

## LOS INTERVALOS DE CONFIANZA: CONFIANZA VS. PRECISIÓN

Luzdari Rangel y Gabriel Yáñez  
Universidad Industrial de Santander (Colombia)  
lrangelruiz@gmail.com, gyanez@uis.edu.co

*Las investigaciones dirigidas a conocer el nivel de comprensión de los estudiantes y de los usuarios de la estadística respecto a los intervalos de confianza han mostrado que estos conceptos no son claramente entendidos ni por los unos ni por los otros. En este trabajo presentamos algunas ideas que pueden permitir conocer un poco más el origen de las confusiones y las malas concepciones que las personas se forman alrededor de los intervalos de confianza. En particular presentamos unas evidencias acerca del conflicto entre precisión y nivel de confianza. Los resultados provienen de una investigación en curso con profesores de matemáticas en formación con el objetivo de conocer sus concepciones alrededor de los intervalos de confianza y de los conceptos estadísticos que subyacen a su construcción con el propósito de proponer herramientas que faciliten sus procesos de enseñanza y aprendizaje. El estudio se fundamenta en la teoría APOE.*

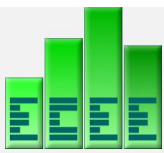
### **PALABRAS CLAVE**

Intervalos de confianza, nivel de confianza, precisión, teoría APOE.

### **INTRODUCCIÓN**

Los diversos estudios que se han realizado para conocer la comprensión que tienen los estudiantes y los usuarios de la estadística respecto a los intervalos de confianza evidencian una baja comprensión del nivel de confianza así como de los factores que afectan su precisión (Behar, 2001; Cumming, Williams, y Fidler, 2004; Olivo, 2008; Yáñez y Behar, 2009; Kalinowski, 2010; Henriques, 2012). Son ya clásicos tipos de concepciones tales como que el nivel de confianza es la probabilidad de que el intervalo obtenido a partir de una muestra contenga el parámetro a estimar; como que el intervalo aumenta su longitud si se aumenta el tamaño muestral o que el intervalo se reduce o permanece igual si se aumenta el nivel de confianza.

Para conocer a profundidad las razones que dan origen a estas concepciones erradas diseñamos una investigación que asume como marco de referencia la teoría APOE que no es otra cosa que un modelo de construcción de los conceptos matemáticos. En este texto se presenta de manera breve el marco teórico de referencia, la metodología empleada en esta investigación, algunos resultados obtenidos hasta el momento y algunas conclusiones. El estudio se centra en la construcción de un intervalo de confianza para la media poblacional con desviación estándar conocida y desconocida.



## MARCO DE REFERENCIA

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) da cuenta de las estructuras y mecanismos mentales que un individuo desarrolla cuando aprende un concepto matemático. Estas estructuras (acciones, procesos, objetos y esquemas) son el resultado de la aplicación de los mecanismos mentales de interiorización, coordinación, encapsulación y des-encapsulación).

El proceso de construcción de un concepto matemático inicia con la manipulación, de manera física o mental, de objetos construidos previamente por el sujeto. Esta manipulación recibe el nombre de acción, que una vez interiorizada pasa a formar un proceso; una vez que este proceso es encapsulado pasa a ser un objeto cognitivo. Un objeto se puede des-encapsular para volver al proceso que le dio origen y de esta manera coordinarlo con otros procesos para llegar a un único proceso que posteriormente será encapsulado. Por lo tanto, un sujeto puede llegar a la construcción de un proceso de dos formas, ya sea mediante la interiorización de acciones o a partir de la coordinación de dos o más procesos. La colección de estas estructuras y mecanismos mentales relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente dan lugar a un esquema que puede ser utilizado para resolver un problema matemático en particular (Arnon, Dubinsky, Cottrill, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014).

