Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas[1]

Proposed methodology for teaching conic sections

Metodologia proposta para o ensino de secções cónicas

Recibido: mayo de 2013
Aceptado: agosto de 2013

William Eduardo Calderón Gualdrón[2]
Sonia Peñuela Méndez[3]

Resumen

Esta propuesta metodológica, nace como producto de la tesis de maestría de uno de los ponentes, en ella se intenta mostrar una forma de enseñar las secciones cónicas en un ambiente didáctico que se basa en que el estudiante aprenda haciendo. Por ello, se presentan actividades para que el estudiante explore y descubra características de las figuras que él construirá y, en diálogo con sus compañeros y el docente, construya su propio conocimiento. Para lograr este proceso se empleó como referente teórico el modelo de Van-Hiele el cual se caracteriza al tener dos secciones, una de las cuales es descriptiva, en ella se observan niveles de razonamiento. La otra parte nos da a los maestros las pautas para que nuestros estudiantes avancen de un nivel a otro, estas pautas se conocen como Fases de Aprendizaje.

Palabras clave: Matemáticas escolares; Geometría Analítica; Cónicas; Enseñanza; Metodología de enseñanza; Metodología de trabajo ene l aula; Niveles; Van-Hiele.

Abstract

This methodological proposal, born as a result of the master's thesis of one of the speakers, it attempts to show a way of teaching conic sections in a study environment is based on the student to learn by doing. Therefore, we have activities for the student to explore and discover features of the figures that he built and in dialogue with their peers and teachers, construct their own knowledge. To accomplish this process was used as a theoretical reference model Van-Ice that is characterized by having two sections, one of which is descriptive therein reasoning levels are observed. The other side gives teachers guidelines for our students to progress from one level to another, these guidelines are known as Learning Phases.

Keywords: school mathematics; Analytic Geometry, Conics, Teaching, Teaching Methodology, Work methodology Jan. l classroom levels; Van-Ice.

1 Artículo de Investigación.

2 Universidad Industrial de Santander, Colombia. Licenciado en Matemáticas UIS, Especialista en Educación Matemática UIS, Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales Universidad Nacional de Colombia, integrante del grupo de Investigación en Educación Matemática de la EDUMAT- UIS. Contacto: williameduardoc@hotmail.com

3 Universidad Industrial de Santander, Colombia. Licenciatura en Matemáticas. Integrante del grupo de Investigación en Educación Matemática EDUMAT- UIS. Contacto: soniapenuela@hotmail.com

Resumo

Esta proposta metodológica, nascido como resultado da tese de mestrado de um dos palestrantes, ele tenta mostrar uma maneira de ensinar seções cônicas em um ambiente de estudo se baseia em que o aluno aprenda fazendo. Portanto, temos atividades para o aluno a explorar e descobrir as características das figuras que ele construiu e em diálogo com os seus colegas e professores, construir seu próprio conhecimento. Para realizar este processo foi usado como um modelo de referência teórica Van-gelo que se caracteriza por ter duas secções, uma das quais é descritivo aí são observados níveis de raciocínio. O outro lado dá diretrizes professores para os nossos alunos a progredir de um nível para outro, essas diretrizes são conhecidos como fases de aprendizagem.

Palavras-chave: matemática escolar; geometria analítica, Cônicas, Ensino, Metodologia de Ensino, Metodologia de Trabalho janeiro níveis de sala de aula l; Van-Ice.

Presentación del problema

La enseñanza de la geometría en la actualidad está en el olvido, a pesar de los esfuerzos que algunos grupos de profesores hacemos para mejorar la enseñanza de esta rama de la Matemática. Si se habla de Geometría Analítica el panorama no deja de ser desalentador en cuanto a la metodología de su enseñanza y los propósitos de la misma que no van más allá del acercamiento algebraico de las cónicas en particular. Santa y Jaramillo (2011)[4], dan a conocer una serie de pruebas y entrevistas realizadas a estudiantes de cierta institución pública de la ciudad de Medellín. Una de las conclusiones que arrojó este estudio es que, la geometría analítica, todavía se viene enseñando de una forma tradicional y bastante lineal en los respectivos contextos institucionales, sin lograr los propósitos respectivos. Es decir, la metodología empleada es construir las secciones cónicas en papel milimetrado y después desarrollar, de manera algorítmica, algunos ejercicios para esbozar sus ecuaciones algebraicas generales y canónicas y, posteriormente, evaluar la búsqueda procedimental de los elementos de cada sección cónica.

