

# Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años)<sup>1</sup>

Forms of early algebraic thinking in students in fourth and fifth grades of elementary school education (9-10 years)

Formas de pensamento algébrico no início de estudantes em quarta e quinta séries do ensino fundamental (9-10 anos)

Recibido: mayo de 2013  
Aceptado: agosto de 2013

Rodolfo Vergel Causado<sup>2</sup>

## Resumen

Este reporte es parte de una investigación doctoral que se propone analizar formas de pensamiento algebraico en estudiantes de 9-10 años. Desde un enfoque microgenético (Vygotski, 1978) y una perspectiva multimodal de la cognición humana (Radford, Edwards & Arzarello, 2009) que considera la dimensión multi-semiótica, se analiza la actividad matemática de un estudiante de 10 años cuando se enfrenta a una tarea sobre generalización de patrones. El análisis preliminar sugiere que existen algunas conexiones entre la sintaxis de las “expresiones algebraicas” del estudiante y los medios semióticos de objetivación movilizados. Además, a través de uno de sus pronunciamientos, puede evidenciarse cómo el ritmo, el cual emerge como medio semiótico de objetivación, se incrusta en la sintaxis algebraica.

**Palabras clave:** Matemáticas escolares; álgebra; relaciones; pensamiento algebraico; medios semióticos de objetivación; gesto; análisis microgenético; multimodalidad; aprendizaje; procesos cognitivos; generalización.

## Abstract

This report is part of a doctoral research aims to analyze forms of algebraic thinking in students of 9-10 years. From a microgenetic approach (Vygotsky, 1978) and a multimodal perspective of human cognition (Radford, Edwards & Arzarello, 2009) that considers the multi-semiotic dimension is analyzed mathematical activity a student of 10 years when it faces a patterns of generalization task. Preliminary analysis suggests that there are some connections between the syntax of the “algebraic” student and mobilized semiotic means of objectification. In addition, through one of its pronouncements, may be evidenced how the rhythm, which emerges as a means of semiotic objectification, is embedded in the algebraic syntax.

1 Tesis doctoral en desarrollo, dirigida por los doctores Carlos Eduardo Vasco Uribe de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia y Luis Radford de Laurentian University, Sudbury- Canadá, en el énfasis en Educación Matemática del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital.

2 Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Contacto: rodolfovergel@gmail.com

**Keywords:** school Mathematics, Algebra, relationships, algebraic thinking; semiotic means of objectification gesture, microgenetic analysis, multimodality, learning cognitive processes generalization.

## Resumo

Este relatório é parte de uma pesquisa de doutorado tem como objetivo analisar as formas de pensamento algébrico em alunos do 9-10 anos. A partir de uma abordagem microgenética (Vygotsky, 1978) e uma perspectiva multimodal da cognição humana (Radford, Edwards & Arzarello, 2009), que considera a dimensão multi-semiótica é analisado atividade matemática um estudante de 10 anos, quando se enfrenta uma padrões de tarefa generalização. Uma análise preliminar sugere que existem algumas conexões entre a sintaxe do aluno “algébrica” e os meios mobilizados semióticos de objetificação. Além disso, através de uma das suas tomadas, pode ser evidenciada como o ritmo cardíaco, que surge como uma forma de objetivação semiótico, é incorporado na sintaxe algébrico.

**Palavras-chave:** Matemática da escola, álgebra, relações, o pensamento algébrico; meios semióticos de objetificação gesto, a análise microgenética, multimodalidade, os processos de aprendizagem cognitiva generalização.