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

Las investigaciones sobre los intervalos de confianza han permitido identificar variedad de dificultades y concepciones presentes en las personas cuando se enfrentan a situaciones que requieren de su construcción e interpretación, desde nuestra perspectiva, debidas en primer lugar a la falta de claridad sobre los conceptos estadísticos que intervienen de manera directa en su construcción, y que necesitan ser integrados de manera adecuada.

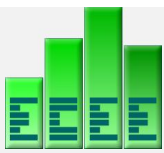
Si bien un intervalo de confianza para la media poblacional  $\mu$  tiene la forma:

$$\left( \bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Donde  $\bar{X}$  es la media muestral,  $Z_{\alpha/2}$  es el nivel de confianza y  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  es la desviación estándar asociada a la media muestral, suponiendo  $\sigma$  conocido, existen muchos conceptos previos, además de los que están explícitos, tales como población, parámetro, muestra aleatoria, estadístico, variable aleatoria, distribución de probabilidad de una variable aleatoria, valor esperado, distribución normal, (o distribución t-student cuando  $\sigma$ , no es conocido, distribuciones muestrales, función de densidad de probabilidad y el teorema central del límite.

Del paradigma de investigación de la teoría APOE asumimos dos componentes: i) Análisis teórico y ii) observación, análisis y verificación de datos.

Este estudio se está llevando a cabo con profesores de matemáticas en formación de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia) que ya cursaron y aprobaron dos cursos de estadística básica e inferencial y uno de didáctica de la probabilidad y la estadística.



Para la primer componente (análisis teórico) se realizó una búsqueda sistematizada sobre las investigaciones de corte didáctico alrededor de los intervalos de confianza y un análisis de los textos utilizados por los estudiantes, con la finalidad de conocer la forma como los intervalos de confianza son abordados en cada uno de los textos.

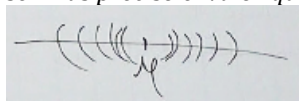
Posteriormente se diseñó, validó y aplicó un cuestionario de 9 ítems con el objetivo de identificar las concepciones y dificultades de los estudiantes que participan en esta investigación respecto a los intervalos de confianza. El cuestionario se construyó a partir del cuestionario de Behar (2001) y con algunas ideas propias de los investigadores.

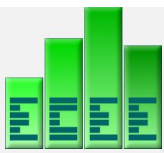
Posterior al cuestionario se realizaron entrevistas personales con 7 de los 15 profesores en formación que respondieron al cuestionario. Estos 7 estudiantes fueron elegidos por sus llamativas y argumentadas respuestas al cuestionario.

### DESARROLLO DE LA PROPUESTA

En particular, tanto el cuestionario como las entrevistas clínicas realizadas con los estudiantes nos han permitido identificar algunas incomprensiones en conceptos tan básicos como la desviación estándar y la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, muy asociados con el nivel de confianza y la precisión de un intervalo. Nos limitamos en este espacio a presentar la confrontación que existe entre algunos estudiantes entre los conceptos de precisión y nivel de confianza.

A continuación presentamos algunos apartes de las entrevistas mencionadas y que nos permiten conjeturar algunas explicaciones sobre las concepciones identificadas.

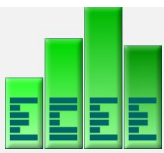
	...
Entrevistador	¿Qué significa precisión de la estimación?
Alejandra	Que va a ser más exacta, más precisa, más exacta. La media, la $\bar{x}$ va a ser más aproximada a $\mu$ .
Entrevistador	Entonces, ¿aumenta la precisión cuando aumenta el tamaño muestral?
Alejandra	Sí, pero creo que eso depende de si los datos son aleatorios. O partamos de que si lo son. Entonces sí.
Entrevistador	¿Por qué?
Alejandra	Pues porque es que entre, si yo, si yo aumento demasiado la muestra entonces el intervalo va a ser mucho más grande.
Entrevistador	¿Más grande si aumento la muestra?
Alejandra	Ehh, si aumento... Mentiras, mentiras, es más pequeño.  <i>Entonces entre más aumente, más cercano y por eso es que va a ser más preciso el valor que estoy estimando.</i>  Porque cada vez que se va a haciendo más pequeño el error, este error [señala la expresión que tiene en el tablero] se va a hacer más pequeño.