Al revisar la problemática a nivel universitario, desde mi experiencia docente he observado que, la gran mayoría de los que ingresan al primer semestre no poseen los conocimientos ni reconocen las ecuaciones algebraicas de las secciones cónicas. No obstante, una minoría de estudiantes mostró evidencia de habilidades algorítmicas para determinar las ecuaciones algebraicas de las cónicas pero no tenían claridad sobre el concepto de cada una de ellas como lugar geométrico. “En los trabajos sobre educación matemática para los alumnos que ingresan a la educación superior, se ha constatado que los conocimientos se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones que caracterizan a cada una de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica ni el por qué de su definición como lugar geométrico, lo cual limita la comprensión del alcance de las posibilidades de que disponen” (Cruz y Mariño,1999,p.15).

De otra parte, si se toma en cuenta que la actividad por excelencia de un matemático es resolver problemas, la problemática desarrollada crecería exponencialmente pues la National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM, 1980) planteó que la resolución de problemas es el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas.

4 Santa, Z., Jaramillo, C. (2011). “Comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico”. Memorias XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM. Recife (Brasil). Recuperado el 15 de febrero de2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2279/996

Por lo anterior, se hace necesario, desde el contexto inmediato del investigador, aportar herramientas que permitan mitigar las dificultades expuestas alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica (Cónicas, en particular) a través de un proceso de investigación que dé respuesta al siguiente interrogante: ¿Cómo lograr que los estudiantes del grado décimo del colegio Villas de san Ignacio de Bucaramanga construyan e identifiquen

los elementos que conforman las secciones cónicas a partir de situaciones problema?

Marco de referencia conceptual

Históricamente las secciones cónicas han tenido dos momentos de esplendor o momentos importantes en la historia de su construcción, Los griegos fueron quienes descubrieron las secciones cónicas entre los años 600 a 300 a. de C. con la noción de las cónicas como la intersección de un cono de dos hojas con un plano, iniciando el período de Alejandría se conocía ya lo bastante sobre las secciones cónicas como para que Apolonio (262-190 a. de C.) realizara un estudio profundo de estas y posteriormente escribiese un tratado llamado "Secciones Cónicas" el cual muestra y describe los elementos, las propiedades y axiomas de las cónicas de forma simplificada, estos resultados fueron los únicos que existieron por más de XIX siglos y ayudaron en su momento a aclarar algunas teorías de la astronomía como el movimiento de los cuerpos celestes, siendo este sin lugar a dudas uno de los fenómenos que más ha intrigado al hombre desde sus comienzos. Por mera observación, los antiguos pudieron determinar que el sol, la luna y las estrellas "describían arcos circulares sobre el cielo con un movimiento regular" (Del Río, 1996, p. 58). Sin embargo, también observaron otros cuerpos a los que los llamaron errantes (los planetas) que no se comportaban de manera similar, pues se desplazaban lentamente o en algunas ocasiones, retrocedían. Este fue precisamente el problema que se planteó Platón (siglo IV a.de C): "¿Qué tipo de movimiento es el de los planetas que los hace moverse de un modo tan distinto a las estrellas?" (Sepúlveda 2003).

