

## Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión $g(x) = ax^2$

Rafael E. Gutiérrez  
Juan Luis Prieto

(Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática; Universidad del Zulia. Venezuela)

### Resumen

En este trabajo describimos una secuencia para caracterizar las transformaciones “deformación” y “reflexión” en familias de parábolas definidas por  $g(x) = ax^2$ , utilizando el GeoGebra. Esta secuencia se desarrolla en tres momentos en los que se busca establecer los intervalos de variación del parámetro  $a$  para llevar a cabo el análisis, observar las características de las curvas de  $g(x)$  mientras el parámetro cambia de valor y caracterizar las familias de curvas correspondientes a cada intervalo. El paso por estos tres momentos favorece el desarrollo de destrezas para coordinar las representaciones gráfica y simbólica de funciones reales como la abordada en este trabajo. De este modo, creemos que esta propuesta puede potenciar la práctica de los profesores de Matemática que laboran en Educación Media y que sienten interés en el uso de entornos tecnológicos.

### Palabras clave

Parámetro, Deformación, Reflexión, Función cuadrática, GeoGebra

### Abstract

In this paper we describe a sequence to characterize "stretching" and "reflection" transformations in families of parabolas defined by  $g(x)=ax^2$  with GeoGebra. This sequence consists of three stages in which we establish the ranges of variation of the parameter  $a$  to conduct the analysis, observe the properties of the curves  $g(x)$  when the parameter takes different values, and characterize the families of curves corresponding to each interval. This scaffolding of the process favors the development of skills to coordinate the graph and symbolic representations of real functions as the studied in this paper. In this way, we believe that this proposal may improve the practice of those mathematics teachers in Secondary Education who show interest in the use of digital technologies.

### Keywords

Parameter, Stretching, Shrinking, Reflection, Quadratic Function, GeoGebra

## 1. Introducción

Algunos investigadores relacionan la comprensión de un objeto matemático con la actividad de coordinación de sus múltiples representaciones en situaciones de resolución de problemas (Borba, 1993; Borba y Villareal, 2005; Duval, 1996). Desde este enfoque cognitivo, un desafío para la enseñanza media consiste en promover el desarrollo de las capacidades del alumno para coordinar las diversas representaciones de una misma noción matemática (NCTM, 2000, pp. 303-304). Entre los contenidos que resultan provechosos para lograr este propósito destaca el tema de las transformaciones de funciones reales, dada la variedad de representaciones desde las cuales es posible su abordaje. Sin embargo, en los últimos años, la enseñanza de las funciones se ha caracterizado por un tratamiento de



los contenidos bajo un enfoque más algebraico, dejando de lado el trabajo con las representaciones gráficas y tabulares en muchos de los casos (Rezende, Pesco y Bortolossi, 2012, pp. 75).

Este tipo de enseñanza ha traído como consecuencia que los alumnos presenten serias dificultades al momento de enfrentarse a situaciones en las que deben establecer relación entre las representaciones gráficas y simbólicas de una función real en particular (Guzmán, 1998). No obstante, estas dificultades podrían ser superadas por medio de las tecnologías digitales, cuyos usos especiales favorecen el desarrollo de habilidades para la coordinación de las representaciones gráficas, simbólicas y tabulares de las funciones, potenciando así las capacidades de exploración, visualización y simulación matemática de los alumnos (Artigue, 2012, pp. 43). Una de estas tecnologías es el GeoGebra, un software libre de matemática dinámica a través del cual es posible que los alumnos observen, comparen e interaccionen con las funciones reales a partir de sus distintas representaciones simultáneamente, lo que ha llevado a este software a ser utilizado por profesores e investigadores en todo el mundo (González, 2011; Diković, 2009; Hohenwarter, 2006).

Algunas evidencias de lo provechoso que resulta el utilizar al GeoGebra para abordar este tópico se ven reflejadas en investigaciones que dan cuenta de una mejoría en la comprensión de las características de las funciones cuadráticas en alumnos que basan sus razonamientos en la coordinación de las representaciones gráfica y simbólica de esta familia, tras participar en secuencias instruccionales apoyadas en el software (Darmawan y Iwan, 2011). Por esta razón, creemos necesario que el profesor se apropie del GeoGebra y sea capaz de integrarlo eficientemente en su práctica profesional, lo que supone, por ejemplo, que éste conozca y desarrolle formas de analizar las relaciones entre la variación de los parámetros de la fórmula que define a una función real y las gráficas correspondientes, desde un punto de vista profesional (como docente) y que se apoyen en entornos tecnológicos como el que ofrece GeoGebra.

Atendiendo a esta necesidad, en este trabajo se describe una secuencia para caracterizar las transformaciones geométricas “deformación” y “reflexión” en distintas familias de parábolas definidas por la expresión  $g(x) = ax^2$ , a partir de las relaciones entre los valores que toma el parámetro  $a$  y las curvas asociadas mediante el GeoGebra. Esta propuesta representa un aporte al desarrollo de destrezas para la coordinación de representaciones de las funciones reales en entornos tecnológicos. Finalmente, vale destacar que esta secuencia es parte de un análisis más detallado que el Grupo TEM llevó a cabo sobre los efectos asociados a expresiones más generales de una función cuadrática, tales como  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , y que se han reseñado en trabajos previos (Gutiérrez, Araujo y Prieto, 2012).

## 2. Transformaciones de funciones

Desde un punto de vista geométrico, la transformación de una función  $f(x)$  es otra función  $g(x)$  cuya gráfica presenta algún “cambio” en relación a las cualidades (forma o posición) que posee la gráfica de la primera función; visto así,  $f(x)$  actúa como referente de  $g(x)$  para la transformación aplicada. En cuanto a lo algebraico, estos efectos geométricos se relacionan con los cambios en los valores de los parámetros contenidos en la expresión algebraica que define a  $f(x)$ . Ejemplos de lo anterior se tienen al sumar o multiplicar un valor real  $k$  no nulo ( $k \in \mathbb{R}^*$ ) a la fórmula de una función  $f(x)$ , obteniendo así las nuevas funciones  $g(x) = f(x) + k$  y  $h(x) = k \cdot f(x)$ , respectivamente. En cada caso se obtiene una transformación distinta y, por tanto, gráficas que han sufrido algún cambio respecto a su referente.