Entrevistador	¿Y si se aumenta el nivel de confianza, aumenta también la precisión de la media poblacional?.
Alejandra	Ehh, si se aumenta el nivel de confianza del intervalo, yo creería que no.
Entrevistador	¿Por qué?
Alejandra	Porque es que si yo aumento el nivel de confianza, entonces zeta asterisco va a ser más grande, entonces el intervalo va a estar muy abierto.
Entrevistador	¿Entonces la confianza no tiene nada que ver con la precisión?
Alejandra	Pues es que también estoy pensando que el nivel de confianza es la probabilidad de que... es que no sé cómo decirlo. ...No sé si es la probabilidad de que este (señala a $\mu$ ) se encuentre en el intervalo, o sea que... Yo pensaba era que, que en el caso del nivel de confianza del 45%, sería que cada 100 que el $\mu$ se encuentre en 45 de esos intervalos.
Entrevistador	¿Si hay más confianza hay más precisión?
Alejandra	Tanto como precisión, yo creo que no porque... porque digamos que yo puedo asegurar que mi nota es en un examen va a estar en, va a ser, digamos, 3 más o menos 2, y lo puedo hacer con un nivel de confianza del 99%.
Entrevistador	¿Entonces si aumento el nivel de confianza aumento la precisión de la estimación?
Alejandra	<i>Entonces si va a ser como más preciso porque el intervalo va a ser más grande.</i>
Entrevistador	Entonces ¿cuál de los dos es más preciso?
Alejandra	El del 95% ...

En esta parte de la entrevista con Alejandra se observa que sus análisis se basan en la expresión explícita del error que recuerda perfectamente y que le permite deducir el efecto del tamaño muestral y del nivel de confianza sobre el tamaño del intervalo.

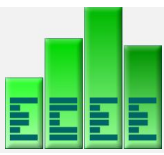
Sin embargo, para Alejandra tanto el tamaño muestral como el nivel de confianza influyen en la precisión de la estimación. Para el tamaño muestral dice: “entonces entre más aumente, más cercano y por eso es que va a ser más preciso el valor que estoy estimando”, dando a entender, de paso, que la precisión es de la del estimador puntual  $\bar{x}$  y no del intervalo con todos sus valores posibles. Para el nivel de confianza dice: “entonces si va a ser como más preciso porque el intervalo va a ser más grande”. Como se observa, Alejandra utiliza dos connotaciones diferentes para la precisión: en una la asocia con el menor tamaño del intervalo y con la cercanía consecuente entre el estimador muestral y el parámetro poblacional en tanto que con la otra la asocia con el mayor tamaño del intervalo porque contiene más valores y por ende es más preciso al brindar mayores posibilidades de acierto. Alejandra refleja una concepción acción sobre los intervalos que no le permite relacionar estos dos conceptos.



Veamos ahora unos apartes de la entrevista con Jerónimo.

