

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS DE PRECÁLCULO

El estudio de funciones a través de la exploración
con calculadoras gráficas

Editores

PEDRO GÓMEZ • VILMA MARÍA MESA

Colaboradoras

CRISTINA GÓMEZ
CRISTINA CARULLA
PAOLA VALERO



una empresa docente

Universidad de los Andes

Bogotá, 1998

Versión de la obra SITUACIONES PROBLEMÁTICAS DE PRECÁLCULO. *El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas.*

Editores: Pedro Gómez, Vilma María Mesa

Colaboradoras: Cristina Gómez, Cristina Carulla, Paola Valero

Edición original en español publicada por “una empresa docente” y el Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. en México

ISBN 970-625-133-2

D. R. © 1998 una empresa docente®.

Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, archivada o transmitida en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico, de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro, sin el previo y expreso permiso por escrito de “una empresa docente” y de los autores.

Diseño carátula: INTERLÍNEA EDITORES LTDA.

una empresa docente®

Universidad de los Andes

Cra. 1 Este # 18 A - 70

Apartado Aéreo 4976 Tel. (57-1) 284-9911 ext. 2717. Fax: 3524066 Ext. 2709

Servidor WWW: <http://ued.uniandes.edu.co>

Bogotá. Colombia

Primera edición: septiembre de 1995 (“una empresa docente” & Grupo Editorial Iberoamérica)

Primera reimpresión: julio de 1998.

Impresión: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

ISBN 958-9216-19-6

Impreso en Colombia

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 3 |
| Situaciones típicas comentadas | 17 |
| Funciones lineales | 37 |
| 1. Ecuaciones • Relación entre representaciones | 39 |
| 2. Ecuaciones • Relación entre representaciones | 39 |
| 3. Relación entre representaciones • Diversas representaciones. | 40 |
| 4. Relación entre representaciones • Familias | 41 |
| 5. Representación gráfica • Planteo | 42 |
| 6. Relación entre representaciones • Diversas representaciones | 43 |
| 7. Relación entre representaciones • Familias | 44 |
| 8. Características familia • Familia | 44 |
| 9. Relación entre representaciones • Familias | 45 |
| 10. Relación entre representaciones | 45 |
| 11. Relación entre representaciones • Diversas representaciones | 46 |
| 12. Ecuaciones • Diversas representaciones | 47 |
| 13. Relación entre representaciones • Diversas representaciones | 47 |
| 14. Relación entre representaciones | 49 |
| 15. Relación entre representaciones | 50 |
| 16. Características familia • Familias | 51 |
| 17. Características familia • Familia | 54 |
| 18. Representación gráfica • Construcción objeto | 54 |
| 19. Desigualdades • Construcción objeto. | 56 |
| 20. Características función • Ensayo. | 56 |
| 21. Desigualdades • Construcción objeto | 56 |
| 22. Relación entre representaciones • Diversas representaciones | 57 |
| 23. Desigualdades • Diversas representaciones | 58 |
| 24. Desigualdades • Diversas representaciones | 59 |
| 25. Desigualdades • Ensayo | 60 |
| 26. Desigualdades • Construcción objeto | 60 |
| 27. Desigualdades • Construcción objeto. | 61 |
| 28. Desigualdades • Construcción objeto. | 61 |
| 29. Desigualdades • Construcción objeto. | 62 |
| 30. Aplicaciones • Planteo | 63 |
| 31. Aplicaciones • Planteo | 63 |
| 32. Aplicaciones • Planteo | 65 |
| 33. Aplicaciones • Planteo | 65 |

| | |
|--|----|
| 34. Aplicaciones • Proyecto investigación | 66 |
| 35. Aplicaciones • Planteo | 67 |
| 36. Aplicaciones • Diversas representaciones | 68 |
| 37. Aplicaciones • Diversas representaciones | 71 |
| 38. Aplicaciones • Planteo | 72 |
| 39. Aplicaciones • Planteo | 74 |