En algunos casos, la gráfica de la función referente  $f(x)$  es el resultado de otra transformación más simple. En los demás casos  $f(x)$  no admite lo anterior, dando cabida a la existencia de un

conjunto de funciones que no resultan de transformación alguna y que se denominan *funciones prototipo* (Confrey y Smith, 1991). En el contexto de este estudio, las funciones prototipo son consideradas como representantes de las diferentes clases de funciones. Algunos ejemplos de funciones prototipo son las siguientes:  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = e^x$ ,  $h(x) = \cos x$ .

En general, las transformaciones de funciones se clasifican en dos tipos, a saber, rígidas y no rígidas (Larson, Hostetler y Edwards, 2008):

## 2.1. Transformaciones rígidas

La transformación de una función real es rígida cuando su gráfica ha cambiado sólo de posición en el plano cartesiano, con respecto a la posición ocupada por su referente. De las posibles transformaciones rígidas que existen nos centraremos en las siguientes:

### 2.1.1. Traslación

Se dice que la gráfica de una función  $g(x)$  es la traslación de su referente  $f(x)$  si cada punto de la primera es homólogo de algún punto de la gráfica de la segunda función según un vector de traslación determinado. Las traslaciones de funciones pueden darse en las direcciones vertical, horizontal u oblicua.

### 2.1.2. Reflexión

Se dice que la gráfica de una función  $g(x)$  es la reflexión de  $f(x)$  si cada uno de sus puntos es el simétrico de algún punto de la gráfica de la segunda función (su referente), con respecto a un eje de simetría. Cuando el eje de simetría coincide con el *eje x*, la gráfica de  $g(x)$  es la reflexión de la gráfica de  $f(x)$  si ocurre que  $g(x) = -f(x)$ . Análogamente, cuando el eje de simetría coincide con el *eje y*, la gráfica de  $g(x)$  es el reflejo de la gráfica de  $f(x)$  si ocurre que  $g(x) = f(-x)$ .

## 2.2. Transformaciones no rígidas

La transformación de una función real es no rígida cuando su gráfica sólo ha experimentado alguna distorsión (cambio) en su forma, con respecto a aquella que posee la gráfica de su referente. Debido a su naturaleza, se admite la mención a este tipo de transformaciones como una “deformación”. Cabe destacar los siguientes dos tipos de transformaciones no rígidas:

### 2.2.1. Deformación vertical

Esta deformación se produce al multiplicar la expresión algebraica de una función prototipo  $f(x)$  por un número real positivo  $k$  (con  $k \neq 1$ ), obteniendo así otra función  $g(x) = k \cdot f(x)$ . Una comparación entre las imágenes de ambas funciones para cada valor del dominio conlleva a una clasificación de la deformación vertical en dos tipos: *dilatación* y *contracción*. Por un lado, se dice que la deformación vertical es una *dilatación* si para todo  $t$ , con  $f(t)$  no nulo ( $f(t) \in \mathbb{R}^*$ ) ocurre que el valor absoluto de su imagen en  $g(x)$  es mayor al valor absoluto de su imagen en  $f(x)$ , esto es  $|g(t)| > |f(t)|$ . Por otro lado, se dice que la deformación vertical es una *contracción* si para todo  $t$ , con  $f(t)$  no nulo ( $f(t) \in \mathbb{R}^*$ ) ocurre que el valor absoluto de su imagen en  $g(x)$  es menor al valor absoluto de su imagen en  $f(x)$ , esto es  $|g(t)| < |f(t)|$ . En ambos casos, se tiene que  $g(t)$  es  $k$  veces mayor o menor que  $f(t)$ , según el valor que tome  $k$ . En este sentido, cabe preguntarse: ¿para qué



valores de  $k$  la función  $g(x)$  es una dilatación o contracción vertical de  $f(x)$ ? Esta interrogante es respondida a lo largo de la propuesta.

### 2.2.2. Deformación horizontal

Esta deformación se produce cuando la variable independiente de la función prototipo  $f(x)$  se multiplica por un número real positivo  $k$  (con  $k \neq 1$ ), obteniendo de esta manera una nueva función  $g(x) = f(k \cdot x)$ . Al igual que el caso anterior, la deformación horizontal puede ser de dos tipos: *dilatación* y *contracción*.

## 3. Consideraciones del análisis

### 3.1. En cuanto al objeto matemático

Dada la naturaleza de la función determinada por la expresión  $g(x) = ax^2$  (con  $a \in \mathbb{R}^*$ ), la cual es el foco de este análisis y que da origen a una familia particular de parábolas (aquellas con vértice en el origen del *Sistema de Coordenadas Cartesiano*), la secuencia que se propone tiene en cuenta dos tipos de transformaciones geométricas: *deformación* y *reflexión*, las cuales se relacionan con los cambios en los valores del parámetro  $a$  de  $g(x)$ . En el caso de la deformación, la curva referente es aquella correspondiente a  $f(x) = x^2$ , denominada *parábola canónica*. En el caso de la reflexión, cada curva reflejada tiene su propio referente y sólo una de ellas es la reflexión de la parábola canónica (cuando  $a = -1$ ). Más aún, las curvas restantes pueden considerarse como la reflexión de parábolas previamente deformadas.

Añadido a lo anterior, se tuvieron en cuenta los siguientes elementos asociados a las parábolas de la expresión  $f(x) = ax^2$ :

- *Eje de simetría*: recta que divide a la parábola en dos porciones simétricas. En este caso, tal recta coincide con el *eje y*.
- *Vértice*: punto de intersección de la parábola con su eje de simetría. En este caso, dicho punto es aquel de coordenadas  $(0,0)$ .
- *Eje de reflexión*: recta perpendicular al eje de simetría que pasa por el vértice. En este caso, la recta en cuestión coincide con el *eje x*.
- *Concavidad*: ubicación de todos los puntos de la parábola con respecto a los semiplanos determinados por el eje de reflexión.