## Presentación del problema

Uno de los intereses actuales en la comunidad de investigadores, según Radford, es el diseño y la aplicación de actividades globales de clase sobre generalización de patrones, que puedan ofrecer a los estudiantes la oportunidad de reflejar su pensamiento algebraico (ver, por ejemplo, Radford, 2006; Radford & Demers, 2004). A partir de los recientes resultados de estudios e investigaciones adelantados en el marco de la semiótica cultural, se reconoce un espacio para una amplia zona conceptual donde los estudiantes pueden empezar a pensar en forma algebraica, aun cuando no estén recurriendo (o al menos no en gran medida) a los signos alfanuméricos. Esta zona, que podemos llamar la zona de emergencia del pensamiento algebraico, “ha permanecido largamente ignorada, como resultado de nuestra obsesión con reconocer el álgebra sólo en lo simbólico” (Radford, 2010, p. 3), por lo que, como reclama Radford, el pensamiento algebraico no se puede reducir al uso de letras. Radford (2006) afirma que es necesario profundizar nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización.

En este sentido, la aparición de formas de pensamiento algebraico se considera como un problema

didáctico y en la pretensión de avanzar en la comprensión de tal fenómeno, nos proponemos identificar y estudiar formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones.

## Referente teórico

Desde un punto de vista hegeliano -teoría del materialismo dialéctico- la idea de pensamiento se considera como un proceso de actividad humana. Incluso, todos los fenómenos, desde el método del materialismo dialéctico, debían ser estudiados como procesos en constante movimiento y cambio, de donde se desprende que el movimiento es una categoría ontológica fundamental en la epistemología hegeliana. Davydov (1978) señala que “El pensamiento de un hombre es el movimiento de formas de actividad de la sociedad históricamente constituidas y apropiadas por aquél” (p. 279). Muchas de las ideas teóricas desarrolladas por Radford tienen su fundamento en la epistemología hegeliana. En particular, la idea de Saber como movimiento (Radford, 2013) es pura posibilidad

y está constituida de formas de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas.

El pensamiento algebraico, como forma particular de reflexionar matemáticamente, es caracterizado por Radford (2010) mediante tres elementos interrelacionados: el sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros; opuesto a la determinancia numérica), la analiticidad (como forma de trabajar los objetos indeterminados; reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos) y la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos (manera específica de nombrar o referir los objetos).

Los signos no son considerados como meros indicadores de actividad mental, por el contrario, son parte constitutiva del pensamiento. En este sentido, la noción vygotskiana de signo en Radford incluye gestos, artefactos, ritmo y actividad kinestésica. Esto es, los signos con los cuales se realiza la actividad matemática condicionan las formas como los estudiantes se apropian, construyen o re-significan dicha actividad.

La idea de Medios Semióticos de Objetivación, MSO, (artefactos, gestos, símbolos, palabras), en términos de Radford (2008, 2010), no refiere únicamente a herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo. Los MSO son mediadores de nuestros actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes. Radford (2008) señala que los estudiantes tienen que compensar la reducción de recursos semióticos con una concentración de significados en el menor número de signos o palabras, lo que ha llamado contracción semiótica. Dicho proceso de objetivación<sup>3</sup> puede considerarse como una reorganización psíquica a partir de la cual se logra una toma de conciencia progresiva del objeto cultural<sup>4</sup>. El concepto de contracción semiótica aparece en el desarrollo de las formas de pensamiento algebraico. Radford (2006) plantea tres tipos de estratos de pensamiento algebraico, caracterizados por los

MSO movilizados por los sujetos en su actividad, incluyendo movimientos, gestos, lenguaje natural:

1. Estrato de pensamiento algebraico Factual. Los MSO movilizados son los gestos, los movimientos, la actividad perceptual y las palabras. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimiento con un lápiz, dice “aquí”, señala y dice “más 2”.
2. Estrato de pensamiento algebraico Contextual. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios de expresión como frases “clave”. Por ejemplo, el alumno dice “arriba quito uno” ó “dos por la figura menos uno”.
3. Estrato de pensamiento algebraico Simbólico. Las frases “clave” son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como:  $n+(n-1)$  ó  $2n-1$ .

