



EFFECTOS DE LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL EN LA COMPRESIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y LA DISTRIBUCIÓN DE PROPORCIONES

Johanna Martínez y Gabriel Yáñez
Universidad Industrial de Santander (Colombia)
carolinamartinez47@hotmail.com, gyanez@uis.edu.co

En este trabajo se presenta un proyecto de investigación que se basa en el enfoque instrumental para describir el efecto que tiene la simulación computacional en la comprensión de la distribución binomial y la distribución de proporciones.

PALABRAS CLAVE

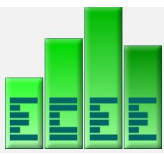
Distribución binomial, distribución de proporciones, simulación computacional, enfoque instrumental.

INTRODUCCIÓN

La distribución binomial es una de las distribuciones discretas más importantes ya que muchas aplicaciones prácticas, donde se espera que ocurra o no un evento específico, pueden ser modeladas mediante esta distribución. Sin embargo, los estudiantes presentan una perspectiva muy limitada en la comprensión y aplicación de la distribución binomial en la resolución de problemas de este tipo (Mayén *et al.*, 2013). Otras fuentes de dificultad asociadas a situaciones binomiales son algunos sesgos cognitivos, como el sesgo de linealidad y el sesgo de equiprobabilidad, que han sido reportados por Vergara (2008), Landín y Sánchez (2010), y Mayén *et al.* (2013).

Enunciar un modelo de probabilidad exige una respuesta estadística para estimar los parámetros del modelo, en el caso de la binomial se trata de estimar el parámetro p ya que el otro parámetro característico de la binomial, el tamaño n , es siempre conocido. Esta estimación, en particular, la estimación por intervalos exige estudiar previamente las distribuciones muestrales, en este caso, asociadas con las proporciones muestrales. Los estudios que se han realizado para conocer el grado de comprensión de los estudiantes acerca de las distribuciones muestrales como un paso previo hacia la inferencia estadística, si bien algunos han sido abordados a través de simulación, generando muestras de cierto tamaño y analizando las distribuciones empíricas correspondientes, se han realizado con estudiantes que han estudiado la distribución binomial desde el punto de vista algebraico (Inzuna, 2006).

Es por esta razón que en esta investigación se pretende abordar con simulación computacional no solamente las distribuciones muestrales asociadas a proporciones, sino también la construcción misma del razonamiento binomial con estudiantes que no hayan estudiado previamente la distribución binomial, ya que las simulaciones para la distribución binomial y la distribución de proporciones responden



exactamente a la misma estructura: definir el espacio muestral, generar muestras de determinado tamaño, definir una medida y, por último, estudiar las distribuciones de los resultados.

MARCO DE REFERENCIA

En este estudio se asumirá el *enfoque instrumental*, ya que permite 'hacer explícita la relación sutil entre el uso de la herramienta y el proceso de toma de significado, así como estudiar, diseñar y evaluar este proceso' (Trouche y Drijvers, 2010, p. 674). Por lo tanto, desde este enfoque teórico se analizará el impacto que tiene Fathom como herramienta tecnológica en los procesos de conceptualización que adquieren los estudiantes sobre la distribución binomial y su importancia en el proceso de estimación, a través del proceso de *génesis instrumental*, donde Fathom se convierte en un instrumento de actividad matemática.

Desde esta perspectiva, en los procesos de enseñanza y aprendizaje se distingue entre un *artefacto*, que es un hecho u objeto y un *instrumento*, que es un constructo psicológico, el instrumento no viene dado con el artefacto (Verillon y Rabardel, 1995).

El proceso en el cual el artefacto se convierte en instrumento es un proceso complejo que necesita tiempo y está vinculado a las características del artefacto (sus potencialidades y sus limitaciones), además depende de la actividad del sujeto, de su conocimiento y de su método de trabajo. Artigue (2002) define este proceso de construcción como *génesis instrumental* e involucra dos componentes: *la instrumentalización y la instrumentación*.

La *instrumentalización* es un proceso dirigido hacia el artefacto, donde intervienen varias fases: una fase de descubrimiento y selección de las funciones relevantes o elementos pertinentes; una fase de personalización, donde se ajusta el artefacto dependiendo de las necesidades del sujeto; y una fase de transformación del artefacto, en la cual el sujeto utiliza el artefacto en direcciones no planificados por el diseñador: la modificación de la barra de tareas, creación de atajos en el teclado, entre otras. Es decir, en este proceso la persona aprende a usar el artefacto y a reconocer sus funciones, adaptándolo a sus necesidades.

La *instrumentación* es un proceso dirigido hacia el sujeto, conducido al desarrollo o a la apropiación de los esquemas de acción instrumentada que se constituyen progresivamente en técnicas que le permiten al sujeto dar una respuesta efectiva a tareas dadas. Según Trouche (2004) durante este proceso el artefacto imprime su marca en el sujeto, es decir, le permite desarrollar una actividad dentro de algunos *límites*, las *restricciones* del artefacto.