### 3.2. En cuanto al GeoGebra

Para representar las transformaciones de deformación y reflexión en el GeoGebra, la secuencia considera el uso de un *deslizador*, herramienta del software que posibilita al usuario la vinculación, en tiempo real, de intervalos de valores continuos o discretos a parámetros que son parte de expresiones algebraicas más complejas, realizar los ajustes necesarios sobre los extremos del intervalo y visualizar dinámicamente los cambios que sufren las expresiones involucradas y sus representaciones análogas (p.e., las curvas, en el caso de las funciones) mientras el parámetro toma distintos valores.

La construcción de un deslizador en el entorno del Geogebra requiere tener en cuenta dos cuestiones de la herramienta: el *tipo de deslizador* y los valores *mínimo* y *máximo*. En relación a lo primero, el software permite construir deslizadores de tipo: (i) *número*, usados para realizar

variaciones entre números reales, (ii) *ángulo*, propicios para realizar variaciones entre valores angulares, y (iii) *entero*, los cuales se utilizan para realizar variaciones entre números enteros. Al crear el deslizador el GeoGebra le asocia un rótulo, por lo general una letra minúscula, que puede renombrarse fácilmente. En relación a lo segundo, los valores *mínimo* y *máximo* del deslizador son aquellos que representan los extremos del intervalo de variación del parámetro. Dada la naturaleza de los valores que toma  $a$  en la función  $g(x) = ax^2$ , la secuencia que sigue hace uso de un deslizador de tipo *número*, de rótulo  $a$  y cuyos valores mínimo y máximo cambian de acuerdo a las necesidades del análisis.

Finalmente, es preciso comentar la manera en que se asocia el deslizador correspondiente a la expresión  $g(x) = ax^2$ . Para ello, lo primero es utilizar la herramienta “Deslizador” para crear un deslizador tipo número. Lo segundo es introducir la expresión  $g(x) = ax^2$  en el “Campo de Entrada” del GeoGebra. Al hacer esto se puede apreciar una parábola en la *vista gráfica*, la cual cambia de forma con cada valor que toma el deslizador construido previamente. Vale resaltar un par de opciones que son de mucha utilidad en el desarrollo de la secuencia: *Animación activada* y *Rastro activado*. La primera se utiliza para variar automáticamente el deslizador, mientras que la segunda se utiliza para observar el rastro que va dejando la curva que se transforma a medida que el deslizador varía.

### 3.3. En cuanto al procedimiento de análisis

Dado que la variación del parámetro  $a$  produce dos tipos de transformaciones sobre las parábolas asociadas a  $g(x) = ax^2$ , la secuencia propone un análisis de la deformación y reflexión por separado. En ambos casos, este análisis consiste en: (i) establecer los intervalos en los cuales el parámetro debe variar para hacer posible la visualización de uno u otro efecto, (ii) ajustar el deslizador para cada intervalo, (iii) observar las características de las parábolas representadas en la vista gráfica tras la variación del deslizador, y (iv) caracterizar las familias de parábolas. El desarrollo de este proceso permite apreciar las relaciones entre los valores que toma el parámetro en cada momento y las cualidades de las curvas deformadas y reflejadas mostradas en el GeoGebra.

## 4. Secuencia de análisis

La secuencia que sigue consta de tres momentos. El primer momento consiste en establecer los intervalos de variación del parámetro para los cuales es posible caracterizar las transformaciones de deformación y reflexión asociadas a  $g(x) = ax^2$ . El segundo momento es dedicado al análisis de la deformación. En éste se realizan los ajustes convenientes al deslizador  $a$ , se hace variar el mismo para visualizar el efecto y se caracterizan las parábolas asociadas en relación a éste. El tercer momento se desarrolla de manera análoga al momento anterior, caracterizando esta vez el efecto de reflexión.

### 4.1. Momento 1

Definir los intervalos de variación del parámetro de  $g(x) = ax^2$  es el primer paso para el establecimiento de relaciones entre las representaciones gráfica y simbólica de esta función en el entorno del GeoGebra. Esto supone tener en cuenta los valores que puede tomar el parámetro según el tipo de función que se trate. En este caso  $a$  es un número real no nulo ( $a \in \mathbb{R}^*$ ), lo que hace al 0 un valor “crítico” para el análisis en cuanto determina dos intervalos de variación del parámetro donde este valor es uno de los extremos:  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ . Luego de esto, es importante conocer los cambios de forma o posición de las parábolas que resultan de la variación del parámetro en cada uno de estos intervalos, utilizando el GeoGebra. Una forma de visualizar lo anterior es a través del establecimiento de un intervalo que contenga valores de  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$  a la vez. Por ejemplo, si se considera el



intervalo  $[-43,25]$ , se deben ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en  $-43$  y  $25$  respectivamente.<sup>1</sup>

Posteriormente, se activa la animación sobre el deslizador para observar el comportamiento de la curva dibujada en la vista gráfica. En la medida que el deslizador toma valores distintos del intervalo  $[-43,25]$  se aprecian cambios de concavidad en esta curva, siendo cóncava hacia arriba cuando  $0 < a \leq 25$  y cóncava hacia abajo cuando  $-43 \leq a < 0$ . Si estas situaciones se acompañan de la activación del rastro a la curva, es posible apreciar con más detalle las dos clases de parábolas mostradas (ver Figura 1). Se concluye entonces que las parábolas cóncavas hacia arriba, exceptuando a la canónica, son objeto de una *deformación vertical*, mientras que aquellas parábolas cóncavas hacia abajo son el resultado de una *reflexión*. Una explicación más detallada de estas conclusiones se hace en los momentos 2 y 3 de la secuencia.

