

*P*rofesor: no entiendo

Reflexiones alrededor de una experiencia
en docencia de las matemáticas

Pedro Gómez



una empresa docente®

Universidad de los Andes

Bogotá, 1998

PROFESOR: NO ENTIENDO. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*

Autor: Pedro Gómez 1990, 1992

D. R. © 1998 una empresa docente®.

Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, archivada o transmitida en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico, de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro, sin el previo y expreso permiso por escrito de “una empresa docente” y del autor.

Diseño carátula: INTERLÍNEA EDITORES LTDA.

una empresa docente®

Universidad de los Andes

Cra. 1 Este # 18 A - 70

Apartado Aéreo 4976 Tel.: (57-1) 284-9911 ext. 2717. Fax: 3520466 ext. 2709

Servidor WWW: <http://ued.uniandes.edu.co>

Bogotá. Colombia

Primera edición: febrero de 1990

Segunda edición: enero de 1992

Impresión: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

ISBN 958-9216-08-8

Impreso en Colombia

C*ontenido*

*I*ntroducción

- Prólogo a la segunda versión 5
- Prólogo a la primera versión 7
- Mea culpa 8
- Por qué este material no sirve casi para nada 9

*L*a matema**f**obia

- La matema**f**obia 13
- La familia y el colegio 14
- Las capacidades del estudiante: la visión del profesor 15
- Los genes matemáticos 17
- Las niñas bonitas y los estudiantes brutos 18
- Los estudiantes genios 19
- Los estudiantes con problemas 20
- Los estudiantes trabajadores 21

*M*étodos de estudio

- Se necesita mesa para estudiar 25
- Los componentes de un texto 26
- Hoja de borrador 27
- Materiales para estudiar 28

- Varias lecturas para estudiar 30
- Usar papel y lápiz 32
- Método de las cajitas 33
- ¿Cómo y qué estudiar para un parcial? 34

*R*esolución de problemas

- Estrategias “a la Polya” 37
- Hacer y escribir las preguntas 39
- Escribir en español 40
- La pregunta en reversa 41
- El proceso mental 42
- Geometría analítica 43

*P*rofesor: no entiendo

- Movimientos de cuello, primera parte 47
- Movimientos de cuello, segunda parte 48
- Cuestiones de lenguaje 50
- Hipnotizando los ejercicios 51
- La definición de conceptos 53
- Inventando ejercicios 54
- La inspiración 55
- Buscando el error 56
- Ronda 57



Herramientas

- Pasar al tablero: el problema 61
- Pasar al tablero: método 62
- ¡Partido! 63
- La chismografía 64
- El diccionario 65
- El recetario 66

Metodología

- Definición de los objetivos 69
- Objetivos y motivación 70
- El por qué de la metodología tradicional 71
- Consecuencias de la metodología tradicional 72
- Aprender sufriendo 74
- Salirse del sistema 75
- Primeros días de clase 76
- Objetivos de la discusión en clase 77
- Generación de una discusión 78
- Argumentos de una discusión 80

El profesor

- Se me rajaron 25 en el parcial 83
- El poder del profesor 84
- La guía del profesor 85
- Confesar la ignorancia 86

Evaluación

- Evaluación, factor que se olvida 89
- Principios 90

- Medir los objetivos 91
- Justicia 92
- Medir lo que se hizo 93
- Evaluar los conceptos 94
- Midiendo inspiración 95
- Un examen lindo 96
- Exámenes fáciles y difíciles 97
- Visión de las notas por parte del estudiante 98
- Una pausa que refresca 99
- Motivación del estudiante: el terrorismo 101
- Herramientas del terror: tareas y kisses 102
- Tareas: ¿cómo deben ser? 103
- Kisses: ¿cómo hacerlos? 104
- Corrección de tareas, kisses y parciales 105
- Manejo de los monitores 106
- Haga usted el parcial 107
- Repaso del parcial 108

Aprender a pensar

- ¿Qué es lo que se busca? 111
- Capacidad de abstracción 112
- Análisis racional de un problema 113
- Lenguaje de interpretación 114
- Interrelaciones o axiomas 115
- Proceso de deducción de la conclusión 116
- Sentido de la estética 117
- Conceptos y objetos concretos 118
- Aprender a definir 119
- Aprender a definir: metodología 120



*E*l reto

El reto: comprometerse con el logro de los objetivos 123
Si hay compromiso, hay motivación 125
Si hay compromiso, hay una visión diferente 126
Si hay compromiso, el contenido y la metodología pueden ser secundarios 128
Los objetivos, el compromiso y la tradición 129

*U*na estructura pedagógica

Posición epistemológica del profesor 133
Visión cerrada 134
Tradicición 135
Razones para la visión cerrada 136
Visión abierta 137
Actores 138
Visión centrada en los conceptos 139
Resultados 140
Gráficas 141
Fórmulas 142
La línea divisoria 143
Resolución de problemas 144
Utilización creativa del conocimiento 145
Caja de herramientas 146
La tabla 147

*P*rincipios

Proceso de transformación 151
Transformación versus aprendizaje 152
¿Qué es formación? 153

Una visión matemática del mundo 154
Una visión racional del mundo 155
Una manera de mirar y analizar el mundo 156
Sentido de la estética 158
Una manera de argumentar acerca del mundo 159
Metodología y formación 160
Experiencia que transforma 161
Proceso versus resultado 162
Análisis del problema 163
Argumentación 164
Presentación 165
Importancia del descubrimiento 166
Importancia de la discusión en clase 167
La motivación: un compromiso 168
Conocimiento de los objetivos 169
El profesor como partícipe de un problema común 170
El curso como un reto 171



*—de 30, se me rajaron 25 en el examen —dijo el profesor
—No, se rajaron 26, usted incluido —le respondió el director”*

Henri Yerly (1901— 1981)



*I*ntroducción

*P*rólogo a la segunda versión

La segunda versión de este material presenta algunos cambios con respecto a la primera versión. Se han introducido tres nuevos capítulos (“Métodos de estudio”, “Resolución de problemas” y “Profesor: no entiendo”) que están enfocados específicamente hacia el estudiante. La experiencia nos ha mostrado que este material puede generar algún interés por parte del estudiante y estos capítulos buscan aportar en este sentido. Desde el punto de vista del profesor, se han ampliado los capítulos sobre metodología y evaluación y se han introducido dos nuevos capítulos (“Aprender a pensar” y “Una estructura pedagógica”) que, junto con el capítulo “Los principios”, presentan las ideas sobre las cuales se basa la ideología que aplicamos en nuestros cursos.

Como se menciona en el prólogo a la primera versión, este material no presenta ninguna sustentación teórica. Este es su principal defecto. Las que aquí se presentan son reflexiones alrededor de una experiencia de cinco años en la Universidad de los Andes, experiencia ésta, que ha adolecido de ese mismo defecto: la carencia de una base teórica*. No obstante, este vacío nos ha inducido a aproximarnos al problema de la docencia de las matemáticas desde un punto de vista práctico: hemos identificado problemas, hemos generado posibles soluciones y hemos creado un espacio de experimentación en el que estas soluciones se evalúan y se mejoran. Es así como se ha creado un gran interés por la teoría dentro del grupo de trabajo y el estudio y análisis que de ella hacemos ahora tiene esta experiencia como punto de partida.

Este material no pretende que otros grupos de trabajo repliquen el proceso anterior. Por el contrario, el material busca generar en el profesor un nuevo interés por su oficio, al mostrarle que la docencia de las matemáticas es un problema en continua evolución que requiere de estudio, reflexión, experimentación y evaluación. Lo ideal es encontrar un equilibrio entre el estudio y análisis de experiencias y teorías con la propia experimentación y la evaluación de sus resultados.

El material propende por una participación activa del estudiante en su proceso de aprendizaje. Sin embargo, el texto, tal y como se le presenta el lector, parece estar en contradicción con esta posición. Sería apropiado que el

*Esta deficiencia se expresa particularmente en que, dentro del texto, se hace un mayor énfasis en el proceso de enseñanza, mientras que se considera superficialmente el proceso de aprendizaje.



texto contuviera un conjunto de ejercicios que incitaran al lector a la experimentación, evaluación y crítica de las ideas en él contenidas. Estos ejercicios no existen porque cada texto particular es una invitación a la acción y a la reflexión. Invito al profesor interesado a experimentar con las ideas aquí contenidas, a evaluar sus experiencias y a compartir conmigo y con sus colegas el resultado de esta evaluación.

Quiero agradecer a Patricia Inés Perry y Vilma María Mesa, investigadoras de “una empresa docente” quienes leyeron y comentaron un borrador de esta segunda versión.

Pedro Gómez
Santa Fe de Bogotá, 10 de enero de 1992



*P*rólogo a la primera versión

Este es un documento de trabajo. Su propósito es presentar algunas ideas y herramientas metodológicas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas. Su autor espera que estas ideas generen comentarios y críticas.

Este material es el producto de la experiencia que, durante tres años, se ha desarrollado con el grupo de profesores de “una empresa docente”, centro de investigación en docencia del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes. El material pretende recoger los principios y las ideas que, semestre a semestre, intentamos transmitir a los profesores que, por primera vez, trabajan en nuestros proyectos.

El material no tiene ningún soporte teórico. De hecho, uno de los propósitos de poner estas ideas por escrito es la de hacer explícita nuestra posición acerca de la docencia de las matemáticas para, en seguida, compararla y mejorarla con las opiniones de otros investigadores en el tema.

El material tiene una estructura particular: no tiene estructura. El material es la recolección de breves reflexiones sobre temas particulares. Cada reflexión abarca en promedio una página y contiene una o dos ideas. El tema que se pretende atacar es de tal complejidad y abarca tal variedad de aspectos, que buscar imponerle una estructura particular habría restringido el mensaje que se deseaba transmitir.

El material puede ser una base sobre la cual cada profesor construya su propia visión de la enseñanza de las matemáticas. Esta estructura abierta le permite al lector aproximarse a los textos de manera completamente libre. El material no tiene ni un comienzo, ni un fin y cada tema que se trata tiene una existencia propia, de tal manera que se puede leer independientemente de los que lo acompañan. La esperanza que tiene su autor es que el lector, al aproximarse a estos textos a través de su propia visión del problema y con sus propios criterios, termine aprovechando el material al construir una nueva visión de la problemática tratada que sea mayor que la suma de sus partes.

Este es el primer borrador de este material. No pretende abarcar el tema en cuestión en toda su extensión, ni presentar ideas definitivas sobre el mismo. Por el contrario, este material es el primer paso de un proceso de generación de un libro vivo en el que a través de las críticas y los aportes de sus lectores, sea posible mejorar y extender su contenido.

Pedro Gómez

Bogotá, 31 de diciembre de 1989



Mea culpa

Este material parte de varias suposiciones iniciales:

- Todas las personas tienen una mínima capacidad lógico-analítica
- No es cierto que existan personas que se puedan considerar “negadas” para las matemáticas
- El estudiante que está terminando el bachillerato o comenzando la universidad representa un materia prima maleable en la que los prejuicios que pueda traer son modificables
- El profesor es quien tiene en su poder la capacidad de manejar todas las herramientas necesarias para lograr los objetivos de un curso

Es a partir de estas suposiciones que, en este material, se pone todo el peso del proceso pedagógico sobre el profesor. Y es por ello que en muchos lugares del mismo se considera al profesor como la causa más probable de los posibles fracasos del estudiante.

Las cuatro suposiciones anteriores hacen parte de la “ideología” sobre la cual se basa este material. Es evidente que esta ideología no es ni tiene que ser compartida por todos los profesores. Sin embargo, considero que esta posición genera el espacio dentro del cual el profesor puede mirar su profesión como un reto e inducirlo a buscar alternativas de solución a los problemas pedagógicos con los que se enfrenta a diario en el ejercicio de su profesión.

*P*or qué este material no sirve casi para nada

La experiencia que hemos tenido con la primera versión de este material nos ha mostrado que las que aquí se exponen no son las recetas mágicas para solucionar el problema de la docencia de las matemáticas. De hecho, hemos ya identificado algunas características del texto que es conveniente mencionar desde un comienzo.

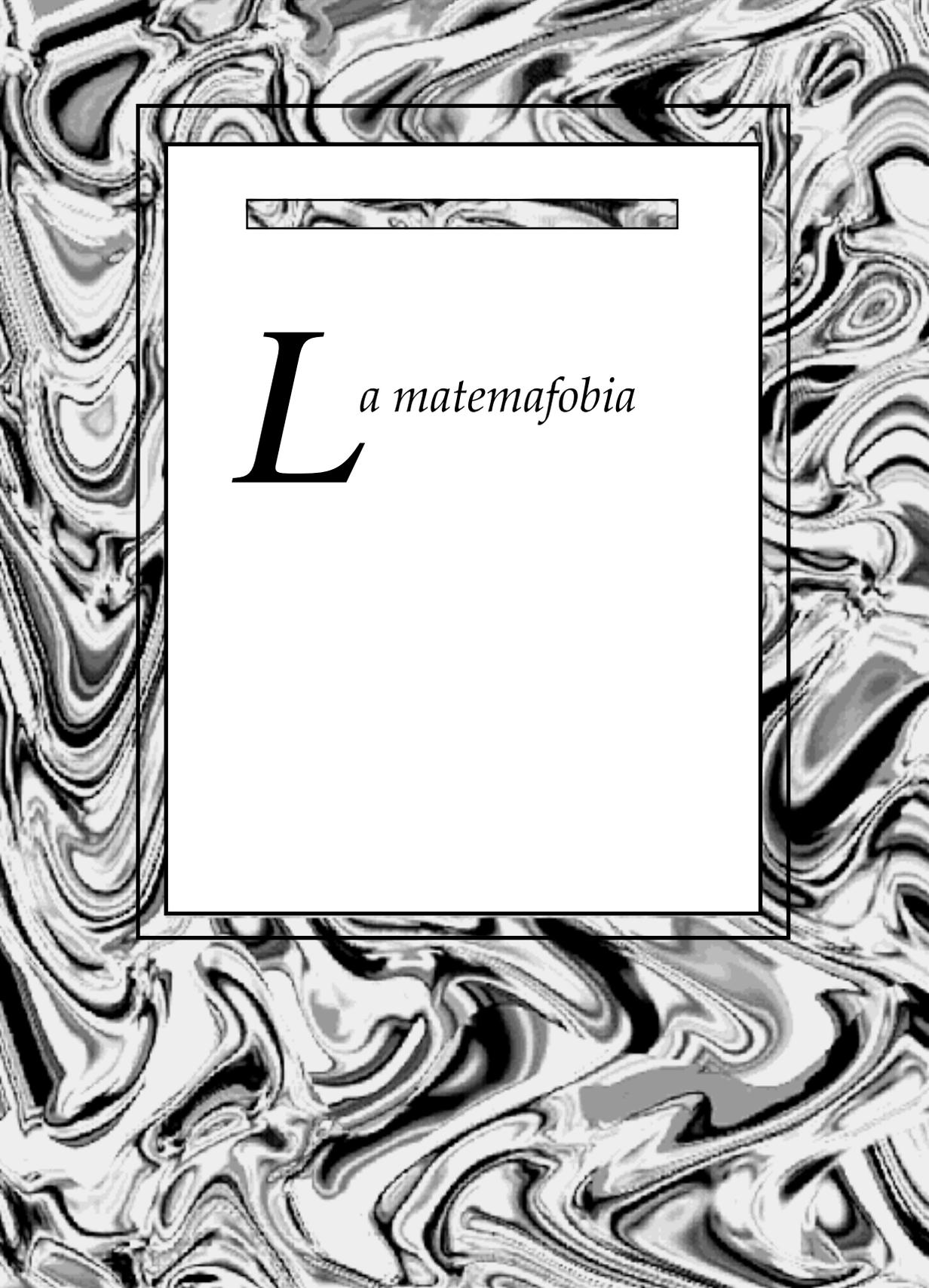
En primera instancia, este material tiene un carácter con tintes muy fuertes de dogmatismo. Lo que se presenta es *una* visión del problema de la pedagogía de las matemáticas y algunas sugerencias para implantar estrategias metodológicas al interior de esta visión. Es natural que las cosas sucedan así. Un material que fuese neutro desde el punto de vista ideológico aportaría muy poco a la discusión y a la reflexión sobre el tema. Sin embargo, esta característica del texto tiene consecuencias particulares con respecto a su aplicación en la práctica, puesto que sus lectores se pueden dividir en tres grupos.

Al primer grupo pertenecen los profesores que, al menos parcialmente, comparten las ideas que se presentan en el libro. Para ellos, el texto puede llegar a aportar en algunos casos, especialmente desde el punto de vista de algunas herramientas metodológicas particulares.

En el segundo grupo se encuentran los profesores experimentados que no comparten la posición presentada en el texto y que, en general, la critican abiertamente. Para ellos, este texto no será más que otra locura alejada de lo que ellos consideran que es la realidad del estudiante promedio. Como este texto, en su estado actual, no pretende presentar argumentos para defender su posición ideológica y solamente considera las otras posiciones como puntos de partida para las reflexiones que se proponen, entonces el material no genera casi ningún espacio para discusión.

Finalmente hay que tener en cuenta a los profesores que no tienen mucha experiencia. Para ellos este texto tiene poco sentido, puesto que ellos no son necesariamente conscientes de buena parte de los problemas que aquí se tocan.





L *a matemafovia*

L a matemafobia

En Francia existe una expresión que divide a las personas en dos grupos bien definidos: *la matemafobia*. Un *matemafobo* es una persona que le tiene fobia a las matemáticas. Como dicen las señoras, “no las puede ver ni en pintura”. Una proporción importante de nuestros estudiantes son, en mayor o menor medida, matemafobos. Uno de nuestros más grandes retos consiste en curarlos y vacunarlos contra esa enfermedad.

En otro sitio hablaremos de las causas de esta enfermedad y de las estrategias que se pueden desarrollar para tratarla. Aquí mencionaremos solamente algunos aspectos particulares de la misma. Como quien dice los síntomas.

El matemafobo es alguien que está plenamente convencido de que los genes matemáticos existen y que, cuando él llegó a que le dieran uno, hacía rato que habían cerrado el almacén. El no cree que sea bruto, en general, —¿quién puede llegar a creerlo?— sino tan sólo bruto para las matemáticas. El piensa que, si llegó tarde a la repartición de los genes matemáticos, en cambio sí llegó temprano a la repartición de los genes humanísticos y que el uno es completamente contradictorio con el otro.

El matemafobo es alguien que puede leerse una novela de corrido —todos deberíamos ser capaces, ¿no es cierto?— pero que no es capaz de mantener su concentración en un texto técnico durante más de dos minutos y treinta y siete segundos.

El matemafobo expresa su enfermedad de diversas maneras. Existen aquellos —particularmente las mujeres— para quienes su enfermedad es una catástrofe. No tienen ni idea de qué hacer y se ahogan en un vaso de agua, antes de que el agua haya sido servida. Dicen tener interés en salir adelante, pero la conciencia de su incapacidad no les permite hacer nada al respecto. Por otro lado, existen aquellos que expresan esta situación con una actitud de absoluta falta de interés. Piensan que su universo está y estará siempre desprovisto de las matemáticas y se pasan el semestre preguntándose por qué lo ponen a sufrir si él vino a la universidad a prepararse para el futuro.

Un último comentario. En muchas ocasiones, el matemafobo no solamente odia las matemáticas, también odia a cualquiera que sustente el título de profesor de matemáticas...



L a familia y el colegio

Si es cierto que el matemafobo piensa que los genes matemáticos existen y si sus padres son matemafobos, entonces no hay caso: el pobre muchacho estará convencido desde pequeño que él no nació para las matemáticas.

Si además de la tragedia familiar anterior, el niño se encuentra en un colegio donde la profesora de matemáticas (aquella señora de falda de paño gris y anteojos de aro) está convencida de que los genes matemáticos existen, la tragedia del niño se convierte en una catástrofe.

La fobia a las matemáticas no es una enfermedad genética. Es más bien una consecuencia del hecho de que mucha gente cree que es un enfermedad genética. Los padres no quieren más que aceptar que su hijo no nació para las matemáticas y que, por consiguiente, en cambio de ser ingeniero o economista, va a ser abogado o médico. ¡Qué se le va a hacer! Ellos no pueden hacer nada, aun si quisieran. "Porque es que estas matemáticas modernas que le enseñan ahora a los niños en el colegio no las entiende nadie...".

Sin embargo, el colegio puede ser la causa más profunda de la expansión tan grande de la matemafobia. Muchas son las causas, pero basta con mencionar las más importantes.

Por un lado, el profesor. No es fácil encontrar profesores de matemáticas. El ingeniero frustrado que no consiguió trabajo y que se gana la vida dictando clases en por lo menos tres colegios es un caso. El otro, es la profesora famosa. Alguien que lleva no digamos cuántos años dictando los mismos cursos y que lo único que espera es el momento que se pueda retirar de su trabajo. Pero la calidad del profesor, en el sentido de sus conocimientos del tema o de las metodologías que utiliza, no es lo realmente importante. Lo importante y verdaderamente perjudicial del profesor de matemáticas del colegio es su actitud hacia el estudiante y hacia las matemáticas. Es el profesor quien acentúa la creencia de que hay algunos estudiantes que sirven para las matemáticas y otros que no. Y no hablemos del contenido de los cursos o de las metodologías utilizadas. No podemos pedirle al profesor que haga algo mejor cuando él dicta ocho cursos diarios. No podemos más que lamentar que las cosas sean así y ser conscientes de que nuestros estudiantes llegaran a la universidad con esas actitudes y esa preparación. Nuestro reto consiste en generar el espacio dentro del cual el estudiante pueda descubrir por sí mismo que las cosas pueden ser diferentes, que vale la pena intentarlo y que basta un poco de esfuerzo y de interés para lograrlo.



*L*as capacidades del estudiante: la visión del profesor

“Este semestre me tocó un curso terrible; prácticamente todos los estudiantes son malos; no saben nada y sólo hay uno o dos que medio entienden. En el parcial se rajó el 80%. Es increíble”.

Escucho esta frase —o frases similares— al menos una vez por semana en el salón de tintos del Departamento de Matemáticas. Inmediatamente pienso en Monsieur Yerly, quien le decía al profesor que le comentaba que, de un curso de 30 personas se habían rajado 25 en el parcial, que no se habían rajado 25, sino 26, el profesor incluido.

La frase tiene varios orígenes. Por un lado, es normalmente pronunciada por un profesor que cree firmemente en que los genes matemáticos existen. Esto significa para él, que hay estudiantes brutos y estudiantes que no son brutos para las matemáticas y que, desafortunadamente, ese semestre le tocó un curso de brutos. Esto también significa que no hay caso: dado que son brutos, es muy poco lo que se va a poder hacer durante el semestre para sacarlos adelante y, por consiguiente, muchos se van a rajarse al final.

Por otro lado, un profesor que pronuncie esta frase es un profesor que no está necesariamente consciente de su papel en el salón de clase, de su responsabilidad con respecto al estudiante y del reto que significa ser profesor. Un profesor tiene la responsabilidad de preocuparse por todos los estudiantes, “brutos” o “no brutos”. Esta preocupación de sacar adelante a todos los estudiantes que expresen interés es el reto del profesor. Y este reto es válido *independientemente* de las capacidades del estudiante y de su preparación previa. Porque si en el curso anterior el estudiante no aprendió o entendió lo que necesitaba, el profesor debe encontrar la manera de llenar ese vacío.

El profesor tiene una responsabilidad con la institución y con su entorno: debe asegurarse de que los estudiantes que pasen por sus manos estén bien preparados para el futuro. Pero él también tiene una responsabilidad con el estudiante (diferente de tratar de rajarse a aquellos que, según él, no tienen las capacidades o la preparación adecuadas): debe encontrar el espacio para que el estudiante genere el interés por el tema y demuestre que sí tiene las capacidades y que sí puede lograr la preparación que se espera de él.

Un profesor que no crea en la existencia de los genes matemáticos debería tener la actitud apropiada hacia este problema. Es un profesor que sabe que



sus estudiantes tienen las capacidades necesarias y que lo que necesitan es un catalizador de sus intereses y sus esfuerzos.

*L*os genes matemáticos

Los genes matemáticos no existen. Esta es una posición filosófica particular con respecto a las capacidades del individuo que surge de la posición general según la cual —desde el punto de vista biológico— todos somos iguales mentalmente en el momento de nuestro nacimiento y nuestras capacidades y prejuicios son consecuencia de nuestro proceso de desarrollo como personas.

Existe la posición opuesta según la cual sí existen algunos tipos de genes: el gen de la música, el gen de las lenguas, el gen de la filosofía y —por supuesto— el gen de las matemáticas. De acuerdo a esta posición, existen genes con los cuales la gente nace o no que permiten una mayor facilidad para la ejecución de algunas actividades.

Aunque las anteriores son ambas hipótesis científicas acerca de las características biológicas del recién nacido, de las consecuencias que ellas tienen en sus capacidades y en su comportamiento futuro y de la importancia relativa del entorno en la formación de la persona, no es fácil identificar un *experimento crucial* que permita decidir, de una vez por todas, cuál es la posición válida. Para ello se requeriría un experimento en el cual dos gemelos (dos hermanos nacidos del mismo óvulo y del mismo espermatozoide; por consiguiente, con exactamente la misma información genética) fuesen separados en el momento de su nacimiento y puestos en entornos diferentes y controlados. Este experimento daría algunas luces sobre el asunto, pero no resolvería la cuestión definitivamente. Sin embargo, este experimento es impensable y, por lo tanto, nos quedaremos siempre con la duda, teniendo que asumir una posición con respecto al asunto. Esta posición será por lo tanto una posición ideológica que no es posible defender con argumentos racionales o científicos.

Esta posición tiene implicaciones importantes en la actitud del docente y, por consiguiente, en los principios que determinan su comportamiento en el salón de clase.



*L*as niñas bonitas y los estudiantes brutos

En una clase de treinta estudiantes, siempre hay tres niñas bonitas y dos estudiantes brutos. Esto está estadísticamente comprobado. De la misma forma, se puede pensar que, en general, se satisfacen ciertas proporciones de estudiantes de diferentes tipos dentro de un salón de clase. Aunque las niñas bonitas pueden aportar al ambiente de trabajo, esta no es la categoría que más nos puede interesar. Aquí vale la pena hacer una clasificación de los diferentes tipos de estudiantes, puesto que deberíamos tener una estrategia pedagógica con respecto a cada uno de ellos:

- Los genios que no conocen el tema pero que, sin necesidad de estudiar, se lo inventan y proponen sus creaciones en clase.
- Los genios que, además, ya conocen el tema y quieren demostrarlo constantemente en clase.
- Los que trabajan como locos (se adelantan en el programa) y logran con éxito los objetivos.
- Los que trabajan normalmente, siguiendo estrictamente las reglas de juego del curso.
- Los que trabajan como locos, pero sin método y sólo logran parcialmente los objetivos, estando, en todo caso, motivados.
- Los que hacen esfuerzos esporádicos, pero se creen negados para el tema y se frustran a la mitad del camino.
- Los que sencillamente no trabajan porque no quieren trabajar.
- Los que fueron alguna vez a clase y, de un momento a otro, se desaparecieron.

Para cada una de estas categorías hay que tener una estrategia de manejo. El éxito de un curso, particularmente en lo que se relaciona con el ambiente de trabajo, depende en buena medida del tratamiento que se le de a cada una de ellas.



*L*os estudiantes genios

Dentro de la clasificación de los estudiantes que se presentó anteriormente, identificamos dos tipos de estudiantes *genios*:

- Los genios que no conocen el tema pero que, sin necesidad de estudiar, se lo inventan y proponen sus creaciones en clase.
- Los genios que, además, ya conocen el tema y quieren demostrarlo constantemente en clase.

