

## LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD DESDE LA PRIMARIA

Giovanni Sanabria

*Instituto Tecnológico de Costa Rica - Universidad de Costa Rica (Costa Rica)*

gsanabriab@yahoo.com, gsanabria@itcr.ac.cr

*El presente trabajo propone algunas reflexiones y un esquema para abordar la enseñanza del concepto probabilidad por medio de diferentes niveles de razonamiento a través de situaciones problema. A partir de un referente teórico se plantea que los conceptos de aleatoriedad y probabilidad deben ser estudiados progresivamente, donde su adquisición va evolucionando desde un nivel intuitivo hasta llegar a un nivel formal.*

### PALABRAS CLAVE

Didáctica, probabilidad frecuencial, ley de los grandes números, experimentación, simulación, Teoría de Situaciones Didácticas.

### INTRODUCCIÓN

Dado un fenómeno aleatorio con distintos resultados, la probabilidad de que ocurra un evento del fenómeno (subconjunto de resultados) se entiende como la medida de la posibilidad de que suceda el evento. En Sanabria (2012) se plantearon cuatro tipos de probabilidad:

Probabilidad subjetiva o intuitiva.

Probabilidad según criterio de experto.

Probabilidad frecuencial.

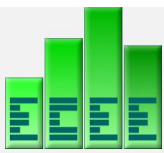
Probabilidad teórica o espacios de probabilidad.

Sin embargo, dicha clasificación y los textos usuales de probabilidad, por ejemplo, Devore (1998) y Walpole *et al.* (1999)), no permiten apreciar los distintos niveles de razonamiento que se pueden abordar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad. Además, comprender el concepto de probabilidad implica entender el concepto de aleatoriedad.

El presente trabajo propone y justifica un esquema para abordar la enseñanza del concepto de probabilidad de forma progresiva por medio de distintos niveles de razonamiento.

### MARCO DE REFERENCIA

La propuesta a presentar tiene su base en las teorías que se exponen a continuación, las primeras dos sumamente conocidas y actualmente importantes. La última, es una propuesta de una pequeña pauta que puede guiar la enseñanza de muchos temas en matemática, cuyas deficiencias y bondades deben estudiarse. Ésta se ha denominado 'De lo cualitativo a lo cuantitativo', y tiene su base en la estadística descriptiva.



### **Teoría de situaciones didácticas**

Esta teoría es propuesta por Brousseau (1986). En cada uno de los niveles de la propuesta se proponen situaciones problemas que el estudiante debe resolver a partir de su intuición y conocimientos previos. La resolución satisfactoria de estos problemas permitirá una mayor comprensión del concepto de probabilidad en ese nivel.

Además, se considera 'la paradoja de inadaptación a la exactitud'. En ciertas ocasiones el conocimiento se construye por etapas debido a que no hay suficientes situaciones, en estas etapas hay aproximación y cierta inexactitud entre el aprendizaje logrado y el conocimiento cultural. En la propuesta se opta por la enseñanza bajo la comprensión, así en cada nivel se escoge enseñar un concepto de probabilidad que si bien funciona a ese nivel, puede ser erróneo según los ojos del matemático. El concepto de probabilidad debe evolucionar conforme el concepto de medida evoluciona.

### **Transposición didáctica**

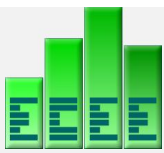
El fenómeno de transposición didáctica es propuesto por Chevallard (1991). De esta teoría se rescatan tres elementos orientadores para la propuesta:

Creaciones didácticas. El fenómeno de transposición didáctica existe y es necesario. El docente se vale de creaciones didácticas para lograr que el alumno comprenda el concepto. Estas creaciones didácticas muchas veces son juzgadas por el matemático por su distancia o débil relación con el saber sabio, e incluso pueden tener aspectos erróneos, pero debe pesar también su potencial pedagógico.

- De las nociones protomatemáticas a las paramatemáticas. En un proceso de enseñanza-aprendizaje se suele pretender que una noción protomatemática evolucione a una noción paramatemática; más concretamente, que la habilidad que tuvo el estudiante para coordinar sus conocimientos previos para resolver con éxito una situación adidáctica inicial, evolucione a una noción herramienta que permita resolver situaciones similares.
- De lo preconstruido al algoritmo. La historia del estudiante, su intuición y su primer contacto con un saber, genera en él un saber preconstruido, la idea intuitiva de lo que es ese saber. El saber preconstruido es un saber frágil ligado a las situaciones iniciales. Lo preconstruido se aleja del saber científico, porque no es descontextualizable. El proceso de enseñanza-aprendizaje busca que este saber pre-construido evolucione a un saber científico que establece su algoritmización. Lo anterior concuerda con una teoría de la comprensión en la cual la aprehensión de un concepto es gradual (Godino, 1996, citado en Batanero, 2005).