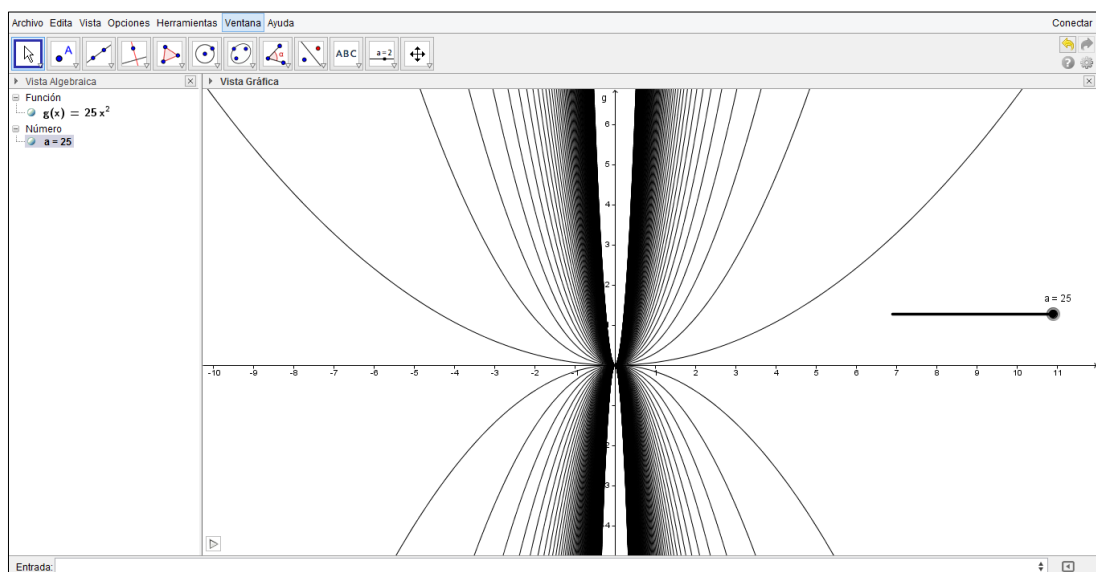


Figura 1. Cambios de concavidad de la curva asociada a  $g(x) = ax^2$  tras la variación de  $a$  en  $[-43,25]$ .

## 4.2. Momento 2

Para estudiar el efecto de deformación en las curvas de la función  $g(x) = ax^2$  con el GeoGebra, sin que intervenga la reflexión, el parámetro  $a$  de  $g(x)$  debe variar en un intervalo comprendido en  $(0, +\infty)$ . En este intervalo el 1 representa otro valor crítico del análisis, ya que al ser representado en el deslizador se obtiene una gráfica de  $g(x)$  igual a la parábola canónica y, por lo tanto, imposible de entender como una curva deformada por los aprendices. La existencia de este valor divide al estudio de la deformación en dos casos asociados con los intervalos  $(0, 1)$  y  $(1, +\infty)$ .

### 4.2.1. Caso 1: Contracción en el intervalo $(0, 1)$

El análisis de la deformación producida en el intervalo  $(0, 1)$  se inicia con el ajuste de los valores mínimo y máximo del deslizador  $a$  en 0 y 1, respectivamente. Luego de esto, se activan las opciones “Rastro activado” a la parábola y “Animación activada” al deslizador para apreciar algunas

<sup>1</sup>Aunque el 0 pertenece al intervalo  $[-43,25]$ , éste no incide sobre el análisis como se muestra más adelante.

curvas deformadas que corresponden a  $g(x) = ax^2$  y que se ubican en la región del plano comprendida entre el eje  $x$  y la parábola canónica (ver Figura 2).

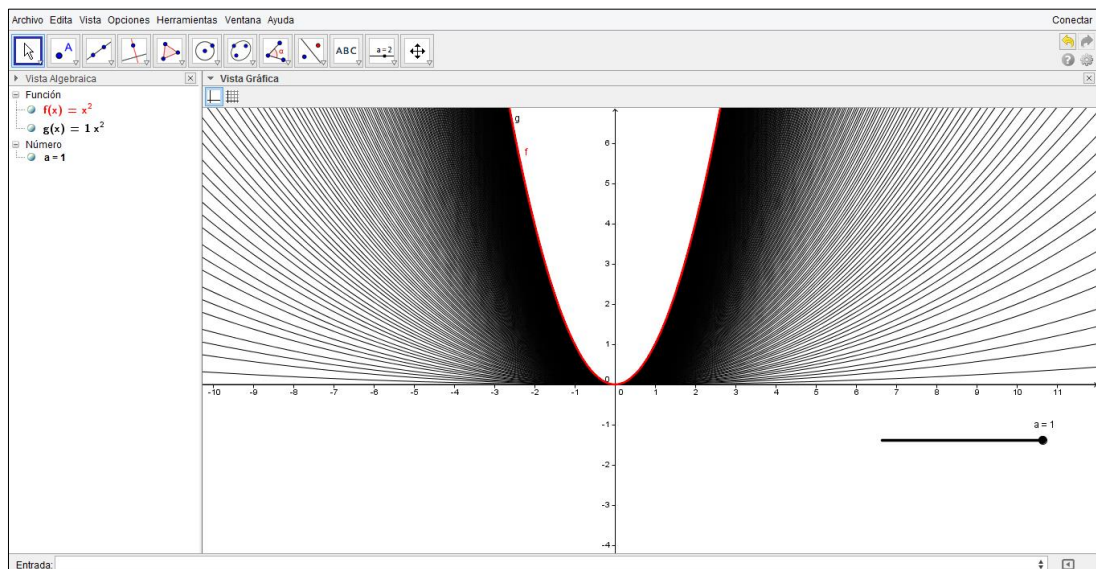


Figura 2. Familia de parábolas contraídas asociadas a  $g(x) = ax^2$ , con respecto a la parábola canónica.