Son los segundos quienes, en general, tienden a presentar más problemas dentro de nuestras clases. Su participación constante y su deseo de demostrar su sabiduría o su inteligencia introduce *ruido* dentro de nuestro proceso pedagógico puesto que hace que muchos otros estudiantes se vuelvan tímidos y no deseen participar en las discusiones. Es por esta razón que es importante identificar rápidamente a estos estudiantes y hablar con ellos por fuera de clase.

Se debe buscar explicarles, de la manera más directa, el aprecio que como profesores tenemos de su aporte a la clase, pero también la importancia que para el grupo tiene la posibilidad de que todos participen. En general, este tratamiento especial es bien recibido por el estudiante. Por otra parte, si vemos que, además de genio, el estudiante es una persona seria y responsable con su trabajo (dos condiciones que no son necesariamente compatibles), podemos proponerle trabajos especiales que reemplacen el trabajo regular en clase. Esto los motivará aún más y es posible que algunos de estos estudiantes se conviertan en monitores o asistentes de investigación en el futuro.

Con respecto al primer grupo, hay que hacer una anotación importante. En muchas ocasiones, este tipo de genio que logra inventarse todas las soluciones sin conocerlas con anterioridad, tiende a ser una persona desordenada y, por consiguiente, siendo muy capaz, es ineficiente en el empleo de sus recursos intelectuales. A él también podemos ayudarlo tratando de inducirlo a que desarrolle métodos de trabajo que le permitan utilizar mejor sus capacidades.



*L*os estudiantes con problemas

Los estudiantes con problemas constituyen nuestro último grupo de interés. Encontramos tres tipos:

- Los que hacen esfuerzos esporádicos, pero se creen negados para el tema y se frustran a la mitad del camino.
- Los que sencillamente no trabajan porque no quieren trabajar.
- Los que fueron alguna vez a clase y, de un momento a otro, se desaparecieron.

A cada uno de estos estudiantes deberíamos darle su “tratamiento especial”. En cuanto a los primeros, sabemos que el problema es un problema de motivación y de auto-estima. Buena parte de nuestros esfuerzos están enfocados a atacar el problema de los estudiantes que se creen negados y, aunque hacen esfuerzos, no pueden salir adelante. Para ellos, podemos además de hacer todo lo que se propone en otros lugares de este material, buscarlos por fuera de clase y darles ánimo en el sentido de reconocerles el esfuerzo que hacen y mostrarles cómo ese esfuerzo en algún momento dará sus frutos.

En cuanto al segundo grupo, es claro que hay que hablar con ellos por fuera de clase. En la mayoría de las ocasiones hay una razón para que no quieran trabajar y la charla con el profesor por fuera de clase los motivará a hacerlo.

Con respecto al último grupo, tenemos un arma secreta. Como no vienen a clase, entonces no los podemos ver. Pero como debemos tener sus números de teléfono, sí los podemos llamar. Llamémosles y hagámosles venir a hablar con nosotros. Es casi seguro que esa llamada y esa charla los comprometerá con nosotros y con el curso y saldrán adelante.



*L*os estudiantes trabajadores

Dentro de los estudiantes trabajadores hemos identificado tres tipos de estudiantes:

- Los que trabajan como locos (se adelantan en el programa) y logran con éxito los objetivos.
- Los que trabajan normalmente, siguiendo estrictamente las reglas de juego del curso.
- Los que trabajan como locos, pero sin método y sólo logran parcialmente los objetivos, estando, en todo caso, motivados.

De estos tres grupos, el más importante es el tercero. Estos son los estudiantes que conforman, en general, el grupo más grande y a quienes tenemos que ayudar en mayor medida. Su problema tiende a ser muy sencillo: no tienen método de trabajo y, al no tenerlo, su esfuerzo es muy ineficiente. Nuestro aporte —y, en este caso, no tenemos que hacerlo por fuera de clase— es guiarlos para que desarrollen este método. No voy a hacer aquí una presentación de lo que puede ser un tal método de trabajo, puesto que en otros lugares de este material se tocan temas generales relacionados con este problema y porque, en algunos casos, las soluciones tienden a ser específicas a las coyunturas que se presentan en clase.

Con respecto al primer grupo, ellos son los que llamamos los “pilos”. A estos también hay que consentirlos. Por una parte, ellos son los mejores candidatos para monitores y, por otra parte, en algunas ocasiones tienden a ser “pilos” en nuestros cursos, pero no en los otros. Cada profesor deberá ver si quiere cargar con esa agradable responsabilidad, pero, en general, es bueno acostumbrar al estudiante a que lleve un equilibrio adecuado en la dedicación que le da a cada uno de sus cursos.

Quisiera hacer una anotación final. Los estudiantes trabajadores tienden a tener una deficiencia grave: juegan estrictamente con las reglas del juego y, por consiguiente, no aprovechan su imaginación y no tienen mucha iniciativa. Esto hay que trabajarlo puesto que, de nuevo, lo importante es que nuestros estudiantes tengan un buen balance de todas las cualidades.





Métodos de
estudio

*S*e necesita mesa para estudiar

¿No ha visto usted alguna vez a un estudiante de ingeniería o economía sentado en el bus ejecutivo* a las siete de la mañana leyendo el capítulo de resolución de ecuaciones cúbicas porque tiene quiz ese día? Seguro que sí; y seguro que el pobre estudiante se rajó en la prueba.

Nuestros estudiantes no tienen por qué saber cómo se estudia matemáticas. Su curso de matemáticas es uno de los tantos cursos que tienen que ver en un semestre y para los cuales tienen que estudiar. Y cuando lo tienen que hacer, aplican ese “principio de inducción intuitiva” que hace parte de la “actividad pseudo-científica” de nuestros estudiantes:

Cuando tengo examen de legado de Grecia, estudio en el bus leyendo el material y me va bien. Por consiguiente, para que me vaya bien en el examen de matemáticas, basta con que estudie leyendo en el bus.

El problema es que les va mal; y les va mal porque ellos no saben que los métodos tradicionales e intuitivos que pueden funcionar para otras materias no son efectivos en el caso de las matemáticas. Ellos no saben que para estudiar eficazmente matemáticas es necesario desarrollar métodos particulares que requieren de entornos y elementos específicos diferentes.

Dado que este es un problema de ignorancia por parte del estudiante, es responsabilidad del profesor introducirlo a estos métodos e inducirlo a practicarlos eficientemente.

*El *ejecutivo* es el nombre que se le da al bus que utiliza una buena proporción de los estudiantes que viajan del norte de la ciudad a la universidad.



Los componentes de un texto

En otro lugar se sugiere que el estudio de un texto de matemáticas requiere de varias lecturas. Si el texto en cuestión tiene que leerse más de una vez, ¿qué características debe tener y que requisitos debe cumplir cada una de estas lecturas? Para responder esta pregunta vale la pena analizar los componentes esenciales de casi cualquier texto de matemáticas.

Todo texto de matemáticas involucra *conceptos*. Estos conceptos representan los objetos matemáticos sobre los cuales “habla” el discurso en cuestión. A menos que se conozca el significado de estos conceptos es imposible comprender el sentido del discurso. Algunos de los conceptos son conocidos y, en muchos casos, cada texto trae nuevos conceptos. Por consiguiente, es necesario conocer (y sobre todo comprender) el significado de cada uno de estos nuevos conceptos.

Por otra parte, en la mayoría de los casos, el texto también involucra *resultados*. Los resultados son afirmaciones acerca de los objetos matemáticos representados por los conceptos. Estos resultados son el conjunto de afirmaciones verdaderas acerca de estos objetos. Por consiguiente, en general cada uno de estos resultados tiene una justificación. En algunos casos esta justificación es una demostración formal de la verdad de la afirmación y, en otros, se presenta una justificación informal de la misma. Para la mayoría de los cursos de matemáticas, es necesario ser capaz de reproducir estas justificaciones.

En tercera instancia, los textos presentan *técnicas*. Estas técnicas se refieren, en general, a maneras de resolver problemas. En algunos casos, estas técnicas permiten resolver problemas teóricos (técnicas para generar una demostración) y, en otros, son técnicas para resolver problemas prácticos (lo que aquí llamamos las recetas). Las técnicas no aparecen de la nada. Ellas son consecuencia lógica tanto de los conceptos, como de los resultados que se han presentado en el discurso. Ellas nos muestran la forma práctica por medio de la cual podemos utilizar estos conceptos y estos resultados y, por consiguiente, dependen directamente de ellos.

El cuarto elemento son los *ejemplos*. En los ejemplos, el texto presenta instancias particulares, ya sea de los conceptos que se han introducido o de las técnicas por medio de las cuales se pueden resolver problemas.

Y, finalmente, los *ejercicios*.



*H*oja de borrador

Para estudiar matemáticas hay que estudiar escribiendo; y, para escribir, se hace necesario lápiz y papel. En el caso del estudio de las matemáticas, se necesitan varios papeles, entre otros, la hoja de borrador acerca de la cual hablaremos aquí.

La hoja de borrador es una hoja que se bota a la caneca al final de la sesión. En ella, escribimos todo lo que se nos pueda ocurrir. En particular, nos interesa escribir los conceptos involucrados en el texto, los resultados que allí se presentan y el desarrollo que nosotros hacemos de los ejemplos presentados.

Como hemos de hacer varias “pasadas” por el texto, la hoja de borrador contendrá varias “versiones” de nuestra aproximación y comprensión del mismo.

¿Por qué la hoja de borrador? Porque, al estudiar matemáticas, los factores que juegan dentro del discurso son, en general, numerosos y variados. Nuestra mente no puede, desde la primera lectura, retenerlos todos al mismo tiempo y la hoja de borrador nos permite escribirlos y hacer referencia a ellos cada vez que los necesitamos. Pero, además, la hoja de borrador es trascendental, puesto que los discursos matemáticos son, en general, encadenamientos de afirmaciones que se deducen unas de otras y nuestra mente no está en capacidad de retener en un mismo instante todos y cada uno de los pasos que nosotros vamos generando de estos encadenamientos.

Es gracias a la hoja de borrador que nosotros podemos identificar los conceptos y claves y los trucos y técnicas que, al no estar explícitos en el texto, nos dificultan su comprensión.



Materiales para estudiar

Estudiar, comprender y apropiarse de un texto de matemáticas requiere de todo un proceso por parte del estudiante. Los propósitos “finales” del proceso son:

- Ser capaz de reproducir la esencia del discurso
- Ser capaz de resolver los ejercicios

Debe ser claro que el único medio válido para lograrlos es la comprensión de los conceptos involucrados (lo que algunos llaman la “internalización de los conceptos”). Hemos visto que, para lograr el primer objetivo, es necesario que el estudiante sea consciente de que todo discurso matemático involucra un cierto número de componentes: los conceptos, los ejemplos de los conceptos, los resultados, las demostraciones de los resultados, los ejemplos de los resultados y las técnicas y trucos para resolver problemas. El estudiante debe ser capaz de identificar estos componentes y hacer su propio resumen del discurso a partir de ellos.

También hemos visto que, para llevar a cabo este proceso, es trascendental que el estudiante esté continuamente escribiendo. Es por ello que hemos identificado ya un elemento esencial del proceso de estudio: *la hoja de borrador*. Sin embargo, existen otros elementos o materiales de estudio cuya necesidad se hace patente a partir del proceso que se ha expuesto.

Por un lado, tenemos el *diccionario*. Este, más que una hoja, debe ser una especie de cuaderno, puesto que será un material que se irá construyendo a lo largo de todo el curso. En él, el estudiante debe ir apuntado, en orden cronológico obviamente, cada uno de los conceptos que aparecen en el curso, junto con su significado. El propósito no es que el estudiante pueda tener este diccionario para trabajar. Como todo diccionario, le servirá esporádicamente de referencia para asegurarse que conoce y comprende el significado de un concepto específico. Pero, como cuando se estudia una lengua, el estudiante debe conocer el significado de cada uno de los conceptos. Este significado debe tener un carácter operacional, puesto que es gracias a este significado operacional que el estudiante podrá resolver algunos ejercicios. Finalmente, en algunos casos resultará importante que, además del significado, el estudiante escriba un ejemplo o caso particular del concepto en cuestión.

Por otro lado, se tiene el *resultario*. Esta debe ser otra sección de ese cuaderno, donde el estudiante debe llevar la lista de los resultados que se han visto en el curso hasta el momento. El debe conocer estas afirmaciones,



puesto que son ellas las que constituyen el conjunto del conocimiento acerca del tema. Además de tener escritos los resultados, el estudiante debe escribir también las ideas principales y los trucos que se encuentran involucrados en la demostración del resultado, de tal manera que le sirvan de guía para ser capaz de reproducir la demostración del resultado en cuestión. Junto con esta guía, en algunos casos resulta importante que el estudiante escriba también la esencia de un ejemplo que represente el aspecto operacional del resultado.

Y finalmente se tiene el *recetario*. Esta es la otra sección de ese cuaderno y, en ella, el estudiante debe escribir los procedimientos generales que le permiten resolver problemas. Estos procedimientos se expresan, en general, como un diagrama de flujo en el que se identifican cada uno de los pasos y las decisiones que hay que tomar para lograr el objetivo. Es importante que, además de identificar la receta, el estudiante haga explícita la relación entre una receta dada y el significado operacional de los conceptos y los resultados que se encuentran involucrados en esa receta*.

*En otro lugar de este material se sugiere una manera “práctica” de manejar estos elementos. Ver el tema “La tabla” en el capítulo “Una estructura pedagógica”.



Varias lecturas para estudiar

Para estudiar matemáticas, no basta con leer una vez el texto. Aunque cada quien, de acuerdo a sus capacidades y conocimientos, puede llegar a desarrollar su propio método de estudio, es evidente que, para lograr los objetivos pedagógicos que un texto dado impone, es necesario leerlo más de una vez.

Cada lectura hace parte de un proceso que debería buscar, al final, que el estudiante sea capaz de reproducir natural e intuitivamente el contenido del texto. El contenido “lógico” de casi cualquier texto de matemáticas y la importancia de “comprender” ese texto hace que este proceso de reproducción sea posible sin necesidad de que la persona se aprenda de memoria el contenido. ¿Qué es entonces lo que hay que lograr cuando se estudia?

El primer paso consiste en tener una idea general del contenido del texto. Para ello, basta una lectura rápida que nos ubique dentro del contexto del discurso. Una vez que sepamos de qué se trata el discurso, es necesario que profundicemos en los conceptos y los resultados que éste contiene. Para esto, tenemos que sacar a un lado la lista de nuevos conceptos y nuevos resultados involucrados. En este momento, podemos ir apuntando en el diccionario estos conceptos y en el resultario estos resultados.

El siguiente paso consiste en comprender el significado de los conceptos. Para ello, debemos hacer el esfuerzo, no sólo de “hacer” los ejemplos que se proponen en el texto y que dependen de estos significados, *sin mirar previamente el ejemplo*, sino también de tratar de producir nuestros propios ejemplos.

Una vez que tenemos cierta certidumbre de que conocemos y comprendemos los conceptos, en cuanto a su significado operacional, podemos atacar los resultados. Para ello, debemos analizar sus demostraciones. Este análisis debe buscar identificar los pasos esenciales de la demostración. Estos pasos esenciales dependen, en general, de los conceptos y de los resultados que están involucrados en cada una de estas demostraciones. Cuando hayamos escrito en nuestra hoja de borrador estos elementos, podemos pasar a analizar el flujo de la demostración. Esto lo debemos hacer siempre escribiendo. A cada demostración, le debemos dar el tiempo que requiera, hasta que seamos capaces de reproducir la demostración sin necesidad de mirar el texto, gracias a nuestra comprensión de los conceptos involucrados y de la interacción lógica de las afirmaciones allí contenidas. En este momento sabremos cuáles son los puntos y los trucos claves de la misma y son estos puntos y



estos trucos los que debemos anotar en el resultario acompañando al texto del resultado.

Cuando conozcamos cada una de las demostraciones de los resultados involucrados en el texto, podemos analizar detalladamente los ejemplos que utilizan estos resultados. Aunque previamente hemos mirado estos ejemplos para efectos de lograr una comprensión intuitiva de las afirmaciones en cuestión, en este momento debemos tratar de hacer nosotros mismos el ejemplo, sin mirar la solución del texto.

El análisis de los ejemplos nos debe guiar en el descubrimiento de las técnicas de resolución de problemas: las recetas. Estas recetas se basarán en general en los significados operativos de los conceptos y los resultados, pero en muchas ocasiones involucrarán también uno o dos trucos. En nuestra hoja de borrador deberemos escribir explícitamente estos factores. Cuando hayamos reconocido y comprendido cada uno de estos factores, podremos escribir la receta en el recetario.

De esta forma, habremos hecho, ya, varias pasadas por el texto, *todo el tiempo escribiendo*. Estas pasadas nos deben haber permitido comprender y manejar cada uno de los componentes del texto. El paso final consiste en intentar reproducir en nuestra hoja de borrador, y de manera reducida, todo el discurso que estamos estudiando. La primera vez se nos olvidarán algunos puntos y tendremos que regresar al texto. Sin embargo, a la tercera o cuarta seremos capaces de escribir en nuestra hoja de borrador, en el orden apropiado, los conceptos, con sus significados, un ejemplo para cada concepto; los resultados, con sus demostraciones; y los ejemplos que involucran conceptos y resultados, siendo conscientes de las técnicas y trucos que están involucrados en ellos.

Después hay que ponerse a hacer los ejercicios.



Usar papel y lápiz

Son pocos los estudiantes que terminan el colegio habiéndose dado cuenta que estudiar matemáticas no es necesariamente lo mismo que estudiar geografía, historia o inglés. Mientras que para algunos de estos temas, el proceso de estudio puede llevarse a cabo dentro de un esquema de recolección y grabación informal de información (lo cual no quiere decir que este método sea el más eficiente), en el caso de las matemáticas es prácticamente una pérdida de tiempo. Porque las matemáticas hay que estudiarlas con papel y lápiz. Las razones son evidentes.

La mayor parte de los discursos matemáticos son argumentos. Argumentos que parten de una cierta cantidad de suposiciones, premisas o afirmaciones que se dan por conocidas y que llegan a una serie de conclusiones por medio de una deducción lógica. Dado que la mente humana no tiene capacidad de retener en línea más de tres o cuatro hechos o factores, estos argumentos no pueden generarse fácilmente en la mente del estudiante. Este tiene que apuntar la información que no puede retener para hacer referencia a ella en el momento que la necesita. Por otra parte, como estos argumentos no pretenden exclusivamente transmitir información, resulta esencial que el estudiante identifique explícitamente los diferentes tipos de elementos que constituyen el discurso.

El propósito final del estudiante debería ser el de reconocer que, dentro del discurso, hay una cierta información que él debe tener presente puesto que es el punto de partida del argumento y que no hay necesidad de retener el encañamiento lógico ni las conclusiones, una vez que él ha comprendido el proceso y descubierto la o las nuevas herramientas lógicas que se utilizan dentro de él. En ese momento, el estudiante debe intentar *reproducir* en el papel el discurso y solamente debería estar satisfecho cuando esta reproducción le parece evidente y natural.



Método de las cajitas

Buena parte de nuestros estudiantes llegan a la universidad sin ningún método de estudio eficiente. Es posible que esto sea debido al tipo de evaluaciones que han tenido en el colegio. En algunos casos, estas evaluaciones son tales que no requieren método de estudio pues obligan al estudiante exclusivamente a retener y ser capaz de reproducir información. Sin embargo, al llegar a la universidad y por razón del tipo de temas a los que se enfrentan y a la cantidad de trabajo que tienen que llevar a cabo, nuestros estudiantes se ven en la necesidad de desarrollar métodos de estudio. Algunos de ellos descubren estos métodos por sí mismos. Otros los aprenden gracias al azar de encontrarlos en algún sitio. El resto no los tiene y son extremadamente ineficientes en su trabajo.

Lo importante para nuestros estudiantes no es grabar información. Lo importante es saber evaluar esta información para identificar los conceptos esenciales y las relaciones entre estos conceptos. Porque lo que se espera del estudiante es que él reconozca el proceso mediante el cual se llega a una conclusión dentro de un discurso y no exclusivamente que conozca las premisas a partir de las cuales parte este discurso.

En otras palabras, se espera del estudiante que él sea capaz de *resumir racionalmente* un discurso y que, grabando muy poca información, sea capaz de reproducir un discurso similar. Para ello, el estudiante debe tener una herramienta que le permita resumir racionalmente. *El método de las cajitas* es una tal herramienta. Y es muy sencillo.

Para cada concepto, hagamos una cajita. Para cada relación entre dos conceptos hagamos una flecha. El proceso racional de un discurso es sencillamente el flujo lógico que se da entre las cajitas a través de las flechas.





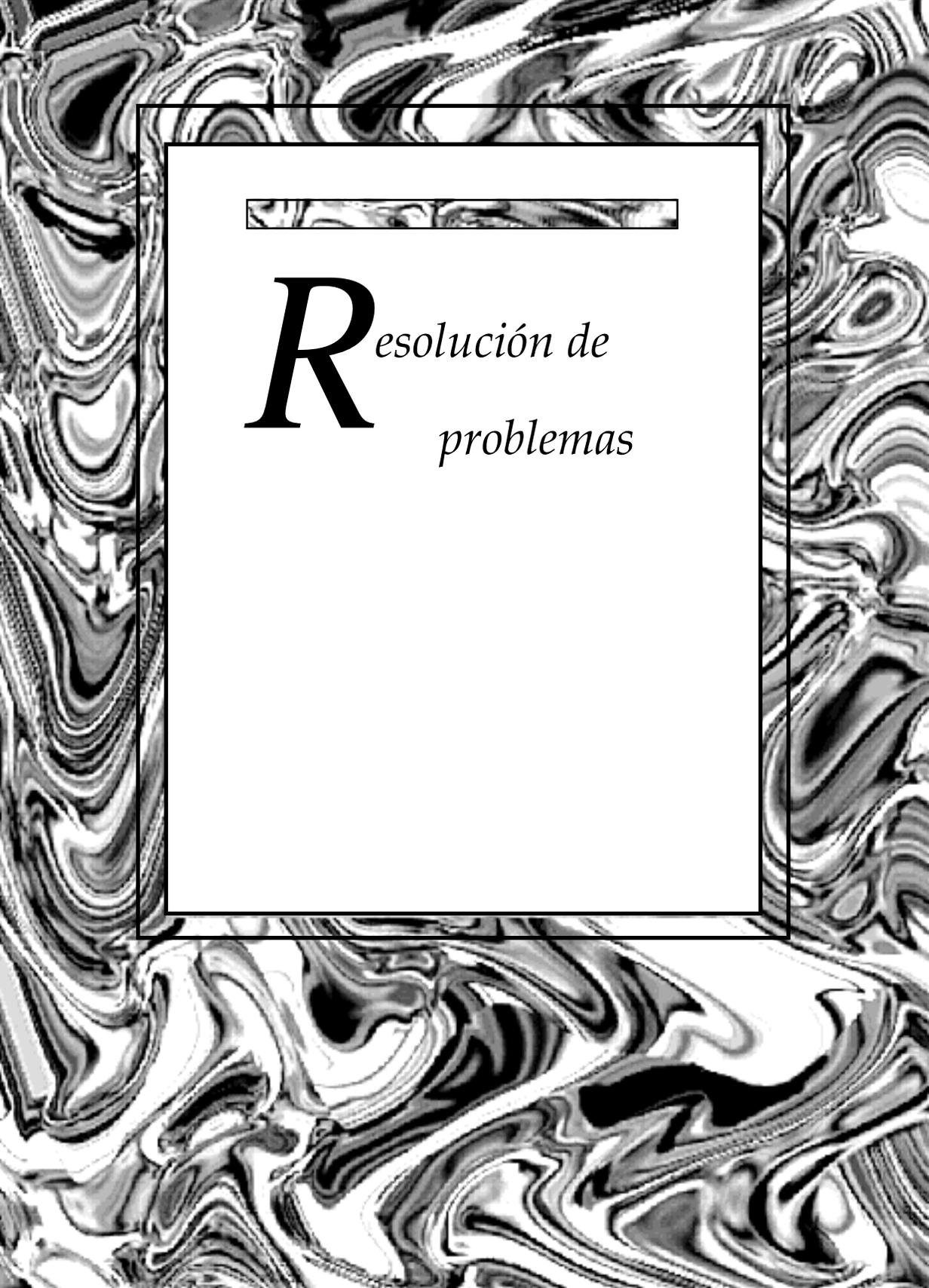
Cómo y qué estudiar para un parcial?

El estudiante que haya seguido la metodología de preparar su clase todos los días, no tiene nada que aprender de nuevo para el parcial. En principio, él ha comprendido y aprendido cada tema particular en el momento en que éste se ha tratado en clase. Si, además, el estudiante ha llevado al día el diccionario y el recetario del curso, entonces el trabajo de preparación de un parcial debería ser sencillo.

El objetivo que todo estudiante debe buscar al preparar un parcial es el de tener *una visión global* del tema que se ha tratado durante el último mes. Es el momento de comprender la razón de ser de algunos temas, que en la ocasión particular que se vieron en el curso podrían parecer sin sentido. Es también el momento de reconocer la interrelación entre los diversos temas del curso. Por lo tanto, el parcial representa la oportunidad de ver en un sólo vistazo el *flujo lógico* del discurso que se ha desarrollado hasta el momento.

Una de las herramientas más eficientes para lograr estos objetivos es el “método de las cajitas”. Este método, conocido por los ingenieros de sistemas como *diagrama de flujo* es la manera más sencilla y directa de identificar los conceptos esenciales del tema y de relacionarlos entre ellos. Consiste simplemente en determinar cada uno de los conceptos, escribirlos en una caja y conectarlos por flechas que representan las interrelaciones. Este método, no solamente sirve para tener la visión global del tema y, por lo tanto, un resumen del mismo; también sirve para representar gráficamente cada una de las recetas de solución de problemas, puesto que le permite al estudiante ver el orden en el cual él deber llevar a cabo cada una de las etapas del proceso.





*R*esolución de
problemas

Estrategias “a la Polya”

¿De qué sirve conocer los conceptos, los resultados que hablan acerca de estos conceptos y las técnicas que se deducen de estos últimos, si uno no sabe cómo utilizarlos para resolver problemas de la “vida real”? Yo creo que de muy poco, excepto porque, al estudiarlos, el alumno está desarrollando una cierta formación personal. Sin embargo, sucede que en muchas ocasiones, nosotros, los profesores, no nos esforzamos por desarrollar en el estudiante la capacidad de atacar problemas de la vida real, también llamados problemas de “carreta”, o más conocidos como problemas de planteo.

El problema de los problemas de planteo es que es muy posible que un estudiante que conozca los conceptos, los resultados y las técnicas no sea capaz de resolverlos. La razón es sencilla: los problemas de planteo no se presentan en la forma para la cual el estudiante conoce las técnicas y los resultados. Esto es, el estudiante no puede aplicar estas técnicas automáticamente al problema. Por consiguiente, el problema de los problemas de planteo es un problema de traducción cuya solución debe ser la respuesta a la pregunta:

¿Qué estrategias hay que seguir para traducir el texto del problema de planteo a una forma a la cual se le pueden aplicar las técnicas que el estudiante ya conoce?

Polya es el autor clásico en este tema y aquí no se pretende hacer nada más que tomar y reformar algunos de los procesos que él propone. Las estrategias se pueden dividir en dos partes: unas generales y otras particulares. Las generales son:

- Hacerse las preguntas
- Escribir las preguntas
- Escribir las respuestas
- Diseñar una estrategia
- Escribir una estrategia
- Comprobar la respuesta

Las preguntas particulares se refieren a las preguntas mismas:

- ¿Qué me dan?
- ¿Qué me piden?
- ¿Puedo hacer un dibujo?



- ¿Qué necesito saber para responder la pregunta?
- ¿Cómo puedo expresar la incógnita?
- ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir al solución?
- ¿He utilizado todo lo que me dan?