Platón, Eudoxio y Aristóteles propusieron entonces, un modelo geocéntrico del universo en el que la tierra, inmóvil, se ubicaría en el centro y los demás cuerpos girarían en torno a ella, cada uno en una esfera cristalina concéntrica con la tierra (Del Río, 1996). Pero este modelo no explicaba tampoco el movimiento de los planetas. En el siglo II d. C, el astrónomo de Alejandría Ptolomeo perfeccionó este sistema geocéntrico, involucrando epicicloides. Según él, el planeta describe con movimiento uniforme un círculo denominado epiciclo, cuyo centro a su vez se desplaza en un círculo mayor, concéntrico con la tierra, llamado deferente. Esta explicación fue aceptada y defendida durante muchos siglos, porque estaba de acuerdo con las ideas filosóficas, políticas y religiosas de la época: el carácter egocéntrico del hombre, que lo convertía en el centro del universo y de la creación, creado a imagen y semejanza de su Dios. En el siglo XVI, el polaco Nicolás Copérnico, se atrevió a defender de forma cuantitativa, ante una sociedad totalmente geocéntrica, que la tierra y los demás planetas giraban alrededor del sol (inmóvil) en órbitas circulares. , pero como tampoco explicaba correctamente el movimiento de los planetas, no fue capaz de anular la teoría de Ptolomeo y se abrió un agrio debate entre astrónomos copernicanos y ptolemaicos que continuó durante todo el siglo XVI.

A principios del siglo XVII, Kepler enunció y demostró empíricamente sus tres famosas leyes, la primera de las cuales afirma que todos los planetas recorren órbitas elípticas teniendo al sol en uno de los focos. Con este hecho, Kepler hizo evidente la presencia en la naturaleza de un lugar geométrico que había nacido en la más pura especulación teórica de los matemáticos griegos. De ahí la importancia de su comprensión como lugar geométrico.

Galileo Galilei (1564–1642) estudiando el movimiento de un proyectil, con una componente horizontal uniforme, y una vertical uniformemente acelerada, llego a la conclusión, que dicha trayectoria, despreciando la resistencia del aire es una parábola.

En el siglo XVII Descartes en las primeras aplicaciones de la geometría analítica retoma el estudio de las cónicas y establece que la parábola, la elipse y la hipérbola pueden ser determinadas por unas ecuaciones algebraicas, lo cual permite estudiarlas con mayor facilidad.

"En el siglo XVI René Descartes (1596-1650) retoma el análisis de estas curvas de una forma ingeniosa, donde establece un puente para transitar entre la geometría y el algebra, lo que permite asociar curvas con ecuaciones, a base de aplicar el análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas, llamada la ecuación de la curva, expresión que al estar totalmente relacionada a la curva, implícitamente resume sus propiedades geométricas, las cuales se pueden determinar mediante cálculos algebraicos" (URBANEJA, 2001).

En nuestro país el estudio de las secciones cónicas se debe impartir en el programa de matemáticas en el grado 10° u 11°, como lo estipula Los Estándares básicos de Matemáticas en el pensamiento espacial y sistemas geométricos.