Todas las curvas de  $g(x)$  que presentan esta particularidad son objeto de una *contracción* dado que  $|g(x)| < |f(x)|$  ( $x \neq 0$ ) para todo valor de  $a$  comprendido en el intervalo  $(0, 1)$ . Desde un punto de vista geométrico, la relación entre estas imágenes puede tener sentido al representarlas como segmentos paralelos al eje  $y$ , que van desde un valor  $x$  del dominio hasta las curvas que corresponden a  $g(x)$  y  $f(x)$  para cualquier valor de  $a$  en el intervalo  $(0, 1)$ , observándose con ello que el primer segmento tiene menor longitud que aquel vinculado a la parábola canónica (ver Figura 3).

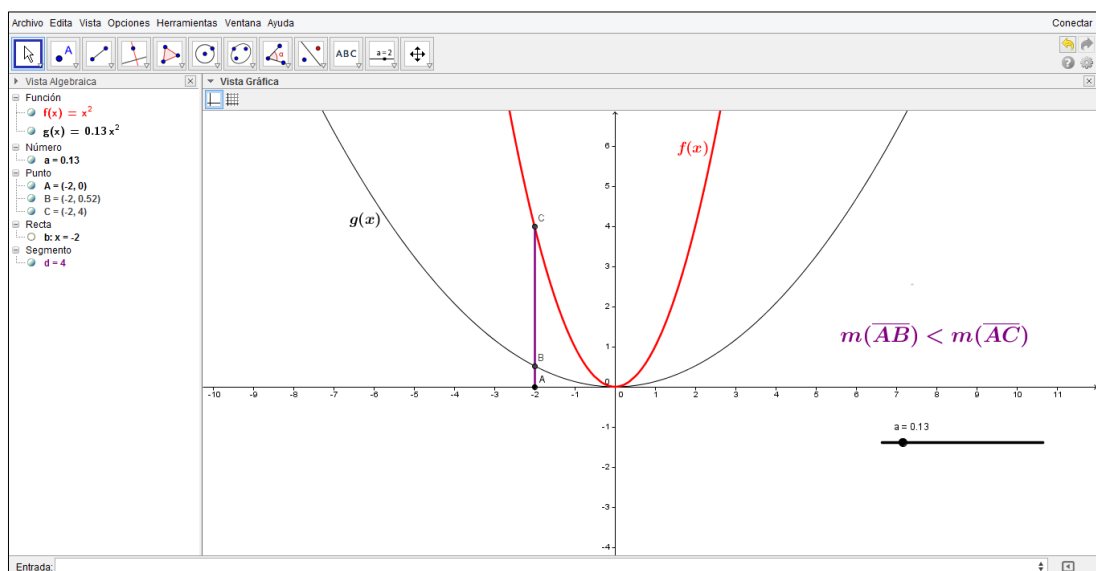


Figura 3. Relación entre las imágenes de  $g(x)$  y  $f(x)$  en  $(0, 1)$  desde un punto de vista geométrico.

Otra conclusión de observar la deformación sobre esta familia de curvas es que la contracción se hace más notable sobre una parábola cuando el valor del parámetro  $a$  se aproxima al mínimo del intervalo. En otras palabras, las ramas de las parábolas asociadas a  $g(x) = ax^2$  tienden a ser más próximas al *eje x* en la medida que  $a$  se aproxima a 0. Contrariamente, en la medida que  $a$  se aproxima al máximo del intervalo, las ramas de las parábolas de  $g(x)$  tienden a ser más próximas a las ramas de la parábola canónica, por lo cual la contracción que se produce se hace cada vez menos evidente.

#### 4.2.2. Caso 2: Dilatación en el intervalo $(1, +\infty)$

Para observar la deformación producida en el intervalo  $(1, +\infty)$ , lo primero es ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en 1 y cualquier valor mayor que éste, respectivamente. Pero, ¿cuán mayor debe ser el máximo? Por ejemplo, si se ajusta el máximo del deslizador en 25, utilizando las opciones “Rastro activado” y “Animación activada” es posible apreciar algunas parábolas correspondientes a  $g(x) = ax^2$  que se localizan entre las ramas de la curva canónica (ver Figura 4). Si el valor máximo seleccionado se aumenta, por ejemplo a 100, la cantidad de parábolas mostradas en la vista gráfica también aumenta considerablemente. En este sentido, la elección de un valor máximo para el deslizador queda sujeta a la necesidad que tenga el docente de hacer notar más elementos de la familia de parábolas estudiadas.

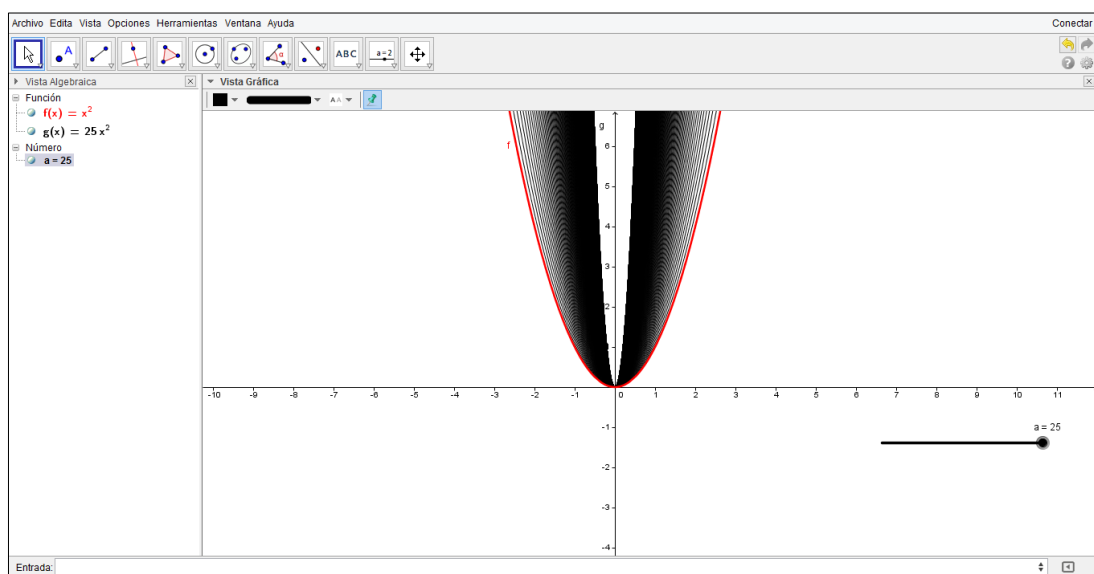


Figura 4. Familia de parábolas dilatadas asociadas a  $g(x) = ax^2$ , con respecto a la parábola canónica.

Volviendo al caso del intervalo  $(1, 25]$ , todas las curvas de  $g(x)$  que muestra el GeoGebra son objeto de una *dilatación* ya que  $|g(x)| > |f(x)|$  para todo valor de  $x \neq 0$  del dominio de ambas funciones. Análogamente a la contracción, la desigualdad anterior puede mostrarse geoméricamente a través de segmentos paralelos al *eje y* que representan a las imágenes de ambas funciones y que se dibujan desde un valor  $x$  del dominio (sobre el *eje x*) hasta cada curva  $g(x)$  y  $f(x)$ , observando con ello que el segmento asociado a  $g(x)$  tiene mayor longitud que aquel vinculado a  $f(x)$  (ver Figura 5). Para una mejor apreciación de la dilatación se sugiere tomar valores del dominio próximos al origen del sistema.



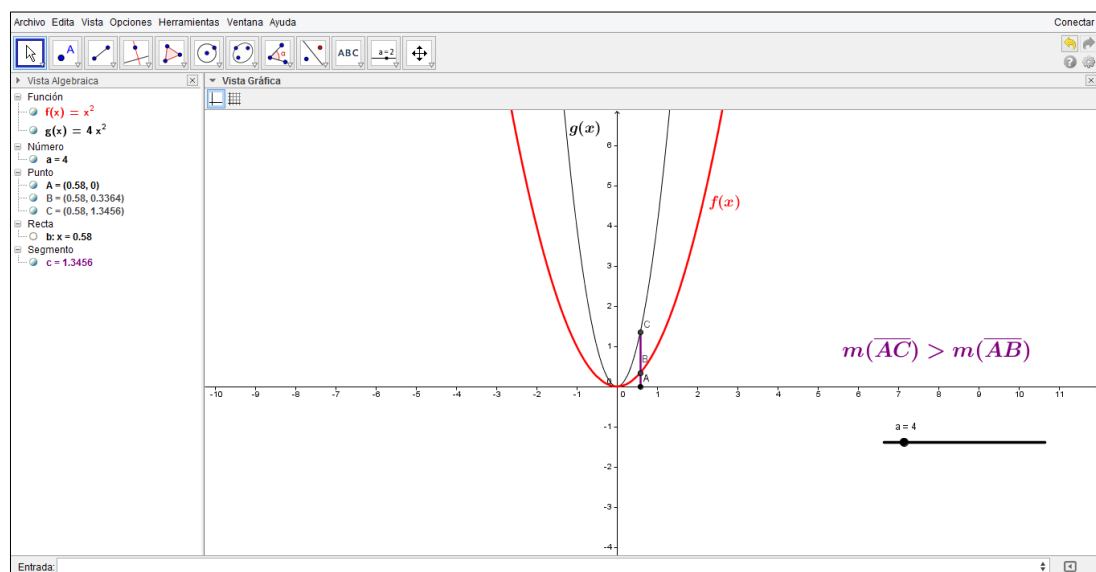


Figura 5. Relación entre las imágenes de  $g(x)$  y  $f(x)$  en  $(1, +\infty)$  desde un punto de vista geométrico.

### 4.3. Momento 3

Para estudiar el efecto de reflexión en las parábolas de  $g(x) = ax^2$  por medio del GeoGebra y sin que intervenga la deformación, es necesario hacer variar el parámetro  $a$  en un intervalo comprendido entre  $(-\infty, 0)$ . Un valor crítico del análisis en este intervalo es el  $-1$  ya que, cuando el deslizador se posa sobre éste, la gráfica de  $g(x)$  que se muestra en la vista gráfica es el reflejo de  $f(x)$ , la parábola canónica. Atendiendo a este valor, se establecen los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(-1, 0)$  que dividen al estudio de la reflexión en dos casos:

#### 4.3.1. Caso 1: Reflexión en el intervalo $(-\infty, -1)$

Para observar la reflexión vinculada al intervalo  $(-\infty, -1)$  es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en cualquier valor menor que  $-1$  y éste, respectivamente. Por ejemplo, ajustando el mínimo del deslizador en  $-18$  y utilizando las opciones “Rastro activado” y “Animación activada” es posible apreciar una familia de parábolas de  $g(x)$  que se ubican en la región del plano comprendida por las ramas de la curva que es el reflejo de la parábola canónica, esto es, aquella obtenida cuando  $a = -1$  (ver Figura 6). Todas las curvas de  $g(x)$  que se localizan en esta región del plano poseen la cualidad de ser el reflejo de alguna curva que se ha dilatado previamente, donde el eje de reflexión coincide con el *eje x*.

Dado que el mínimo del deslizador debe ajustarse en un valor cualquiera menor que  $-1$ , se considera pertinente observar la reflexión que presentan las curvas de  $g(x)$  a medida que el parámetro  $a$  varía en intervalos donde este valor mínimo es cada vez menor. La animación sobre el deslizador permite observar que las ramas de las parábolas reflejadas se aproximan al *eje* y cuando el valor del parámetro se acerca al mínimo del intervalo, aproximándose más en la medida que este valor sea más pequeño. Este comportamiento adquiere sentido debido a la relación de simetría que se establece entre las parábolas reflejadas y las dilatadas que sirven de referentes.