Hacer y escribir las preguntas

Hemos visto cómo el primer paso para desarrollar una estrategia que permita resolver problemas de planteo tiene que ver con hacerse una serie de preguntas y escribirlas en el papel de tal manera que el estudiante pueda crear una estrategia que lo guíe en el proceso de solución del problema. Sin embargo, una cosa es lo que idealmente hay que hacer y que ellos, como estudiantes, son conscientes que tienen que hacer y otra cosa es lo que hacen una vez que se enfrentan al problema y que piensan que, a menos que lleguen a una respuesta, todo su trabajo es en vano. ¿Qué podemos hacer nosotros los profesores para lograr que los estudiantes se acostumbren a aplicar estas estrategias?

El primer paso ya se ha mencionado en otros lugares, pero vale la pena repetirlo. Tenemos que dar el ejemplo. Para ello, cada vez que resolvamos o corriamos un ejercicio en el , debemos hacernos las preguntas y escribirlas explícitamente. De esta forma, cuando el estudiante revise sus apuntes, se encontrará con algo más que las simples ecuaciones.

El segundo paso es, en mi opinión, el más eficiente. Basta decirles a los estudiantes que, tanto en las tareas, como en los quices y en los parciales, se evaluará el hecho de que ellos se hagan y escriban las preguntas. Que dos soluciones de dos estudiantes diferentes que lleguen al mismo punto, pero que tengan diferencias en este aspecto recibirán calificaciones diferentes. Adicionalmente, deberíamos acostumbrarnos, por lo menos en una primera instancia, a que los textos de los problemas contuvieran ese requisito.

Finalmente, existe otra estrategia diferente*. Consiste en que se hagan ejercicios en los cuales lo único que se pide es el proceso de traducción, pero no se pide el proceso de solución de las expresiones resultantes. De esta manera, se le quita al estudiante la presión por llegar a una solución y se hace énfasis en el problema de traducir el texto a una forma matemática a través de llevar a cabo una estrategia que requiere de la formulación y la escritura de las preguntas en cuestión.

*Esta es una idea de Vilma María Mesa que me estoy robando vilmente.



*E*scribir en español

Se dice que las matemáticas son un lenguaje y, en este texto, se ha insistido acerca de la importancia de mirarlas de esta manera para comprender las razones de algunas de las dificultades de los estudiantes. Sin embargo, esto no quiere decir que todo discurso matemático debe estar completamente escrito en ese lenguaje. La mayoría de los estudiantes piensan lo contrario y, cuando resuelven un ejercicio, lo hacen escribiendo en el papel únicamente aquellas expresiones que tienen forma matemática. Al hacerlo, no pueden llevar en el papel una memoria de la estrategia que están aplicando y tampoco pueden asegurarse de la validez del procedimiento que están utilizando.

Este defecto estudiantil tiene un origen evidente. Es el ejemplo del profesor. En clase, y dado que él está hablando cuando está explicando, el profesor escribe en el tablero únicamente las expresiones matemáticas. Esto es normal, puesto que no es la única forma de comunicación. Sin embargo, cuando el estudiante toma apuntes, él no escribe sino lo que se encuentra en el tablero. Cuando va a repasar sus apuntes se encuentra con esa lista de fórmulas y, finalmente, cuando va a resolver un ejercicio, lo hace de la misma manera. Todo esto le dificulta el proceso de llegar a una solución.

En primera instancia, el estudiante no necesariamente es consciente de la necesidad de tener una estrategia para atacar los problemas y que esta estrategia consta de pasos que hay que cumplir en un cierto orden. Pero, aún cuando está aplicando una estrategia, dado que no escribe los pasos en su papel, no puede saber con exactitud en qué lugar del proceso se encuentra; ni qué es lo que está buscando al final; ni qué es lo que tiene que encontrar en el proceso; ni qué es lo que ha hecho hasta ahora.

Este problema tiene dos soluciones a las cuales el profesor puede aportar. En primer lugar, dar buen ejemplo. Cuando esté resolviendo un ejercicio en el tablero, el profesor debería hacer un esfuerzo para escribir en español los puntos mencionados anteriormente. En segundo lugar, el profesor debería incluir dentro de sus criterios de evaluación, qué tanto cumple el estudiante con estos requisitos.



*L*a pregunta en reversa

Parcial. El último problema no es de mecánica. No basta saberse una receta y aplicarla para resolverlo. Los otros puntos eran fáciles y hace rato que los resolvieron. Sin embargo, observamos el salón y vemos a una gran cantidad de estudiantes con la cabeza en alto, al parecer buscando el origen de una telaraña que se ha desarrollado en el dintel entre el techo y la pared que sostiene el tablero. Todos la observan. Cuando nos acercamos a ellos, nos damos cuenta que su hoja de respuestas está en blanco para el problema en cuestión. No han podido arrancar; están haciendo dos cosas: hipnotizando el ejercicio y esperando la ayuda de la Santísima Trinidad.

¿Por qué no arrancan? Porque la solución no es inmediata y, por consiguiente, el proceso de solución no es mecánico. Hay que pensar un poco. Pero, que haya que pensar no quiere decir que uno tenga que inspirarse. Lo que sucede es que no saben por dónde comenzar. En algunos casos, ni siquiera se han hecho las preguntas claves: ¿puedo hacer un dibujito?, ¿qué me dan?, ¿qué me piden? Pero, aún aquellos que se les han hecho, no las han escrito, y, aquellos que las han escrito, no han pasado de allí. El ejercicio es difícil y no saben qué más pueden hacer. Falta que se hagan otra pregunta clave.

La pregunta clave es la pregunta en reversa. Ya sé qué me dan y qué me piden. Pero,

¿qué tengo que averiguar para poder llegar a lo que me piden?

Esta es la pregunta en reversa. La respuesta a ella será normalmente por lo menos dos cosas: tengo que averiguar **A** y tengo que averiguar **B**. Y la consecuencia de responderla es que el problema original y, por lo tanto, la pregunta original, se han transformado en dos problemas y dos preguntas. En este momento, puede suceder una de dos cosas. O las preguntas son tales que sus respuestas son evidentes, o hay por lo menos una pregunta que continúa siendo difícil. En el primer caso, estamos listos. En el segundo, podemos volver a aplicar el proceso; volvemos a hacer la pregunta en reversa. Y lo hacemos tantas veces como sea necesario de tal forma que, al final, lleguemos a un punto donde todas las preguntas tengan respuestas evidentes. En este momento encontramos sus respuestas y nos devolvemos.



El proceso mental

Cuando el profesor o un estudiante adelantado resuelve un problema en el tablero, son muchos los estudiantes que quedan con la impresión de que la solución se logró gracias a la inspiración divina o a la genialidad de quien lo hizo. Esta es obviamente una impresión errada, pero que tiene causas que normalmente ni el profesor, ni el texto hacen explícitas.

En primera instancia, no se hace explícito el proceso de “traducción e interpretación” que todo problema matemático requiere en el sentido del lenguaje particular que se encuentra siempre involucrado. En el caso del problema particular:

Dado que $f(x) = \frac{1}{x-1}$, halle el dominio de f ,

hay que conocer el significado del concepto “dominio” y hay que hacer explícito este significado. De esta forma, el estudiante debe transformar el problema inicial en el problema:

Hallar el conjunto de valores para los cuales f está definida.

Pero, dado que este conjunto es infinito, se requiere que el estudiante transforme de nuevo el problema en otro:

Hallar los valores para los cuales f no está definida.

Este es realmente el problema que el estudiante tiene que resolver. Una vez resuelto, él tiene que devolverse en el proceso. Y, al hacerlo, encontrará la solución al problema original.

Son pocos los estudiantes y los profesores que son conscientes de que este es un proceso que debería hacerse explícito y que, aun para un problema tan sencillo como el expuesto arriba, requiere de por lo menos seis pasos separados. En el momento en que el profesor y el estudiante se aproximan al problema de esta manera, las dificultades matemáticas disminuyen, puesto que el problema se convierte en varios subproblemas que pueden ser atacados separadamente, dentro de los cuales sólo uno de ellos requiere de conocimientos matemáticos y el resto son problemas de lenguaje o de deducción lógica elemental.



*G*eometría analítica

La geometría analítica es un terreno muy propicio para trabajar con los problemas de los conceptos y el manejo que de éstos hace el estudiante. Esto es evidente, puesto que, en este terreno, cada objeto puede llegar a tener una definición gráfica y una definición algebraica. El paso de una a otra de estas definiciones obliga al estudiante a trabajar la definición misma del concepto. Sin embargo, este proceso contiene, escondidas, unas ciertas técnicas que, para el estudiante novato, no son evidentes.

La primera y más importante de todas es la manera misma en que se debe hacer la conexión entre los dos espacios (el gráfico y el algebraico). Este punto parecería obvio, pero no lo es. Esto se debe a que para el estudiante no es tan inmediato pensar en “un punto (x,y) cualquiera que cumpla con tal condición (por ejemplo, pertenecer al lugar geométrico en cuestión)”. Este tipo de acción, la de dar nombre, elegir y trabajar con un objeto abstracto cualquiera que represente cualquiera de los infinitos objetos que cumplen con la condición, no es directa para el estudiante. Si el profesor la hace en el tablero, el estudiante la acepta y no puede encontrar argumentos para afirmar que ese proceso es incorrecto. Sin embargo, cuando él se encuentra enfrentado a un problema en el que él tiene que hacer lo mismo, no necesariamente se le ocurre. Existe, por consiguiente, la necesidad de acostumar al estudiante a hacer este tipo de proceso. Esto es válido en el caso de la geometría analítica, pero también lo es en muchos otros terrenos, puesto que las argumentaciones matemáticas tienden casi siempre a comenzar diciendo “supongamos que éste es un objeto que cumple con tales condiciones”.

Por otra parte, se da el problema de saber hacia dónde se quiere ir. Esto debería hacer parte de la heurística natural apropiada por el estudiante, pero no lo es así en general. En muchos casos, es posible que el estudiante sepa arrancar, pero no sabe como terminar.





Profesor:
no entiendo

*M*ovimientos de cuello, *primera parte*

El estudiante tiene dos movimientos de cuello: el vertical y el horizontal. Haga usted el siguiente experimento para identificarlos.

Escoja un tema que no sea evidente y, dentro de ese tema, un ejercicio cuya solución no requiera únicamente de la aplicación de una fórmula, sino que implique la necesidad de un proceso en el que haya varios pasos conectados lógicamente entre sí. Resuelva el ejemplo en el tablero tratando, como siempre, de ser lo más claro posible, al explicar todos y cada uno de los pasos y mostrando las conexiones lógicas entre cada uno de ellos. Al terminar, haga la pregunta tradicional: “¿Entendieron?”

En este momento, usted reconocerá el movimiento de cabeza vertical. Esta es la primera etapa del experimento. Ahora viene la segunda. Escriba en el tablero un ejercicio del mismo tipo del ejemplo que acaba de resolver, pero un poco cambiado, con datos diferentes. Pídale a sus estudiantes que, en una hoja de papel e individualmente, lo resuelvan en los siguientes diez minutos (el tiempo que usted dé depende del tiempo que usted se demoró resolviendo el ejemplo en el tablero; permítales el doble de tiempo). Al cabo del tiempo asignado, haga la pregunta tradicional: “¿Pudieron hacer el ejercicio?”

En este momento, usted reconocerá el movimiento de cabeza horizontal. “¿Por qué?” se preguntará usted. “¿Por qué, si les acabo de explicar el ejemplo en el tablero y ustedes, todos, dijeron que entendieron, ahora no pueden hacer un ejercicio similar?” La respuesta obvia es que hay un gran distancia entre lo que el estudiante piensa que ha entendido de un proceso que alguien le ha explicado paso a paso y lo que el estudiante es capaz de reproducir por sí mismo de este proceso. Pero, ¿por qué sucede esto? Hay varias razones que se analizan a continuación.



*M*ovimientos de cuello, *segunda parte*

¿Por qué si los estudiantes dicen que entienden cuando se les explica o se hace un ejemplo en el tablero, después no son capaces de reproducir lo entendido o de hacer un ejercicio similar? Hay varias razones. Una de ellas consiste en que cuando el profesor hace la pregunta acerca de la comprensión y los estudiantes responden afirmativamente, los estudiantes están dando la respuesta en un sentido y el profesor la está interpretando en otro.

El estudiante dice que entiende porque no hay ningún paso del proceso que no entienda. Esto es, porque comprende cada una de las conexiones lógicas entre los pasos del proceso. El ve claro todo el proceso. También dice que entiende porque, una vez introducidos los “trucos” involucrados en el proceso, a él le parecen evidentes. Y finalmente, el estudiante dice que entiende, porque realmente entiende el proceso para el caso particular que le están presentando.

Por otra parte, el profesor interpreta la respuesta afirmativa del estudiante en otro sentido. El la interpreta en el sentido de que el estudiante es ahora capaz de reproducir el proceso. Sin embargo, esta capacidad de reproducción depende de una serie de factores que el estudiante no ha necesariamente aprehendido.

Para comenzar, el profesor espera que el estudiante haya comprendido y retenido la estructura general del proceso, siendo esta estructura independiente del contenido del ejemplo en cuestión. Pero es muy posible que el estudiante no sea siquiera consciente de que ese proceso tiene una estructura en su interior; que siendo consciente de que la estructura existe, él la haya comprendido; o que, comprendiéndola, la haya retenido. Si el estudiante no puede retener la estructura, no puede ser capaz de reproducirla con otro contenido. ¿Cómo hacer para que el estudiante vea, comprenda y retenga la estructura?

El problema de la estructura está relacionado con el problema clásico de la transferencia. ¿Cómo hacer para que el estudiante, al retener la estructura, sea capaz de transferirla a otro contexto, independiente y diferente del primero?

Puede haber varias estrategias. La primera es evidente. Es necesario que el profesor se haga consciente de que la estructura existe y de que es transcen-



dental que el estudiante la vea, la comprenda y la retenga. Muchas veces nosotros resolvemos los ejemplos sin darnos cuenta de que estamos utilizando tal estructura. Por consiguiente, es importante que la mostremos.

Para mostrar la estructura, hay una estrategia evidente. No resolvamos un solo ejemplo. Resolvamos tres (que pueden ser el primer ejemplo y los dos ejercicios que ellos no pudieron hacer) y hagamos un análisis de los tres ejemplos, buscando mostrar lo común a ellos. Ese aspecto común es la estructura.

Finalmente, hagamos explícitos los “trucos”. Nosotros nos sabemos los trucos y creemos que son estrategias obvias. Para los estudiantes, a menos que los mostremos, esos trucos hacen parte de la genialidad del profesor por un lado, y de su carencia de los genes matemáticos, por el otro.



Cuestiones de lenguaje

Una de las principales razones por las cuales los estudiantes dicen que no entienden cuando se enfrentan a un texto de matemáticas, no es porque no entiendan, es porque no saben. Es muy posible que si los objetos matemáticos se identificaran, en los textos, con palabras pertenecientes, por ejemplo, al polaco, los estudiantes se quejarían menos de que no entienden. En ese caso, serían más conscientes que, antes de poder entender, hay que saber: conocer el significado de los términos involucrados en los discursos. (Por supuesto que “conocer” el concepto implica “comprender” el concepto. Sin embargo, cuando el estudiante dice que “no entiende”, lo está diciendo a otro nivel.)

El problema es que los objetos matemáticos se identifican por medio de palabras que pertenecen al lenguaje natural de los estudiantes. Esto los induce a pensar que, basados en el significado cotidiano de esas palabras, ellos van a poder comprender el discurso general.

El siguiente problema tiene que ver con que resulta muy difícil convencer a los estudiantes de que ésta es una de las principales causas de sus dificultades. Es por ello, que el manejo explícito de un diccionario es trascendental para el éxito de un curso.

En tercera instancia, nos encontramos con que, para entender, el estudiante debe también conocer los resultados previos sobre los cuales se basa el discurso dado. Como, en general, los textos no hacen explícito el empleo de estos resultados dentro del discurso, el estudiante tiene la sensación de que hay algo escondido que él no entiende. De nuevo, resulta trascendental que en el curso se haga un manejo explícito del “resultario”; esto es, el conjunto de afirmaciones matemáticas que se sabe que son verdaderas.

Finalmente, llegamos al único sitio donde los estudiantes sí pueden afirmar válidamente que no entienden: la lógica. Los discursos matemáticos siguen normalmente un flujo lógico. Sin embargo, este punto no debería implicar demasiados problemas, dado que es rara la ocasión en la que se utilice algo diferente de la *modus ponens* y los *cuantificadores* a un nivel elemental. El problema puede surgir únicamente por razón de que los textos, al buscar la elegancia, tienden a “saltarse pasos” y hacer las cosas más difíciles. En el momento en que nosotros, como profesores, hacemos estos pasos explícitos, los problemas desaparecen.



Hipnotizando los ejercicios

Existe un método de resolución de problemas de matemáticas que es bastante utilizado por los estudiantes. Consiste en mirar fijamente el texto del problema, tratar de hipnotizarlo (generalmente es el problema el que hipnotiza al estudiante) y esperar que la inspiración, la Santísima Trinidad o el Espíritu Santo ilumine la mente del estudiante para que éste escriba la solución o el proceso de solución del problema en limpio como si ya la conociera desde hace tiempo.

Esta actitud del estudiante tiene una causa natural: cuando el profesor resuelve un ejercicio o cuando el libro lo hace a través de un ejemplo, la solución se presenta “en limpio”, sin que haya la menor indicación del proceso “de borrador” por medio del cual se llegó a la solución. El estudiante piensa entonces que él también debe encontrar la solución “en limpio” y por eso trata de hipnotizar el ejercicio. ¿Cuál es el problema? Pues que el estudiante no es necesariamente consciente de que, para solucionar un ejercicio debe tener un *método*. Este método puede ser general (que se aplique a casi cualquier ejercicio) o particular a un tema dado. Polya es el especialista en este tipo de herramientas y en otros lugares de este texto se hace referencia a las sugerencias que él propone para estos efectos. Aquí quiero sencillamente recordar algunos puntos extremadamente generales que todos deberíamos intentar transmitir a nuestros estudiantes.

El primero ya lo mencioné: no tratar de hipnotizar el ejercicio. El Espíritu Santo sabe muchas menos matemáticas de las que ellos creen y, además, las comunicaciones con él no son fáciles de establecer. Esto para decir que tenemos que convencer a nuestros estudiantes de que tienen que tener una estrategia para resolver el ejercicio.

La necesidad de esta estrategia se debe expresar en la conciencia de que el proceso de solución de un ejercicio tiene siempre un conjunto de pasos y que hay que intentar identificar estos pasos antes de lanzarse a solucionar el ejercicio.

El segundo punto es tener paciencia. La solución llega al final, pero para encontrarla hay que recorrer el camino. El estudiante quiere llegar rápidamente a la solución y, para ello, piensa que lo mejor es encontrar atajos. Estos atajos lo desvían del camino apropiado y lo inducen a cometer errores.

El tercer punto tiene que ver con el orden. Es tal la presión por llegar a la solución, que la manera como ellos la desarrollan en su papel es completamente desordenada. Esto los obliga a mantener en la mente mucha más



información de la que sería necesaria y, por consiguiente, entorpece el proceso.

El cuarto punto tiene que ver con escribir en la hoja de solución. Este punto se tratará más adelante.

Y el quinto, que también es tema de otra reflexión, tiene que ver con lo que llamaremos “la pregunta en reversa”.



*L*a definición de conceptos

La mayoría de las definiciones matemáticas pretenden identificar objetos matemáticos o relaciones entre, y propiedades de, estos objetos. Para lograr esta identificación, las definiciones imponen unas condiciones que dichos objetos deben cumplir. Estas condiciones separan, obviamente, el universo matemático en dos conjuntos. El conjunto de los objetos que cumplen con las condiciones y el conjunto de los objetos que no cumplen con las condiciones. Esta situación, tan evidente para el profesor de matemáticas, no lo es necesariamente para el estudiante. El no necesariamente entiende el propósito de una definición.

Una de las principales razones por la cual el estudiante no entiende el significado de una definición radica en el hecho de que él no tiene apropiadamente construido en su mente ese universo platónico de los objetos matemáticos. Al no reconocer la existencia de este universo, no puede reconocer la existencia de los objetos que lo componen y, menos aún, la manera con la cual es posible identificar unos objetos y diferenciarlos de otros.

No es fácil aproximar al estudiante a este universo. Esto es particularmente difícil en los niveles básicos, puesto que, para que el estudiante comprenda el discurso, se utiliza la herramienta gráfica, como medio para que el estudiante “vea” el objeto matemático. Sin embargo, él no necesariamente logra separar la gráfica del concepto y, en muchas ocasiones, piensa que la gráfica (que al fin y al cabo, no es más que una instancia del concepto) es el concepto mismo.

Una forma obvia de aproximar al estudiante a este universo de conceptos, cada uno con múltiples instancias (en general, infinitas) es mostrarle este mismo hecho: que un mismo concepto tiene múltiples instancias y que lo que caracteriza al concepto es precisamente lo que hay de común en las instancias, en el sentido que ellas cumplen las condiciones que definen el concepto.

Otra forma de obligarlo a trabajar con conceptos consiste en inducirlo a resolver problemas “teóricos” en los cuales no se habla acerca de las instancias, sino que se trabaja con las condiciones mismas de los conceptos. Todos sabemos lo difícil que esto resulta para el estudiante.



*I*nventando ejercicios

“¿Cuántas bolas rojas hay?” pregunta el profesor. “La función es cuadrática”, responde el estudiante. El profesor vuelve a hacer la pregunta y el estudiante vuelve a dar la misma respuesta. ¿Por qué?, se pregunta el profesor. ¿Por qué no me está escuchando?

Es cierto que el estudiante no lo está escuchando. El ha inventado su propia pregunta y es a esa pregunta que él está respondiendo. Este problema es relativamente patente cuando la situación se da durante la clase y la pregunta se hace verbalmente. En ese momento parece como que el estudiante estaba distraído y el problema era pura cuestión del momento. Pero, éste no es un problema coyuntural. Es un problema general que tiene consecuencias trágicas cuando el estudiante comete este error al responder un examen. El estudiante no escucha y no lee bien. Debe haber muchas razones para esto, entre otras el nerviosismo del estudiante al sentir que se requiere una respuesta de su parte. Sin embargo es difícil saber cómo atacar tal problema.

La primera estrategia es obvia. El profesor debe hacer evidente este problema del estudiante. En clase, cuando se da la situación, el profesor debe trabajarla y hacerla conocer explícitamente al grupo. El segundo paso es incluir este problema dentro de la evaluación. Al corregir un examen, el profesor debe marcar claramente cuándo el estudiante atacó un problema diferente del que le estaban proponiendo y evaluar el punto de acuerdo a este defecto.



*L*a inspiración

Como profesores, somos optimistas. Esperamos que nuestros estudiantes desarrollen habilidades y aprendan conocimientos acerca de los cuales nosotros no hemos hecho nada en clase. Basta observar algunos de nuestros exámenes. En él nosotros tenemos la tendencia a poner puntos “nuevos”. Esto es, puntos que, además de tocar temas que no se han visto en clase, requieren de habilidades o “trucos” que tampoco se han trabajado. ¿Por qué? Porque tenemos la esperanza de que nuestros estudiantes hayan desarrollado por sí solos estas habilidades y sean capaces de descubrir, en el momento del examen, aquellos trucos. Pero esto es iluso y por eso somos optimistas.

No podemos esperar que nuestros estudiantes desarrollen habilidades y descubran procedimientos a partir de la nada. La inspiración que nosotros esperamos que ellos tengan depende por lo menos de tres factores.

El primero es la transferencia. Este punto se refiere a la capacidad de transferir una técnica o una herramienta desarrollada y estudiada al interior de un tema a otro tema aparentemente sin relación con el primero. Pero esta capacidad hay que desarrollarla. Y para ello hay que ejercitar al estudiante en este proceso y él tiene que ser consciente que es un proceso sobre el cual se le va a evaluar.

El segundo aspecto son los “trucos”. Los trucos se refieren a aquellas técnicas que nos permiten resolver problemas y que aparentemente no tienen que ver con ellos. Estos trucos tienen visos de genialidad, particularmente cuando el profesor es el que los utiliza en el tablero. Pero resulta que el profesor no está descubriendo el truco en el momento que lo utiliza. El se lo sabe. Y, por consiguiente, no puede esperar que el estudiante lo haga. El profesor tiene que enseñarle explícitamente el truco al estudiante.

Finalmente, nos encontramos con la capacidad de reunir y aplicar al mismo tiempo herramientas que en el curso se han tratado por separado. Esto tiene que ver parcialmente con el problema de la transferencia, pero también requiere de otros aspectos. Y tampoco podemos ser tan optimistas como para esperar que el estudiante desarrolle por sí solo esta capacidad, siendo que nosotros como profesores casi nunca la utilizamos: nosotros ya sabemos que las herramientas no son independientes. Y es esto lo que debemos intentar mostrarle al estudiante.

La inspiración no existe. Lo que existe es el esfuerzo y el trabajo organizado.



*B*uscando el error

Una de las principales actividades del profesor de matemáticas debería ser la de identificar los errores típicos de los estudiantes y tratar de solucionarlos. Sin embargo, para aquellos profesores para los que todo es claro puede resultar difícil identificar los errores que los estudiantes pueden cometer. Es por ello que es importante encontrar herramientas metodológicas que le permitan al profesor identificar los errores típicos de los estudiantes.

Existe una herramienta tradicional para estos efectos. Es la pasada al tablero. Sin embargo, esta herramienta puede ser contraproducente si se hace a través de la pregunta “¿quién quiere pasar al tablero?” Utilizada de esta forma, el resultado es natural. Pasarán a tablero aquellos estudiantes que entienden el tema y que saben hacer el problema. Por consiguiente, no será posible identificar los errores típicos. La alternativa consiste en pasar al tablero a estudiantes que puedan cometer errores. Esta alternativa no es fácil de implantar, pues a nadie le gusta mostrar sus deficiencias.

Pasar al tablero a aquellos que pueden cometer errores tiene otras deficiencias que hay que tener en cuenta. La primera es que si el estudiante **A** pasa al tablero y comete un error, es muy posible que el estudiante **B** que lo está observando y que también habría cometido ese error no se haga consciente de ese hecho. Esto es natural: como **B** no ha cometido aún el error y en el tablero este error se está haciendo patente y se están dando las razones por las cuales es un error, a **B** todo esto le parece lógico y no podrá darse cuenta que él también lo habría cometido.

La otra deficiencia de esta herramienta es el tiempo. Toma mucho tiempo observar y analizar el trabajo de un estudiante en el tablero. Esto implica que, dentro del espacio que esta herramienta genera, se podrá avanzar únicamente a una cierta velocidad y, en muchos casos, esta velocidad no será lo suficientemente grande para recorrer el camino previsto.



Ronda

Existe otra herramienta metodológica para identificar los errores típicos de los estudiantes y que, en algunos aspectos, resulta ser una alternativa apropiada a las deficiencias de la pasada al tablero. Podríamos llamar a esta herramienta “la ronda”.

Mientras que la pasada al tablero tiende a hacerse con ejercicios que los estudiantes han intentado resolver con anterioridad a la clase, en la ronda cada estudiante se enfrenta con un ejercicio desconocido. El profesor escribe el ejercicio en el tablero y dice que dará puntos adicionales a los primeros “tantos” estudiantes que entreguen el ejercicio correctamente. Adicionalmente, dirá que entre los demás estudiantes que entreguen el ejercicio bien hecho, pero por fuera del tiempo, escogerá uno al azar y le dará también puntos adicionales.