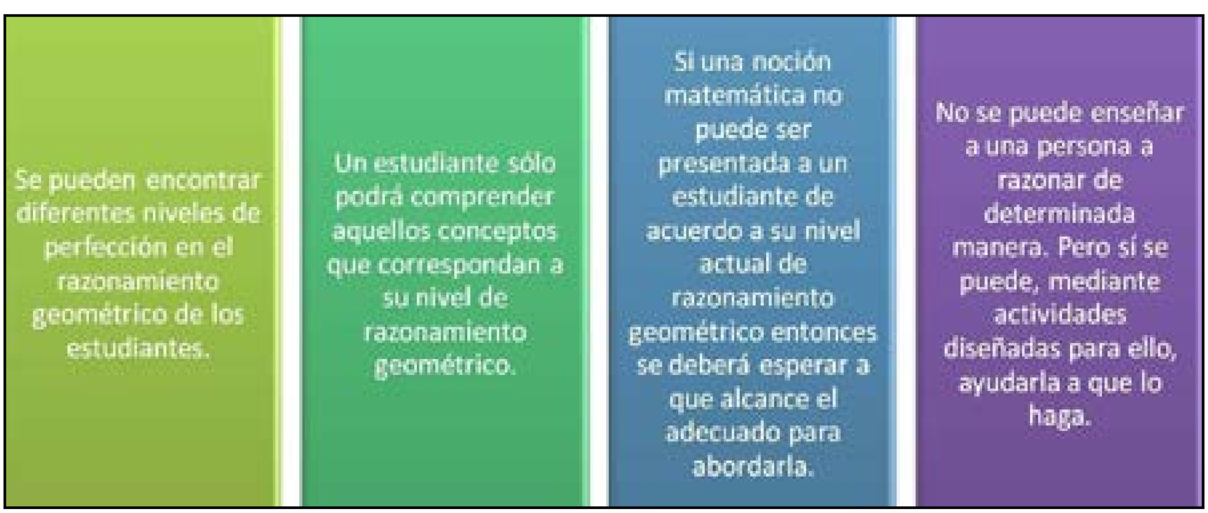
Es muy frecuente que al hablar de las cónicas se piense directamente en sus expresiones analíticas y en las propiedades que se deducen a partir de ellas mediante procesos estrictamente algebraicos. Este método que plantea la gran mayoría de textos escolares hace que los docentes que tenemos un texto guía, enseñemos este tema partiendo de la parte algebraica de las cónicas lo cual evita todo un conjunto redescubrimientos históricos que son fundamentales, formativos y asociados a sus aplicaciones en contextos cotidianos como por ejemplo la identificación de un objeto geométrico y la construcción manual de estas curvas, lo que plantea la necesidad de llevar estos temas al aula de clase de décimo grado de secundaria efectuándose el enlace en forma natural entre la geometría euclidiana y la geometría analítica.

Referente teórico.

Los esposos Van Hiele, a partir de su experiencia como docentes de matemáticas, elaboraron un modelo que trata de explicar cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos para que mejoren su razonamiento. Así, este modelo explica, desde una perspectiva cognitiva, cómo se desarrolla el pensamiento geométrico de los estudiantes, y desde una perspectiva didáctica la manera como el profesor puede guiar este desarrollo para alcanzar niveles de razonamiento superiores.

El modelo de Van Hiele está formado por dos componentes: los niveles de razonamiento, que describen la forma como los estudiantes razonan la geometría cuando efectúan diversas actividades para un tema, desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento abstracto formal y las fases de aprendizaje, que ayudan al profesor a organizar las actividades para que sus estudiantes puedan avanzar de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

Figura1: Ideas centrales del Modelo de Van Hiele desde Jaime y Gutiérrez (1990)



Fuente: Elaboración propia.

Los autores Jaime y Gutiérrez (1990, p. 305) describen las ideas centrales del Modelo de Van Hiele de la siguiente manera (véase la Figura 1).

El modelo se realizó inicialmente a nivel escolar. Sin embargo en la actualidad se ha aplicado el modelo en Universidades de Moscú, USA, España, Holanda, y de ahí han surgido propuestas y tesis de aplicación del modelo en la enseñanza de logaritmos, de la geometría analítica e incluso de la física.

Niveles de razonamiento. Los niveles de razonamiento son etapas de desarrollo intelectual y cognoscitivo por las cuales todo estudiante atraviesa para lograr un mayor razonamiento. Así, estos representan los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación en los cursos de matemáticas que va desde el razonamiento intuitivo de los niños de transición hasta el formal y abstracto de los estudiantes universitarios. De acuerdo con este modelo, si el estudiante es dirigido por instrucciones adecuadas avanza a través de los cinco niveles de razonamiento.

Figura 2: Niveles de razonamiento del modelo Van Hiele

Fuente: Elaboración propia.

Es importante señalar que según este modelo, se determina el nivel de aprendizaje de un estudiante no tanto por lo que puede resolver o hacer, sino por la forma cómo se expresa y la forma cómo razona. Para facilitar la comprensión de los niveles, se usará como ejemplo el caso de las figuras geométricas. A continuación se presentan cada uno de los cinco niveles y algunas de las características que identifican a los estudiantes que se encuentran en ese nivel, esto desde Mata (2006, p. 28)

Nivel 1: De visualización o reconocimiento. Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, dando en ocasiones características que no corresponden a las descripciones que hacen.

