, mediante correspondencia, los 5 problemas a Mormón, Crimen y Daniel Bernoulli, uno de los cuales se convertiría posteriormente en la célebre *Paradoja de San Petersburgo.*
- Daniel Bernoulli. En 1715 le plantean el problema-paradoja y en 1738 publica su solución, el mismo año en que publicase el reconocido principio de hidrodinámica que lleva su nombre.

DESARROLLO DEL TEMA

Cuenta la historia que durante muchos años varias personalidades importantes, entre las que destacan Jacob y Daniel Bernoulli, se dedicaron a la solución de problemas concretos donde usaron, sin saberlo, algunos conceptos de la moderna teoría de la probabilidad. Esta teoría fue 'formalizada' o tuvo su primer tratamiento científico con el matemático Cristian Huygens en una monografía escrita en latín titulada *Ratiociniis in ludo aleae* (Sobre los cálculos en los juegos de azar). Y más adelante se complementa este primer 'formalismo' con la publicación del *ArsConjectandi* (El arte de la conjetura), esta publicación fue hecha por Nicolau Bernoulli años después de que su tío Jacob Bernoulli la terminara de escribir.

Huygens en su monografía teoriza un concepto que él denomino *espectatio* que más adelante se tradujo a esperanza. La esperanza matemática o valor esperado es uno de los conceptos utilizados por Daniel Bernoulli en la solución que el da a la llamada *Paradoja de San Petersburgo*, el cual fue originalmente un problema, para ser más exactos, el último de cinco problemas que Nicolaus Bernoulli le planteó por correspondencia a Pierre Raymond de Montmort (Pulskamp, 1999), que dice (adaptado a nuestro vocablo): Pedro tira una moneda al aire tantas veces como sea necesario para sacar cara. Si esto ocurre en la primera tirada, él le tiene que dar a Pablo un ducado; si es en la segunda 2; si es en la tercera, 4; si es en la cuarta, 8; y así cada jugada que es necesario efectuar. ¿Cuál es el precio justo que Pablo tiene que pagar por este juego?

En vista de que ni Pierre ni Nicolaus llegaban a la solución del problema, Nicolaus se comunicó por correspondencia con Cramer y posteriormente con su primo Daniel, a quienes se les planteó el problema y dieron soluciones muy similares, el problema fue que Daniel fue quien se esmeró más por el asunto y posteriormente publicó su solución. En su obra *Nueva Teoría de Medición de la Suerte,* Daniel afirma que: "Los matemáticos, en su teoría, valoran el dinero en proporción a la cantidad del mismo; la gente con sentido común, en la práctica, lo valora en proporción a la utilidad que puede obtener de él". Esta concepción fue utilizada por el mismo Daniel para llegar a la solución de esta paradoja propuesta por él. Lo curioso es que mientras Daniel y Cramer mantuvieron correspondencia con Nicolaus, Cramer hizo una afirmación muy parecida, pero nunca la formalizó como lo hizo Daniel.

La siguiente es la solución más simple propuesta por Daniel Bernoulli basándonos en lo consignado por Parrondo (2007):

> Bernoulli propuso que el aumento de utilidad cuando una fortuna de x euros aumenta en una cantidad muy pequeña Δx debía ser $\frac{\Delta x}{x}$. El aumento de la utilidad cuando nuestra fortuna pasa de *b* euros a *a* euros es entonces
>
> $$\int_b^a \frac{dx}{x} = \frac{\ln a}{b}$$
>
> Supongamos que la cuota de entrada es *c* y llamemos *b* a nuestro capital inicial (…) nuestro nuevo capital sería de $b - c + 2^n$ euros. El resultado de utilidad sería:

$$\Delta U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln 2}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln c}{2^n} = 2\ln 2 - \ln c$$

Pero, para que la apuesta sea justa para ambas partes, la esperanza debe ser cero, entonces

$2\ln 2 = \ln c$

$c = 4$

Por lo tanto la cuota justa de entrada sería 4 euros.

Como en esta paradoja, Batanero, Henry y Parzysz (2005) plantean que en el caso particular de la probabilidad no es difícil encontrar ejemplos sencillos de tareas con soluciones contra-intuitivas, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica con frecuencia nos engaña. La construcción de la teoría de la probabilidad ha sido lenta, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores, lo que llevó al progreso de la misma.

CONCLUSIONES

La historia como recurso para despertar el interés de nuestros estudiantes por la clase es bastante útil, ya que, por un lado nos deja apreciar las dificultades que los grandes matemáticos tuvieron que afrontar para la solución de los problemas y, por otro lado nos sirve para mostrar cómo las matemáticas a pesar de hacer uso de elementos abstractos es una base fundamental de teorías que han propiciado su desarrollo y el de la sociedad, la directamente afectada por estos avances; en nuestro caso, los intentos de solucionar la paradoja de San Petersburgo aportaron los primeros elementos para la formalización de la Teoría de la utilidad, teoría que ha sido de gran importancia para la economía, la contabilidad, y otras ciencias de la administración.

Debido a las múltiples soluciones que se le pueden dar a esta paradoja según la escogencia que le quiera dar a la utilidad, se podría afirmar que las paradojas incentivan en los estudiantes el planteamiento de diferentes soluciones posibles (incentivando el pensamiento variacional) y motivando el trabajo en equipo si se contrastan soluciones con otros estudiantes de la misma clase (en la paradoja se puede relacionar como Cramer trabajo con Daniel para llegar a la solución del problema). Para finalizar queremos resaltar que existen otras paradojas cuyas soluciones son más simples pero siguen siendo igualmente importantes porque permiten confrontar el sentido común con las interpretaciones usando las matemáticas, si el interés en utilizarlas en la escuela –i.e. el dilema del prisionero, la paradoja del niño-niña o la paradoja de Monty Hall.

REFERENCIAS

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Batanero, C., Contreras, J.M., Cañadas, C. y Gea, M.M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Unejemplo de probabilidad. *Novedades Educativas, 26* (1), 78-84.

Parrondo, J. (2007). El punto de vista del jugador: Bernoulli, Euler y la teoría de la utilidad. *Sortis In Ludus: de la Paradoja de San Petersburgo a la Teoría de la Utilidad*. pp. 68-73.
Pulskamp, R. (1999). *Correspondence of Nicolas Bernoulli concerning the St. Petersburg game*. Cincinnati: Xavier University.
Ruiz, G. (1999). La paradoja de San Petersburgo: una reivindicación didáctica. *SUMA*, (32), 5-9.
Wikipedia (2013). Función de utilidad. http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_utilidad.
Wikipedia (2010). Subjetividad de la utilidad esperada. http://es.wikipedia.org/wiki/Subjetividad_de_la_utilidad_esperada.