Dentro de esta situación, se espera que todos y cada uno de los estudiantes se encuentren motivados para intentar resolver el ejercicio. Tan pronto como los estudiantes comienzan a trabajar, el profesor comienza a rondar por el salón. Mirando los papeles de los estudiantes, él identificará los errores más típicos que ellos cometen y, en algunos casos, podrá sugerir la necesidad de algunos estudiantes de regresar a temas previos. Llegará el momento en que el profesor comenzará a recibir ejercicios resueltos. El tendrá que verificar si están bien hechos y, dentro de este proceso, identificará nuevos errores típicos.

Una vez terminado este proceso, el profesor tendrá la información necesaria para hacer patentes en el tablero los errores, las razones por las cuales se comenten y sus soluciones. En este momento, todos aquellos estudiantes que pudieron cometer un error dado, lo han cometido explícitamente. Por otra parte, solamente ellos saben que lo han cometido y podrán, en principio, solucionarlo. Si el profesor identificó una gran cantidad de estudiantes que cometieron errores, lo mejor que puede hacer después de corregirlos en el tablero es repetir el proceso con un ejercicio similar.

Deben ser claras las ventajas de esta herramienta en relación con la pasada al tablero. Por un lado, todos los estudiantes con problemas deben poder identificarlos y solucionarlos. Por otro lado, no existe el temor a hacer el ridículo, puesto que cada quien trabaja en la privacidad de su papel. Finalmente, es un procedimiento rápido que permite hacer en un tiempo dado un mayor número de ejercicios.





*H*erramientas

*P*asar al tablero: el problema

¿Quién quiere pasar al tablero a hacer este ejercicio? Súbitamente todos los estudiantes tienen algo que escribir en sus cuadernos, leer en su libro o buscar en su cartera. Por primera vez en toda la hora de clase, el profesor no tiene quien lo observe. Obviamente nadie quiere pasar al tablero. ¿Por qué? Porque, como dicen los jóvenes, “nadie quiere hacer el oso* y, además, rajarse.” Esta es, una situación que se puede presentar en las clases de matemáticas con el empleo de esta herramienta metodológica.

La tradición presenta la “pasada” al tablero como una prueba para el estudiante que se arriesgue a hacerlo. Es otra forma de quiz o de tarea. Pero, además, es en principio voluntaria. Al final, termina no siéndolo, puesto que en la mayoría de las ocasiones, dado que no hay voluntarios, el profesor termina escogiendo al voluntario. Por otra parte, cuando un estudiante pasa al tablero, el profesor tradicional está buscando esencialmente que éste haga el ejercicio en cuestión para que sirva de ejemplo para sus compañeros. Por supuesto, que esto es benéfico; pero es solamente una parte de los beneficios que se pueden obtener.

Pasar un estudiante al tablero puede ser una herramienta metodológica muy potente si nos aproximamos a ella apropiadamente y la empleamos en toda su extensión. Para comenzar, los estudiantes no deberían tener temor de pasar al tablero. Y esto, por dos razones: la primera, que allí no se le va a criticar o a poner en ridículo delante de sus compañeros —ésta es técnicas de terrorismo de la metodología tradicional—; la segunda, porque, independientemente de la calidad de su trabajo, el estudiante debe ser evaluado principalmente por el esfuerzo que él haya invertido en hacerlo.

Otra de las razones por las cuales los estudiantes no gustan pasar al tablero es porque el ejercicio que se les propone es desconocido. Por consiguiente, no tienen seguridad de que puedan resolverlo y prefieren no asumir el riesgo que implica esta incertidumbre. Deberíamos proponer ejercicios que los estudiantes ya han intentado. Dado que todos los días el estudiante tiene que haber hecho una tarea para la clase, son los ejercicios de esta tarea los que se deben proponer para hacer en el tablero. De esta forma, los estudiantes han tenido ya una experiencia con el problema y se sienten más seguros.

*Hacer el ridículo.



*P*asar al tablero: método

Pasar al tablero al estudiante es una manera de hacer que él participe en la clase. Sin embargo, debemos aprovechar esta herramienta metodológica en toda su extensión.

Si hemos de tener a tres estudiantes en el tablero, en cambio de que cada uno haga un ejercicio diferente, deberíamos pasar a los tres a hacer el mismo ejercicio. ¿Por qué? Porque pueden pasar una de dos cosas:

- Se dan soluciones diferentes al mismo problema, o
- Se tiene la misma solución, pero procedimientos diferentes para llegar a ella.

En el primer caso, habrá procedimientos que se han hecho de manera errada y se podrá, por consiguiente, identificar algunos de los errores típicos. En el segundo caso, se podrán analizar los procedimientos para identificar aquellos que son más eficientes, más generales o más atractivos desde el punto de vista estético.

Es por la razón anterior que deberíamos siempre buscar un voluntario que quiera hacer de conejillo de Indias. Esto es, un estudiante que sepa que no llegó a la solución y que quiera presentar en el tablero las dificultades que tuvo con el ejercicio. Este es el estudiante que puede ayudar más a sus compañeros, puesto que quienes requieren ayuda son aquellos que no saben por qué no pudieron llegar a la solución y no aquellos que desean que se les presente, de nuevo, un ejemplo limpio de una solución perfecta.

Finalmente, la idea de pasar al tablero no es la de escribir la solución y sentarse para que el profesor la presente al grupo. Cada estudiante debe presentar su solución y, para ello, debe hacerlo de manera estructurada. Esto es, debe construir un argumento que le permita defender racionalmente la tesis que propone su solución. El estudiante debe hacer explícitas en su presentación todas las suposiciones y herramientas que utiliza en ella y, a partir de estas suposiciones, debe desarrollar una construcción lógica que defienda su conclusión.

Y no olvidemos la estética. Tanto en la presentación misma en el tablero, como en la exposición del estudiante y, sobre todo, en la calidad misma de la solución.



¡Partido!

En muchas ocasiones, es difícil lograr la participación de los estudiantes en la clase. Esto sucede especialmente cuando el tema de discusión no genera opiniones personales fuertes. Por ejemplo, cuando el tema de discusión es puramente matemático. ¿Cómo lograr una participación y una discusión en clase? ¡Hagamos un partido!

Organizar el partido es muy sencillo. Todos nosotros hemos utilizado esporádicamente esta herramienta. Lo importante es que la herramienta se vuelva sistemática. Basta organizar el curso en grupos de tres a cinco estudiantes; proponer un problema común; especificar un tiempo para obtener la solución del problema; designar un representante de cada grupo; y hacer que cada representante defienda la solución a la que llegó su grupo.

El espíritu de grupo hará que se dé la participación.



L a chismografía

¿Quién puede decir que no le llama la atención la chismografía? Aún si nos damos golpes de pecho y lo negamos rotundamente, por allí en el fondo, siempre hay un cajoncito abierto dispuesto a recibir todo tipo de información interesante acerca de las minucias de lo que sucedió en el pasado. Esta característica de la naturaleza humana la podemos aprovechar nosotros los profesores para motivar a nuestros estudiantes. Y la idea no es que nos pongamos a hablar acerca de la vida privada de algunos de los miembros del grupo de clase. La idea es que hablemos acerca de la vida privada de los personajes con los que trabajamos a diario en clase. En otras palabras, tratemos siempre de hacer un poco de historia de las matemáticas y de la ciencia.

Los libros de texto y la tradición pedagógica tienden a presentar productos terminados. Productos estos, que fueron, en realidad, el resultado de un largo proceso de gestación en el que se cometieron errores y se tomaron caminos equivocados. No intentemos mostrarle al estudiante unas matemáticas limpias, porque ellas no lo son. Mostrémosle al estudiante el proceso de gestación de las mismas. Esta puede ser una manera de presentar agradablemente el proceso del *descubrimiento matemático*. Nosotros sabemos que quienes descubrieron los conceptos que estamos tratando de transmitir, no lo hicieron por medio de la inspiración divina. Por consiguiente, no intentemos acostumbrar a nuestros estudiantes a que los problemas que ellos tienen que resolver tienen ese tipo de solución. Mostremos siempre el proceso y hagamos énfasis en él. Nuestro estudiante tiene que ser capaz de regenerar y redescubrir este proceso antes de encontrar una solución por pura inspiración.

Y no nos olvidemos de la historia. Cada concepto, cada herramienta tiene una historia. Y esta historia es siempre interesante. Presentarla significa ubicar los conceptos unos con otros y darles un sentido que va más allá de la aplicación práctica actual y que nos permite ubicarlos dentro del desarrollo general del conocimiento humano. Esto será siempre interesante y motivará en general a nuestro estudiante.



*E*l diccionario

El lenguaje es una de las principales razones por las cuales el estudiante “no entiende”. En parte, esta incomprensión proviene del desconocimiento del significado de los conceptos involucrados en el tema en cuestión. Los conceptos matemáticos tienen significados específicos y bien definidos. A menos que el estudiante conozca este significado, es muy difícil que él logre comprender a cabalidad el tema. Sin embargo, en algunas ocasiones esto no se le dice explícitamente al estudiante. El profesor da por sentado que, porque él conoce los conceptos y la importancia de conocerlos, entonces el estudiante también debe ser consciente de este hecho. La realidad es otra. Y hay que tratar de cambiarla.

La solución al problema es sencilla. Hay que hacer explícito el problema del conocimiento del significado de los conceptos matemáticos. El estudiante debe ser consciente de su importancia y hay que encontrar herramientas que obliguen al estudiante a hacer de los conceptos una parte esencial de su método de estudio de las matemáticas. Para ello, existe el diccionario.

El diccionario es una herramienta explícita dentro del método de estudio del estudiante; y es muy sencilla. Consiste en que cada estudiante debería tener, en su cuaderno, en su libro, o en alguna otra parte, una lista de los conceptos que él ha visto hasta el momento en clase. Esta lista debería tener forma de diccionario. Es decir, cada elemento de la lista debería tener consigo su significado.

En muchos casos, el significado de un concepto es sencillamente su definición. En estos casos, el concepto pretende principalmente identificar a un objeto matemático de carácter abstracto. En otros casos, el significado debe ir más lejos, pues debe contener claramente la relación entre ese concepto y otros ya vistos. Finalmente, es importante que el diccionario no contenga únicamente el significado abstracto del concepto sino que involucre el significado *operacional* del mismo. Esto es, que indique la manera como el concepto se puede utilizar dentro del contexto en el que él interviene.



*E*l recetario

¿Por qué un estudiante que cree haber entendido un ejemplo que el profesor ha resuelto en el tablero no puede después resolver un ejercicio en su casa? La razón es evidente: porque el estudiante creyó haber comprendido y retenido la información relevante, pero no lo hizo.

Un aspecto de esta información relevante se refiere a los conceptos que intervienen en el problema. Sin embargo, no basta con conocer el significado abstracto de los conceptos. Es necesario que el estudiante también conozca y comprenda el *significado operacional* del mismo. Este significado operacional es el que determina la *manera* como se debe atacar un problema para solucionarlo.

El profesor sabe que, dentro de los ejercicios de un tema particular, hay solamente un número reducido de “problemas tipo”. Sin embargo, el estudiante no tiene necesariamente las herramientas para hacer este descubrimiento. Por lo tanto, debe ser el profesor quien le muestre al estudiante este hecho, al esquematizar estos tipos de problemas.

El primer paso de la receta para resolver un problema debe ser, entonces, la identificación del problema tipo al cual corresponde el ejercicio en cuestión. Una vez identificado este problema tipo, el estudiante puede comenzar a aplicar esta receta. Esta receta tendrá normalmente la forma de un diagrama de flujo en el que el estudiante tendrá que responder a ciertas preguntas para saber por qué camino coger dentro de la receta.

Hay una moraleja a esta historia. Es trascendental que el estudiante comprenda de dónde sale la receta. Mejor aún, debería ser el estudiante quien, a partir del significado operacional de los conceptos que intervienen, descubra y desarrolle la receta. Este procedimiento va a ayudar obviamente a que el estudiante comprenda verdaderamente el concepto.





*M*etodología

*D*efinición de los objetivos

Existen teorías acerca de cómo se deben definir los objetivos de un curso. Sin embargo, lo importante es que la manera como se definan los objetivos satisfaga sus propósitos. Estos deben tener ciertas características. Por un lado, los objetivos de un curso deben estar definidos como los medios a través de los cuales se pretende lograr la misión del mismo. Por otro lado, deben ser tales que, a partir de ellos, se puedan producir los criterios necesarios para la identificación y definición del contenido, la metodología y la evaluación del curso. Finalmente, los objetivos del curso deben ser generales a todo el curso, de tal forma que, a partir de ellos, sea posible definir los objetivos particulares de cada una de las partes del mismo.

El actor central de los objetivos de un curso es el estudiante. Y los objetivos deben expresar los cambios que se desean obtener en los conocimientos, las capacidades y las actitudes del estudiante gracias al curso. Por lo tanto, no es posible definir objetivos a menos que se tenga una idea suficientemente clara de los conocimientos, las capacidades y las actitudes del estudiante al comienzo del mismo. Esto supone por lo tanto, la identificación de un “estudiante tipo” sobre el cual se pretende trabajar.

La manera más obvia de definir los objetivos sería entonces una en la que se identifica el estudiante tipo *al comienzo del semestre* y se propone un estudiante tipo *al final del semestre*. Frecuentemente, este proceso se lleva a cabo satisfaciendo únicamente la primera parte, pues ésta tiende a presentar un estudiante con “defectos” y los objetivos buscan precisamente hacer desaparecer estos defectos.

Los objetivos del curso son el hilo conductor del mismo. A partir de ellos, cada profesor debería poder deducir la respuesta a cualquier inquietud que él tenga dentro del curso.



O *objetivos y motivación*

La esencia de la motivación de un estudiante hacia un curso es el conocimiento que éste tiene de los objetivos del mismo. La motivación del estudiante no debe venir ni de la zanahoria, ni del garrote. Esta motivación debe venir del compromiso que el estudiante tenga hacia el curso. Este compromiso debe ser consecuencia de la conciencia del estudiante acerca de los beneficios que el curso puede tener para él desde el punto de vista profesional y personal.

Lograr esta motivación no es fácil porque, en general, resulta difícil conocer las necesidades del estudiante. Sin embargo, la presentación de los objetivos con el propósito de motivar el estudiante hacia el curso se puede dividir en tres etapas principales.

Hay que convencer al estudiante de que es necesario lograr con éxito los objetivos del curso para poder tener éxito en los demás cursos. No hay que restringir este punto a los cursos de matemáticas que puedan estar después del curso en cuestión; hay que buscar la manera de presentar la relación entre los objetivos del curso y otros cursos específicos a la carrera del estudiante.

El siguiente paso es lograr convencer al estudiante de que el curso puede influir favorablemente en su actividad profesional. Esto normalmente se logra haciéndole caer en la cuenta de que no son muchos los profesionales de su área que manejan apropiadamente las matemáticas y que, por consiguiente, el tener éxito en el curso le da una ventaja comparativa con sus colegas.

Finalmente, lo más difícil, pero también lo más importante, es mostrarle al estudiante que el curso busca efectuar cambios en su propia formación personal. Esto se debe buscar al mostrarle al estudiante que el curso presenta nuevas maneras de mirar y de manejar el entorno.



*E*l por qué de la metodología tradicional

La metodología tradicional de enseñanza (en el sentido de una metodología centrada en la transmisión de información por parte del profesor y la adecuada reproducción de esta información por parte del estudiante) se encuentra universalmente difundida. Sin embargo, esta metodología recibe una enorme cantidad de críticas. Vale la pena, por lo tanto, preguntarse la razón por la cual, siendo tan criticada, es tan utilizada.

La razón es, en mi opinión, muy sencilla. *La metodología tradicional de enseñanza es el camino de menor esfuerzo para el profesor, y, en general, también para el estudiante.* De acuerdo a esta metodología lo único que se le pide al profesor es que conozca su tema y que sepa medianamente comunicarse. El profesor no tiene que preocuparse conscientemente de si el estudiante entiende lo que está escuchando y, cuando se da una pregunta al respecto, al profesor le basta con repetir (de pronto, en mayor detalle) lo que ya dijo. Para el estudiante, también representa el menor esfuerzo. Este se encuentra en una situación pasiva en la cual le basta con escuchar e intentar comprender. En muchas ocasiones, la actitud del estudiante es aún más pasiva: lo que tiene que hacer es tomar notas. Esta es su única preocupación y, por lo tanto, no tiene la oportunidad de preguntarse si está o no entendiendo lo que está escuchando.

Dentro de una cierta tradición, lo importante para el profesor es transmitir una información; y, lo importante para el estudiante es recibir, grabar y ser capaz de repetir esta información. *Es el camino del menor esfuerzo.*

Hay algunos otros factores tradicionales que afectan y explican este estado de cosas. Uno de los más importantes es el ego del profesor. ¿Qué mayor alimento para el ego de una persona que tener treinta pares de oídos dispuestos a creer cualquier cosa que salga de su boca? Esto hace sentir bien al profesor; lo hace sentir una persona superior y, por lo tanto, es muy difícil que él mismo se convenza de que hay otras maneras de hacer las cosas. El estudiante refuerza esta situación, puesto que, desde su punto de vista, lo mejor es subir al profesor a su pedestal y aceptar que él tiene la verdad absoluta, porque si esto es así yo (como estudiante) no tengo ninguna responsabilidad durante la clase y, por consiguiente, estoy tranquilo.



Consecuencias de la metodología tradicional

¿Cuáles son las consecuencias de la metodología tradicional de enseñanza? En otras palabras, ¿es la metodología tradicional *eficiente* en el logro de los objetivos pedagógicos? No creo que esta pregunta tenga una respuesta general. Para comenzar, es evidente que la eficiencia de la metodología tradicional depende de la naturaleza de los objetivos que ésta busca lograr. Si el contenido es sencillo y los objetivos son esencialmente de información, es muy posible que la metodología logre los objetivos. Para ello basta mirar el ejemplo de los noticieros de televisión que se pueden considerar como el extremo de la metodología tradicional.

Sin embargo, la mayor parte de los cursos no tienen un contenido sencillo y no buscan (por lo menos implícitamente) objetivos puramente informativos. Entre más complejo es el contenido y entre más formación se busque del estudiante, menor es la eficiencia de la metodología tradicional. Y la razón es muy sencilla: dentro del esquema de la metodología tradicional el estudiante asume una actitud pasiva que requiere muy poco esfuerzo de su parte. Por lo tanto, no le es posible cuestionarse si está comprendiendo, además de aprendiendo. Por otra parte, las capacidades no se aprenden sino que se desarrollan. Si el estudiante no se ve obligado a *actuar* dentro de circunstancias preparadas para ello, no le es posible desarrollar estas capacidades.

Desde el punto de vista de la comprensión del tema, la situación es muy conocida: el profesor hace un ejemplo en el tablero, ejemplo este que el estudiante cree comprender a cabalidad. Sin embargo, cuando él intenta en su casa resolver un ejercicio, no es capaz. ¿Por qué? Porque la exposición que el profesor hace del ejemplo en clase contiene gran cantidad de información implícita que el estudiante recibe inconscientemente, pero que no logra identificar explícitamente para grabarla de acuerdo a sus costumbres de aprendizaje. El profesor presenta las cosas elegantemente, escondiendo las técnicas de aproximación al problema y las herramientas de solución. El ejemplo está limpio de todos estos procedimientos y el profesor se esfuerza por presentarlo de manera lógica. Sin embargo, esto no ayuda en nada al estudiante a menos que el ejercicio que él intenta resolver sea idéntico al ejemplo presentado por el profesor. Esta situación se repite en el caso de información puramente teórica. Cuando el profesor la expone, lo hace de



manera limpia y lógica. El hace referencia a las bases sobre las cuales se fundamentan las ideas, suponiendo que los estudiantes las conocen. En el momento que se hace la exposición el estudiante reconoce estas bases, pero no las identifica como elementos claves del desarrollo y, por consiguiente, no graba esta información. Esto tiene como consecuencia que, cuando se pide al estudiante, que vaya más allá de la teoría, él no sea capaz de vislumbrar las consecuencias de la misma.



Aprender sufriendo

Pareciera como si éste fuese el enemigo contra el cual queremos luchar. Y es cierto: nosotros no queremos que nuestros estudiantes sufran en nuestros cursos. Pero, en el aprendizaje de las matemáticas, hay diferentes tipos de sufrimientos.

Tenemos los sufrimientos tradicionales del estudiante que cree que no nació para las matemáticas, hace un esfuerzo por salir adelante y fracasa. Es el sufrimiento de la frustración. Hay el sufrimiento del estudiante que ve claramente que va a perder el curso y sufre al pensar en las implicaciones que esto tiene. Y hay también el sufrimiento del estudiante que, en clase, ve la posibilidad de sufrir porque su profesor lo puede poner en ridículo ante sus compañeros. Nosotros no queremos que nuestros estudiantes tengan que soportar ninguno de estos sufrimientos.

Pero hay otro tipo de sufrimiento que queremos que nuestros estudiantes vivan y vivan intensamente. *Nosotros queremos que nuestros estudiantes aprendan "sufriendo"*. ¿Qué quiere decir esto? En una sola frase, lo que queremos es que nuestros estudiantes no reciban la información completa que deben comprender y aprender. Queremos que ellos *construyan* esta información. Esto es un proceso y dentro de este proceso es esencial que el estudiante "sufra".

El estudiante debe "sufrir" al no conocer la respuesta a la pregunta con que se enfrenta y tener que emplear su intuición para generar una respuesta personal. Esta respuesta personal tendrá que ser probada de acuerdo a criterios que nosotros le damos. Y tendrá que ser comparada con las respuestas alternativas de los compañeros.

En la búsqueda de la definición de un concepto o de la construcción de una herramienta, el estudiante debe ser quien proponga las alternativas posibles. Nosotros, los profesores, debemos ser quienes guíemos la discusión para que, a partir de esta materia prima, llevemos al estudiante a la respuesta más eficiente. Este es un proceso. El estudiante debe "sufrir" con este proceso como todos lo hacemos cuando estamos tratando de descubrir.



Salirse del sistema

“Salirse del sistema” significa “mirarse desde afuera”.

Cuando operamos dentro de una actividad, nos interesa el trabajo que estamos haciendo dentro de ella. En general, lo hacemos de acuerdo a un conjunto de reglas y nuestro propósito es lograr los objetivos que nos hemos impuesto, respetando las reglas. Desafortunadamente, en muchas ocasiones nos olvidamos que estamos trabajando dentro de este esquema y pensamos que el esquema mismo es la realidad. No hay tal. Es también muy importante reflexionar sobre la actividad misma: revisar el esquema, las reglas y los objetivos. Esto tiene mucho que ver con nuestros cursos en dos aspectos:

- La autoevaluación de la actividad docente dentro de nuestro curso.
- La reflexión periódica acerca de los temas que se han visto en el curso*.

Los dos puntos anteriores tienen que ver con dos sistemas diferentes:

- El sistema del curso como entorno de trabajo.
- El sistema del curso en relación con el tema que se está viendo.

Con respecto al primero, debemos buscar reflexiones periódicas acerca de los objetivos, el contenido y la metodología del curso. Esto motiva a los estudiantes, puesto que los involucra dentro del proceso del cual ellos hacen parte.

Con respecto al segundo, esta es la oportunidad para que el estudiante pueda tener una visión global de los temas y pueda ubicarlos dentro del marco general del curso. Esto es lo que se pretende en el repaso del parcial.

*Hernán Escovedo fue quien me hizo caer en la cuenta de este punto específico. El lo llama “momento de reflexión”.



*P*rimeros días de clase

¡Son los días más importantes de todo el semestre!

Es durante los primeros días del semestre que se define la relación entre el profesor y sus estudiantes. Lo que se logre en estos primeros días es casi definitivo: es muy difícil cambiarlo más tarde. Pero, ¿qué identifica esta relación? En esencia, dos aspectos:

- La visión que el profesor tiene del grupo
- La visión que el grupo tiene del profesor

El profesor puede pensar que el grupo que le tocó ese semestre es interesante, inteligente y trabajador o, por el contrario, puede pensar que le tocaron los “lochos” y los brutos. Por su parte, el estudiante puede pensar que el que le tocó es “otro” profesor de matemáticas que está allí para cumplir con un compromiso laboral y para rajarlo o, por el contrario, que su profesor es alguien diferente que pretende trabajar con él para apoyarlo a salir adelante con los objetivos del curso.

Las visiones pueden ser matizadas, pero hacia alguno de los dos extremos irán. Y estas “visiones” son claves para el éxito posterior del curso.

Porque la visión de cada uno determina la actitud hacia el otro y hacia el curso.

Y sabemos que la actitud, tanto del profesor como del estudiante, está en el centro del problema motivacional y, por consiguiente, influye directamente en el éxito final de todo el trabajo.

¿Cuál es entonces el mensaje? El mensaje es muy sencillo: aproximémonos positivamente a estos primeros días de clase. Miremos a nuestros estudiantes como los mejores estudiantes que habríamos podido tener y hagámosles sentir esto. Presentémonos como los guías y los futuros amigos y trabajemos intensamente en el aspecto motivacional. Si nos va bien en estos primeros días de clase, es muy posible que nos vaya bien en el resto del semestre.



O bjetivos de la discusión en clase

La discusión en clase es la herramienta metodológica por *excelencia* dentro de la filosofía de nuestros cursos. Nosotros buscamos que nuestro estudiante se forme gracias a la *experiencia* que vive en el curso. Esta formación no se puede lograr dentro de un esquema tradicional de cátedra porque la experiencia que el estudiante vive es muy reducida. El estudiante vivirá una experiencia solamente si él es partícipe de la misma. La experiencia es entonces la misma discusión y tenemos que buscar que el estudiante —*todos nuestros estudiantes*— participen en ella.

Para poder generar una discusión es necesario tener un tema. Pero, además, es necesario que las personas conozcan el tema y *sobre todo* que tengan opiniones acerca del mismo. Esta es la razón de la importancia que le damos a las tareas y a los quices diarios: no nos basta con pedirle al estudiante que prepare el tema, es necesario implantar herramientas que lo obliguen a hacerlo.

Pero no basta con que el estudiante haya preparado el tema, se necesita también que cada uno de ellos tenga una opinión personal acerca del mismo. Esta es la razón por la cual las guías de lectura y los problemas que se ponen de tarea contienen preguntas abiertas que le dan al estudiante la oportunidad de reflexionar y producir sus propias opiniones.



Generación de una discusión

Llegamos a clase. Supongamos que todos nuestros estudiantes han preparado el tema del día, que el tema es interesante, que deja algún espacio para opiniones personales por parte de ellos y que nos encontramos sentados en círculo, listos para comenzar la discusión. Los supuestos están entonces satisfechos. ¿Cómo hacemos ahora para generar una discusión?

La peor manera para comenzar sería preguntarles: “¿qué piensan ustedes del tema que toca para hoy?” Este tipo de pregunta no tiene ningún sentido por varias razones:

- Por un lado, le estamos haciendo la pregunta a todos los estudiantes y, por consiguiente, no se la estamos haciendo a ninguno.
- Por otro lado, la pregunta es tan general, que no le permite al estudiante presentar su opinión personal.

Pienso que, en algunos casos, para comenzar es deseable tener un resumen o una visión global del tema. Esta sería una pregunta más específica que podría inducir a algún estudiante a participar. Si no hay voluntarios, debe ser el profesor quien presente el resumen. De esta manera se ha introducido el tema. Después viene realmente el problema de generar la discusión. Para ello hay que encontrar un *problema*. Con problema quiero decir una pregunta que admita razonablemente más de una respuesta. Se debe buscar que la pregunta se refiera a un sub-tema específico y que sea suficientemente directa como para que produzca alguna reacción. Se dan entonces dos posibilidades:

- Hay por lo menos un estudiante que propone una respuesta;
- No hay ninguna reacción por parte del grupo.

Consideremos primero la segunda alternativa. En este caso, el profesor puede proponer una respuesta a la pregunta que él mismo hizo. Esta respuesta debe tener dos características:

- Que no sea una respuesta válida;
- Que sea presentada (o justificada) de tal manera que tenga visos de validez.