En particular, el gesto, como un MSO, juega un papel importante en la expresión de las intencionalidades de los sujetos y en su proceso de conceptualización. El gesto está involucrado en la planeación conceptual de los mensajes y ayuda a los sujetos a “empaquetar” información especial dentro unidades verbalizables. Radford (2009) plantea que “los gestos son una especie de ventana para acceder al pensamiento” (p. 113), idea que intenta visibilizar los trabajos pioneros de Vygotski sobre la relación entre gestos y signos:

A gesture is specifically the initial visual sign in which the future writing of the child is contained as the future oak is contained in the seed. [...] The gesture is a writing in the air and the written sign is very frequently simply a fixed gesture. (Vygotski, 1978, p.107)

La movilización de los MSO podría darse en un mismo momento. La idea de nodo semiótico (Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003) es

3 Los procesos de objetivación se consideran, de acuerdo con Radford, como procesos sociales a través de los cuales los individuos se familiarizan con las formas culturales e históricamente constituidas de pensar.

4 El pensamiento algebraico, como forma cultural de pensamiento, ha sido desarrollado y refinado en el curso de la historia cultural. Éste pre-existe en una forma ideal desarrollada antes de que los estudiantes participen de actividades de clase.

un intento de teorizar la interacción de sistemas semióticos en la objetivación del saber. Un nodo semiótico (Radford, 2009, p. 121) “es una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde la acción y diversos signos (por ejemplo, gesto, palabra, fórmula) trabajan juntos para lograr la objetivación del saber”<sup>5</sup>. Desde luego, estos procesos no movilizan solamente recursos cognitivos. Es ya aceptado en la comunidad de investigadores en educación matemática la idea según la cual, en el acto de conocer, los sujetos movilizan además de los recursos cognitivos, recursos físicos y perceptuales. La perspectiva de la multimodalidad considera la inclusión del cuerpo en el acto de conocer. Estos recursos o modalidades incluyen comunicaciones simbólicas y orales así como dibujos, gestos, la manipulación de artefactos y movimiento corporal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards & Arzarello, 2009).

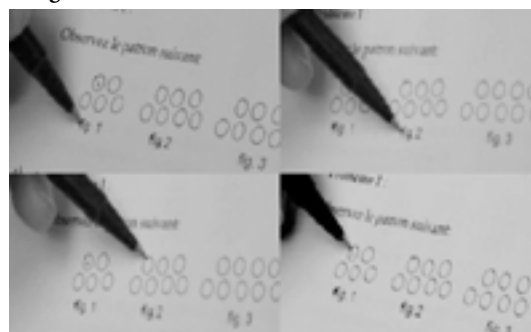
## Metodología y análisis de datos

Se presenta un caso de un estudiante (LF, de 10 años de edad) quien estuvo participando durante todas las sesiones de trabajo (13 en total, en las cuales se evidenció un rico espectro de recursos semióticos movilizadas por él), sesiones a partir de las cuales se recolectó la información correspondiente a la investigación doctoral de la que se hace mención en este reporte. Las producciones de LF se encuentran distribuidas en videos, hojas de trabajo (en las cuales se planteaban tareas sobre secuencias de generalización de patrones), entrevistas focalizadas y notas de campo.<sup>6</sup>

El análisis de datos se basa en una concepción multimodal del pensamiento humano (Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003; Arzarello, 2006), de acuerdo con la cual el análisis debe tener en cuenta la relación entre los diferentes sistemas semióticos movilizadas durante la actividad (el sistema semiótico del lenguaje escrito, el del lenguaje hablado, el de los gestos, el de las acciones, etc.) Esto significa que ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo

gestado por los estudiantes es analizado de manera aislada. La estrategia analítica, desde esta concepción multimodal, en el caso presentado aquí de LF, sigue un enfoque microgenético (Vygotski, 1978; Radford, Edwards & Arzarello, 2009), es decir, se estudia la formación a corto plazo de un proceso psicológico determinado (como una especie de estudio longitudinal a corto plazo). El estudio de este dominio requiere la observación y análisis de los intentos repetidos de los sujetos en la solución de una tarea determinada, en este caso, sobre generalización de patrones. De acuerdo con Radford, Edwards & Arzarello (2009), el enfoque microgenético “centra su análisis en los gestos, discursos, actividad perceptual, movimiento corporal y cómo éstos se desarrollan y despliegan en una situación de interacción” (p. 92).

Imagen 1



Fuente: Elaboración propia

Una secuencia de señalamientos (gestos indexicales) por parte de LF cuando enfrenta una tarea sobre generalización de patrones figurales.

La coordinación de deícticos espaciales (“abajo” y “arriba”) y palabras, se constituye en un nodo semiótico que caracteriza la actividad reflexiva de LF mediada por estos MSO. En el siguiente extracto de video, frente a la solicitud de calcular el número de círculos de la figura 9, sin construirla y explicar cómo lo hace, se deja ver el pronunciamiento de LF quien pone en evidencia no sólo palabras y gestos, sino también ritmo, en el proceso de semiosis perceptual:

3:46-3:56

5 Radford (2013), inspirado en la epistemología hegeliana, afirma que el saber es pura posibilidad, es movimiento. El conocimiento, por su parte, es la instanciación del saber.

6 Algunas tareas propuestas en la investigación, en general, tenían una estructura similar, por ejemplo, se les solicitaba a los estudiantes que siguiendo la secuencia como la que se muestra en la siguiente página, dibujaran las figuras correspondientes al término 5 y al término 6; calcularan el número de cuadros (o círculos) de la figura correspondiente al término 9; calcularan el número de cuadros (o círculos) de la figura del término 100; explicaran la forma como procedieron para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.

“yo digo que son 21, porque por ejemplo abajo pongo 9, abajo pongo 9 [pausa] [señala la parte inferior de su guía y con su lápiz corrector hace un movimiento horizontal indicando la forma en la que va dispuesta la figura] y le sumo 2 [pausa] y después arriba pongo otros 9 [pausa] [señalando con su dedo donde debería ir la otra fila y repite el movimiento del lápiz corrector] pero le sumo 1.”

El análisis microgenético de la actividad de LF sugiere el papel central que desempeñan los déicticos espaciales, gestos, y el ritmo en la semiosis perceptiva (Radford, Bardini & Sabena, 2006), sobre todo en los procesos progresivos de LF de la aprehensión perceptual de un patrón y su generalización. El análisis también sugiere algunas conexiones entre la sintaxis de la fórmula algebraica y los MSO movilizados. Por ejemplo, los déicticos espaciales “abajo” y “arriba” se incrustan, dejan su huella, en la sintaxis de la fórmula:

(Número de la Figura + 2) + (Número de la Figura + 1)

Sin embargo, la conexión puede ser aún más sutil. El ritmo, por ejemplo, imprime su marca en la sintaxis algebraica, lo que corresponde a la pausa hecha entre las filas. El ritmo es incrustado en la expresión simbólica, pues constituye uno de los elementos significantes de la fórmula. En términos de Radford (2013), la fórmula podría considerarse como la instanciación del saber, entendido como movimiento. Desde un punto de vista hegeliano, el saber (Radford, 2013) está constituido de formas siempre en movimiento de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas, por lo que éste es pura posibilidad y puede adquirir realidad a través de la actividad concreta, en este caso compuesta por la tarea, el tipo de preguntas formuladas y la actividad tal y como se desarrolla en la sesión de trabajo.

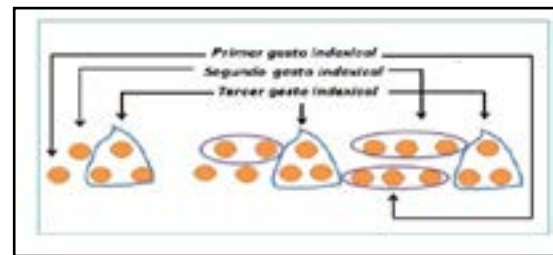
En una sesión de trabajo posterior (Sesión No. 3), se da inicio haciendo una contextualización del trabajo realizado en la sesión anterior, en la cual, la profesora quien dirige de sesión, interactúa con LF para solicitarle haga una explicación de la estructura de la secuencia y socialice el método que utilizó para reconocerla:

00:00:00 – 00:00:57:

una secuencia aquí en el 1 [señalando con su dedo la fila inferior de la Figura 1] es uno y le suman dos y en la segunda [señalando con su dedo la fila superior de la Figura 1] es uno y le suman uno, entonces son tres de sobra [tapando el círculo de abajo y el de arriba y al mismo tiempo encerrando con otro dedo las tres unidades sobrantes]; entonces aquí en la 2 [señalando con su dedo la fila inferior de la Figura 2] le suman dos y aquí en la segunda [señalando la fila superior de la Figura 2] le suman uno y es la misma tres de sobra [encerrando con su dedo de nuevo las tres unidades sobrantes al mismo tiempo que tapa con otro dedo los dos círculos de abajo y los dos de arriba]; aquí tres [señalando con su dedo la fila inferior de la Figura 3] y le suman dos y aquí tres [señalando la fila superior de la Figura 3] y le suman uno, entonces son tres de la misma forma [encerrando con su dedo de nuevo las tres unidades sobrantes y tapando al mismo tiempo los tres círculos de abajo y los tres de arriba].

El siguiente diagrama intenta explicar el proceso de semiosis perceptual de LF, en el cual moviliza tres gestos indexicales:

Imagen 2



Fuente: Elaboración propia

El primer gesto indexical movilizado por LF le permite, al tapar el círculo de abajo, reconocer que hay dos círculos más en la fila inferior de la Figura 1; posteriormente hace la misma acción con la fila superior (segundo gesto indexical) y reconoce que hay un círculo que se le suma. Sin embargo, al mismo tiempo que tapa los dos círculos, el de abajo y el de arriba, encierra con otro dedo los tres círculos (tercer gesto indexical), que posteriormente los estudiantes llamarán “la torre”. De manera similar procede con las Figuras 2 y 3, utilizando la misma estrategia. La torre, como se muestra en el tercer gesto indexical del diagrama, juega un papel fundamental en la aprehensión perceptual del patrón. LF moviliza varios MSO (gestos, palabras y la acción de tapar con su dedo) sincrónicamente. Este

nodo semiótico, en tanto segmento de actividad reflexiva mediada por estos recursos semióticos, le permite a LF identificar el patrón, en el cual la torre funge como instrumento de mediación. Como afirma Radford (2012), inspirado en Vygotski, estos MSO se desarrollan de una manera interrelacionada, por lo que el desarrollo del pensamiento algebraico puede ser estudiado (Radford, 2012, p. 691) en términos de la aparición de nuevas relaciones estructurales sistémicas entre los componentes materiales-ideacionales de pensamiento. El desarrollo de la percepción, según Radford (2012, p. 692) “es consubstancial con el desarrollo gestual y la actividad simbólica”.

A esta altura del trabajo, durante las sesiones, no emergía la indeterminancia algebraica, razón por la cual se decide plantear el Problema del Mensaje<sup>7</sup> como recurso didáctico que es movilizado para intentar lograr un desarrollo en la forma de pensamiento.

La producción de LF en relación con el problema mencionado fue la siguiente:

Profe para saber el numero [sic] de la Figura ala [sic] Figura le sumo el mismo numero [sic] de la Figura y al resultado que me de [sic] le sumo 3 y el resultado que te dio corresponde al numero [sic] de circulos [sic] de esa Figura

El proceso de movilización de MSO por parte de LF, desde sus deícticos espaciales, “abajo” y “arriba”, pasando por las palabras y ritmo, hasta la respuesta dada al Problema del Mensaje, deja ver una sobriedad en su pensamiento y expresión, una sobriedad en su forma de significación, esto es, una contracción semiótica (Radford, 2008). Pero por otro lado, en la respuesta dada por LF a este problema, la indeterminancia (“Figura”, esto es, número de la figura) es tratada analíticamente, en el sentido de analiticidad conferido por Radford (2010), lo cual sugiere que LF se mueve en un estrato de pensamiento algebraico contextual, pues la indeterminancia, en este estrato de pensamiento, se vuelve objeto del discurso por parte de él.