	...
Entrevistador	Si nos dan un intervalo con una confianza del 80% ¿Qué podemos decir del intervalo del 80% de confianza con respecto al intervalo del 95% de confianza? ¿Qué relación hay entre ellos? ¿Cuál es más grande?
Jerónimo	Es más grande el de 95%... ya sé, si tengo más seguridad de que va a caer ahí, pues más posibilidades tengo para escoger. Pues yo pienso así. Pues entonces yo tengo más confianza de que la media va a estar ahí porque tengo más posibilidades de que caiga.
Entrevistador	¿Pero lo ideal es que el intervalo sea grande o que el intervalo sea pequeño?
Jerónimo	No, lo ideal es que sea pequeño.
Entrevistador	En términos de precisión, ¿es mejor tener un intervalo grande o un intervalo pequeño?
Jerónimo	Un intervalo pequeño.
Entrevistador	Entonces ¿cómo hacemos para que conservando la confianza del 95% el intervalo correspondiente sea igual en tamaño al intervalo con 80% de confianza? ¿Qué tendríamos que cambiar para lograr eso?
Jerónimo	Bueno, osea, bueno, si uno aumenta la muestra quiere decir que más población, si tomara toda la población pues da lo que es. Lo que yo digo es que si se aumenta la muestra, el intervalo se puede hacer más pequeño, pues que toma uno más datos de la población. Pero a la vez si se aumenta la muestra cogiendo los datos que están más alejados de la media pues...
Entrevistador	¿Cómo así?
Jerónimo	Bueno, es que si toma más datos, pues puede ser, es que a veces me confundo no sé. Si uno tomas más datos tienen más ehh, digamos que uno se puede acercar más a la media que uno busca. Pero también puede uno tomar datos que no sirvan y pues se alejaría uno más. ...

Jerónimo, al contrario de Alejandra no conoce la expresión que define el error que define el radio del intervalo de confianza, sin embargo su interpretación del efecto del nivel de confianza sobre el tamaño del intervalo es válido: “es más grande el de 95%... ya sé, si tengo más seguridad de que va a caer ahí, pues más posibilidades tengo para escoger. Pues yo pienso así, tengo más confianza de que la media va a estar ahí porque tengo más posibilidades de que caiga”. En igual forma, Jerónimo responde sobre el efecto del tamaño muestral: “si uno aumenta la muestra quiere decir que más población, si tomara toda la población pues da lo que es. Lo que yo digo es que si se aumenta la muestra, el intervalo se puede hacer más pequeño, pues que toma uno más datos de la población”. La intuición de Jerónimo se sustenta en términos de la estimación puntual, es decir en el valor de  $\bar{x}$  que está más cercano al valor de  $\mu$  si se calcula con más datos tal como él lo dice: “si tomara toda la población pues da lo que es”.



Sin embargo Jerónimo tiene una duda que lo mortifica: “pero también puede uno tomar datos que no sirvan y pues se alejaría uno más”. Esta posibilidad planteada por Jerónimo puede sugerir la falta de la constitución de una concepción de Objeto sobre la distribución de probabilidad de  $\bar{x}$  o, incluso, de la relación que existe entre el error de estimación de  $\bar{x}$  y la desviación estándar de la población.

## CONCLUSIONES

Las respuestas ilustradas evidencian que los estudiantes han construido una asociación entre el nivel de confianza y la precisión de la estimación, ‘más confianza mayor precisión’ es como si se asumiera la confianza en términos de la calidad de la estimación en sí misma y no con referencia al carácter aleatorio del estimador  $\bar{X}$  y a su distribución de probabilidad. Estas deficiencias reflejan que en muchas ocasiones los estudiantes no sobrepasan la concepción acción respecto a estos conceptos.

La complejidad inherente a los intervalos de confianza es producto de la gran cantidad de conceptos y de procesos necesarios para su construcción, hecho que obliga a realizar un pormenorizado análisis del nivel de comprensión y de las concepciones que los estudiantes tienen sobre todos estos conceptos. Los resultados de este análisis, utilizando los criterios de la teoría APOE, serán objeto de una publicación más extensa que la aquí presentada.

## REFERENCIAS

- Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *Apos theory —A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Behar, R. (2001). Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística. Tesis de doctorado. Barcelo: Universidad Politécnica de Catalunya.
- Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication, and researchers’ understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, 3, 299-311.
- Henriques, A. (2012). Students’ difficulties in understanding of confidence intervals. Trabajo presentado en el 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul, Korea Coex.
- Kalinowski, P. (2010) Identifying misconceptions about confidence intervals. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics - ICOTS8*. Ljubljana, Slovenia: Voorburg.
- Olivo, E., (2008). Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México. Tesis de doctorado. Granada: Universidad de Granada.
- Yáñez, G y Behar, R (2009) Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander, Colombia.