En este punto puede o no haber reacción por parte del grupo. Si no la hay, se hace necesario hacer terrorismo: se escoge al azar una persona (ojalá de las que *no* bajan los ojos cuando el profesor hace una pregunta) y se le pregunta:

“¿Y tú, qué opinas?”



Aquí comienza la discusión. Porque si no hay reacción a la respuesta de esta primera persona, se escoge una segunda y se le hace la pregunta:

“¿Y tú, qué opinas acerca de lo que él dijo?”

El resto de la discusión debería seguir en este sentido. En algún momento, el grupo debería reaccionar. Esto es, los estudiantes mismos deberían desear participar en la discusión.



A argumentos de una discusión

La formación que queremos que nuestro estudiante desarrolle no es aquella que se produce por el puro hecho de discutir. Es aquella formación producto de *discutir bien*. Por consiguiente, la discusión que se genera en una clase sobre un tema determinado debe tener dos propósitos:

- Llegar a un consenso acerca del tema que se discute;
- Llegar a este consenso a través del análisis de la validez de los argumentos que los estudiantes proponen para defender sus opiniones.

Pero, ¿cómo analizamos los argumentos? El primer punto que hay que tener en cuenta es que no basta con que el estudiante dé su opinión:

Nosotros debemos exigirle siempre al estudiante un argumento que defienda su opinión.

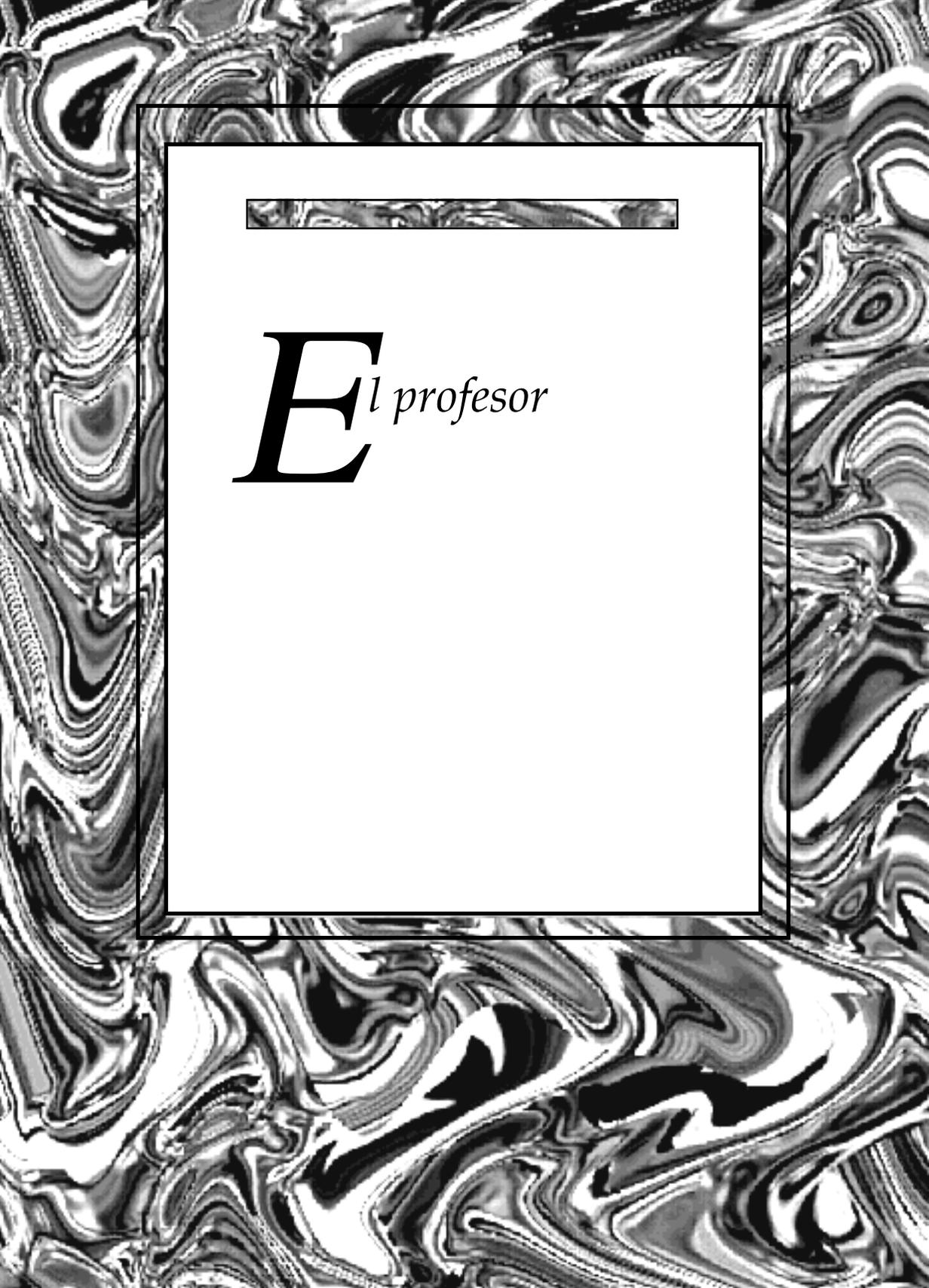
El argumento que el estudiante proponga puede ser muy sencillo. Puede estar basado en un hecho que todos aceptamos o en una nueva opinión. Si se da la segunda alternativa podemos volver a pedir un argumento para sustentarla. Sin embargo, nuestro trabajo *no* es analizar y criticar los argumentos de los estudiantes. Deben ser ellos mismos quienes hagan este análisis y esta crítica.

La situación ideal (que no siempre es posible lograr) es aquella en la que hay por lo menos dos estudiantes con opiniones diferentes sobre el mismo tema. En este caso, podemos enfrentarlos para que defiendan sus tesis y podemos obligar al grupo para que tome partido en alguno de los bandos.

Debemos seguir siempre el rastro del argumento. Para ello, el método es sencillo. Debemos obligar al estudiante a que presente explícitamente dos aspectos de su argumento:

- Las premisas de las cuales parte;
- El proceso por medio del cual llega a la tesis a partir de las premisas.





El profesor

*S*e me rajaron 25 en el parcial

Diálogo en la mesa de tintos del Departamento de Matemáticas entre un profesor y Monsieur Henri Yerly, en la época en que el último era jefe del Departamento:

—Monsieur, estoy muy preocupado con mi curso de cálculo.

—Y, eso ¿por qué?

—Pues porque vienen mal preparados, no trabajan nada y, además, son brutos. No entienden nada.

—¿Por qué dice eso?

—Porque en el último parcial, de 30 estudiantes que tengo, 25 se rajaron y la máxima nota fue 3.3.

—No, no se rajaron 25; se rajaron 26, usted incluido...

¿Es posible y razonable que, de un curso de 30 estudiantes, se rajen 25 en un parcial? En principio, esto debería ser imposible. Las razones son sencillas. Estadísticamente hablando, en un curso típico, hay en general menos de un 15% de estudiantes que son vagos o (para usar las palabras del profesor) brutos. El resto, o son genios o trabajan normalmente si se les guía apropiadamente para hacerlo. Por consiguiente, en principio, si el profesor ha hecho las cosas bien, de este 85% ningún estudiante se debería rajarse. ¿Por qué se rajan entonces 26 personas, incluido el profesor? Porque el profesor puede haber cometido inadvertidamente por lo menos uno de los siguientes errores:

- No hizo explícitos los objetivos que se buscaban en el tema del parcial, los estudiantes no los conocían y, por consiguiente, no se prepararon para lograrlos.
- El parcial no buscaba evaluar los objetivos que explícita o implícitamente el profesor había insinuado a los estudiantes.
- Si los objetivos eran conocidos y el parcial pretendía evaluar estos objetivos, el profesor no fue capaz de guiar a los estudiantes para que los logaran (En las palabras del profesor, él era el bruto...)



*E*l poder del profesor

Uno de los aspectos de la docencia que más temor infunde en el profesor joven (o en el profesor primíparo) es la duda acerca de si él será capaz de mantener el control de su clase. El no le teme a un estudiante en particular, sino al grupo en general. Las primeras clases son aparentemente claves porque (creen algunos profesores) en ellas se define la relación entre el profesor y el grupo.

Esta tensión inicial del profesor hacia su grupo le hace pensar que la mejor manera de mantener el control del grupo es crear la *distancia* que tradicionalmente existe en el esquema de clase catedrática. El profesor mantiene el control de la clase porque tiene el poder de regañar, expulsar o rajar al estudiante. Este es el *verdadero terrorismo*. Existe un control, porque hay un poder formal proveniente *exclusivamente* de la *posición* relativa de los dos participantes. Existe un poder del profesor porque existe un respeto por parte del estudiante hacia él. Y existe un respeto por el temor del estudiante hacia medidas extremas de terrorismo. Pero, ¿es ésta la única alternativa? Más aún: ¿es ésta *la* alternativa?

Es cierto que para que haya un control, tiene que haber un poder. Y para que haya un poder, tiene que haber un respeto. Pero el respeto del estudiante hacia el profesor no tiene por qué provenir del temor al terrorismo. El respeto del estudiante tiene que tener un origen honesto y válido. Este respeto debe provenir de la combinación de varios factores:

- El reconocimiento por parte del estudiante del conocimiento que el profesor tiene del tema.
- El reconocimiento por parte del estudiante del interés que tiene el profesor en que el primero logre los objetivos del curso.
- El reconocimiento por parte del estudiante de la actitud del profesor como partícipe de un problema común y no como el policía que vigila el cumplimiento de unas reglas.

La moraleja es sencilla: basta ser amigo del estudiante, conocer los objetivos del curso y entregarse honestamente en su búsqueda. Nos podemos olvidar del terrorismo.



*L*a guía del profesor

Todo curso debe tener una guía para el profesor. Este texto es la recolección de las experiencias que otros profesores han vivido en el pasado y que pueden servirle a cada profesor. Puesto que nuestro sistema es tal que no permite llevar cada día una clase completamente preparada, sino que día a día vamos creando, de acuerdo a las circunstancias, los caminos y las preguntas que debemos seguir, es trascendental grabar y recordar lo que otros y uno mismo ha creado en ocasiones anteriores.

Por otra parte, este texto debe contener los objetivos específicos de los temas que se tratan en el curso. Esta es la principal guía del profesor. El resto es menos importante, puesto que si el profesor tiene claro lo que quiere lograr con los alumnos en su hora de clase, él mismo puede producir cada vez las metodologías necesarias para ello. Sin embargo, la guía del profesor tiene también un contenido metodológico, consistente en ideas de cómo llevar a los alumnos al propósito que se tiene.

La guía del profesor también es un pequeño discurso psicológico. Es allí donde guardamos nuestras impresiones acerca del “estudiante promedio o típico”. Al tener esta información, tenemos una idea de cuáles pueden ser las actitudes, las expectativas, los errores y las reacciones típicas de los estudiantes y, por consiguiente, podemos producir una posición y una actitud previa hacia ellas.

La guía del profesor tiene que ser un *libro vivo*. Todos tenemos que participar y aportar a su producción. Y esto requiere un mínimo esfuerzo consistente en apuntar brevemente las ideas que generamos en el transcurso de la clase. La experiencia nos muestra que esto es difícil de lograr. Por lo tanto, este debería ser uno de los objetivos principales de las reuniones de coordinación.



C *onfesar la ignorancia*

El profesor no tiene que saberlo todo. Aunque dentro del esquema de la metodología tradicional, se espera que el profesor sea el recipiente de toda la sabiduría sobre el tema, éste no es necesariamente nuestro caso. Nosotros no somos exclusivamente transmisores de información. Somos, ante todo, catalizadores de una discusión de la cual esperamos que surja la comprensión y el conocimiento.

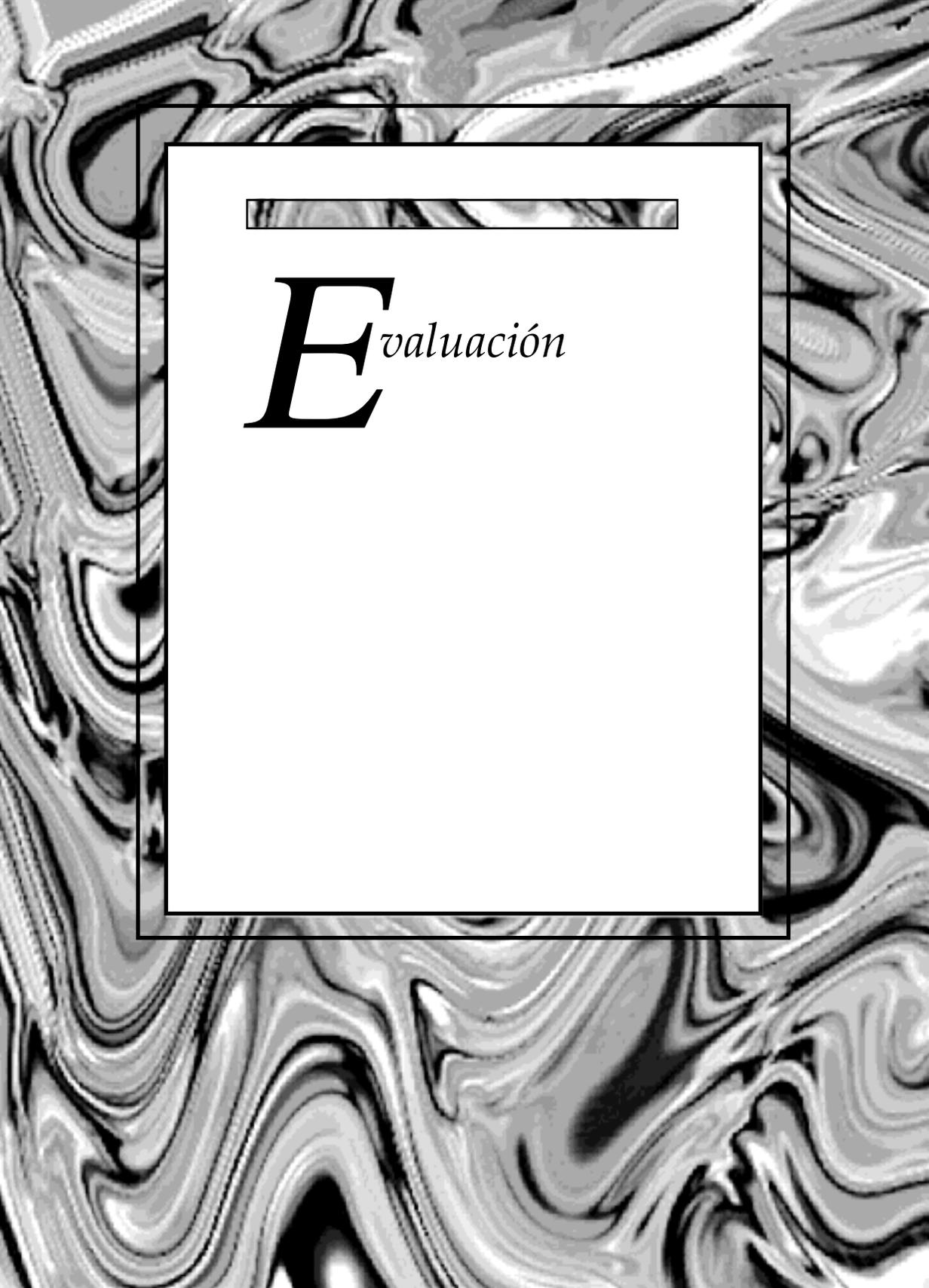
Los cursos contienen temas de naturaleza muy variada. Por un lado, en algunos casos, siendo los temas relacionados con las matemáticas, estos pertenecen a aspectos de la misma que no son usualmente tratados en cursos de niveles básicos. Segundo, los cursos contienen temas que no tienen que ver con las matemáticas sino, por ejemplo, con la ciencia. Finalmente, por razón de que nos interesa que nuestros cursos se relacionen con las carreras de los estudiantes, buscamos tratar este tipo de temas. Esta naturaleza variada del contenido de nuestros cursos hace que ningún profesor pueda tener el conocimiento de todos los temas sobre los cuales se espera que sirva de moderador.

¿Qué hacer entonces ante esta ignorancia? La primera estrategia es esencial: hay que evitar pretender que se conoce el tema. Esta actitud proviene, en general, de la inquietud que puede llegar a tener el profesor acerca de la visión que el estudiante tiene de él. El profesor no pierde importancia ante el estudiante por razón de no conocer el tema. Al contrario, cuando el profesor no conoce el tema y *confiesa su ignorancia*, está acercándose al estudiante. El estudiante siente, por consiguiente que él puede aportar al curso y se motiva.

En otras palabras, hay que confesar la ignorancia y hay que involucrar al estudiante en la búsqueda *conjunta* de la comprensión y el conocimiento del tema ignorado. Pero que el profesor no conozca el tema no quiere decir que no pueda aportar eficientemente en este proceso. Por el contrario, el profesor tiene que jugar un papel esencial en este proceso, puesto que se espera que sea él quien lo guíe. Y para ello, tendrá que seguir un proceso racional (científico) de búsqueda del conocimiento que el estudiante no conoce a plenitud y del cual éste sabrá obtener beneficios.

Finalmente, el conocimiento no se encuentra únicamente en el libro de texto. Tenemos que enviar a nuestros estudiantes a investigar más allá. En la biblioteca, en otros libros de texto, en libros de referencia, en los periódicos o revistas y, no olvidemos, con otras personas y profesores.





Evaluación

Evaluación, factor que se olvida

La evaluación es un factor pedagógico fundamental. Sin embargo, tiende a considerarse como un factor de segundo orden que busca únicamente satisfacer los requisitos administrativos de la institución.

Pero la evaluación juega un papel que va mucho más allá de estos requisitos. Dependiendo de las circunstancias, la evaluación puede llegar a ser la herramienta más eficaz para el logro de los objetivos de un curso. Como elemento del sistema dentro del cual se enmarca el proceso de enseñanza—aprendizaje, la evaluación debe considerarse al mismo nivel que los objetivos, la metodología y el contenido. La evaluación, cuya definición aún no hemos introducido, es tanto un factor regulador, como un factor catalizador.



*P*rincipios

La evaluación debería estar basada en un principio fundamental: debe ser justa. Y, para ser justa, debe pretender medir los objetivos del curso. Para ello, es necesario, primero, que el curso tenga definidos unos objetivos explícitos; segundo, que los estudiantes conozcan estos objetivos; y, tercero, que la metodología utilizada en el salón de clase y la actuación del profesor dentro del mismo estén de acuerdo con estos objetivos.

Pero, ¿qué hacer con la evaluación cuando las condiciones anteriores no pueden ser satisfechas? La dificultad para dar una respuesta apropiada a esta pregunta demuestra la importancia de la evaluación como tema central dentro del proceso pedagógico. El profesor debería ser consciente de este rol trascendental que juega la evaluación y debería utilizarlo como medio regulador de la calidad de su trabajo. Es así como, aún si el curso no tiene unos objetivos explícitos, el profesor debería intentar definirlos y transmitirlos a sus estudiantes de tal manera que lo que suceda en el salón de clase esté de acuerdo con estos objetivos y la evaluación le permita tanto al profesor, como al estudiante, medir la calidad de su propio trabajo.



*M*edir los objetivos

A lo largo de este material se ha insistido en la importancia de los objetivos tanto desde el punto de vista del esfuerzo del profesor para hacerlos explícitos, como desde el punto de vista del conocimiento que el estudiante tenga de ellos. Pero, lo importante no es solamente que tanto profesor, como estudiante conozcan los objetivos. Lo importante es encontrar la manera más eficiente para que el profesor guíe al estudiante en el logro de los mismos. Y, para ello, la evaluación puede convertirse en una herramienta trascendental.

Porque si los objetivos del curso se han hecho explícitos, la evaluación debe tener como propósito el de medir qué tanto el estudiante los ha logrado. El diseño y la aplicación de las diferentes pruebas de evaluación deben estar basadas en este principio, aun si existe una cierta tradición de diseñar las pruebas alrededor del contenido.



*J*usticia

La justicia es un factor trascendental en el diseño de un examen. Sin embargo, ¿cómo se puede medir qué tan justo es un examen? El examen es justo si pretende medir el logro de los objetivos por parte de los estudiantes. Y esto tiene que ver con los objetivos que los estudiantes conocen, ya sea porque fueron explícitos o porque la actitud del profesor en clase los puso de manifiesto. Sin embargo, sucede algo curioso cuando se diseña un examen. El profesor, al saber qué tanto sus estudiantes han comprendido y aprendido del tema a evaluar, olvida que se requirió de un proceso para llegar allí y que los estudiantes se esforzaron para lograrlo. Al diseñar el examen, algunos profesores tienden a buscar identificar los vacíos en el conocimiento del estudiante. Esto es, buscan evaluar lo que “el estudiante *no* sabe”. Y, al hacerlo, se olvidan de los objetivos del curso, dejando a un lado la evaluación de lo que “el estudiante *sí* sabe”.



*M*edir lo que se hizo

Nosotros, como profesores tendemos a tener una concepción ideal del curso y podemos llegar a pensar que es, a partir de esta concepción ideal, que hay que medir al estudiante. Pero esto no es justo: lo que el estudiante vivió y conoció fue la realidad del desarrollo del curso, no lo que nosotros en este momento consideramos que es lo ideal. Por consiguiente, hay que medir lo que se hizo en clase, no lo que nos habría gustado hacer, ni lo que pensamos que el estudiante excepcional pudo haber hecho por su cuenta.

Este aspecto de la evaluación a través de los exámenes tiene gran relación con la evaluación continua en el salón de clase. Es evidente que si, aun cuando un tema o una técnica particular se ha presentado y trabajado en clase, pero el profesor, gracias a esta evaluación continua, sabe que sus estudiantes no la conocen o manejan, no tiene mucho sentido evaluarla en un examen.



*E*valuar los conceptos

Si no se tienen los conceptos, no se puede hacer nada. Pero que lo anterior sea cierto, no quiere decir que no se puedan medir y diferenciar a aquellos estudiantes que lograron únicamente los conceptos de aquellos que ni siquiera eso pudieron hacer. Sin embargo, en muchas ocasiones tenemos tendencia a diseñar problemas cuya solución requiere, por parte del estudiante, no solamente del conocimiento y la comprensión de los conceptos, sino también del conocimiento y el manejo de técnicas particulares. Es evidente, que si estas técnicas hacen parte de los objetivos del curso y han sido enseñadas por el profesor, entonces deben ser evaluadas. No obstante, es también importante reconocer que no todos los puntos de un examen pueden ser de este tipo. Si ese fuese el caso, nuestro examen no nos permitiría diferenciar a aquellos estudiantes que conocen los conceptos de aquellos que no los conocen.



Midiendo inspiración

¿Debe contener un examen puntos que requieran de “inspiración” por parte del estudiante para poderlos resolver? Por supuesto que a nosotros los profesores nos gustaría que nuestros exámenes contuvieran este tipo de puntos y, sobre todo, que nuestros estudiantes fueran capaces de resolverlos. Pero esto depende de qué queramos decir con “inspiración” y qué tanta inspiración hayamos nosotros enseñado en clase.

La inspiración no nos llega del cielo. No nos llega del cielo a nosotros los profesores, cuando resolvemos un problema en el tablero y, a los ojos de nuestros estudiantes, lo hemos hecho por pura inspiración; ni tampoco le llega al mismo estudiante, cuando logra hacerlo y sus compañeros piensan que, para ello, se ha requerido de capacidades fuera de lo normal.

Esta inspiración es, en general, producto de la experiencia y del trabajo. Tiende, en el caso de las matemáticas básicas, a centrarse alrededor de técnicas particulares o de maneras especiales de aproximarse a un problema específico. Pero, tanto técnicas, como maneras especiales de aproximarse a problemas, se pueden (y, en general, se deberían) enseñar. Si el aprendizaje de estas técnicas y aproximaciones hacen parte de los objetivos del curso, es evidente que deben evaluarse en las diferentes pruebas. Si no hacen parte de los objetivos, pero el profesor las ha enseñado en clase, también se deberían evaluar. Por el contrario, si lo que el profesor ha hecho es utilizar estas técnicas para resolver problemas en el tablero, sin hacerlas explícitas a los estudiantes y sin entrenarlos en ellas, entonces no se deberían evaluar. Si lo hace, él estará esperando que la inspiración del estudiante venga realmente del cielo.



Un examen lindo

Algunos de nosotros, como profesores, tendemos a considerar el examen como la ocasión en la que nos podemos “lucir”. Esta es una actitud natural, puesto que el examen es prácticamente la única ocasión en que nuestros colegas pueden *ver* nuestro trabajo. Y, dado que nosotros hacemos bien nuestro trabajo, queremos demostrarlo.

Pero, ¿cómo podemos mostrar la calidad de nuestro trabajo? Pues diseñando exámenes “lindos”. Exámenes que contienen puntos interesantes que requieren de una cierta inspiración y, sobre todo, que se salen de los esquemas de los exámenes tradicionales sobre el tema en cuestión. Son puntos “lindos” también porque nos gustaría que todos nuestros estudiantes fuesen capaces de resolverlos y, dado que nosotros sabemos cómo se resuelven, nos parece natural pensar que ellos, que son nuestros estudiantes, también puedan resolverlos.

Pero, ¿será que para nuestros estudiantes el examen también será un examen “lindo”? Esto es dudoso. Porque un examen lindo tiende a tener varios defectos. En primera instancia, es un examen que, por ser difícil, no diferencia a los que saben un poco, de los que no saben nada. En segunda instancia, tiende a ser un examen donde se requiere inspiración y, por tanto, tampoco diferencia apropiadamente a los estudiantes, aventajando a aquellos con una mente rápida. Tercero, en general, el examen se aleja de los objetivos del curso y, por consiguiente, no los mide. Cuarto, y tal vez lo más importante, no es un examen justo. Porque a menos, que nosotros en clase hayamos dedicado todo nuestro tiempo a preparar a los estudiantes para resolver problemas “lindos”, el examen no va a estar de acuerdo a lo que nosotros hemos insinuado que es importante dentro del curso.



*E*xámenes fáciles y difíciles

¿Cuándo es un examen fácil y cuándo es difícil? ¿Es esta una consideración subjetiva, ya sea por parte del profesor o por parte del estudiante? En principio, no debería haber exámenes difíciles o fáciles. Como se discute en otro lugar, los exámenes deberían ser *justos* en el sentido de que evalúan los objetivos del curso de acuerdo a lo hecho en clase.

Sin embargo, aún si se hace abstracción del tema de la dificultad de un examen, hay que tener en cuenta que éste debe *diferenciar a los estudiantes*. Los principios de la estadística nos dicen que una muestra de treinta elementos es, en general, suficiente para que la distribución de la misma con respecto a una variable continua dada (en este caso, la calificación) tienda a comportarse de manera normal. Y esto es lo que deberíamos esperar de los resultados obtenidos por los estudiantes en un examen.

Sin embargo, en muchas ocasiones, nos encontramos con exámenes para los cuales muchos estudiantes sacaron la máxima calificación y, en este caso, es muy posible que no los estemos diferenciando apropiadamente en el sentido de que haya dos estudiantes con conocimientos y preparación diferente que obtengan esa calificación máxima. Lo mismo sucede con la calificación mínima puesto que podemos diseñar exámenes tales que no nos permitan diferenciar entre el estudiante que sabe algo y aquel que no sabe nada.



Visión de las notas por parte del estudiante

El estudiante promedio de los primeros semestres no tiene una visión equilibrada del significado de las calificaciones que él recibe durante un semestre. Aunque al comienzo del semestre se le haya presentado el valor de cada uno de los aspectos de su calificación, en el momento de distribuir su trabajo, el estudiante hace caso omiso a estos valores relativos y trabaja con igual intensidad en pruebas que tienen valores relativos diferentes, siempre que las dos pruebas le representen una calificación y que esta última sea un justo reflejo del esfuerzo que él haya invertido en el trabajo. Es posible aprovechar esta confusión del estudiante para lograr un trabajo periódico y continuo de su parte por fuera de clase.