- Hace referencias a prototipos externos para describir las figuras; por ejemplo, dicen que un cuadrado es como una ventana.
- Usan propiedades imprecisas para ordenar, comparar, describir o identificar figuras geométricas; por ejemplo, dicen que los triángulos tienen tres puntas.
- Perciben las figuras como objetos individuales, es decir no son capaces de ver las características de una figura a otra de su misma clase.
- Solo describen el aspecto físico de las figuras; el reconocerlas diferenciarlas, o clasificarlas se basa solo en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.
- La mayoría de veces al describir las figuras se basan en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen, y comúnmente utiliza frases como “se parece a…”, “tiene forma de…”.
- No reconocen claramente las partes que componen las figuras ni sus propiedades geométricas o matemáticas.

Este nivel no es exclusivo de los estudiantes de corta edad, en él se clasifican todos aquellos que solo poseen conceptos nuevos y es por esto que es el nivel de menor estancia de los estudiantes.

Nivel 2: de análisis. Se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por pedazos o elementos los cuales describen y enuncian sus propiedades, pero de manera informal.

- Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades, los estudiantes no pueden elaborar definiciones.

- Observando las figuras pueden reconocer algunas propiedades y experimentado con ellas pueden generalizar.

- No hacen clasificaciones formales, solo relacionan unas propiedades con otras, basándose en algunas partes o elementos de las figuras.

- Manejan un vocabulario más formal que en el nivel anterior.

- Consideran que la geometría es experimental, y por lo tanto, observan una variedad de figuras, miden, prueban y concluyen a partir de sus experiencias.

- Nivel 3: de Ordenación o clasificación. En este nivel el estudiante cambia la forma de percibir las figuras geométricas, ahora puede verlas como un conjunto de elementos que cumplen algunas propiedades, para realizar un pequeño razonamiento matemático.

- En este nivel inicia la capacidad de razonamiento matemático formal de los estudiantes: son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de describir esas implicaciones, pero aún no pueden hacer demostraciones formales.

- Pueden entender una demostración explicada por el profesor u observada en un libro, pero no pueden construirla por sí mismos.

- Pueden realizar razonamientos deductivos informales, sobre todo si conocen algunas reglas lógicas como la de transitividad.

- Usan representaciones gráficas como una forma de justificar sus deducciones.

- Pueden identificar propiedades que en conjunto tipifican a unas figuras descartando a otras.

- Identifican conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan a una familia de figuras.

- En sus razonamientos lógicos hacen uso de las definiciones usándolas correctamente.

- Al estar en el nivel los estudiantes ya habrán adquirido la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o diferente figura. Aún no alcanzan a tener la capacidad para realizar la demostración completa de un teorema.

- Nivel 4: De deducción formal. En este nivel los estudiantes pueden hacer demostraciones formales de las propiedades que ya habían realizado informalmente en los niveles anteriores, así como descubrir y probar nuevas propiedades más complejas.

- Las demostraciones tienen sentido y reconocen su necesidad como única forma de verificación de la tesis.

- Realizan conjeturas y buscan verificar la veracidad de las mismas

- Pueden construir demostraciones, compararlas y criticarlas.

- Aceptan la existencia de definiciones equivalentes, aceptando la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas y pueden demostrar su equivalencia.

- Dan argumentos deductivos formales.

- Pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas. Comprende la utilidad de términos no definidos, axiomas y teoremas.

- Piensan en las mismas cuestiones que en los niveles anteriores pero ahora buscan justificaciones y elaboran criterios, argumentos y razones.

- Es claro que los estudiantes que han adquirido este nivel, logran tener un alto nivel de razonamiento lógico, tienen una visión globalizadora de las Matemáticas.