Del mismo modo, en tanto el sujeto se apropia del artefacto, desarrolla esquemas mentales. Trouche (2004) define la noción de esquema, retomando ideas de Vergnaud (1996) como una manera más o menos estable para hacer frente a situaciones específicas o tareas. Como un esquema es parte de un instrumento, hablamos de un esquema de instrumentación. Dentro de los esquemas de utilización, se distinguen esquemas de acción instrumentada y esquemas de uso.



Trouche y Drijvers (2010) señalan que los profesores deben acompañar el proceso individual de instrumentación que transformará el artefacto en un instrumento. Esta dirección externa de la génesis instrumental de los estudiantes ha sido introducida por Trouche (2005) con la noción de *orquestración instrumental*, la cual define como la organización intencional que permite articular el diseño, el tiempo y la implementación de secuencias didácticas concebidas para orientar el proceso de génesis instrumental en los estudiantes.

La metáfora de orquestración instrumental resalta la importancia de los instrumentos para desarrollar las actividades matemáticas y destaca el rol del profesor, que se ve como un director de orquesta al guiar los procesos de instrumentación con el reconocimiento de nuevas técnicas instrumentadas propuestas por los estudiantes para convertir el artefacto en un instrumento matemático eficaz.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta investigación es de tipo cualitativo, ya que intenta explicar el impacto que tiene la simulación computacional en la comprensión de la distribución binomial y la distribución de proporciones. Los sujetos de estudio son un grupo de 6 estudiantes de undécimo grado de educación media vocacional entre los 16 y 17 años de una institución de educativa de Bucaramanga (Santander, Colombia) que no han tenido un curso previo de probabilidad. Las técnicas que usadas serán: la observación, la cual se centrará en la actividad instrumentada de los estudiantes durante el periodo de intervención en el aula; el dialogo permanente, con el fin de indagar sobre el razonamiento de los estudiantes y sus avances conceptuales y los instrumentos para la recolección de la información serán: diario de campo, talleres escritos de cada actividad, los archivos de computador y registro audiovisual de cada actividad.

El diseño e implementación de actividades apoyadas en simulación computacional relacionados con el uso de Fathom como herramienta tecnológica, será introducida a través de modelos de urna en dos fases: una primera fase que conduce a la distribución binomial y una segunda fase que conduce a la distribución muestral de las proporciones. Este proceso de simulación se realizará primero físicamente como lo recomiendan algunos autores como Inzunza (2006), Alvarado y Segura (2012), entre otros, para hacer menos abstractos los conceptos y procedimientos utilizados y para que el estudiante en alguna forma perciba el experimento en sí mismo. Posteriormente y ante la necesidad de realizar muchas extracciones, se pasará a la simulación computacional; con esto se espera evitar que el estudiante se cree ideas erróneas al sacar conclusiones a partir de pocos datos, porque con pocos datos hay mucha variabilidad.

El proceso de simulación computacional en Fathom se realiza en tres pasos:

1. Se define la población asociada al problema.
2. Se extraen de esa población muestras de tamaño m (*random samples*)
3. Se calcula el estadístico de interés y se toman muchas muestras. Como resultado de este proceso se obtiene un conjunto de medidas (una variable aleatoria).



DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Para entender el trabajo de simulación en Fathom y las posibles ventajas de su implementación en la enseñanza, a continuación se presenta un ejemplo de modelo de urna para la primera fase que conduce a construcción de la distribución binomial.

En una urna que contiene 2 bolas azules y 3 bolas rojas, si se realizan cinco extracciones con sustitución, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 bolas azules?

Una manera de simularlo es definiendo un atributo que dé cuenta del espacio muestral con su medida de probabilidad. Nótese que esta definición define el éxito: los dos 1 que se asocian con las dos bolas azules, y el fracaso: los tres 0 que responden a las tres bolas rojas.

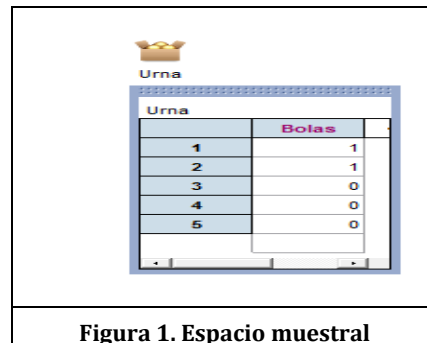


Figura 1. Espacio muestral

Luego en el menú de Fathom en la opción *collection* se toma la opción *sample cases*. Para esta colección de muestras obtengo una tabla y haciendo doble click en ella defino las características de la muestra, es decir, el número de extracciones especificando que es con reemplazo, de esta manera para garantizar que la probabilidad sea constante; se define la medida (*measure*) *count* del número de bolas azules (de valor 1).