Para lograr el objetivo anterior, basta con recoger tareas y presentar quices periódica y sistemáticamente. El estudiante, al saber que este trabajo tendrá una calificación representada en una calificación trabajará con entusiasmo independientemente del valor de la misma.

Por otra parte, el estudiante requiere que su evaluación sea justa. Esto no significa, por ejemplo, que sea necesario calificar sus trabajos en todo detalle. En el caso de las tareas, por ejemplo, es posible lograr una evaluación justa del estudiante calificando únicamente una parte de la misma.

Finalmente, dentro de una metodología que requiere la presentación de por lo menos un quiz y por lo menos una tarea semanal, no es necesario imponer un sistema de calificación estricto para lograr diferenciar a aquellos estudiantes que trabajan y se interesan de aquellos que no lo hacen. De hecho, este último grupo, del cual una proporción importante puede llegar a perder el curso, se identifica fácilmente por razón de que no presentan los trabajos. Esto es importante, puesto que genera una relación apropiada entre el profesor y el estudiante en el sentido de que éste último no mira al primero como aquel que busca hacerle perder el curso.

Una pausa que refresca

Puesto que defendemos una actitud de trabajo común entre el profesor y los estudiantes en la búsqueda de los objetivos, pero somos nosotros quienes imponemos o recibimos como impuestas las directrices del manejo del curso, es importante compartir y discutir estos puntos con nuestros estudiantes. Este es un aspecto del curso que tenemos tendencia a olvidar por razón de nuestra preocupación en la búsqueda de los objetivos. Sin embargo, este aspecto puede llegar a aportar mucho en el logro de esta misión por dos razones:

- Nosotros, los profesores, recibimos retroalimentación acerca de nuestro trabajo y del curso en general.
- Los estudiantes se motivan.

La retroalimentación por parte de los estudiantes es muy importante. Al estar sumergidos en las diversas actividades pedagógicas que nos preocupan, no nos podemos “ver” a nosotros mismos desde afuera. Y es muy posible que estemos cometiendo errores sin darnos cuenta. Es por ello que resulta importante dialogar con los estudiantes acerca de por lo menos los siguientes puntos:

- Nuestra actitud y compromiso con el curso
- Nuestra actitud hacia los estudiantes
- Nuestro cumplimiento del programa y de las reglas generales del juego
- Nuestra manera de evaluar el curso

Por otra parte, debemos recibir información por parte de los estudiantes acerca de aspectos generales del curso. Entre otros, nos interesa conocer su opinión acerca de:

- Los objetivos
- El contenido
- La metodología
- El texto
- Las evaluaciones
- Los monitores

La anterior puede ser una manera parcial de evaluar si estamos realizando apropiadamente nuestra misión. Si los estudiantes son capaces de expresar,



en sus propias palabras, los objetivos del curso, esto quiere decir que, de alguna manera, nos estamos acercando a ellos.

¿Por qué esta herramienta puede motivar a los estudiantes? La razón es evidente. Al dialogar sobre estos temas, estamos comprometiendo al estudiante con el curso. Nosotros recibimos sus opiniones y las discutimos. De esta manera, el curso deja de ser la decisión de un ente abstracto, para convertirse en un acuerdo entre el profesor y los estudiantes. La motivación surge de este acuerdo, puesto que se genera un compromiso mutuo.



Motivación del estudiante: el terrorismo

Los estudiantes tienen múltiples responsabilidades dentro de sus actividades académicas. Ellos tienden a preocuparse más por sus calificaciones que por el valor formativo o informativo del trabajo que hacen a diario y, por consiguiente, tienden a trabajar con mayor interés en aquellos cursos en los que se les exige mayor cantidad de trabajo evaluado con una calificación. Esto significa que no basta con que el tema y la metodología de un curso sean interesantes para que el estudiante haga el trabajo diario que se espera realice en su casa. Es necesario obligarlo a hacerlo. No conozco ninguna alternativa diferente de *imponerle* trabajos que después serán calificados.

Esta actitud podría calificarse de "terrorista". Sin embargo, la visión que el estudiante tiene del trabajo que se le obliga a hacer depende de diversos factores que hacen que no necesariamente él las vea como terroristas. La primera y más importante de todas es si él considera que están tratando de rajarlo sin razón. Si él tiene esta opinión, entonces ve la herramienta como una herramienta terrorista. Y, en este caso, el estudiante pierde la esperanza y deja de trabajar.

Por el contrario, si el estudiante piensa que su trabajo puede resultar en una buena calificación, él se entusiasma y realiza con gusto e interés este trabajo. Esta debería ser la manera de motivar al estudiante a realizar un trabajo diario en la casa.



*H*erramientas del terror: *tareas y kisses**

Existen varias herramientas para lograr que el estudiante haga el trabajo diario en la casa. La peor de todas es la frase: "Si ustedes no trabajan, entonces se van a rajar en el parcial". Otra herramienta frecuentemente utilizada y con pésimos resultados en la asistencia a clase se basa en la frase: "preparen el tema, porque si no lo hacen, mañana los puedo pasar al tablero y dejarlos en ridículo delante de todos sus compañeros".

Las mejores herramientas son aquellas con las cuales el estudiante puede ver que se va a reconocer positivamente el esfuerzo que él ponga en su trabajo. Como lo que se busca es que el estudiante haga un trabajo por fuera de clase, las herramientas que mejor se pueden utilizar son las tareas, los kisses y los trabajos escritos.

Normalmente el estudiante debería tener una tarea diaria, tarea esta que se encuentra predeterminada en el programa del curso y que el estudiante puede identificar con facilidad. Por otro lado, el estudiante debe saber que semanalmente tendrá que presentar por lo menos un kiss. Este kiss semanal debe estar preestablecido en la fecha y en el contenido que abarca. Sin embargo, el estudiante debe saber que el profesor puede hacer un "kiss sorpresa" en cualquier día de la semana.

*Quiz se lee kis, que se puede escribir kiss y se puede interpretar como uno quiera.



Tareas: ¿cómo deben ser?

El estudiante debe tener sistemáticamente una tarea diaria. El estudiante debe saber, desde el comienzo del curso, que esto va a suceder y debe conocer con precisión la manera de identificar la tarea a partir del programa del curso. Esto no quiere decir que el profesor recoja la tarea todos los días. En general, el profesor deberá recoger por lo menos dos tareas semanales. De éstas, por lo menos una deberá ser recogida en un día escogido al azar. Cuando el profesor identifica que el tema que se verá al día siguiente requiere que el estudiante lo haya trabajado podrá avisar con anticipación que recogerá la tarea.

Por otro lado, al comienzo de la clase el profesor debe evaluar la dificultad que la tarea haya significado para el estudiante. En caso de que él sienta un consenso general en este sentido, debería evitar recoger la tarea y presentarse como “el bueno de la película” al hacerlo.

Las tareas deben ser sencillas e implicar entre media hora y una hora de trabajo para el estudiante. El propósito que buscan las tareas es el de obligar al estudiante a estudiar el tema que se verá en la clase siguiente. Por consiguiente, los problemas que ellas incluyan deben ser tales que cualquier estudiante pueda hacerlas si ha preparado el tema. En algunos casos, este tipo de tarea se puede complementar con uno o dos problemas complejos del tema que se haya visto durante la clase de ese día.

El profesor debe hablar sobre la tarea del día siguiente al final de cada clase. Debe intentar ubicar el tema dentro del contexto que se está viviendo en el curso y motivar a los estudiantes a realizarla.

El ambiente de discusión de un día de clase se puede generar a partir de la tarea asignada para ese día. En general, se debe intentar que por lo menos dos estudiantes presenten sus soluciones y se discuta acerca de la bondad de las mismas. Es en este momento en el que el profesor debe reforzar el interés del estudiante al reconocer públicamente el esfuerzo que éste hizo al realizar la tarea.



Kisses: ¿cómo hacerlos?

Los kisses constituyen una herramienta terrorista extremadamente eficiente. El propósito de los kisses es el de obligar al estudiante a revisar el material que se haya tratado durante varios días de clase y ubicarlo dentro de una perspectiva general. Cada semana debe haber un kiss *avisado* y puede haber otros kisses *sorpresa*.

El kiss debe ser capaz de diferenciar a aquellos estudiantes que han hecho un esfuerzo aunque no hayan entendido a cabalidad el tema. El kiss debe también reconocer a aquellos estudiantes que han profundizado en el mismo.

El día anterior al kiss, el profesor debe hacer una preparación del tema durante los últimos minutos de clase. El profesor debe identificar el contenido del mismo y presentarle la estudiante la estructura general del contenido, haciendo obviamente énfasis en los puntos que él considera importantes.

Una manera muy eficiente e interesante de lograr que los estudiantes preparen el kiss consiste en proponerles que sean ellos mismos quienes lo diseñen. Para ello, basta con que parte de la tarea para el día anterior al kiss consista en un problema posible para el mismo, con su solución incluida. Al poner esta tarea, el profesor debe recordar claramente cuáles son los objetivos pedagógicos de los temas que se han tratado y explicar los criterios de acuerdo a los cuales se escogerán los problemas. Este procedimiento es altamente motivante para el estudiante, puesto que si él propone un problema interesante, este problema aparecerá en el temario del kiss.



Corrección de tareas, kisses y parciales

Las tareas, los kisses y los parciales son la oportunidad que tenemos los profesores de reconocer la eficiencia con la cual estamos logrando los objetivos. Estas pruebas deberían, en principio, estar diseñadas para medir estos últimos y, por consiguiente, para indicarnos si hemos logrado hacer con el estudiante lo que pretendíamos.

La corrección y el análisis de las pruebas nos permiten identificar nuestras fallas, puesto que nos dicen cuáles son los errores típicos de los estudiantes. Es por ello que no debemos contentarnos con entregar la prueba corregida. Aunque no es necesario corregir toda la prueba en clase, sí es esencial que presentemos los errores típicos, que identifiquemos las razones por las cuales éstos se cometieron y que indiquemos la manera de corregirlos.

Para todas las pruebas, pero especialmente para los parciales, es muy importante que indiquemos al estudiante dónde se ubica con respecto a sus compañeros. Deberíamos tomar como costumbre presentar el promedio, la desviación y la distribución de las calificaciones de cada parcial. Esto le permitirá al estudiante saber, independientemente de su calificación, cómo se compara con sus compañeros. Esta medida es particularmente útil para aquellos estudiantes que obtuvieron un mal resultado, pues la comparación los estimula a mejorar su rendimiento.



*M*anejo de los monitores

Los monitores existen para evitarle al profesor uno de los trabajos más dispendiosos y aburridos que existen: la corrección de las tareas y los kisses. Dado que, dentro de la metodología que se propone en este texto, se recogen por lo menos una tarea y un kiss semanal, resulta muy importante tener un correcto manejo del monitor.

El monitor es, en general, un estudiante de muy buen nivel que se encuentra normalmente muy motivado hacia su trabajo debido al hecho de que éste lo diferencia de sus demás compañeros. Esta sensación hay que reforzarla invitando al monitor al salón de clase y buscando que él participe periódicamente en ella.

El problema del monitor consiste en que la mayor parte de su trabajo radica en corregir tareas y kisses y él nunca ha corregido nada. El resultado de esta contradicción es que, ya sea él hace su trabajo con demasiado cuidado y, por consiguiente, dedica demasiado tiempo o puede hacerlo con demasiada ligereza.

Es por esto que cada profesor debe entrenar a su monitor en las técnicas de corrección. Una forma muy eficiente de aligerar el trabajo del monitor con relación a las tareas consiste en proponerle que corrija únicamente una parte de ella. Por otro lado, cada vez que el profesor le entregue un paquete de corrección al monitor, debe darle instrucciones detalladas para realizar su trabajo.



Haga usted el parcial

¿Cómo diseñar el parcial?, se pregunta el profesor. ¿Cómo preparar el parcial?, se pregunta el estudiante. Los dos son problemas que, en muchas ocasiones, no tienen una solución evidente. Sin embargo, existe una manera de matar los dos pájaros de un solo tiro: *que sean los estudiantes quienes diseñen el mismo parcial.*

La idea es sencilla. Tres o cuatro días antes del parcial, se pone como tarea que cada estudiante traiga uno o dos puntos para el parcial. Estos puntos deben satisfacer varias condiciones:

- Se debe identificar el objetivo del curso que el punto pretende evaluar.
- El punto debe ser innovador e interesante.
- El punto debe venir resuelto.
- Se debe determinar el tiempo necesario para resolver el punto.

El profesor, con este conjunto de treinta o sesenta puntos puede armar el parcial. Esto claramente le facilita el trabajo a este último. Pero, la tarea también es beneficiosa para el estudiante. Esto se debe a que, para producir un buen punto para el parcial, el estudiante debe:

- Conocer el material que se desea evaluar para el parcial.
- Conocer los objetivos de cada uno de los temas.
- Conocer en profundidad los temas sobre los cuales está proponiendo un punto.

La motivación para el estudiante es obvia: si yo presento un buen punto, hay gran probabilidad de que ese punto salga en el parcial y yo ya sé hacerlo.



R *epaso del parcial*

Todo curso debería tener previsto en su programa una clase de repaso del parcial inmediatamente anterior al día del parcial. Dado que la mayoría de los estudiantes preparan su parcial la noche anterior al mismo, esta clase permite al profesor guiar al estudiante en el proceso que debe llevar a cabo para preparar apropiadamente el parcial.

Desafortunadamente existe la tradición de que estas clases de repaso de parcial son utilizadas por el profesor para avanzar si él se ha retrasado en el tema. Esto debería evitarse a toda costa. Por otro lado, el día de repaso del parcial *no* es para contarle al estudiante qué es lo que va a salir en el mismo, ni para regresar a los detalles de algún tema específico que se vio en clase con anterioridad.

El repaso del parcial es la ayuda que el profesor le da al estudiante al presentarle *su* visión global del tema. Es el momento en el que el profesor tiene la oportunidad de relacionar los diferentes temas y darle un *sentido* a las actividades desarrolladas durante el último mes. La mejor manera de darle sentido a estas actividades consiste en recordar y hacer explícitos los objetivos que se definieron para los temas que entran en el parcial. Es de esta forma que el estudiante comprende por qué se hizo lo que se hizo y, por lo tanto, se motiva a prepararlo apropiadamente. Es también el momento de poner en perspectiva los temas que se han visto con relación a los temas futuros.

Además de presentar los objetivos, el profesor debe intentar presentarle al estudiante la *racionalidad* y el *flujo lógico* de los diversos temas. Para ello, él debe intentar hacer un resumen de los conceptos y las herramientas involucradas en ellos, junto con las relaciones que existen entre los mismos. El “método de las cajitas” es ideal para esto, puesto que, en poco espacio, permite ver tanto conceptos, como interrelaciones.





A prender a pensar

¿Qué es lo que se busca?

Es fácil decir que lo que nosotros queremos lograr con nuestros estudiantes es que ellos aprendan a pensar. Sin embargo, esta buena intención presenta por lo menos dos problemas:

- ¿Qué queremos decir con “saber pensar”?
- ¿Cuáles son las etapas que hay que recorrer para lograr este objetivo?

Es muy posible que muchos de nosotros no seamos conscientes de la existencia y de la importancia de estas dos preguntas. No sería raro que algunos de nosotros pensáramos que para lograr el objetivo inicial basta con dar el buen ejemplo. Esto es, que al pensar nosotros en el tablero (o mejor, al pensar nosotros que estamos pensando), entonces ellos están aprendiendo a pensar. No obstante, esta es, en mi opinión, una posición un poco ilusa.

Por una parte, es muy posible que nosotros estemos pensando en el tablero, pero que no lo estemos mostrando; que nos guardemos buena parte de nuestros razonamientos para nosotros mismos y que, por consiguiente, para el estudiante la sensación sea sencillamente que el profesor es un genio o que tiene relaciones muy estrechas con la Santísima Trinidad.

Por otra parte, es evidente que presentar explícitamente nuestros razonamientos no implica en absoluto que nuestros estudiantes adquieran la capacidad de hacerlo.

Es por estas razones que se hace necesario hacer explícitas y atacar las dos preguntas iniciales.



Capacidad de abstracción

La mayoría de la gente opina que los matemáticos puros son “lógicos y saben pensar”. Sin embargo, no son muchas las personas que pueden expresar este sentimiento en un mayor nivel de detalle. Su sentimiento proviene, en general, de experiencias en las cuales el análisis que un matemático hace de un problema complejo resulta en una solución adecuada para el mismo y en una defensa de esta solución que no deja lugar a dudas. Pero, ¿cómo hace el matemático para llegar a esta solución y sustentar apropiadamente su tesis?

Hay que partir del hecho de que esta supuesta “capacidad” del matemático no es exclusiva de las personas con esta formación. Muchos otros profesionales logran hacer explícito un cierto *método* de análisis que produce soluciones válidas a problemas complejos. Sin embargo, son los matemáticos quienes en mayor medida pueden expresar de manera sencilla y directa el procedimiento mediante el cual logran llegar a una solución adecuada. Y este procedimiento tiene que ver directamente con las matemáticas puesto que involucra una habilidad particular que se desarrolla especialmente en el estudio de las mismas. *Esta es la capacidad de abstracción.*



A *nálisis racional de un problema*

Un problema es complejo si su solución requiere de la consideración de más de tres factores y dos relaciones entre estos. La mayor parte de los problemas complejos involucran, además, una cierta cantidad de información que no es relevante para la solución que se está buscando. En estos problemas el análisis intuitivo del mismo no es suficiente para llegar a una conclusión. Nuestras mentes tienen una capacidad limitada para mantener información en línea y para producir encadenamientos dentro de esta información de tal forma que tanto la información, como los encadenamientos y las conclusiones que surgen de ellos se encuentren, *en un mismo instante*, disponibles en nuestra conciencia. Es por ello que se requiere de herramientas de análisis que nos permitan refrescar permanentemente nuestra memoria y nuestra conciencia, manteniendo aparte la información necesaria para los mismos.

Hay entonces cuatro pasos que son necesarios para el análisis racional de un problema. El primero se refiere a la identificación de un lenguaje de interpretación que permita la simplificación del problema. El segundo tiene que ver con la utilización de este lenguaje para la producción de tal simplificación o modelo. El tercero se refiere a la utilización de ciertas reglas preestablecidas de encadenamiento o deducción para la obtención de una conclusión dentro del modelo. Y el cuarto, en general el más sencillo, tiene que ver con la utilización del lenguaje de interpretación para obtener la traducción de la conclusión dentro de la situación inicial.



Lenguaje de interpretación

En la mayoría de los casos el lenguaje de interpretación mediante el cual se logra producir un modelo de una situación compleja es evidente. Casi que basta con utilizar los mismo nombres para las mismas cosas tanto en el modelo como en la situación original. El problema, por lo tanto, no radica allí. El problema es de otra naturaleza, puesto que involucra la subjetividad de quien hace el análisis.

Lo que se busca realmente es la identificación de los elementos o factores que, perteneciendo a la situación real, son relevantes para la solución que se está buscando. Es aquí donde interviene por primera vez la capacidad de abstracción, puesto que, en general, la situación real involucra muchos más factores de los que realmente son necesarios para el análisis. Y éste, siendo un proceso en principio racional, dentro del cual se están definiendo un conjunto de objetos que representan los elementos relevantes de la situación inicial, es también un proceso subjetivo puesto que cada quien identificará los elementos que, de acuerdo a su visión del problema y a su ideología, considera relevantes.

Sin embargo, esto no quiere decir que la solución del problema que se obtenga a partir de este análisis no sea válida. Por el contrario, la bondad del procedimiento radica en el hecho de que obliga a la persona a hacer explícitas sus opiniones y su visión del problema de tal manera que quien observe el análisis sabrá por qué no está de acuerdo con el mismo.

Desde el punto de vista del método matemático, este procedimiento se refiere a la identificación del lenguaje (y, por consiguiente, de los símbolos) con los cuales se va a construir el sistema formal dentro del cual se hará el análisis.



*I*nterrelaciones o axiomas

Un problema no consta únicamente de un conjunto de elementos. El problema es problema principalmente porque implica también un conjunto de interrelaciones entre estos elementos. La identificación de estas interrelaciones hace parte esencial de la capacidad de abstracción que cada quien tiene que desarrollar. Pero, ¿qué forma tienen estas interrelaciones?

De una manera general, basta con dos tipos de formas básicas para poder expresar la gran mayoría de las interrelaciones. Son las formas de los famosos silogismos de Aristóteles: el *modus ponens* y los *cuantificadores*. ¿Qué es lo que se hace entonces?

Basta con identificar dentro de la situación real las interrelaciones relevantes entre los elementos que hacen parte del lenguaje de interpretación.

La producción de estas interrelaciones requiere de un esfuerzo importante de traducción. Frecuentemente, la forma como se presentan las interrelaciones dentro de la situación real no tiene aparentemente nada que ver con las dos formas descritas anteriormente. Sin embargo, es necesario hacer el esfuerzo de abstracción que pueda producir todas las interrelaciones relevantes con afirmaciones expuestas en esa forma.

La expresión de las interrelaciones dentro de las dos formas descritas produce los *axiomas* del sistema formal que se está construyendo. De la misma manera que con la producción del lenguaje de interpretación, la producción de estos axiomas también es subjetiva puesto que depende de la ideología y de la visión de quien los construya. Sin embargo, esto no implica un problema puesto que esa ideología y esa visión quedan explícitamente pasadas en el sistema formal. Finalmente, hay otro tipo de axiomas. Son sencillamente hechos de la realidad que se está considerando. En general, estos hechos se expresan como características iniciales de algunos de los elementos del lenguaje de interpretación.



*P*roceso de deducción de la conclusión

Una vez que se tiene construido el sistema formal compuesto por el lenguaje de interpretación y los axiomas, el proceso debe ser mecánico y completamente objetivo. Este proceso consiste esencialmente en producir teoremas a partir de los axiomas utilizando las dos reglas de deducción: *modus ponens* y *cuantificadores*. Si el modelo estuvo bien construido (de allí la importancia de la capacidad de abstracción) la conclusión debe obtenerse sin mayor dificultad.

Es importante mencionar que si el lenguaje de interpretación y los axiomas fueron aceptados, entonces no hay más remedio que aceptar la conclusión. Es aquí donde interviene la famosa lógica. El resto es interpretar la conclusión dentro de la situación real.



Sentido de la estética

Los matemáticos tenemos ciertamente un sentido particular de la estética. De hecho, cada quien tiene su propio sentido de la estética. A nosotros nos interesa desarrollar en el estudiante algunos aspectos de este carácter formativo de la persona. Sin embargo, como todos los temas metafísicos, el sentido de la estética es difícil de definir. Es fácil para cada quien, dadas dos alternativas posibles, decir cuál le parece más elegante. Pero esta capacidad no permite, en general, definir de manera abstracta el concepto que está detrás de este criterio.

Si tuviera que dar una sola palabra para definir el sentido de la estética desde el punto de vista de las matemáticas, usaría la sencillez. Dadas dos alternativas (de soluciones a un problema, de argumentos para defender una tesis, de presentaciones de un argumento) nosotros preferimos aquella que sea más sencilla. En otras palabras, preferimos aquella que diga lo mismo con la menor cantidad de información.

Mirado desde este punto de vista, el sentido de la estética se convierte en un criterio de elección relativamente claro; la estética contiene, entonces, la *eficiencia*; la estética debe contener también la *claridad*; y la estética contiene finalmente la *potencia* de una herramienta o de un proceso.

¿Cómo desarrollar esta capacidad? A fuerza de la experiencia. Esto es, a fuerza de que sea el mismo estudiante quien reconozca en clase cuándo una alternativa es estéticamente mejor que otra.



C

onceptos y objetos concretos

Una de las diferencias más importantes entre las matemáticas y muchas otras áreas del conocimiento es el hecho de que los objetos con los cuales ella trabaja no son objetos concretos, sino conceptos.

Desafortunadamente nosotros como profesores y, sobretudo como matemáticos, nos olvidamos frecuentemente de este hecho. Esto sucede sencillamente porque nuestra formación ha sido tal que nos resulta completamente natural trabajar con los conceptos que constituyen el universo de discusión de las matemáticas. Sin embargo, para nuestros estudiantes esto no es natural; todo lo contrario.

Para nuestros estudiantes no existen sino los objetos concretos; aquellos objetos que podemos *conocer* a través de nuestros sentidos. Cuando nuestro estudiante se aproxima a un concepto, lo hace con la misma actitud que él emplea hacia los objetos concretos. Es por ello, por ejemplo, que nuestro estudiante tiende a confundir de manera muy natural el concepto con el símbolo o la palabra que utilizamos para identificarlo.

Supongo que es claro que, a menos que solucionemos este problema del estudiante, tenemos pocas posibilidades de éxito en nuestro propósito de aproximarlos adecuadamente a una apropiada formación matemática. ¿Cómo podemos atacar este problema? Dentro de este material se proponen algunas alternativas. La que se expone a continuación es una de ellas: el esfuerzo de aprender a definir.



Aprender a definir

Intentar definir un concepto es un ejercicio que se puede hacer repetidamente en nuestros cursos y que beneficia a nuestros estudiantes tanto en la comprensión de los temas mismos, como en el desarrollo de su capacidad de abstracción. Sin embargo, el manejo de este proceso que se debe intentar hacer siempre en clase no es fácil y requiere de ciertas pautas elementales para que tenga éxito en el logro de sus objetivos.

Para comenzar, y como ya se mencionó, nuestros estudiantes no están acostumbrados a trabajar con conceptos. Es por ello que debemos hacer énfasis en diferenciar los objetos concretos que podemos percibir con nuestros sentidos de los conceptos que pertenecen a ese conocido universo platónico. Sin embargo, hay también que hacer énfasis en que aunque existen diferencias claras, también hay una conexión muy estrecha entre los dos. La relación consiste en que el concepto se *expresa* en objetos concretos (lo que los filósofos llaman sus *instancias*). Lo que nosotros *vemos* del concepto son los objetos concretos que lo expresan.

¿En qué consiste entonces el proceso de *definir un concepto*? Platón diría que lo que deberíamos buscar es identificar la *esencia* del concepto. Sin embargo, esto no nos ayuda mucho puesto que tendríamos que comprender qué entendemos por esencia. No obstante, pienso que existe una manera muy sencilla y sistemática de definir un concepto. Esta manera consiste en identificar las características o los criterios que nos permitan dividir el universo de los objetos en dos partes: aquellos objetos que satisfacen los criterios y, por consiguiente, la definición y aquellos que no la satisfacen.

Este procedimiento nos permite, por lo tanto, tener a nuestra disposición una herramienta de medición de la calidad de nuestra definición: nuestra definición es buena si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- No nos es posible encontrar un objeto que claramente satisfaga nuestra *idea intuitiva* del concepto, pero que no satisfaga la definición.
- No es posible encontrar un objeto que satisfaga la definición, pero que no se enmarque dentro de nuestra *idea intuitiva* del concepto.

De lo anterior se deduce algo muy importante: para poder definir un concepto, tenemos que tener una *idea intuitiva* del mismo. En general, para casi cualquier concepto, todos tenemos esta idea intuitiva. Esto se debe a que, aunque no conozcamos formalmente el concepto, si hemos tenido múltiples experiencias sensibles con instancias o expresiones físicas de este concepto.



Aprender a definir: metodología

Una cosa es saber cuáles son los objetivos y el sentido de buscar que nuestros estudiantes hagan el esfuerzo de definir conceptos y otra cosa es tener ideas de cómo manejar el proceso pedagógico que se da en clase cuando, teniendo un concepto en mente, intentamos llegar a una definición del mismo.