- Nivel 5: De rigor. Es el último nivel, y a pesar que se ha hecho hincapié de que los niveles no están relacionados con la edad, se asume que es un nivel propio del nivel universitario o profesional. Continuando con la ejemplificación de los polígonos, estos son indicadores de lo que está en capacidad de hacer un estudiante en este nivel:

- Puede prescindir de cualquier soporte gráfico o concreto para lograr la deducción de nuevos conceptos.

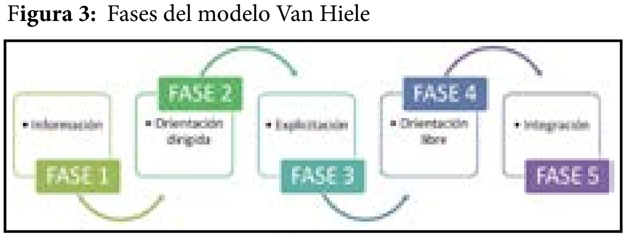
- Puede utilizar más de un sistema axiomático, analizarlo y compararlo, así pueden usar propiedades de la geometría euclidiana en la geometría analítica.

- Puede pasar de una geometría a otra.

En sus trabajos los Van Hiele enfatizan en la idea que "el paso de un nivel a otro depende más de la enseñanza recibida que de la edad o madurez", es decir, dan una gran importancia a la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje así como a las actividades diseñadas y los materiales utilizados. Sin embargo algunos estudios han mostrado que la población estudiantil media no alcanza los dos últimos niveles, es por ello que esta investigación se centró en llevar a los estudiantes hasta el nivel tres. Para ello, se realizaron actividades de graduación y organización de las acciones que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento teniendo en cuenta que los Van Hiele caracterizan el aprendizaje como el resultado de la acumulación de la cantidad suficiente de experiencias adecuadas, esto a través de cinco fases que se muestran en la Figura 27.

Fases del modelo

Figura 3: Fases del modelo Van Hiele



Fuente: Elaboración propia.

Las características principales de cada una de las fases son las siguientes (Jaime y Gutiérrez, 1990):

Fase 1: preguntas/información. Está fase es oral y mediante preguntas, se debe tratar de determinar el punto de partida de los estudiantes, lo que algunos autores llaman los conocimientos previos sobre el tema que se va a tratar, y el camino a seguir de las actividades siguientes. Se puede realizar mediante un test o preguntas individuales utilizando actividades del nivel de partida. Cabe señalar que muchas veces el nivel no lo marca tanto la pregunta coma la respuesta, es decir, diseñamos una pregunta pensando en un nivel concreto y, la respuesta recibida, puede señalar un nivel distinto del pensado inicialmente.

Fase 2: orientación dirigida. Teniendo en cuenta los pre-saberes del estudiante, es aquí donde más toma importancia la capacidad didáctica del profesor pues los autores Van Hiele, desde su experiencia señalan que el rendimiento de los estudiantes no es bueno si no existen una serie de actividades concretas, bien secuenciadas, para que los estudiantes descubran, comprendan, asimilen, apliquen, etc., las ideas, conceptos, propiedades, relaciones, entre otras, que serán motivo de su aprendizaje en ese nivel.

Fase 3: explicación (explicitación). Es una fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias) entre estudiantes y en la que el papel del docente se reduce a corregir el lenguaje de los estudiantes conforme a lo requerido en ese nivel. La interacción entre estudiantes es importante ya que les obliga a ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás.

Fase 4: orientación libre. En esta fase el estudiante se enfrenta a actividades más complejas fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario. Estas actividades deberán ser lo suficientemente abiertas, lo ideal son problemas abiertos para que puedan ser abordables de diferentes maneras o puedan ser de varias respuestas correctas conforme a la interpretación del enunciado. Esta idea les obliga a una mayor necesidad de justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más pulido.