7 Este problema se planteó de la siguiente forma: La profesora Johanna tiene una bolsa y dentro de ella introduce varias tarjetas, cada una con un número. Cada uno de estos números corresponde a una de las figuras de la secuencia anterior. Ella saca al azar una tarjeta y la introduce en un sobre asegurándose que ningún estudiante haya visto el número de la tarjeta. Johanna quiere que el sobre sea enviado a la profesora Estella con un mensaje que será introducido en el sobre junto con la tarjeta que contiene el número. Este mensaje debe explicar a la profesora Estella cómo calcular rápidamente el número de círculos que corresponde al número de la tarjeta.

## Conclusiones

Para Frege (1985), las expresiones  $(n + 2) + (n + 1)$  y  $(n + n) + 3$  refieren al mismo objeto. Sin embargo, estas expresiones no refieren al objeto común de la misma forma. La forma como los estudiantes ven o perciben la secuencia, determina la sintaxis algebraica posterior, como es el caso de LF mostrado aquí. El análisis microgenético sugiere, en general, que los deícticos, gestos, ritmo y otros MSO no funcionan por separado (Radford, Bardini & Sabena, 2006; Radford, 2010b), de ahí que el constructo nodo semiótico emerja para explicar la movilización sincrónica de varios recursos semióticos al enfrentar la tarea y lograr la objetivación del saber.

La tarea sobre generalización de patrones figurales enfrentada por LF intenta provocar un desarrollo en su forma de pensamiento. Esto coincide con la tesis de Vygotski según la cual el pensamiento se puede desarrollar a través de un funcionamiento interpsicológico (interacción LF y profesora, por ejemplo), el cual le permite significar la tarea de un modo culturalmente apropiado. En general, el diseño de las tareas (que desde luego incluye el Problema del Mensaje), intenta producir un desarrollo en los estudiantes, el cual puede verse como un proceso social de aproximación de significados subjetivos o personales a los significados histórico-culturales plasmados en la semiótica algebraica.

El proceso de coordinación compleja de sistemas semióticos, de acuerdo con Radford, Bardini & Sabena (2006), sigue siendo en gran parte desconocido y poco trabajado en la psicología de la educación matemática. Este reporte intenta visibilizar algunos elementos de esta compleja coordinación y sugiere un camino de investigación por explorar. En particular, es materia de más investigación lo relacionado con la diferencia cognitiva en la ritmicidad en los estratos de pensamiento Factual y Contextual.

## Referencias

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking, 267-299.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime*. Número especial, 177-196.
- Davydov, V. V. (1978). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Frege, G. (1985). *Sentido y referencia* (U. Moulines, Trad.). En: Estudios sobre semántica (pp. 51-86). Madrid: Orbis (Original publicado en 1892).
- Radford, L. (2006). *Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective*. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 – 12, Vol. 1, pp. 2-21.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40 (1): 83-96.
- Radford, L. (2009). ¿Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 111 – 126.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2012). *Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues*. ICME-12 Regular Lecture. Seoul, South Korea.
- Radford, L. (2013). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (1), 7-44.
- Radford, L., Bardini, C. & Sabena, C. (2006). *Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations*. Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), 17 – 21 February 2005, Sant Feliu de Guíxols, Spain, pp. 684-695.
- Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. & Cerulli, M. (2003), *Calculators, Graphs and the Production of Meaning*, en N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (eds.), Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pme27–pmena25), University of Hawaii, 4, pp. 55-62.
- Radford, L. & Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage*. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques. Ottawa: Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques.
- Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, 70: 91-95.
- Vygotski, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Comp. Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. y Souberman, E. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Vygotski, L. S. (2000). *Obras escogidas* (Vol. III) (L. Kuper, Trad.). Madrid: Visor. (Original publicado en 1931).
- Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. (J. Zanón y M. Cortés, Traductores). Barcelona: Paidós.