Funciones cuadráticas **75**

| | |
|---|----|
| 40. Características función • Tabla | 77 |
| 41. Relación entre representaciones • Tabla | 80 |
| 42. Características función • Familias | 82 |
| 43. Relación entre representaciones • Diversas representaciones | 83 |
| 44. Características familia • Familias | 87 |
| 45. Relación entre representaciones • Planteo | 89 |
| 46. Aplicaciones • Planteo | 90 |
| 47. Ecuaciones • Diversas representaciones | 92 |
| 48. Desigualdades • Construcción objeto. | 93 |
| 49. Relación entre representaciones • Planteo. | 93 |
| 50. Características función • Ensayo | 94 |
| 51. Aplicaciones • Planteo | 95 |
| 52. Aplicaciones • Planteo | 96 |
| 53. Aplicaciones • Planteo | 97 |

Funciones polinómicas **99**

| | |
|---|-----|
| 54. Representación simbólica • Construcción objeto | 101 |
| 55. Relación entre representaciones • Diversas representaciones | 102 |
| 56. Relación entre representaciones • Tabla | 104 |
| 57. Características familia • Diversas representaciones | 105 |
| 58. Características familia • Familias | 105 |
| 59. Características función • Tabla | 107 |
| 60. Características familia • Tabla | 109 |
| 61. Características función | 114 |
| 62. Relación entre representaciones • Diversas representaciones | 116 |
| 63. Desigualdades • Construcción objeto | 117 |
| 64. Desigualdades • Construcción objeto | 118 |
| 65. Características familia • Construcción objeto. | 119 |
| 66. Características función • Construcción objeto | 120 |
| 67. Características familia • Construcción objeto | 121 |
| 68. Aplicaciones • Planteo | 122 |
| 69. Aplicaciones • Planteo | 122 |
| 70. Funciones polinómicas | 123 |

| | |
|---|------------|
| 71. Aplicaciones • Proyecto investigación | 123 |
| Otras funciones | 127 |
| 72. Características función • Construcción objeto | 129 |
| 73. Características función • Construcción objeto | 129 |
| 74. Desigualdades • Construcción objeto | 130 |
| 75. Características función • Diversas representaciones | 130 |
| 76. Características familia • Diversas representaciones | 131 |
| 77. Características familia • Diversas representaciones | 132 |
| 78. Características familia • Diversas representaciones | 133 |
| 79. Características familia • Ensayo | 135 |
| 80. Características función • Construcción objeto | 135 |
| 81. Desigualdades • Construcción objeto | 136 |
| 82. Desigualdades • Construcción objeto | 137 |
| 83. Características familia • Tabla | 138 |
| 84. Desigualdades • Construcción objeto | 140 |
| 85. Desigualdades • Construcción objeto | 141 |
| 86. Ecuaciones • familias | 141 |
| 87. Aplicaciones • Planteo | 141 |
| 88. Aplicaciones • Planteo | 142 |
| 89. Aplicaciones • Planteo | 143 |
| 90. Aplicaciones • Planteo | 144 |
| Generalidades sobre funciones | 145 |
| 91. Funciones | 147 |
| 92. Generalidades | 149 |
| 93. Generalidades • Tabla | 149 |
| 94. Relación entre representaciones | 153 |
| 95. Generalidades | 154 |
| 96. Aplicaciones | 155 |
| 97. Relación entre representaciones • Diversas representaciones | 155 |
| 98. Generalidades • Tabla | 156 |
| 99. Generalidades • Tabla | 157 |
| 100. Generalidades • Tabla | 158 |
| Referencias bibliográficas | 161 |

Introducción

INTRODUCCIÓN

Este libro contiene un conjunto de situaciones problemáticas que pueden ser utilizadas tanto en el último ciclo de secundaria, como en el primer ciclo universitario con el propósito de iniciar el estudio de funciones. Este capítulo se inicia con una breve descripción de las tendencias actuales de la educación matemática y del papel que puede jugar la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento matemático de alto nivel. En seguida se presentan los resultados del programa de investigación “Calculadoras gráficas y pre-cálculo”. Finalmente, se describen las principales características del libro y se dan sugerencias para su utilización en el salón de clases.

En el segundo capítulo se comentarán algunas situaciones problemáticas. Allí se busca ejemplificar cada una de las situaciones tipo del libro: se toma una situación representativa, se dan los objetivos que persigue, el contenido matemático que se pone en juego, las dificultades de aprendizaje que se evidencian y sugerencias para trabajar la actividad en la clase.

Tendencias actuales

La visión que la comunidad internacional tiene de la educación matemática ha evolucionado durante los últimos treinta años. En la actualidad, existe un cierto consenso acerca de cuáles deben ser las metas de la educación matemática; qué se debe buscar en el aprendizaje de las matemáticas; qué tipo de enseñanza está acorde con estos propósitos; qué papel juega la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento matemático de alto nivel; y de qué manera influyen las creencias y actitudes de profesores e investigadores en la búsqueda de estos ideales.

Los estándares de currículo y evaluación en matemáticas del NCTM (1991b) proponen los siguientes fines para todos los estudiantes de matemáticas:

- ▲ Que aprendan a valorar las matemáticas
- ▲ Que se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas
- ▲ Que lleguen a resolver problemas matemáticos

▲ Que aprendan a comunicarse mediante matemáticas

Estos objetivos implican que los estudiantes experimenten situaciones abundantes y variadas, relacionadas entre sí, que los lleven a valorar las tareas matemáticas, desarrollar hábitos mentales matemáticos y entender y apreciar el papel que las matemáticas cumplen en los asuntos humanos; que debe animárseles a explorar, predecir e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza en su propia capacidad de resolver problemas complejos; que deben leer, escribir y debatir sobre las matemáticas, y que deben formular hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre la validez de una hipótesis (p.5).

Para lograr estos objetivos, es necesario asignar un sentido a las matemáticas escolares y reformular la visión que se tiene de los estudiantes y de su relación con el conocimiento. Para ello, el NCTM (1991b) sugiere que se debe buscar que:

- ▲ Los estudiantes “hagan matemáticas” de manera activa
- ▲ Las matemáticas sean para los estudiantes una manera de pensar y de dar sentido a su entorno
- ▲ El contenido matemático sea potente y cambiante
- ▲ Todos los estudiantes puedan aprender y apreciar las matemáticas

Esta nueva visión acerca del aprendizaje de las matemáticas implica la necesidad de generar nuevas aproximaciones acerca de la forma como se puede lograr este tipo de formación matemática.

El NCTM sugiere cuatro aspectos que son considerados como centrales en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Estos cuatro aspectos del razonamiento pedagógico del profesor son los siguientes (NCTM, 1991a):

- ▲ La selección de tareas matemáticas valiosas
- ▲ El manejo del discurso en el salón de clase
- ▲ La creación de un entorno apropiado para el aprendizaje
- ▲ El análisis de la enseñanza y el aprendizaje

Resolución de problemas y pensamiento matemático de alto nivel

La resolución de problemas juega un papel trascendental en esta nueva aproximación a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De hecho, se espera que el estudiante construya su conocimiento matemático al enfrentar, dentro del contexto social del salón de clase, problemas para los que no conoce de antemano una estrategia de solución apropiada, lo suficientemente complejos para significar un reto y que ponen en juego un conocimiento matemático relevante (Rico et. al.,1988).

El papel central que, en la actualidad, juega la resolución de problemas en la educación matemática resulta natural como característica intrínseca de las mismas matemáticas. El matemático Halmos (1980, p. 519, citado en Schoenfeld, 1992) corrobora esta posición al afirmar:

¿En qué consisten realmente las matemáticas? ¿Axiomas (como el postulado de las paralelas)? ¿Teoremas (como el teorema fundamental del álgebra)? ¿Pruebas (como la prueba de Gödel)? ¿Definiciones (como la definición de dimensión de Menger)? ¿Teorías (como la teoría de las categorías)? ¿Fórmulas (Como la fórmula de la integral de Cauchy)? ¿Métodos (como el método de aproximaciones sucesivas)?

Las matemáticas no podrían ciertamente existir sin estos ingredientes; son esenciales. Sin embargo, es posible argüir que ninguno de ellos está en el corazón del tema y que la principal razón para la existencia de los matemáticos es para que resuelvan problemas y que éste, por consiguiente, es en lo que realmente consisten las matemáticas: problemas y soluciones.