### **Significados de probabilidad**

Batanero (2005) brinda los distintos significados históricos de la probabilidad: significado intuitivo, significado laplaciano, significado frecuencial, significado subjetivo, significado teórico. Esta clasificación basada en el desarrollo histórico de la probabilidad nos puede ayudar a abordar la enseñanza de la probabilidad, al respecto Batanero (2005) señala: "... su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, en razón de que están ligadas dialécticamente. La probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidad a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo



matemático que ayuda a comprender la realidad”.

### De lo cualitativo a lo cuantitativo

Muchos conocimientos matemáticos buscan describir relaciones entre elementos. Dentro de la estadística descriptiva, la clasificación de variables, puede ayudar a modelar la apropiación de ciertos conceptos matemáticos. Así, inicialmente se introduce el concepto a un nivel cualitativo, luego evoluciona a un nivel discreto, hasta llegar a un nivel continuo, en algunos casos.

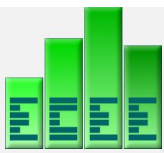
Por ejemplo, analicemos el concepto de medida. Inicialmente el niño aprende a contar desde una perspectiva cualitativa, donde el número indica la posición que ocupa un dedo de la mano, luego indica la posición de un elemento en el conjunto (cualidad ordinal) y después la cantidad de elementos en un conjunto (cualidad cardinal). Luego, para determinar cual conjunto finito tiene más elementos, desarrolla el nivel de razonamiento discreto de la medida. Este concepto evoluciona cuando se estudia los números racionales, y luego los reales. Incluso a nivel universitario, el concepto de medida evoluciona con el estudio de la integración.

En general, la enseñanza de muchos conocimientos matemáticos pasan de un razonamiento cualitativo a un cuantitativo, sin perder su carácter cualitativo. Dado que la probabilidad es una medida (medida de la posibilidad de que suceda de un evento), la presente propuesta plantea que su enseñanza se aborde progresivamente, desde una faceta cualitativa del concepto y que evolucione a un concepto cuantitativo continuo para un nivel universitario.

### PROPUESTA DE NIVELES DE RAZONAMIENTO EN PROBABILIDAD

A partir del marco de referencia anterior se plantean 5 niveles de razonamiento para abordar la enseñanza de la probabilidad. Se parte del supuesto que cuando un concepto evoluciona de lo cualitativo a lo cuantitativo, este pasa por una serie de niveles de razonamiento, donde los niveles superiores no anulan los anteriores, por el contrario los enriquecen. Seguidamente se presenta la relación entre los niveles planteados y los significados de probabilidad.

Significado	Nivel cualitativo	Nivel discreto	Nivel relativo	Nivel algebraico	Nivel numérico
Intuitivo	X	X	X	X	X
Laplaciano		X	X	X	X
Frecuencial					X
Subjetivo					X
Teórico				X	X



### Observaciones

Las marcas indican en qué niveles se desarrolla en cierto grado un significado. Sería ingenuo pensar que se desarrolle un significado en su totalidad en algunos de los niveles. El significado laplaciano inicia a un nivel discreto, cuando las probabilidades a hallar son sobre un mismo espacio muestral, por lo tanto no se requiere el denominador (los casos totales).

Los niveles algebraico y numérico se pueden desarrollar conjuntamente. Incluso el nivel numérico se puede iniciar antes del algebraico.

En el nivel numérico se pretende desarrollar el concepto de aproximación al valor de una probabilidad. La matemática numérica se dedica a establecer aproximaciones a un valor real, y también a formular sucesiones de aproximaciones cada vez mejores, que parten de una o varias aproximaciones dadas a priori. Note que lo anterior se encuentra muy ligado con el significado frecuencial y subjetivo. Sin embargo, la propuesta no ha contemplado ejemplos para el significado subjetivo.

Esta propuesta de niveles está a un nivel indagatorio, requiere ser más robusta, debe ser nutrirlo con más referentes teóricos.

#### *Primer nivel: cualitativo*

Contenidos de enseñanza: situaciones aleatorias y deterministas, concepto de espacio muestral, situaciones improbables, poco probables, muy probables.

La existencia del azar es un tema controversial que puede despertar la curiosidad de los estudiantes. En esta etapa es muy importante la discusión. Lo peor que se puede hacer es formalizar demasiado esta etapa que es intuitiva y natural. Además interesa que repita experiencias aleatorias y que observe que se puede presentar diferentes resultados. Interesa que pueda idear maneras de modelar situaciones aleatorias.