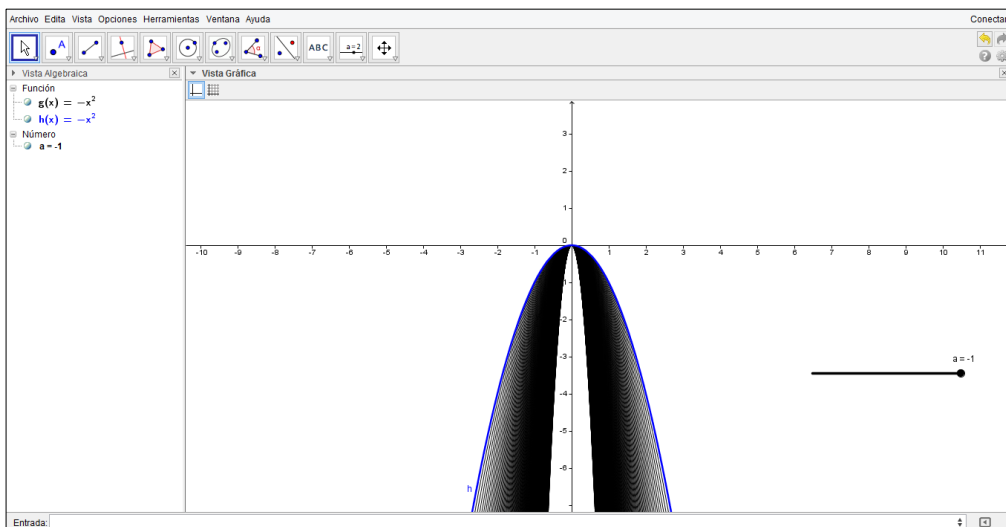


Figura 6. Familia de parábolas reflejadas en el intervalo  $(-\infty, -1)$ .

#### 4.3.2. Caso 2: Reflexión en el intervalo $(-1, 0)$

En este caso, el estudio de la reflexión que se produce en el intervalo  $(-1, 0)$  requiere de los valores mínimo y máximo del deslizador  $a$  en  $-1$  y  $0$ , respectivamente. Tras usar las opciones “Rastro activado” y “Animación activada”, el GeoGebra muestra en la vista gráfica el conjunto de parábolas reflejadas de  $g(x)$ , ubicadas entre el eje  $x$  y el reflejo de la parábola canónica (ver Figura 7). Todas las curvas de  $g(x)$  que presentan esta particularidad poseen la característica de ser el reflejo de una curva que se ha contraído previamente, donde el eje de reflexión coincide con el eje  $x$ .

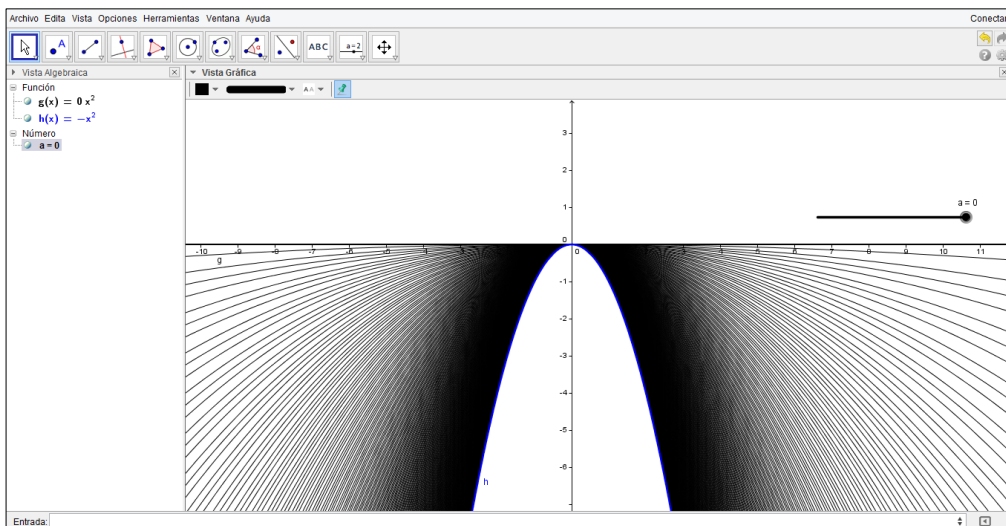


Figura 7. Familia de parábolas reflejadas en el intervalo  $(-1, 0)$ .

De la animación anterior puede observarse que las ramas de las parábolas reflejadas tienden a ser más próximas al eje  $x$  en la medida que el parámetro  $a$  toma valores cada vez más cercanos al máximo del deslizador, es decir, al  $0$ . Similarmente, las ramas de las curvas de  $g(x)$  tienden a ser más próximas a las ramas de la parábola que es reflejo de la canónica cuando  $a$  toma valores más próximos al mínimo del deslizador, es decir, al  $-1$ . Desde un punto de vista geométrico este hecho adquiere sentido ya que las parábolas contraídas y las estudiadas en este caso son simétricas con respecto al eje

$x$ , por lo cual se cumple que un punto cualquiera de una parábola de esta familia y su homólogo (punto sobre la parábola que sirve de referente) equidistan del eje  $x$  (ver Figura 8).