Fase 5: integración. En esta fase, no se trabajan contenidos nuevos sino que se sintetizan los ya trabajados. Se trata de que los estudiantes adquieran una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente. El profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, sin que estas comprensiones le aporten nuevos conceptos o propiedades al estudiante. Debe ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que el estudiante ya conoce.

Finalmente, una vez superada esta fase los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de conocimientos y están listos para repetir las fases de aprendizaje en el nivel inmediatamente superior.

Metodología

Teniendo en cuenta que los docentes somos los encargados de mejorar las metodologías de enseñanza en el aula y fuera de ella, debemos investigar (el maestro como investigador en su propia practica pedagógica), consultar, actualizarnos, capacitarnos, y registrar nuestra propia practica en donde se evidencia como estimulamos el trabajo del estudiante y valoramos su aprendizaje. En este trabajo presentare algunas pautas para aplicar métodos activos aplicados en el aula de clase como metodología didáctica, para lograr despertar en el estudiante desde el primer día la participación activa, para ello se les presentara un situación problema y con base a ella se plantearan sus propias preguntas que discutirán entre ellos y posteriormente entre ellos y el docente, para llegar a comunicar algunas posibles conclusiones.

Para la enseñanza de las secciones cónicas considero que los alumnos deben saber de la existencia de diversos caminos para llegar al concepto matemático de cada una de ellas, dando prioridad a la construcción del conocimiento por parte del estudiante, realizando una serie de talleres que tienen como objetivo estimular y animar al estudiante a desarrollar los conceptos básicos de cada una de ellas. Pero lo importante es que durante el desarrollo de las actividades el docente, apoyado en la observación en el aula, y su experiencia profesional pueda orientarlas y al mismo tiempo enriquecerlas, para facilitar un avance progresivo del aprendizaje de los temas y no convertirlas en un contenido más para memorizar. Las variadas actividades son un acercamiento progresivo a las cónicas, donde se pretende entre cosas: Identificar el ¿porqué se llaman cónicas?, en los talleres se puede observar la construcción de las cónicas con regla y compás, reconocer las cónicas como envolventes de tangentes mediante el doblado de papel, construir la cónica conociendo sus propiedades y no su ecuación lo que le permitirá al estudiante visualizar, explicar, y formalizar el comportamiento grafico y analítico de las cónicas.

Conclusiones

El trabajado desarrollado en el aula de clase permitió observar una motivación de trabajo en el estudiante, observando diversión en el aula, pasar ratos mas amenos donde se aprendía y se divertía; el aula se convirtió en una clase donde no hubo temor de comunicar los hallazgos a los compañeros o al docente a quien veían más como un guía del proceso educativo que como la persona que le debe dar una nota al saber si adquirió un conocimiento o no. Uno de los hallazgos principales fue que se lograron mostrar las propiedades de reflexión de las cónicas sin necesidad de recurrir a herramientas del Cálculo, como las derivadas (tangentes).

Referencias

Guzmán, M. Legado: *Historia de las matemáticas. Apolonio.* (1986). Recuperado de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/historia/apolonio/

Lehmann, C. H. (1989). *Geometría Analítica.* México: Editorial Limusa.

Mata, F. (2006). *Análisis sobre el razonamiento en el aprendizaje de los conceptos de la* *geometría analítica: el caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de van hiele.* Tesis de grado. Instituto Politécnico Nacional, México

Santa, Z., Bedoya, D., y Jiménez, O. (2007). *Uso del doblado de papel en la construcción de las secciones cónicas e identificación de sus características.* Tesis de grado. Universidad de Antioquia: Facultad de Educación.

Santa, Z., Jaramillo, C. (2010). *Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas.*

Santa. (2011). "Comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico". Memorias XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM. Recife (Brasil). Recuperado el 15 de febrero de2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2279/996 (s. n.) (s.f.) *Revista Virtual Universidad Católica del Norte,* (31). Recuperado de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=-com_contentytask=viewyid=169yItemid=1

Urbaneja, P. M. (2001). *Divulgamat*. Recuperado el 10 de Marzo de 2012 de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp