# La compresión y reflexión de los procesos cognitivos que se generan en las prácticas de estudiantes para profesor a la hora de demostrar en geometría[1]

## Compression and reflection of the cognitive processes that are generated in the practices of student teachers in demonstrating the geometry

## Compressão e reflexão dos processos cognitivos que são gerados nas práticas de professores em formação em demonstrar a geometria

**Recibido:** mayo de 2013
**Aceptado:** agosto de 2013

Camilo Arévalo[2]
Oscar González[3]

### Resumen

Se plantea una propuesta donde tres estudiantes para profesor de matemáticas se involucran con un problema que exige la demostración geométrica, y a partir de esto se reconozca la importancia de reflexionar y comprender los procesos cognitivos que en ellos emergen para lograr desarrollar una demostración. Sin duda este trabajo de auto comprensión ayudará a valorar los procesos de prueba que emergen de los futuros estudiantes a su cargo, mediante un trabajo metacognitivo que se abordará como la toma de consciencia que han de acompañar la labor intelectual en el desarrollo de la demostración. El marco teórico que sustenta éste estudio, es expuesto por Balacheff (2000) especialmente en las etapas que tiene el proceso de demostración en geometría.

**Palabras clave:** Metacognición, demostración, geometría, resolución de problemas, procesos cognitivos, procesos de justificación, formación de profesores.

### Abstract

A proposal is where three students for math teacher involved with a problem that requires geometric proof, and from this recognition of the importance of reflecting and understanding the cognitive processes that emerge in them to be able to develop a demonstration. No doubt this work will help in assessing self-understanding test processes emerging from prospective students in their charge, by work that will be addressed as metacognitive decision-consciousness that must accompany the scholarship in the development of the show. The theoretical framework underpinning this study, is exposed by Balacheff (2000), especially in the stages that have the demo process geometry.

1 Articulo de Investigación.

2 Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, Bogotá, Colombia. Contacto: tujavi10@hotmail.com

3 Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, Bogotá, Colombia. Contacto: kmilo741@hotmail.com

**Keywords:** Metacognition, demonstration, geometry, problem solving, cognitive processes, processes of justification, teacher training.

## Resumo

A proposta é o lugar onde três alunos para o professor de matemática envolvida com um problema que exige a prova geométrica, ea partir deste reconhecimento da importância de se refletir e compreender os processos cognitivos que surgem neles para ser capaz de desenvolver uma demonstração. Sem dúvida, este trabalho vai ajudar na avaliação de processos de teste de auto-compreensão emergentes de futuros alunos a seu cargo, por trabalhos que serão abordados como metacognitive tomada de consciência que deve acompanhar a bolsa de estudos para o desenvolvimento do programa. O referencial teórico subjacente a este estudo, é exposto por Balacheff (2000), especialmente nos estágios que tenham a geometria do processo de demonstração.

**Palavras-chave:** metacognição, demonstração, geometria, resolução de problemas, processos cognitivos, os processos de justificação, a formação de professores.

## Antecedentes y justificación

En el texto procesos de prueba en los alumnos de matemáticas de Nicolás Balacheff (1982) el autor afirma que no por el hecho de que la demostración sea en sí misma un contenido de enseñanza, ésta puede dejar de ser tratada como un tema específico y esencial dentro de la enseñanza de las matemáticas. Para que la demostración pueda ser enseñada dentro de las aulas escolares, ésta ha de someterse a transposiciones didácticas, a fin de hacer comprensibles los procesos, relaciones y nociones que ésta comprende. Es lógico pensar que la demostración adquiere distintos significados dependiendo del contexto en el que se enseñe, sin embargo estudios realizados por el mismo autor muestran cómo los textos implementados para la enseñanza de la demostración, se enmarcan bajo características propias de la actividad científica, haciendo que la demostración sea vista exclusivamente con un uso práctico, ignorando el compromiso social que esta implica.

Pregunta de investigación. ¿Qué procesos cognitivos emergen en la práctica de resolución de problemas en estudiantes para profesor, específicamente al demostrar geométricamente y cómo realizar un proceso de reflexión y comprensión de los mismos?

Objetivo. Describir, Evidenciar y reflexionar sobre algunos procesos cognitivos que emergen en la práctica de resolución de problemas específicamente al demostrar geométricamente en tres estudiantes para profesor.

## Marco teórico

A partir de la importancia que en la actualidad ha alcanzado la educación matemática, por la preocupación y mirada a las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos (Hanna, 1996), en esta oportunidad se proyectará un trabajo hacia la demostración geométrica que presenta dificultades en la enseñanza de la educación básica debido no solo a la poca intensidad horaria que se establece en la educación, sino también por la poca importancia que le dan los maestros de matemáticas; como lo menciona Gil Pérez (1998), “La geometría no ha logrado aún recuperar el lugar que le corresponde. Es proceso de transformación lento, de formación y capacitación para los nuevos docentes, que son productos de un modelo diferente de enseñar” (p. TAL).

La demostración es una prueba formal y dominante, ya que es una serie de enunciados organizados y validados desde un conjunto de reglas que le dan la esencia de veracidad. Se caracteriza por su forma estructurada de gran rigor y formalidad. "una demostración se convierte en tal, después del acto social de 'aceptar que lo es'.." (Manin, citado por Hanna, 1983, p.71). La demostración en matemáticas se fundamenta sobre un cuerpo de conocimientos fuertemente institucionalizado, sobre un conjunto de definiciones, de teoremas y de reglas de deducción, cuya validez es aceptada socialmente.

Ángel Gutiérrez (2001) propone una clasificación que suple los vacios de las teorías de los autores Balacheff (1986) y Harel y Sowder (1999), su clasificación se caracteriza y se enfoca en el análisis de los vacios conceptuales que generan los estudiantes al interpretar la geometría. Esta clasificación busca enmarcar a los estudiantes en las etapas que propone el autor, basándose en los análisis e interpretaciones pertinentes. Su clasificación la basa en dos grandes grupos, demostraciones empíricas en las que el elemento de verificación son los ejemplos y las demostraciones deductivas, que se basa en el análisis y razonamiento de propiedades e ideas lógicas de abstracción formal. Ésta será la clasificación con la que caracterizaremos nuestro trabajo, porque expone las etapas desde la misma demostración geométrica y los procesos que se desencadenan, llevando a garantizar el trabajo que estamos realizando.

2.1 Sobre la metacognición y su importancia en la resolución de problemas. La meta cognición que propone Shoenfeld (1987), tendrá en cuenta nuestro propio proceso de aprendizaje en la resolución de problemas. Santos (2007), identifica tres categorías, que garantizan el procesos de metacognición; el contenido matemático construido a partir del propio proceso de aprendizaje, la operatividad y seguimiento de las estrategias utilizadas en la resolución de problemas y la determinación de que tan acertado es tener en cuenta un conjetura o hipótesis que sustente y valore el contenido matemático trabajado.

## Metodología

La metodología será la enmarcada en el tipo de estudio de caso y seguirá las siguientes fases de trabajo:

1. Planteamiento y asignación del problema: A cargo del profesor

2. Resolución del problema: A cargo de los estudiantes para profesor

3 Método de resolución del problema: A partir de las fases de resolución de problemas descritas por Mason-Burton-Stacey (1989)

4 Análisis y categorización de los resultados: Desde
las categorías de demostración en geometría de Balacheff (1999)

## Análisis de resultados

Se basa principalmente en el estudio detallado del proceso de resolución de la situación problema conllevado por los tres estudiantes para profesor. Para leer correctamente este capítulo, se decide separarlo por fases, así:

1. Primera exploración del problema
2. Abordando el problema desde los acuerdos
3. Construyendo el problema con ayuda de Geogebra
4. Definiendo la colinealidad como el objeto matemático primordial en la demostración.
5. Empezando a construir y demostrar conjeturas

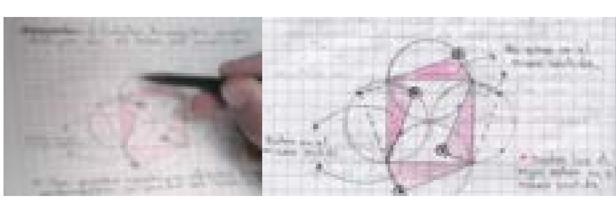
El problema asignado fue "Sobre los lados de un cuadrado se construyen cuatro triángulos rectángulos iguales, de tal forma que cada lado del cuadrado es la hipotenusa de cada triángulo". Los estudiantes evidencian que la situación problema que se les propone les permite desarrollar de manera autónoma procesos de exploración tales como la formulación de hipótesis, su validación grupal y según sea el caso su reformulación; haciendo de la situación una forma en el que se dinamicen los conceptos inmersos en ella y se relacionen las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas.

En las conversaciones de los resolutores se menciona explícitamente la importancia que tiene el planteamiento de preguntas, Brousseau (1986) compara este hecho con el de solucionar el problema y les da el mismo estatus de importancia. Se evidencia cómo los estudiantes a partir de preguntas y exploraciones logran abordar el problema desde las representaciones graficas con miras a esclarecer los conceptos inmersos en la situación y plantearse su problema de demostración.

Realizando la construcción gráfica de la situación
**Fuente:** Elaboración propia

En esta parte del momento de exploración, surge en los estudiantes la necesidad de un esquema que les dé más información de la situación, por lo que proponen el cambio de representación, de lo dicho en la situación a una construcción. En esta parte de interacción grupal se evidencia la necesidad por cambiar de representación, un dibujo, construcción o esquema que les permita evidenciar lo que la situación les propone y les dé una visión para encaminar su trabajo resolutor.

"Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva del sujeto cooperando en algunos casos o en conflicto en otras situaciones". Fishbein (1993)



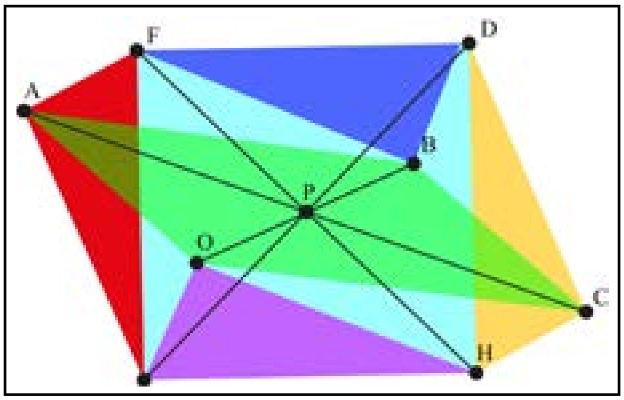
**Fuente:** Elaboración propia

Es importante decir que en este caso la representación gráfica puede o no ser favorable en un trabajo resolutor, ya que el detenerse mucho en la etapa de percepción de las construcciones puede limitar a los estudiantes en etapas más desarrolladas de la demostración, en el sentido de limitarse solamente a hablar de aspectos físicos o perceptivos de las representaciones gráficas, haciendo difícil el razonamiento y análisis de sus propiedades. Tal como lo afirma María Dal Maso (2005) "Es interesante analizar cómo las representaciones gráficas de objetos y conceptos geométricos producen muchas veces dificultades durante la resolución de problemas y en la demostración en Geometría"

Sin embargo, se evidencia que los estudiantes evocan la construcción de la situación para tener una visión más determinada del problema y con el fin de delimitar la situación a un problema específico a abordar. En este sentido la representación gráfica fue de ayuda porque les permitió evidenciar ciertos atributos de la construcción así como hacerse una idea de los posibles caminos que podrían establecer. De igual manera en lo que corresponde a la demostración y sobre todo en la geometría siempre se ha utilizado el dibujo (construcción) como carácter significante de lo que es la geometría. Para su enseñanza siempre han sido básicos los objetos teóricos relacionándolos con las representaciones geométricas, llevando a que los estudiantes reconozcan el objeto matemático como una representación geométrica, evidenciando propiedades y características a través de su simple visualización. Entonces los estudiantes realizan la construcción con el objetivo de ser ayudas visuales para establecer hipótesis, conjeturas o deducciones lógicas de una demostración. (Chevallard y Tonelle, 1982 p 4, citado en Balacheff, 1982)

El trabajo resolutor de los estudiantes empieza a formalizarse cuando empiezan a establecer relaciones entre las construcciones que realizan y lo que les propone el problema, es aquí donde se generan discusiones frente a la manera de abordarlo y se construyen conjeturas se empiezan a demostrar. En este proceso de interacción y de discusión de representaciones surge la importancia de recordar las experiencias de los estudiantes frente a problemas trabajados anteriormente que fuesen muy similares a este, hacen una retrospección de su trabajo como estudiantes para determinar la manera en que deben proceder para realizar una construcción exacta que represente la situación planteada y su respectiva demostración. A continuación se presenta una de las conjeturas obtenidas por el grupo y su respectiva demostración.

***Conjetura 1****"Si los cuatro triángulos están en el mismo sentido, dos de ellos opuestos y dentro del cuadrado, al unir los vértices entonces se obtendrá un paralelogramo"*




**Fuente:** Elaboración propia

Finalmente mediante una organización de pasos lógicos, cada uno de ellos justificado de manera detallada, los EPP logran construir una demostración valida por lo menos para el grupo, pues consideran que en ella se evidencia formalidad, justificación de cada paso y un orden lógico. Como vemos únicamente se hace necesaria la construcción representativa de la demostración ya no como soporte indispensable sino como ayuda para construir la demostración, no hace falta el uso de recursos ajenos a la misma demostración, ni de explicaciones detalladas para justificar alguno de los pasos. Por lo tanto, para finalizar esta etapa, los estudiantes se encuentran en la fase de ataque demostración formal; ya que realizan deducciones e implicaciones lógicas y ordenadas basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas aunque aun aludiendo al ejemplo genérico no como objeto indispensable para la demostración sino como ayuda para su comprensión.

## Referencias

Balacheff, N. (1982). *Procesos De Prueba En Los Alumnos De Matemáticas.* Universidad de los Andes. Traducción. Primera Edición: Agosto 2000. Bogotá, Colombia.

Camargo, L. Perry, P. Samper, C. (2006). *Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica.* Universidad pedagógica nacional. Bogotá. Colombia.

Fischbein, E. (1982). *Intuiciones y pruebas para el aprendizaje de las matemáticas.* Pag18- 24.

Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1.992). *Pensar matemáticamente.* (1. ª ed. - 2. ª reimpresión, 1.992-). Barcelona. MEC-Ed. Labor).

Trillo, F. (1989). Metacognición y enseñanza. Enseñanza, *ICE*, 7, 107-118. Universidad de Salamanca.

Araujo, J. Giménez, J. Salas, N. (2006). *Afectos y demostraciones geométricas en la formación inicial docente*. Universidad de Barcelona, Barcelona, España.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas.* (15ª reimpresión). Serie Matemáticas. (Traducción, Prof. Julián Zugazagoitia). México: Editora Trillas.

Puig, L. y Cerdán, F. (1996). Un curso de heurística matemática para la Formación del profesorado. UNO, *Revista de Didáctica de las Matemáticas.* n.8, P.83-90. Abril de 1996.