Se busca entonces que el estudiante desarrolle, a través de la actividad de resolución de problemas entre otros, un *pensamiento matemático de alto nivel*. Resnick (1987, citado en Romberg, 1993) define este tipo de pensamiento de acuerdo a una serie de características que se encuentran en claro contraste con los criterios matemáticos actuales:

| Pensamiento de alto nivel | Esquemas tradicionales |
|--|---|
| <i>No - algorítmico.</i> El camino para la acción <i>no</i> se encuentra completamente especificado con anterioridad. | <i>Algorítmico.</i> El camino para la acción se encuentra completamente especificado con anterioridad. |
| <i>Complejo.</i> El camino total no es “visible” (hablando mentalmente) desde un único punto de vista. | <i>Caminos visibles.</i> Se utilizan ejemplos estándar con caminos visibles. |
| <i>Soluciones múltiples.</i> El pensamiento de alto nivel da lugar frecuentemente a soluciones múltiples, cada una con costos y beneficios. | <i>Solución única.</i> Hay una única solución posible. |
| <i>Criterios múltiples.</i> El pensamiento de alto nivel involucra la aplicación de múltiples criterios que, en ocasiones, entran en conflicto entre ellos. | <i>Criterios sencillos.</i> Se requiere la utilización de criterios sencillos que se encuentran bien definidos. |
| <i>Incertidumbre.</i> El pensamiento de alto nivel involucra frecuentemente la incertidumbre. No se conoce todo lo que se requiere para desarrollar la tarea. | <i>Certeza.</i> Se tiene certeza: se ha dado toda la información que se requiere. |
| <i>Auto-regulación.</i> El pensamiento de alto nivel requiere la auto - regulación del proceso de pensamiento. | <i>Regulación externa.</i> En muchas ocasiones es un tercero quien determina lo que se debe hacer en cada momento. |
| <i>Asignación de significado.</i> El pensamiento de alto nivel requiere la asignación de significado, encontrando la estructura subyacente a un desorden aparente. | <i>Significado dado.</i> El significado está dado o se supone. |
| <i>Requiere esfuerzo.</i> El pensamiento de alto nivel requiere de esfuerzo. Se requiere gran cantidad de trabajo mental con el propósito de desarrollar las elaboraciones y los juicios involucrados. | <i>No requiere esfuerzo.</i> El trabajo normalmente involucra ejercicios estándar tan simplificados que requieren de muy poco esfuerzo. |

Tabla N° 1. Pensamiento de alto nivel y esquemas tradicionales

Por su parte, el Departamento de Educación del Estado de California (1985, p.1, citado en Schoenfeld, 1992) hace las siguientes sugerencias para el manejo por parte del profesor de las actividades de resolución de problemas con el propósito de que el estudiante pueda desarrollar un pensamiento matemático de alto nivel:

- ▲ Adapte su actitud a un comportamiento de resolución de problemas en el que usted explora y experimenta con los estudiantes
- ▲ Cree una atmósfera de clase en la que los estudiantes se sientan cómodos al proponer y probar (en el sentido de intentar) ideas
- ▲ Invite a sus estudiantes a que expliquen su pensamiento en todas las etapas de la resolución de problemas
- ▲ Sea abierto a la posibilidad de que un problema dado pueda requerir más de una estrategia y que algunos problemas puedan requerir aproximaciones originales
- ▲ Presente situaciones problemáticas que se parezcan, en su riqueza y complejidad, a situaciones reales, de tal forma que la experiencia que los estudiantes obtengan en clase pueda ser transferida a otros contextos

Resolución de problemas y creencias

¿Qué es el pensamiento matemático? ¿Qué significa mirar el entorno desde un “punto de vista matemático”? ¿Qué relación tiene esto con la naturaleza de las matemáticas y con la resolución de problemas? ¿Cómo ha sido y cómo debe ser la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, si se tienen en cuenta las respuestas a las preguntas anteriores?