En mi opinión el proceso deber ser un proceso cíclico en el que se proponen hipótesis, se comprueban y se siguen generando nuevas hipótesis. Hay que tener en cuenta que el objetivo final no es realmente llegar a una definición formal y completa del concepto en cuestión. *El propósito es obligar a nuestros estudiantes a hacer el esfuerzo de abstracción que conlleva el ejercicio.*

Para comenzar podemos pedir ejemplos de objetos que satisfagan y no satisfagan nuestra idea intuitiva del concepto. A partir de estos ejemplos se pueden comenzar a generar hipótesis. Estas hipótesis serán, en general, frases que representan *criterios de selección*. En este punto es importante hacer énfasis en el buen empleo del lenguaje: tiene que existir un consenso en el grupo acerca del *significado* de los conceptos *anteriores* que se estén utilizando en la definición del nuevo concepto. Por otra parte, hay que reconocer y hacer explícito el peligro de la *circularidad*: de nada nos sirve definir un concepto por medio de otro cuya definición no conocemos.

Una vez que se hayan propuesto hipótesis, se comienza el proceso cíclico de prueba y error: tenemos que aplicar los dos criterios de calidad de la definición para ver si ésta es buena. En caso de que no haya propuestas por parte de los estudiantes, debe ser el profesor el que intente encontrar objetos que requieran de una mejora en la definición.





*E*l reto

*E*l reto: comprometerse con el logro de los objetivos

¿Cuáles son nuestras responsabilidades? ¿A qué nos hemos comprometido al ser profesores de matemáticas? Algunos podrían decir que nuestro compromiso laboral consiste en dictar cincuenta minutos de clase y corregir unos exámenes. Esta es la visión que puede tener un estudiante, por ejemplo. Pero, ¿puede ser ese nuestro compromiso? ¿Es de esta manera que nosotros nos vamos a sentir satisfechos con nuestro trabajo? ¿Es de esta manera que vamos a lograr nuestra satisfacción personal?

Yo creo que no. Nosotros tenemos un compromiso más profundo. Aun si quien nos dirige no es consciente de que nuestras responsabilidades deben ir más allá de lo que son nuestros puros compromisos laborales y formales, nosotros sí debemos imponernos una meta más significativa. Esa meta debe ser un reto; un reto que nos empuje a trabajar y que nos motive a progresar.

Esa meta debe ser el logro de los objetivos pedagógicos.

Nosotros no somos un intermediario entre un texto y unos exámenes. No podemos mirarnos como un agente externo al proceso de transformación del estudiante. *Hacemos parte activa e integral de ese proceso.* Somos el eslabón más importante en esa maquinaria que busca lograr personas de mejor calidad. ¿Cómo aproximarnos a este problema? Yo quisiera proponer una metáfora deportiva, ya que el balompié está tan de moda en nuestro medio.

Mirémonos como directores técnicos. Somos los responsables de un equipo compuesto por nuestros estudiantes. Nuestro objetivo, el del equipo como un conjunto al cual pertenecemos, es ganar el campeonato. Y el equipo que dirigimos ganará ese campeonato solamente si todos los componentes del mismo logran los objetivos pedagógicos que nos hayamos impuesto. Lo importante no es que haya un pequeño grupo que gane algunos partidos. Lo importante es que seamos conscientes de que *nuestra responsabilidad* es sacar adelante a *todos* los integrantes de nuestro equipo. Podemos perder algunos partidos; pero tenemos que ganar el campeonato. Si no lo ganamos, será, al menos en parte, nuestra culpa, no solamente la de los integrantes del equipo. Si perdemos el campeonato, fuimos nosotros quienes no supimos preparar a nuestros muchachos. Si lo ganamos, somos nosotros también los responsables. Y esa será nuestra satisfacción.



Este es nuestro reto. Conocemos a nuestro contrincante. Por consiguiente, debemos saber cómo enfrentarlo. No nos queda sino comprometernos nosotros mismos como profesores y como personas.



Si hay compromiso, hay motivación

La motivación del estudiante hacia su curso puede ser uno de los aspectos más importantes de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, casi nunca se habla de la motivación del profesor. ¿Será que el profesor siempre está motivado? O, ¿será, más bien, que la motivación del profesor no es muy importante? En principio habría que responder negativamente a ambas preguntas.

Por una parte, es difícil imaginar que todos los profesores de matemáticas están motivados hacia su trabajo. Si hemos de ser realistas, en algunos casos, el trabajo de profesor es la única alternativa interesante que se presenta a la persona. De otro lado, en nuestro medio, ser profesor de matemáticas puede significar ser profesor de *muchos* cursos de matemáticas. También significa ser profesor, *desde hace muchos años*, de los *mismos* cursos de matemáticas. De cierta manera, el cliente cambia cada año, pero tanto el producto que se vende, como el almacén en el que se hace la venta y el precio al que ésta se efectúa, son siempre los mismos. ¿Puede un profesor en estas circunstancias estar motivado?

La motivación del profesor es tan importante como la motivación del estudiante. De hecho, la segunda *debe* ser una consecuencia de la primera. Un estudiante que viva un curso de matemáticas en el que su profesor está motivado, tiene que estar también él motivado. La motivación se transmite, no se impone.

Pero, ¿cómo lograr esta motivación del profesor? ¿Se puede llegar a ella a través del método del garrote y la zanahoria, en el que el “mal profesor” es castigado y el “buen profesor” es premiado? La verdadera motivación no puede surgir de este tipo de situación. La verdadera motivación *tiene* que surgir del compromiso. Si el profesor está comprometido con el logro de los objetivos, el profesor debe sentir que está enfrente de un *reto* que impone unas metas que se deben lograr. Y es en el compromiso que él genera con él mismo para lograr estas metas que reside la verdadera motivación.

Esta será una motivación mutua entre el profesor y el estudiante. Porque las metas también son comunes. Y el compromiso del profesor con ellas debe traducirse en un compromiso de todo el equipo, profesor y estudiantes. Las metas dejan de ser algo impuesto por el profesor y se convierten en la expresión del compromiso mutuo entre el profesor y el estudiante en el logro de los objetivos.



Si hay compromiso, hay una visión diferente

Existe una tradición acerca de la manera como el profesor “ve” al estudiante y cómo este último ve al primero. Dentro de esta tradición, para el profesor de matemáticas existen normalmente dos tipos de estudiantes: los genios, que son aquellos que aparentemente nacieron para las matemáticas; y los brutos, quienes no tuvieron la suerte de nacer con los genes apropiados.

Por otra parte, existe también la visión que el estudiante tiene de su profesor de matemáticas. El profesor es la realización física del martirio que el estudiante tiene que sufrir dentro de su curso de matemáticas. El profesor es el culpable de todo el problema.

Pero esta es la tradición. Es una visión estereotipada de una relación entre una persona (el profesor) y un grupo (los estudiantes). Por supuesto que esta no es la situación general. En algunos casos, tanto profesor, como estudiante, logran desarrollar una relación diferente. Lo que, tal vez, pocas veces se da es la conciencia de que entre el profesor y los estudiantes debe existir una relación social.

¿Cómo quisiéramos que fuese esta relación social? La clave se encuentra en la conciencia que tanto profesor, como estudiante, deben tener acerca del problema *común* que deben resolver. Las dificultades en esta relación surgen en general porque el problema del profesor al dictar el curso tiende a ser diferente del problema del estudiante al recibirlo. Y resulta que debería ser el mismo problema.

Y será el mismo problema siempre que exista un compromiso por parte del profesor en el logro de los objetivos. En este caso, existe una meta común y, por consiguiente, un problema común: el profesor hace parte del problema del estudiante y los estudiantes son el centro del problema del profesor.

Cuando esto se logra, la relación social entre el profesor y sus estudiantes se genera de manera natural. Dentro de esta nueva relación social, la visión que el profesor y los estudiantes tienen de ellos mismos es muy diferente de la visión tradicional y estereotipada que se propuso al comienzo.

En este caso, el estudiante ve al profesor como su guía. El profesor es su punto de apoyo para el logro de los objetivos. Si el estudiante no logra los objetivos, él no puede culpar al profesor. Por otra parte, para el profesor, el estudiante es el centro de su problema; es la materia prima que él debe trans-



formar. El profesor debe aceptar esta materia prima tal y como la recibe al comienzo del curso. El no tiene ingerencia sobre este punto. Su reto es transformarla y disfrutar de este proceso de transformación dentro del cual él es un pivote central.



Si hay compromiso, el contenido y la metodología pueden ser secundarios

¿Cuál es la importancia relativa del contenido y la metodología en el éxito de un curso? Tanto el uno como la otra son *herramientas*. Particularmente con respecto al contenido, debemos darnos cuenta de que el contenido de nuestro curso *no* es el objetivo del mismo. El contenido es *uno de los medios* para lograr estos objetivos. Lo mismo sucede con la metodología.

Por supuesto que si nos dan un mejor contenido y una mejor metodología, vamos a lograr de manera más eficiente los objetivos. De hecho, la anterior podría ser una definición de la *bondad* del contenido y de la metodología. Pero la verdadera solución de nuestro problema no se encuentra *exclusivamente* en estas dos herramientas. Más aún, estas dos herramientas pueden llegar a ser completamente ineficaces si quien las emplea es un profesor desmotivado y desinteresado por los objetivos del curso. Porque las herramientas metodológicas innovadoras requieren *siempre* de un compromiso por parte del profesor hacia ellas. Este compromiso se expresa en la necesidad de que el profesor invierta una gran cantidad de esfuerzo en su trabajo.

Es, por tanto, preferible tener un profesor comprometido con los objetivos y un conjunto de herramientas metodológicas deficientes, que lo contrario. Porque si existe este compromiso por parte del profesor, entonces será el profesor quien, con su intuición y su experiencia, descubra, genere y ponga en práctica las herramientas que, de acuerdo al entorno en que se desarrolla su trabajo, serán más eficientes para el logro de los objetivos.

*L*os objetivos, el compromiso y la tradición

Existe una tradición en la enseñanza de las matemáticas. Esta tradición se origina en un esquema de menor esfuerzo para el profesor. Dentro de este esquema, el profesor es un transmisor de información. Qué tanto el estudiante logra recibir y apropiarse esta información es problema del estudiante. Por parte del profesor existe un único compromiso: es el compromiso con el contenido.

La tesis que aquí se presenta defiende una posición en la que lo importante es el compromiso del profesor con los objetivos del curso. Pero, ¿qué hacer cuando estos objetivos no están definidos? La reacción natural del profesor tiende a ser la de identificar los objetivos del curso con el contenido del mismo. En este sentido, la responsabilidad del profesor no va más allá de los temas mismos que él debe cubrir y es completamente independiente del estudiante. Pero ésta puede ser una visión extremadamente parcial del compromiso que el profesor puede generar hacia su trabajo.

Lo más importante que hay que tener en cuenta es que, cualesquiera que sean el contenido y la metodología, el compromiso del profesor es un compromiso con el estudiante. Por consiguiente, los objetivos del curso no pueden ser unos objetivos de contenido. Los objetivos del curso tienen que ser unos objetivos de transformación del estudiante. En el momento que aceptamos nuestro compromiso de esta manera, nos salimos del esquema tradicional.

Dentro del nuevo esquema, el contenido y la metodología son herramientas; el ambiente de trabajo es de colaboración; existe motivación por parte de los participantes en el problema; y el problema es un problema común.

Sin embargo, al salirnos del esquema tradicional, también nos estamos comprometiendo en un esfuerzo mayor. El esquema tradicional de transmitir una información es aquel que requiere el menor esfuerzo por parte del profesor. Cuando nuestra misión abarca un sentido amplio de transformación del estudiante, nuestro trabajo también se extiende. Dejamos de preocuparnos exclusivamente por el contenido y comenzamos a preocuparnos principalmente por el estudiante. Cuando nuestra actitud toma este rumbo, nuestro trabajo asume características diferentes. Estamos por fuera de la línea del menor esfuerzo y necesitamos tiempo y recursos para lograr nuestra misión.



Durante un cierto tiempo, hasta que demos el valor de nuestro trabajo, seremos nosotros los responsables de generar este tiempo y estos recursos. Una vez, hayamos pasado esta primera etapa, nuestro trabajo y nuestras realizaciones generarán los recursos necesarios para el trabajo futuro.





U *na*
estructura
pedagógica

*P*osición epistemológica del profesor

La calidad del proceso de enseñanza—aprendizaje involucra varios aspectos interrelacionados entre sí. Dadas las características de nuestro medio, el profesor tiende a jugar un papel central dentro del proceso.

La calidad del profesor y, por ende, la calidad del proceso de enseñanza—aprendizaje, depende también de varios factores. Uno de los factores más importantes que influyen en la calidad del profesor lo constituye la *visión epistemológica* que éste tiene del área del conocimiento que es objeto de estudio. Desde un punto de vista general, esta visión epistemológica por parte del profesor se puede caracterizar por dos extremos claramente identificados:

- La visión cerrada de un contenido que es el paradigma a transmitir
- La visión abierta de una actividad para la solución de problemas



Visión cerrada

Esta posición epistemológica se aproxima al tema de estudio considerándolo como un conjunto de verdades aceptadas e inmutables. El profesor que comparte esta posición epistemológica mira, por lo tanto, su rol en el proceso de enseñanza—aprendizaje como uno de *transmisor de la verdad* y, por consiguiente, el papel del estudiante se convierte en uno de *receptor de esta verdad*.

Nosotros, como profesores, no somos necesariamente conscientes de la posición epistemológica que asumimos con respecto al proceso de enseñanza—aprendizaje. Por otra parte, puede suceder que, aunque defendamos una posición epistemológica particular, nuestra actuación en el salón de clase no esté de acuerdo con ella. Las características de nuestro medio hacen que una proporción importante de los profesores compartan la visión cerrada presentada arriba o, al menos, actúen en el salón de clase como si compartieran esta posición.



*T*radición

El proceso tradicional de enseñanza—aprendizaje sigue las pautas implícitas en la visión cerrada de una verdad que hay que transmitir. Estas pautas se expresan, de manera explícita, en los libros de texto y el profesor tiende a seguirlas de cerca. De acuerdo a ellas, el tema de estudio se presenta secuencialmente en un proceso en el que el estudiante no es necesariamente capaz de distinguir los diversos elementos contenidos en el mismo. El libro de texto, en su afán de presentar el conocimiento y de lograr que el estudiante lo reproduzca apropiadamente, se ve obligado a seguir un procedimiento lineal de los factores involucrados. El profesor tradicional tiende a restringirse en su papel de transmisor de la información y, por lo tanto, a reproducir el esquema propuesto en el libro de texto. Dentro de este esquema, el estudiante no puede crear el espacio para distinguir entre los conceptos, los procesos, los resultados, los ejemplos y los ejercicios. Más aún, la situación es tal que el estudiante tampoco puede relacionar estos elementos y, por consiguiente, le es imposible construir estructuras que le permitan aproximarse a los temas. Por otra parte, dado que el proceso se centra alrededor de los contenidos y de la transmisión y reproducción de los mismos, el estudiante no se ve obligado a desarrollar capacidades para la solución de problemas.



Razones para la visión cerrada

La visión cerrada del proceso de enseñanza—aprendizaje es una posición compartida por muchos profesores. Y hay varias razones para que esto sea así. Por una parte, el sistema tradicional de diseño curricular se encuentra centrado en el contenido y, por lo tanto, parte de esta posición epistemológica. Es así como los libros de texto tienden a ser escritos para que sirvan del paradigma del conocimiento que hay que transmitir. Por otra parte, en muchas ocasiones se arguye que el cumplimiento de los requisitos de un curso y la carencia de tiempo para lograrlos empujan a las instituciones y a los profesores a asumir esta posición. Finalmente, es evidente que esta posición representa la línea del menor esfuerzo para el profesor y para el estudiante. El primero tiene que limitarse a hacer una transcripción y transmisión de las verdades contenidas en el libro de texto y el segundo no tiene sino que asumir la cómoda posición de recibir esta información y ser capaz de reproducirla.

Sin embargo, esta posición implica múltiples problemas y defectos desde el punto de vista de lo que debería ser la misión del sistema pedagógico. Un sistema pedagógico que pretenda únicamente la producción de bachilleres y profesionales capaces de reproducir el conocimiento adquirido durante su vida estudiantil es un sistema pedagógico que aporta muy poco al entorno social, puesto que ha de ser claro que el propósito esencial de todo sistema pedagógico es el de producir profesionales *capaces de utilizar creativamente el conocimiento* en la búsqueda de soluciones a los diversos problemas que enfrentan en el ejercicio de su oficio.



Visión abierta

Esta es la posición epistemológica alternativa. Quienes comparten esta posición miran el tema de estudio como una *actividad abierta en la búsqueda de las soluciones a problemas*. De acuerdo a esta posición, el propósito del sistema pedagógico no se debe centrar exclusivamente en la transmisión y eficiente reproducción de un conocimiento, sino que también se debe buscar que el estudiante desarrolle las capacidades necesarias para utilizar creativamente este conocimiento para la adecuada solución de problemas.

La aceptación y la aplicación de esta posición epistemológica implica una serie de requisitos y de problemas dentro del proceso de enseñanza—aprendizaje. En primera instancia, la docencia se debe centrar más alrededor de los procesos y menos en torno de los contenidos. Por otra parte, se hace necesario introducir cambios en la mayoría de los factores que determinan el proceso pedagógico: el contenido, las metodologías, la evaluación y el libro de texto.

Sin embargo, el problema se centra en el profesor. Es él quien asume una posición particular y, de acuerdo a esa posición, ataca y resuelve los problemas pedagógicos dentro del proceso.



A actores

Una proporción importante de las instituciones de educación superior asumen, consciente o inconscientemente, la primera posición epistemológica. Puesto que esta situación no es necesariamente la mejor desde el punto de vista de la calidad del bachiller o el profesional que la institución produce, vale la pena preguntarse acerca de alternativas eficientes de solución al problema. Los principales actores involucrados son los siguientes:

- La institución
- El profesor
- El estudiante

Resulta evidente que, a menos que la institución esté dispuesta a asumir una posición positiva y activa con respecto al problema, es difícil llegar a una solución. Sin embargo, también resulta claro que, aún si la institución está dispuesta a implantar esta posición epistemológica alternativa, no basta con que ella lo sugiera explícitamente. Una tal estrategia tendrá éxito, solamente en el caso de que los profesores compartan y asuman esta posición y tengan la voluntad de implantarla al interior del salón de clase. Por consiguiente, el problema está centrado en el profesor.

Convencer al profesor tradicional de que cambie su posición epistemológica acerca del tema de estudio puede ser una labor difícil. Por una parte, el profesor, por razón de sus múltiples ocupaciones y de su experiencia, no es necesariamente receptivo a los cambios en su actividad docente. Por otra parte, se requiere un cambio de *actitud* por parte del profesor y este cambio no se logra por medio de instrucciones provenientes de sus superiores. Para lograr el cambio, es necesario que el profesor *viva experiencias* y que sea, gracias a estas experiencias, que él descubra y acepte las ventajas del cambio.

Los requisitos que se acaban de exponer para lograr el cambio en el profesor son costosos desde el punto de vista del esfuerzo y la inversión que tanto la institución, como el profesor mismo tienen que hacer para lograrlos. Sin embargo, que no se pueda lograr el cambio del profesor no significa que no sea posible encontrar estrategias que permitan aportar a la adecuada formación del estudiante como profesional capaz de utilizar creativamente su conocimiento en la resolución de problemas.

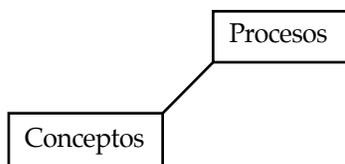


Visión centrada en los conceptos

Los *conceptos* tienden a ser el elemento central del conocimiento. Son ellos los que definen e identifican los objetos acerca de los cuales se desarrolla el discurso. En general, estos conceptos se introducen por medio de una definición que contiene su significado y que permite, entre otras cosas, diferenciar aquellos objetos que satisfacen la definición de aquellos que no*.

Sin embargo, para que la definición del concepto tenga sentido dentro del discurso, es necesario que ésta implique un *significado operacional*. Este significado operacional del concepto implica la generación de *procesos* que permiten la utilización de los conceptos†.

Es importante notar que no basta con que el estudiante conozca el significado de los conceptos y los pasos involucrados en los procesos. Es esencial que el estudiante comprenda la *interrelación* entre los dos y las razones por las cuales los segundos son una consecuencia de los primeros. En otras palabras, no basta con que el estudiante adquiera este conocimiento, él debe también comprender y aprehender la *estructura* subyacente al mismo. Esta estructura depende de la interrelación entre los dos elementos (la línea entre las dos cajas en la gráfica).



*Tomemos dos ejemplos: los conceptos de *desviación estándar* en matemáticas y el concepto de *propiedad privada* en derecho. Cada uno de ellos tiene una definición que permite diferenciar aquellos objetos que cumplen con ella de aquellos que no lo hacen.

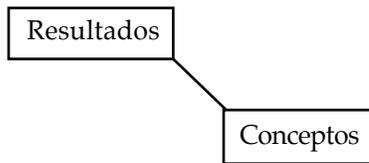
†En el caso de la *desviación estándar*, el significado operacional del concepto genera un proceso que identifica los pasos necesarios para, dado un conjunto de datos, hallar la *desviación estándar* correspondiente. En el caso del concepto de *propiedad privada*, este también genera procesos que permiten, dada una situación legal, determinar las características de la misma con respecto al concepto.



R *esultados*

Una vez que se ha introducido un concepto, este se relaciona con los demás conceptos involucrados en el discurso. Esta relación, junto con las implicaciones naturales de la definición del concepto, permiten hacer afirmaciones válidas acerca del mismo. Estos son los *resultados* generados por el concepto*. Estos resultados son los que tienden a considerarse como el *conocimiento* que el estudiante debe aprender.

Sin embargo, al interior de la docencia tradicional, lo único que se pretende es que el estudiante sea capaz de reproducir este conocimiento. Pero esto no es suficiente. Lo realmente importante debe ser la capacidad del estudiante de *relacionar* estos resultados con los conceptos y los procesos que estos implican. De nuevo, lo importante es la estructura subyacente al conocimiento mismo.

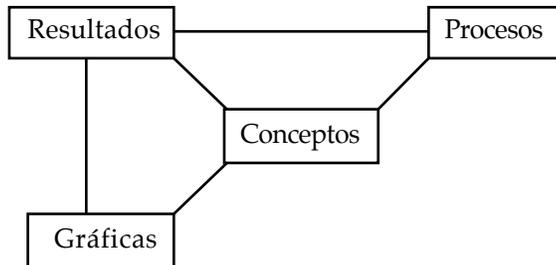


*En el caso de la *desviación estándar*, se deduce que ésta es siempre no negativa. En el caso del concepto de *propiedad privada* se obtienen resultados que definen derechos y deberes del ciudadano.

Gráficas

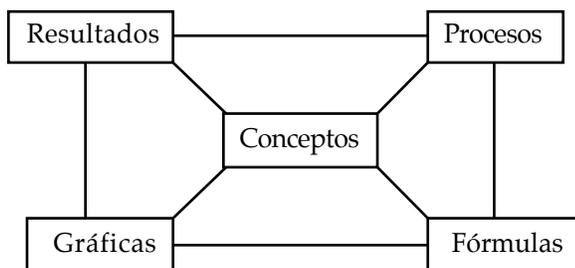
En el caso particular de las matemáticas y algunas disciplinas científicas o técnicas, el aspecto gráfico es trascendental. Puesto que los objetos identificados por los conceptos son objetos abstractos, se hace necesaria la posibilidad de representarlos gráficamente. El aspecto gráfico abre un espacio para comprender los conceptos, los procesos y los resultados y para intuir nuevos conceptos y resultados.

De nuevo resulta trascendental reconocer que no basta con que el estudiante conozca las técnicas necesarias para la construcción de gráficas. Lo importante es que el estudiante comprenda la interrelación existente entre el aspecto gráfico y los resultados y los procesos que se obtienen a partir de los conceptos. En otras palabras, lo que se debe buscar es que el estudiante aprenda la estructura subyacente al discurso en cuestión.



Fórmulas

La tradición docente de las matemáticas le asigna una gran importancia a las fórmulas. Esto es una consecuencia natural de la visión cerrada centrada en los contenidos, puesto que el estudiante considera las fórmulas como el fin último del conocimiento que él debe ser capaz de reproducir. No obstante, una visión abierta del discurso matemático reduce la importancia relativa de las fórmulas. Estas se presentan como un medio alternativo de notación y la importancia de las mismas se centra en su relación con los demás elementos que constituyen el espacio pedagógico.



L a línea divisoria

Dentro del esquema tradicional no se consideran explícitamente las interrelaciones entre los diferentes elementos del modelo presentado hasta ahora, y, por consiguiente, no se busca el desarrollo de las capacidades del estudiante para comprender, aprehender y transferir las estructuras subyacentes al modelo. En el mejor de los casos, aunque esto no es muy frecuente, se logra que el estudiante conozca y sea capaz de reproducir cada uno de los elementos por separado. Sin embargo, el propósito final del proceso pedagógico tiene que ir mucho más lejos. Este proceso pedagógico tiene que estar centrado en la resolución de problemas y buscar el desarrollo de la capacidad del estudiante para la utilización creativa del conocimiento con este objetivo. Estos son los últimos dos elementos del modelo que se presentan a continuación.



*R*esolución de problemas

Para que el conocimiento tenga sentido, éste debe poderse utilizar en la resolución de problemas. Es así como el conocimiento de los conceptos y de las técnicas es productivo solamente cuando este conocimiento se puede *transferir* a entornos que no necesariamente pertenecen al espacio dentro del cual estos conceptos y técnicas fueron presentados. El proceso pedagógico debe siempre buscar el desarrollo de estas capacidades por parte del estudiante y debe centrarse en la generación de estructuras mentales generales que le permitan al estudiante utilizar creativamente su conocimiento.



*U*tilización creativa del conocimiento

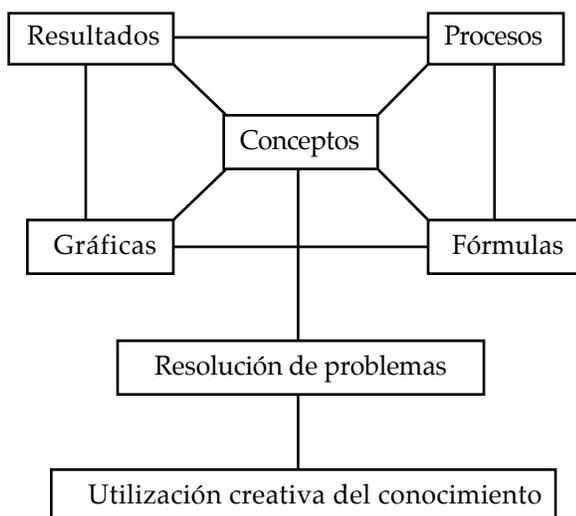
Este es el final del camino. Llegar a él significa que se ha formado un profesional capaz de aportarle a su entorno. Este debe ser un profesional con el deseo de producir nuevo conocimiento y con las capacidades para lograrlo. Es un profesional que no solamente conoce su oficio, sino que es capaz de aportarle a su entorno gracias a este conocimiento.

Se ha visto cómo el modelo que se ha presentado no se encuentra basado en los contenidos. Por el contrario, el modelo se centra en las estructuras subyacentes a este contenido y gira alrededor de las interrelaciones entre sus diversos elementos en la búsqueda del desarrollo de las capacidades del estudiante para comprender, aprehender y sobretodo transferir estas estructuras a otras áreas del conocimiento en la búsqueda de soluciones a los problemas que le presenta su entorno académico y profesional.