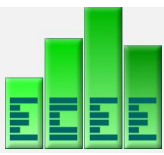
Interesa que el estudiante pueda calificar la probabilidad en términos cualitativos. Es decir, la probabilidad es la medida de la posibilidad de que ocurra un evento, esta medida se puede introducir de forma cualitativa ordinal: improbable, poco probable y muy probable. La idea es recurrir a la intuición de los estudiantes para que ellos califiquen de forma a-didáctica la probabilidad, es decir, sería un error tratar de definir: improbable, poco probable y muy probable. Dejemos que ellos intuitivamente se enfrenten a las situaciones y posteriormente propiciemos la discusión para confrontar sus apreciaciones para afinar el concepto de estos calificativos de probabilidad.

El objetivo principal de la probabilidad es orientar en los procesos de decisión, esto se puede introducir desde este nivel.

Ejemplo. El cielo está oscuro y voy a salir a caminar, ¿debo llevar sombrilla? La decisión que se toma no siempre es la correcta pero sí la más probable.

#### *Segundo nivel: Discreto*

Contenidos de enseñanza: espacio muestral y eventos, calificación de la probabilidad de que ocurra un evento sobre un espacio finito equiprobable, comparación de probabilidad de eventos de un mismo espacio muestral, simulación de situaciones de la realidad con objetos concretos.



Se pretende ver a la probabilidad, medida de la posibilidad de que ocurra un evento, como una medida discreta. Así, la probabilidad de un evento se puede ver como la cantidad de elementos del espacio muestral que favorecen ese evento. Pero, ¡eso sería un gran error!

La intención es ver la probabilidad en términos relativos donde en vez de recurrir a las fracciones, se recurre a valores enteros ligados a un componente cualitativo. La idea es establecer un paso intermedio entre una probabilidad cualitativa (primer nivel) y una probabilidad según la Ley de Laplace (tercer nivel). En concreto, se va a calificar la probabilidad de que ocurra un evento como:

Improbable: si no incluye por lo menos uno de los resultados.

Poco probable: si abarca menos de la mitad de los resultados.

De un 50%: si abarca la mitad de los resultados.

Muy probable: si abarca más de la mitad de los resultados.

100% probable: si abarca todos resultados.

Se recomienda no dar estas definiciones directamente, sino introducirlas por medio de situaciones problema y su discusión. Además, a este nivel, se puede introducir una nueva faceta del concepto de probabilidad: la comparación de eventos de un mismo espacio muestral.

*Tercer nivel: relativo*

Contenidos de enseñanza: Regla de Laplace, Comparación de probabilidad de eventos de distinto espacio muestral.

Aquí la probabilidad es dada por la ley de Laplace. La necesidad de esta medida de probabilidad relativa se puede introducir a través del problema de comparar la probabilidad de eventos de distintos espacios muestrales.

*Cuarto nivel: algebraico*

Contenidos de enseñanza: propiedades de las probabilidades.

*Quinto nivel: numérico (aproximación)*

Contenidos de enseñanza: probabilidad frecuencial.

## CONCLUSIONES

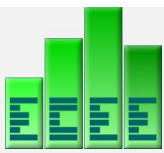
A partir del referente teórico se establecieron cinco niveles para abordar la enseñanza del concepto de probabilidad: cualitativo, discreto, relativo, algebraico y numérico.

En cada uno de los niveles se establecieron pautas generales sobre la enseñanza de la probabilidad y algunos ejemplos. Así, se aborda la comparación entre eventos de un mismo espacio muestral, la comparación de eventos de espacios muestrales distintos, la probabilidad para orientar la toma de decisiones y La ley de los Grandes números como herramienta para aproximar una probabilidad.

La propuesta presentada es una primera aproximación que requiere ser nutrida, pulida y llevada al aula para ser válida.

## REFERENCIAS

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 8 (3), 247-263.



- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115. Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo.
- Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique Grupo Editor, S.A.
- Devore, J. (1998). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México: International Thomson Editores.
- Ekeland, I. (1992). *Al Azar*. Barcelona: Editorial Gedisa.
- Sanabria, G. (2012). *Comprendiendo las probabilidades*. Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Sanabria, G. y Núñez, F. (2011). Introducción a la probabilidad utilizando la simulación en Excel. En *Memorias del 1er Encuentro Internacional de Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística - EIEPE*. México: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Sanabria, G. y Núñez, F. (2010). Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: probabilidad frecuencial. En *Memorias III Encuentro de Enseñanza de la Matemática - UNED*. InBio Parque, Heredia, Costa Rica.
- Walpole, R., Myers, R. y Myers, S. (1999). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. USA: Prentice-Hall Hispanoamericana. S.A.