El punto de partida es la reflexión acerca de la naturaleza de las matemáticas. Todos los problemas mencionados anteriormente se pueden responder a partir de esta reflexión. Cuando se miran las matemáticas como un conjunto de hechos y técnicas, se puede entender que se miren los problemas como tareas que hay que hacer, como ejercicios en los que se aprenden técnicas a partir de ejemplos repetitivos; técnicas que parecen únicas y que se enseñan dentro de entornos en los que no se espera que los estudiantes desarrollen nuevos métodos, sino que se convengan que siempre debe haber un método y que ese método debe dar una solución. Bajo esta perspectiva, la enseñanza es esencialmente *instrucción*; transmisión de una información por parte de un profesor que es dueño de la verdad y el aprendizaje es *recepción*; recepción pasiva e individual. La enseñanza y el aprendizaje se centran en el contenido y aunque hay problemas (ejercicios) no hay

resolución de problemas: se busca la respuesta; no se analiza el proceso; no hay actividad creativa; las matemáticas son rígidas, frías.

Cuando se miran las matemáticas como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento no se descubre, sino que se construye a partir de la experimentación y la formulación, contrastación y justificación de conjeturas, y en la que se mira el entorno desde un punto de vista matemático al estar dispuestos a buscar patrones y regularidades en las situaciones problemáticas, entonces los significados cambian. Las matemáticas se convierten en una actividad social en la que se construye el conocimiento. Las matemáticas se miran como una ciencia y ser matemático (en un sentido amplio del término) es ser miembro de una comunidad (como el salón de clase) en la que se hacen (construyen) matemáticas. Desde esta perspectiva, la enseñanza deja de ser *instrucción* para convertirse en *socialización*. El aprendizaje deja de ser *recepción* para convertirse en *construcción*. El conocimiento matemático se construye socialmente en el salón de clase. Para la enseñanza, el *proceso* se vuelve más importante que el *resultado*. Las matemáticas, tanto para los matemáticos, como para los profesores y los estudiantes, son una actividad cuyo fin último es *resolver problemas*. Pero, para ambos, los problemas interesantes son aquellos para los que no hay disponible un procedimiento de aplicación. Los problemas interesantes son aquellos en los que hay que experimentar, conjeturar, intentar y descubrir. Con esta visión, la enseñanza de las matemáticas debería presentarlas como una disciplina con múltiples características en la que se persigue un conocimiento estructural y operacional que tenga sentido en su aplicación práctica, que se logre a través de explorar y experimentar con situaciones problemáticas, para desarrollar un punto de vista matemático de interacción con el entorno. La enseñanza debe buscar que el estudiante logre precisión en su trabajo y que aprenda a comunicarse matemáticamente. Si estos son los objetivos, el entorno en el que el profesor trabaja debe ser un reflejo de ellos.

Álgebra y el precálculo

El álgebra es un tema central del currículo escolar y universitario en el que existe una tradición en cuanto a su enseñanza y aprendizaje. Diversos estudios (Kieran, 1992) muestran que los estudiantes no están logrando una formación matemática adecuada en este tema. Kieran describe de la siguiente manera los temas que tradicionalmente se tocan en álgebra a lo largo del currículo escolar (p. 395):

La mayoría de los cursos de álgebra de primer año empiezan con los términos literales y su relación con referentes numéricos dentro del contexto, primero de expresiones algebraicas y luego en ecuaciones. Después de un período de sustituciones numéricas tanto en expresiones como en ecuaciones, se pasa a las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones por los métodos tradicionales. Aparece regularmente la manipulación y factorización de expresiones polinómicas y racionales con varios grados de dificultad. A lo largo del contenido se encuentran los problemas de palabras, etiquetados como aplicaciones “de la vida real”, que se resuelven por medio de las técnicas aprendidas. Eventualmente se trabajan funciones en sus representaciones algebraicas, tabulares y gráficas. Se cubren funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Esta aproximación al álgebra deja mucho que desear. Si lo que se busca es que el estudiante desarrolle un pensamiento matemático de alto nivel que le sea útil en sus actividades académicas, profesionales y cotidianas, entonces es importante que su conocimiento algebraico vaya más allá de una capacidad para manipular expresiones simbólicas. El estudio del álgebra debe ser, entre otras cosas, la base para el inicio del estudio de las funciones como herramienta de modelaje de situaciones reales. Es así como el precálculo, área que profundiza en el estudio de funciones, sirve de base para desarrollar dos aspectos centrales en la formación matemática del bachiller: su capacidad para modelar situaciones y fenómenos reales y su capacidad y conocimiento para enfrentar los problemas del aprendizaje del cálculo.