Caja de herramientas

El modelo presentado en los textos anteriores puede expresarse gráficamente. Esta representación gráfica permite identificar directamente algunos de los mensajes que se han dado hasta ahora. Esta “caja de herramientas” identifica los que se pueden considerar como los principales elementos de un discurso matemático. Esto significa que, en principio, son estos elementos los que el estudiante debe conocer y comprender. Sin embargo, el principal mensaje que se ha transmitido es el de que no basta con conocer los contenidos al interior de las cajas. Lo realmente importante es comprenderlos; y que comprenderlos significa ser capaz de explicar las interrelaciones entre las cajas (las líneas que las unen). Es la comprensión de estas interrelaciones lo que constituye la verdadera comprensión del discurso matemático, pues es a partir de esta comprensión que el estudiante debe ser capaz, por un lado, de reproducir el discurso para sí mismo en el sentido de haberlo construido en su mente, y, por el otro lado, de utilizar esta construcción personal para la resolución de problemas y la creación de nuevos discursos. Esta “caja de herramientas” contiene en sí misma una herramienta metodológica que puede servir, tanto para la presentación del tema en clase, como para la preparación de ese tema por parte del estudiante. Esta herramienta metodológica se presenta a continuación.



L a tabla

El modelo que se ha presentado anteriormente incluye una aplicación práctica que puede ser útil, tanto como herramienta metodológica para el profesor, como también como método de estudio para el estudiante. Esta herramienta es sencillamente una “en la que el estudiante, al preparar la clase, va llenando las diferentes casillas. La tabla tiene la siguiente forma:

Objetivos	Conceptos	Gráficas	Fórmulas	Resultados	Procesos	Razones
Objetivos pedagógicos del tema	Conceptos involucrados	Gráficas correspondientes a conceptos, resultados o procesos	Fórmulas correspondientes	Resultados involucrados en el tema	Procesos involucrados	Explicación de las interrelaciones entre los elementos

La mayor parte de las columnas se explican por sí solas. El elemento más importante de la tabla es la última columna. Es en ella en la que hay que exponer las interrelaciones entre los diferentes elementos.

El profesor puede hacer una exposición rápida del tema de la clase por medio de la tabla. El estudiante debería construir la tabla a medida que lee el texto y debería ser capaz de hacerlo en sus propias palabras. De hecho, una manera muy eficiente de conjugar estos dos usos de la tabla es que sea un estudiante quien, al comienzo de la clase, presente su tabla en el tablero y que el profesor modere una discusión acerca de la calidad de la misma.





*P*incipios

*P*roceso de transformación

Todos nosotros tenemos, como profesores, una idea de lo que sucede en la mente del estudiante. De hecho, tenemos un cierto conocimiento intuitivo acerca de varios elementos que hacen parte del *proceso de transformación* que deseamos hacer vivir a cada uno de nuestros estudiantes. Estos elementos incluyen, entre otros, las respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Quién es?
- ¿Cuáles son sus principales características como persona y como estudiante?
- ¿Cuáles deseamos que sean los cambios que se produzcan en su formación?
- ¿Cuál es su actitud hacia el curso y hacia las matemáticas?
- ¿De qué manera reacciona a diferentes estímulos?

Es a partir de nuestras ideas intuitivas (y, posiblemente, inconscientes) acerca de estos elementos que nosotros manejamos la clase de tal manera que podamos lograr eficientemente los objetivos del curso.

Sin embargo, resulta importante formalizar estas ideas intuitivas en elementos y relaciones que definan el sistema dentro del cual trabajamos. Nosotros tenemos a nuestra disposición un conjunto de herramientas metodológicas (el trabajo en la casa, la discusión en clase, el texto, la evaluación, el computador, etcétera) y debemos definir el papel que cada una de ellas juega en nuestra búsqueda de los objetivos. Para poder identificar claramente la función de cada una de estas herramientas, tenemos, primero que todo, que dar una forma a la *misión* de nuestros cursos. Esto lo logramos si comenzamos a aclarar qué es lo que queremos decir con el *proceso de transformación* del estudiante.



*T*ransformación versus aprendizaje

Cuando se habla de estos temas, se habla normalmente del “proceso de aprendizaje” y de las “teorías del aprendizaje”. Aunque pueda parecer una cuestión de “forma”, en nuestro caso, resulta más interesante hablar de “proceso de transformación”. La razón de esta aproximación al problema es clara: nuestros cursos, por razón de enmarcarse dentro de una misión de la universidad de formación integral del estudiante, son cursos que buscan ir un poco más allá de la mera transmisión de información.

A nosotros nos preocupa más la *formación* que la *información*.

Yo creo que esta es la clave de todo el problema y lo que hace que nuestros cursos sean a la vez difíciles e interesantes.

Si lo que nos interesa es la formación más que la información, entonces se presentan tres preguntas claves:

- ¿Qué queremos decir con formación?
- ¿Cómo podemos lograr esta formación?
- ¿Qué es la motivación y cómo lograrla?

Estas tres preguntas se discuten a continuación.





¿Qué es formación?

La misión de nuestros cursos es la de aportar a la misión de la universidad: “la formación integral del estudiante, como profesional y como persona consciente del papel que puede y debe jugar en el desarrollo del país”. Muchos pueden pensar que, para cursos de matemáticas, esta es una misión un poco ilusa. Sin embargo, nosotros, como estudiantes y como profesores, nos hemos dado cuenta de que las matemáticas pueden llegar a ser una de las herramientas más eficientes para acercarse a esta misión. Sin embargo, hay que aproximarse a este problema de una manera sistemática.

La pregunta que hay que responder es:

¿Cómo pueden los cursos de matemáticas aportar a la formación integral del estudiante?

Esta es la pregunta que se pretende responder aquí. Hay que tener en cuenta que la respuesta que daremos es *una* de las posibles respuestas. Existen otras posiciones con respecto al problema.



Una visión matemática del mundo

Cada una de las áreas del conocimiento produce en quien la estudia una manera de aproximarse a las situaciones que debe manejar. A veces parece ser una cuestión de vocabulario, pero creo que esa *formación* va más allá de la pura cuestión de lenguaje. La economía, el derecho, la biología o cualquier otra área del conocimiento produce un sistema de modelaje a través del cual se puede analizar y atacar diversos tipos de problemas.

Las matemáticas también generan este tipo de formación. Esta formación consiste principalmente en una “manera de ver y aproximarnos a las diversas situaciones que presenta el entorno”.

Es esencial que seamos conscientes de que esta visión del mundo no es ni infalible, ni cubre todas las posibles situaciones. Hay algunas situaciones (especialmente aquellas que requieren una aproximación racional) para las cuales la “formación matemática” es más eficiente.

Esta visión matemática del mundo se divide en tres aspectos principales:

- Una visión racional del mundo
- Una manera de mirar y analizar el mundo
- Una manera de argumentar acerca del mundo

A continuación trataré de hacer una breve explicación de cada uno de estos aspectos.



Una visión racional del mundo

Nuestra visión racional del mundo proviene de una cierta formación científica acerca del comportamiento del entorno y del papel que juegan las matemáticas en el proceso de explicación y de predicción que las ciencias naturales hacen acerca del mundo. En aquellos aspectos en los que no interviene el hombre, los matemáticos tenemos la tendencia a pensar que existe una *verdad* acerca del mundo, que esa verdad se puede alcanzar y que, para alcanzarla, hay que tener una aproximación racional al problema.

En resumen, pensamos que es la razón la que nos puede permitir solucionar, explicar o predecir diversas situaciones relacionadas con la naturaleza. Y que para aplicar esta razón a la solución de estos problemas, se requiere de un método racional que determina un proceso que se debe seguir.

Desde el punto de vista de la formación del estudiante, lo importante de este aspecto es lo siguiente:

- Pensamos que buena parte de los problemas tienen una solución
- Que esa solución se encuentra teniendo una aproximación racional al problema
- Que lo enriquecedor para el estudiante es que *viva* la experiencia de aproximarse a un problema
- Que esa experiencia debe hacer énfasis en el *proceso* mismo y en las consecuencias que se deducen de los resultados, más que en los resultados mismos.



Una manera de mirar y analizar el mundo

Es cierto, entonces, que nos podemos aproximar de manera racional a los problemas que nos presenta el entorno. Pero, ¿cuáles son las características de esta aproximación “matemática”? En otras palabras, ¿cuáles son los criterios o las directrices que nosotros, los matemáticos, utilizamos cuando queremos atacar un problema? Existen principalmente tres factores que influyen en esta cuestión:

- El método
- La capacidad de abstracción
- El sentido de la estética

En cuanto al *método*, ya se habló anteriormente. Sin embargo, hay que insistir en que lo importante no es solamente mostrarle al estudiante el o los métodos de solución de problemas. Es esencial que el estudiante sea consciente de que estos métodos existen y de que constituyen el medio más eficiente para aproximarse a buena cantidad de problemas.

La “capacidad de abstracción” o lo que ahora llamamos la capacidad de *modelaje* es para mí la capacidad que diferencia a los matemáticos de la gran mayoría de los demás profesionales. El estudio de las matemáticas nos acostumbra a simplificar los problemas, a manejarlos en ese mundo platónico donde existen los objetos matemáticos* y a solucionar los problemas allá arriba donde éstos son más sencillos, para después regresar a la realidad y aplicar los resultados al problema inicial.

Para poner este proceso en otras palabras, lo que nosotros hacemos consta de tres etapas:

- Identificar los elementos relevantes del sistema
- Identificar las interrelaciones relevantes entre esos elementos
- Considerar un sistema simplificado con esos elementos y esas interrelaciones[†].

*Todos los matemáticos, en lo íntimo de su ser, son platónicos. Otra cosa es lo que ellos dicen cuando se les pregunta sobre su posición ontológica acerca de las matemáticas.

Esto es lo que queremos que nuestro estudiante descubra y haga suyo. Sin embargo, esto no se puede enseñar. Es más una capacidad, que un conocimiento y, por consiguiente, nosotros tenemos que desarrollarla a través de *experiencias* que esperamos que el estudiante viva dentro del curso.

†Aunque lo anterior suene *exclusivamente* a sistemas formales, esto no es cierto. Existe una aproximación, llamada la *aproximación de sistemas* que, sin hacer ninguna referencia a las matemáticas o a los sistemas axiomáticos, propone esta misma metodología.



Sentido de la estética

Finalmente, tenemos que referirnos al sentido de la estética. ¡Qué importante es el sentido de la estética y qué poco común! Para los matemáticos, el sentido de la estética es pan de cada día y esto es normal: la estética es uno de los principales criterios de selección entre diversas soluciones a un problema. Los matemáticos pueden entonces “extrapolar” este criterio más allá de los mismos problemas matemáticos.

Desde el punto de vista del estudiante y con respecto a las experiencias que nosotros queremos que él viva en nuestros cursos, el sentido de la estética se expresa en tres aspectos de la aproximación a un problema:

- La elegancia del análisis del problema
- La elegancia de la argumentación para sustentar una solución
- La elegancia en la presentación de las soluciones

Esta elegancia tiene un sentido práctico importante: la estética puede ser el criterio por medio del cual se escoja entre diversas alternativas aparentemente similares en otros aspectos.



*U*na manera de argumentar acerca del mundo

De nada sirve tener una tesis válida, si uno no sabe sustentarla. Sin embargo, no son muchos que logran este objetivo. En particular, el colegio hace muy poco énfasis en este aspecto de la formación del estudiante. Por otro lado, y por razón del tema mismo de nuestro estudio, los matemáticos tenemos, en general, una gran capacidad para lograrlo. Pero, ¿qué significa saber argumentar acerca del mundo? En esencia, son tres factores:

- Saber construir argumentos *válidos* que permitan sustentar una tesis
- Saber criticar argumentos que pretenden sustentar una tesis
- Saber comunicarse

Algunos de estos puntos se consideran más adelante.



Metodología y formación

La discusión anterior presenta una serie de *objetivos* que sería deseable lograr dentro de los cursos. Sin embargo, el hecho de que conozcamos los objetivos, no quiere decir que sepamos *cómo* podemos lograrlos dentro del contexto de nuestros cursos. Nos hacen falta los *propósitos* que nos permitan determinar los caminos que se deben seguir para el logro de los objetivos. En lo que sigue se presentan algunas ideas generales sobre estos propósitos.

Dentro del esquema de la metodología sugerida anteriormente, estos propósitos serán de carácter general. Esto es, estos propósitos no se refieren a ningún tema específico. Lo que buscan presentar es el marco de una *metodología general* de trabajo que se podría aplicar a los diversos temas de los cursos.

Más aún, son estos propósitos los que deben determinar las diversas actividades que hay que desarrollar dentro de los cursos y, por consiguiente, las herramientas pedagógicas cuyas ventajas debemos aprovechar para lograr los objetivos. Estas herramientas son las siguientes:

- El contenido
- El comportamiento del profesor en clase
- El “manejo” del estudiante en clase
- El “manejo” del trabajo del estudiante en su casa
- La evaluación
- El texto
- El computador



*E*xperiencia que transforma

La idea central del proceso de transformación que queremos que se desarrolle en el estudiante para el logro de los objetivos de formación es que el estudiante viva una experiencia a través del semestre y que sea esa experiencia la que lo transforme. Para usar una metáfora un poco burda, queremos que el estudiante haga un camino y que sea ese caminar el que lo transforme, independientemente del camino o del lugar final de su recorrido.

La esencia de esta idea es que lo que nos importa no es necesariamente los conocimientos que el estudiante adquiera en su recorrido, sino lo que el mismo recorrido le deje como formación. Esto quiere decir que no existe un único camino que el estudiante pueda recorrer. Nosotros nos hemos dado cuenta de que existen formas alternativas (diferentes de las que usamos actualmente) para lograr los objetivos de los cursos.

¿Cuáles son las características principales de esta experiencia que deseamos que el estudiante viva durante los cuatro meses que está con nosotros?

Hay tres actitudes principales que pueden definir esta experiencia:

- Nos importa más el *proceso* que el *resultado*
- Queremos que el estudiante *descubra*, más que *reciba*
- Parte de la experiencia se vive a través de la *discusión* en clase



*P*roceso versus resultado

El proceso de análisis y solución de un problema contiene varias etapas. Desde el punto de vista de la experiencia del estudiante, lo que nos importa es qué tan bien él comprende, realiza y aprovecha el proceso. El estudiante, al atacar un problema, debe realizar por lo menos tres pasos:

- *Analizar* el problema para generar una *tesis*
- Producir un *argumento* que sustente la tesis
- *Presentar* el argumento



A *nálisis del problema*

Dependiendo del tipo de problema al cual se enfrenta el estudiante, éste debe analizarlo de acuerdo a ciertas directrices.

Por un lado, debe tratar de *simplificarlo* a través de un proceso de *modelaje* que ya se mencionó anteriormente. Para realizar apropiadamente este proceso de modelaje, es necesario que el estudiante:

- Sepa qué es lo que tiene a su disposición para atacar el problema (en otras palabras sepa “definir el problema”)
- Sepa en qué consiste una solución al problema
- Sea capaz de representar gráficamente el problema o una parte de éste
- Sepa comparar el problema con otros cuya solución ya conoce
- Sea capaz de experimentar con el problema para descubrir ideas que le permitan llegar a una solución

Estos puntos, que se desarrollan en otro lugar de este texto y que hacen parte esencial del proceso de transformación que queremos lograr en el estudiante, son lo que podríamos bautizar la *heurística* de solución de problemas. En otras palabras, cuestión de método.

Por otro lado, es a través del sentido de la *estética* que el estudiante debe desarrollar criterios que le permitan escoger entre diversas alternativas de solución a un problema.



A *rgumentación*

El estudiante ha analizado un problema y cree haber llegado a una solución del mismo. Sin embargo, esta solución tiene sentido, solamente si él puede convencer a sus semejantes de que esa es verdaderamente la solución. En otras palabras, el estudiante tiene ahora una *tesis* y quiere *defenderla*. Para lograr este objetivo, el estudiante debe ser consciente de que se requiere un método para poder producir un *discurso racional* que sustente su tesis y que, por consiguiente, convenza indefectiblemente a sus interlocutores. El debe producir un argumento válido en defensa de su tesis. Para ello, el estudiante debe cumplir con por lo menos tres requisitos:

- Saber de dónde parte, en el sentido de las premisas sobre las cuales él y sus interlocutores están de acuerdo.
- Saber a dónde va, en el sentido de que tanto él, como sus interlocutores, deben estar de acuerdo acerca del propósito del argumento.
- Saber cómo ir de un punto a otro, en el sentido de producir un discurso que transmita el acuerdo acerca de las premisas a un acuerdo acerca de la conclusión. Esta es la parte más compleja del proceso.

Finalmente, si el estudiante es capaz de producir argumentos válidos alternativos en defensa de una tesis, él tiene que saber escoger entre ellos. El sentido de la estética puede ser el principal criterio de selección para estos propósitos.



Presentación

Es posible que el estudiante tenga una solución al problema y haya producido un argumento válido para sustentar esa solución. Sin embargo, si no es capaz de transmitir adecuadamente sus ideas, todo el proceso puede estar en peligro.

Para transmitir estas ideas, el estudiante debe ser consciente del *problema de la comunicación*. Para ello, él tiene que considerar por lo menos los siguientes factores:

- Que él tenga claras las ideas que quiere transmitir.
- Que él sea consciente de las posibles diferencias entre su vocabulario y el de sus interlocutores.
- Que él sea consciente de las posibles diferencias en significado que él y sus interlocutores pueden tener con respecto a elementos que pertenezcan al vocabulario.
- Que él sea consciente de las posibles diferencias que pueden existir entre él y sus interlocutores en relación con el contexto dentro del cual se da la comunicación.
- Que él sea consciente de la importancia del empleo apropiado de palabras claves que pueden generar lo que llamamos la lógica del lenguaje natural.

Finalmente, si existen varias maneras de decir una misma cosa, el estudiante debe utilizar el sentido de la *estética* como criterio para escoger la presentación más adecuada.



*I*mportancia del descubrimiento

Nosotros no tenemos como misión principal la de que el estudiante aprenda una gran cantidad de información. Nosotros pretendemos que el estudiante se transforme en una persona y en un profesional capaz de atacar y solucionar problemas de acuerdo a criterios adecuados. Por esta razón, es trascendental que sea el mismo estudiante quien descubra la necesidad y la importancia de este proceso de transformación. Y nosotros, como profesores, tenemos como misión la de incitar a que el estudiante realice este proceso de descubrimiento de la manera más eficiente posible.

Cuatro factores aparecen como importantes dentro de este proceso de iniciación:

Capitalizar sobre los errores que se cometen. El proceso de descubrimiento puede ser un proceso de prueba y error en el que el estudiante reconoce la validez de una alternativa al descubrir el fracaso de otra.

Comparar procesos diferentes. El estudiante también descubre cuando reconoce las diferencias entre procesos aparentemente similares.

El proceso de modelaje. Es a través de la simplificación de una situación compleja que el estudiante puede hacer descubrimientos acerca del problema.

La aplicación a la realidad. De nada sirve que el estudiante simplifique si él no descubre que sus resultados son aplicables a la situación inicial.

Para finalizar con este tema, lo más importante: nosotros como profesores tenemos una alternativa de menor esfuerzo para solucionar los problemas del estudiante: contarles la historia completa antes de que ellos la hayan vivido. Este es el error que debemos evitar. Tenemos que buscar las maneras de guiar al estudiante, por medio de las herramientas mencionadas arriba, para que sea él mismo quien descubra las soluciones a los problemas.



I mportancia de la discusión en clase

Todo lo anterior no tiene sentido a menos que generemos el espacio dentro del cual podamos aplicar las directrices mencionadas hasta ahora. Este espacio es natural: *la discusión en clase*. Y nuestra responsabilidad es la de lograr producir esta discusión y saber manejarla. Se pueden mencionar por lo menos cuatro factores que influyen en este proceso:

La generación del espacio. Es siempre difícil producir una discusión en clase. ¿Cómo lograrlo? Una posibilidad es que el profesor mismo proponga una tesis absurda que produzca una reacción inmediata por parte de los estudiantes. Otra es sencillamente el terrorismo: preguntarle directamente al estudiante su opinión.

Análisis y discusión de un argumento. Un estudiante propone una tesis y un argumento para sustentarla. Se hace necesario incitar a los demás a analizar y criticar ese argumento.

Comparación de opiniones. Existe más de una tesis y más de un argumento.

Hay que incitar a los demás a compararlas y a escoger entre alguna de ellas.

Aprovechar los errores cometidos. Sobre esto ya se discutió un poco más arriba.



*L*a motivación: un compromiso

El tema de la motivación es el tercer aspecto de los principios dentro de los cuales se enmarcan nuestros proyectos. Aunque la motivación es capital en cualquier curso, en los nuestros este aspecto adquiere una dimensión mucha más amplia debido a la actitud con la cual llega normalmente un estudiante promedio.

Sin embargo, la aproximación a este problema que quiero proponer aquí es, por lo menos en parte, independiente de las características mencionadas anteriormente. Yo no creo que la motivación deba centrarse en la teoría de la zanahoria y el látigo. Esta es una motivación con muy poco alcance. *La verdadera motivación del estudiante debe lograrse por medio del compromiso que él puede llegar a sentir con la misión y los objetivos del curso.* Es esto lo que debemos buscar en cada uno de nuestros proyectos. Y la manera de lograrlo es bastante sencilla y se puede dividir en tres factores*:

- El conocimiento de los objetivos
- El profesor como partícipe de un problema común
- El curso como un reto

*No incluyo aquí el aspecto psicológico de la motivación. Este aspecto también es trascendental, particularmente desde el punto de vista del compromiso que se puede generar en el estudiante hacia su profesor.



C onocimiento de los objetivos

La motivación del estudiante se debe lograr a través de la generación de un compromiso por parte del estudiante hacia la misión y los objetivos del curso. Para ello, es esencial que el estudiante conozca esta misión y estos objetivos y que les encuentre una razón de ser a nivel personal.

El conocimiento de los objetivos se puede expresar a dos niveles diferentes:

Los objetivos de formación profesional. La reacción natural de una proporción importante de nuestros estudiantes hacia nuestros cursos es del siguiente tipo: “¿por qué me hacen ver este curso de matemáticas si esto no me sirve para nada en mi carrera?”. Esta es la actitud que hay que atacar y considero que, dentro de la ideología presentada en los capítulos anteriores, no es difícil encontrar los argumentos para hacerlo. Es cuestión de concientizar al estudiante acerca de los beneficios que, para su desarrollo profesional, puede tener el lograr los objetivos del curso.

Los objetivos de formación personal. Aunque es posible encontrar estudiantes que se quejen de que se les trate de “enseñar a pensar”, este aspecto del problema es aún más fácil de atacar. La misión de nuestros cursos es formar al estudiante. Por lo tanto, no debe ser difícil mostrarles que eso es lo que se está buscando. Desafortunadamente, lo que sucede con frecuencia es que, por estar inmersos en los temas particulares de cada día, se nos olvida relacionarlos con los objetivos generales del curso.



*E*l profesor como partícipe de un problema común

Una proporción importante de los estudiantes llegan con una visión estereotipada del profesor de matemáticas. Están acostumbrados a un profesor que ejerce su poder a través de métodos terroristas. Nosotros no queremos ser así.

Debemos desligar nuestro papel dentro del curso de la actitud que el estudiante pueda tener hacia el mismo. Y esto se logra fácilmente al mostrarle al estudiante que existe *un problema común* (el logro de los objetivos del curso) y que el profesor está allí sencillamente para ayudarlo a tener éxito en ese proceso. El profesor es un catalizador para lograr los objetivos. Por lo tanto, el estudiante lo debe ver como una ayuda y no como una barrera en el proceso.

Para lograr este objetivo, se hace necesario que desde el comienzo del curso, el profesor logre generar el ambiente de trabajo adecuado. El poder del profesor no provendrá de la capacidad que éste puede tener de ejercer cierto terrorismo, sino de la convicción que el estudiante tenga de que él es quien puede ayudarlo para avanzar en el curso. Es por ello que el contacto personal con los estudiantes es trascendental. Es de esta manera que el profesor logra bajarse de su trono y ponerse al mismo nivel que sus estudiantes.



*E*l curso como un reto

Dentro de este esquema de motivación, es claro que el compromiso del estudiante con el curso puede aumentarse si se logra que él mire el logro de los objetivos como un reto. Para ello es necesario que el estudiante vea este reto como una meta que es posible alcanzar y que sus logros parciales sean reconocidos a medida que avanza dentro del curso.



*I*ndice

C

Caja de herramientas 147
Cajita 34, 35, 109
Capacidad de abstracción 113, 115, 116, 117, 120, 157
Capacidades 16, 18, 70, 96, 138, 146
Catalizador 17, 87, 90, 171
Chismografía 65
Circularidad 121
Componentes de un texto 27
Compromiso 124, 126, 127, 129, 130, 169, 172
Conceptos 27, 28, 31, 34, 35, 38, 54, 66, 67, 95, 119, 121, 140, 148
Corrección 106, 107
Criterios de selección 121, 159
Cuantificadores 51

D

Deducción lógica 33, 43
Diagrama de flujo 30, 35, 67
Diccionario 29, 31, 35, 66
Discusión en clase 64, 78, 152, 162, 168

Dogmatismo 9

E

Ecuaciones cúbicas 26
Ejecutivo 26
Ejemplos 27, 28, 29, 31
Ejercicios 6, 27, 29, 52, 55
Espíritu Santo 52
Estética 118, 157, 159, 164, 165, 166
Estructura 49, 136, 140, 141, 142, 144, 145, 146
Estructura pedagógica 5, 30
Estudiantes brutos 16, 19
Estudiantes con problemas 21, 58
Estudiantes genios 20
Estudiantes trabajadores 22
Evaluación 5, 90, 91, 99, 161
Examen lindo 97
Experimentación 5

F

Flujo lógico 34, 35, 51, 109

G

Genes matemáticos 14, 15, 16, 18, 50

Geometría analítica 44

Guía del profesor 86

H

Heurística 44, 164

Historia 65

Hoja de borrador 28, 29, 31

I

Ideología 5, 8, 115, 116

Inspiración 43, 52, 56, 96, 97

Instancia 43, 54, 120

J

Justicia 93

K

Kiss 103, 105, 106, 107

L

Legado de Grecia 26

Libro vivo 7, 86

M

Mesa Vilma María 6, 40

Método de las cajitas 34, 35, 109

Métodos de estudio 5, 34

Modus ponens 51, 116, 117

Monitor 20, 100, 107

Motivación 71, 102, 126, 169

O

Objetivos 70, 71, 78, 92, 124, 130, 148, 170

Objeto matemático 54, 66

P

Papel y lápiz 33

Paradigma 134, 137

Parcial 35, 40, 56, 84, 106, 108, 109

Partido 64

Pausa que refresca 100

Perry Patricia Inés 6

Poder del profesor 85

Polya 38, 52

Pregunta en reversa 42, 53

Principio de inducción intuitiva 26

Proceso de deducción 117

Proceso de transformación 124, 128, 152, 153, 162, 167

Procesos 140, 141, 142, 148, 167



Q

Quiz 99, 103

R

Recetario 30, 32, 35, 67

Recetas 27, 35

Reglas de deducción 117

Repaso del parcial 76

Resolución de problemas 5, 32, 52, 145,
147

Resultados 27, 28, 29, 31, 51, 141, 148

Resultario 29, 31, 51

Ronda 58

S

Saber pensar 112

Salirse del sistema 76

Santísima Trinidad 42, 52, 112

Significado operacional 66, 67, 140

Símbolo 115, 119

Sufrimiento 75

T

Tabla 30, 148

Tablero 62, 63

Tarea 99, 103, 104, 106, 107

Técnicas 27, 28, 29, 38, 95, 96, 145

Terrorismo 62, 85, 102

Traducción 38, 40, 43, 114

U

una empresa docente 6

Universidad de los Andes 5

Universo platónico 54, 120

V

Visión abierta 134, 138, 143

Visión cerrada 134, 135, 136, 137

Visión epistemológica 134

Y

Yerly, Henri 16, 84