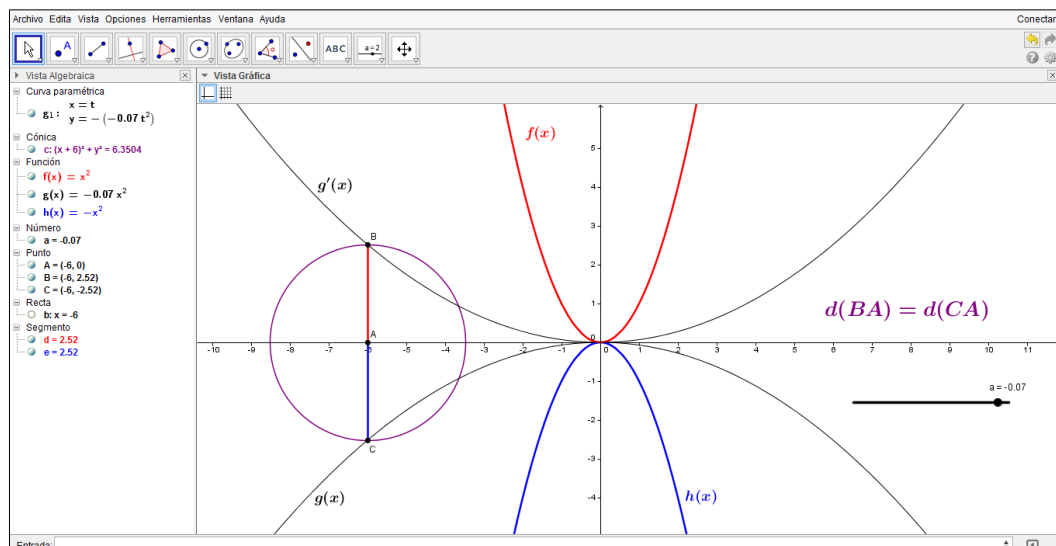


Figura 8. Relación de simetría entre las curvas de  $g(x)$  y  $f(x)$ .

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha descrito una secuencia para caracterizar las transformaciones geométricas *deformación* y *reflexión* en distintas familias de parábolas definidas por la expresión  $g(x) = ax^2$ , a partir de las relaciones entre los valores que toma el parámetro  $a$  y las curvas asociadas en el entorno de GeoGebra. Mediante el uso de un deslizador fue posible observar dinámicamente las relaciones entre las representaciones gráfica y simbólica de la función  $g(x)$  al variar el parámetro  $a$  en intervalos establecidos convenientemente, lo que permitió caracterizar los efectos geométricos abordados en la secuencia.

Lo anterior es evidencia de la capacidad que algunos autores le atribuyen al GeoGebra de conectar dos de las principales representaciones de las funciones, a saber, las fórmulas algebraicas y las gráficas, favoreciendo con ello la caracterización de la deformación y de la reflexión en el caso de las parábolas (Bayazit y Aksoy, 2010; Castillo, Gutiérrez y Prieto, 2013; Hohenwarter, 2006). Más aún, si se considera que la comprensión de un objeto matemático viene dada por la actividad de coordinar sus múltiples representaciones, entonces el GeoGebra constituye un medio potente para desarrollar y/o reorganizar el pensamiento en torno a las características de distintas familias de funciones cuadráticas, mediante un abordaje visual y algebraico respecto a este objeto matemático de manera simultánea (Borba y Villareal, 2005).

Finalmente, la secuencia descrita representa una forma de abordaje de contenidos matemáticos con tecnologías digitales que hace un aporte directo a la práctica del profesor, en tanto facilita la integración eficiente de tales tecnologías en el aula. Consideramos que su aprehensión y puesta en práctica coloca al profesor en condiciones distintas para impartir la enseñanza de este tópico, facilitando así la comprensión de sus estudiantes. Creemos que sería interesante ampliar esta propuesta didáctica al análisis de otras funciones reales, tales como las racionales, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, entre otras.



## Bibliografía

- Artigue, M. (2012). Le défi technologique. En UNESCO (Ed.) *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*, (43-45). UNESCO: París.
- Bayazit, I. y Aksoy, Y. (2010). Connecting representations and mathematical ideas with geogebra. *Geogebra International Journal of Romania*, 1 (1), 93-106.
- Borba, M. (1993). *Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software*. Tesis doctoral. Ithaca: Cornell University.
- Borba, M. y Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.
- Castillo, L., Gutiérrez, R y Prieto, J.L. (2013). Una perspectiva de análisis de las transformaciones geométricas en curvas de la función  $f(x) = e^{ax}$  utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 2 (2), 81-92.
- Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. En Underhill, Robert G. (Ed.) *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (57-63). Virginia: Blacksburg.
- Darmawan, D. y Iwan, P. (2011). On the teaching of analyzing the effects of parameter changes on the graph of function. *Proceedings of the International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education 2011*, 275-282. Yogyakarta.
- Diković, L. (2009). Applications geogebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6 (2), 191-203.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (3), 349-382.
- González, H. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de las funciones trigonométricas seno y coseno integrando GeoGebra*. Tesis doctoral. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Gutiérrez, R., Araujo, Y. y Prieto, J.L. (2012). Una secuencia para analizar los efectos geométricos relacionados con la función cuadrática utilizando GeoGebra. *Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra 2012*, 511-519. Montevideo.
- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime: Rev. Lat. de Investigación en Matemática Educativa*, 1 (1), 5-21.
- Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using geogebra. *Proceedings of Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*. Dresden.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Larson, R., Hostetler R. y Edwards, B. (2008). Shifting, Reflecting, and Stretching Graphs. *Precalculus: A Graphing Approach, 5<sup>th</sup> Edition*, 127-132. Houghton Mifflin Company: New York.
- Rezende, W., Pesco, D. y Bortolossi, H. (2012). Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 1(1), 74-89.

**Rafael E. Gutiérrez.** Estudiante de la Licenciatura en Educación Mención Matemáticas y Física de la Universidad del Zulia (Zulia, Venezuela). Coordinador Académico del Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI), Universidad del Zulia. Venezuela. E-mail: [rafael.gutierrez@aprenderenred.com.ve](mailto:rafael.gutierrez@aprenderenred.com.ve)

**Juan Luis Prieto.** Profesor Agregado de la Universidad del Zulia (Zulia, Venezuela). Licenciado en Educación Mención Matemáticas y Física (LUZ). Máster en Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación (IUP, España). DEA en Didáctica de la Matemática (UA, España). Coordinador General del Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI), la Universidad del Zulia. Venezuela. E-mail: [juan.prieto@aprenderenred.com.ve](mailto:juan.prieto@aprenderenred.com.ve)