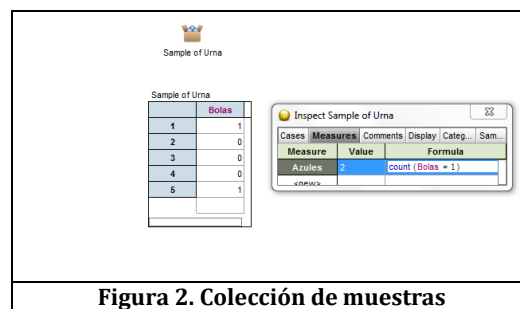


Figura 2. Colección de muestras

Continuamos oprimiendo click derecho en la colección de la muestras y se da la opción de *collect measure* que permite generar la cantidad de muestras que se quieran y calcular el número de bolas de la muestra. Los resultados de estas medidas se tratan como un atributo, es decir, se puede representar gráficamente para poder analizar su distribución lo que permite estimar la probabilidad requerida conjuntamente con todos los demás valores posibles.

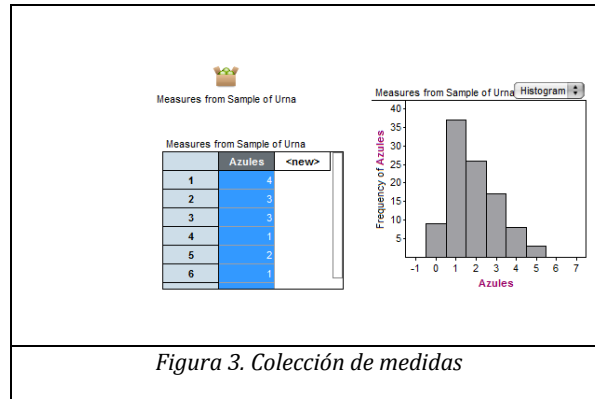


Figura 3. Colección de medidas

Al tener la posibilidad de visualizar la distribución se pueden plantear preguntas más concretas como: determinar la probabilidad de que en diez extracciones cinco sean azules, ya que en el histograma podemos apreciar cuántas veces se obtuvo muestras con 0 azules, 1 azul, 2 azules,...n azules. Si bien la gráfica permite estimar la probabilidad de cualquier valor posible (0, 1, 2,..., n) su verdadera utilidad se asocia con la forma de la distribución, con su valor central (media) y con su dispersión (desviación estándar).

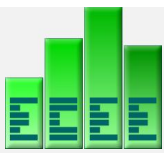
CONCLUSIONES

Es pertinente resaltar el carácter de *estimación* que posee en sí misma la simulación, pues la simulación nunca produce resultados definitivos, solo se trata de aproximaciones o estimaciones a las probabilidades buscadas, tal como corresponde al enfoque frecuencial de la probabilidad. Esto hace que este abordaje de la distribución binomial sea de tipo estadístico en contraposición al modelo basado en un razonamiento matemático característico de prácticamente todos los libros de texto. Si bien la simulación no produce los resultados exactos que da la función de probabilidad para la distribución binomial, suponemos que sí prepara mejor a los estudiantes para afrontar el proceso inverso de estimar la probabilidad de éxito cuando se conoce el resultado de algunas extracciones.

Además de dar respuestas aproximadas a las probabilidades requeridas, el proceso va a permitir reflexionar sobre los aspectos que caracterizan a las variables aleatorias binomiales: su media y la cantidad de extracciones realizadas o veces que se repite el mismo experimento (extraer una bola de la urna). Para percibir la importancia sobre la forma de la curva y sus valores, basta cambiar estos parámetros en la programación realizada y comparar las diferentes gráficas que se producen.

Ahora, si en lugar de calcular las frecuencias absolutas, asociadas al número de bolas blancas extraídas en las m extracciones, se trabaja con las frecuencias relativas, se obtienen curvas restringidas al intervalo (0,1) que permiten observar mucho mejor los cambios sufridos cuando se aumenta el tamaño muestral.

La implementación de esta propuesta en el salón de clase exige un diseño didáctico que, además de un intenso trabajo personal, comprenda la realización de trabajos



compartidos entre los estudiantes que les permitan intercambiar libremente sus concepciones en la medida que se vayan construyendo.

REFERENCIAS

- Alvarado, H., y Segura, N. (2012). Significado de las distribuciones muestrales en textos universitarios de estadística. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 7 (2), 54-71.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about Instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (3), 245-274.
- Inzunza, S. (2006). *Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica*. Tesis de doctorado. México: CINVESTAV - IPN.
- Landín, P. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3), 598-618.
- Mayén, S., Salazar, A., y Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales. En J.M. Contreras, G.R. Cañadas, M.M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 409-416). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Vergara, M. (2008). *Concepciones personales de la distribución binomial en un ambiente computacional: Un estudio con profesores en formación*. Trabajo de grado. Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: Nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25 (1), 91-138.
- Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307.
- Trouche, L., y Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: Flashback into the future. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 42 (7), 667-681.
- Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. IEn R. Noirfalise y M.J. Perrin (Eds.), *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 174-185). Clermont-Ferrand: IREM, Université Clermont-Ferrand 2.
- Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology in Education*, 9 (3), 77-101.