El programa de investigación *Calculadoras gráficas y precálculo*

Descripción general

El programa de investigación *Calculadoras gráficas y precálculo* se realizó en el curso de precálculo de la Universidad de los Andes. Este curso lo toman estudiantes de primer semestre de las carreras de ingeniería, administración, economía y ciencias biológicas. El programa de investigación se ha venido desarrollando desde el primer semestre de 1993, y ha recibido apoyo de COLCIENCIAS, Texas Instruments, el PLACEM y la Fundación para el Avance de Ciencia y Tecnología del

Banco de la República. El propósito del proyecto ha sido explorar los siguientes aspectos del sistema curricular con motivo de la utilización de la calculadora gráfica: la interacción social y el discurso matemático dentro del salón de clase, las actitudes y la comprensión de los estudiantes, las creencias del profesor y el diseño curricular.

Los resultados más importantes se han dado en el aspecto de diseño y desarrollo curricular. Los investigadores, que también han actuado como profesores, experimentaron un proceso de cambio en sus visiones acerca de las matemáticas, de su enseñanza, de su aprendizaje y de la utilización de recursos en el salón de clase, cambios que han implicado modificaciones sustanciales en el diseño curricular.

Efectos en el diseño curricular

Las diferencias que surgieron en el diseño curricular del curso están relacionadas con un cambio en las visiones del grupo de investigadores con respecto al saber a enseñar y a la forma como se cree que se debe aprender y enseñar ese conocimiento. El grupo construyó, a lo largo de dos años de trabajo, una visión del conocimiento a enseñar en la que se percibe una mayor complejidad y profundidad del contenido matemático. El estudio de las funciones se hizo más coherente gracias a la introducción del concepto de familias de funciones, concepto que permite identificar las diferencias y similitudes entre cada una de las familias (lineales, cuadráticas, etcétera). Por otra parte, el grupo se hizo más consciente de la complejidad de los objetos matemáticos estudiados, complejidad que se expresa en dos dimensiones, principalmente: la riqueza de cada concepto matemático en cuanto a su expresión en múltiples sistemas de representación (simbólico, gráfico, tabular, verbal); y la complejidad de cada concepto en cuanto a su estatus, ya sea operacional y dinámico, ya sea estructural y estático.

Por otra parte, el grupo logró expresar en la práctica, y de manera explícita, su posición ideológica con respecto al aprendizaje: el constructivismo social. La expresión práctica de esta visión (el individuo construye su conocimiento matemático dentro de un entorno social que simula el funcionamiento de las comunidades científicas) llevó al grupo a centrar buena parte de su atención en el diseño y utilización de situaciones problemáticas que, expresando las nuevas visiones del contenido a enseñar, indujeran a los estudiantes a construir su conocimiento matemático dentro de un contexto de interacción social (Ernest, 1991).

Estas nuevas visiones acerca del conocimiento a enseñar, del aprendizaje y de las matemáticas, se complementó con nuevas visiones del estudiante (como alguien mucho más capaz de enfrentar y resolver tareas complejas) y del profesor (como alguien capaz y deseoso de aprovechar apropiadamente una mayor libertad en el desarrollo del currículo).

Es así como el nuevo diseño curricular pretende que el conocimiento construido por el estudiante sea coherente y holístico (en contraposición con un conocimiento desagrupado de herramientas específicas); sea rico en sus aspectos procedimental y conceptual (buscando ir más allá de los hechos y los algoritmos, hacia las estructuras conceptuales y procedimentales); y sea rico en las conexiones entre sistemas de representación (buscando que un mismo concepto pueda ser visto desde diversas perspectivas y que éstas se encuentren conectadas).

Se busca además que el estudiante perciba que los problemas en matemáticas no tienen necesariamente una única respuesta, ni una única estrategia de resolución; que vea la utilidad práctica del conocimiento que construye (como medio para modelar la realidad); que desarrolle sus capacidades de comunicación y argumentación matemática; que reconozca que el conocimiento se construye socialmente; que desarrolle la capacidad para enfrentarse a lo desconocido (tareas que son diferentes de las que él ya conoce); que desarrolle su capacidad para investigar en matemáticas; y, en general, que desarrolle su capacidad para resolver problemas.

Aunque desde un punto de vista superficial, el contenido sufrió solamente cambios leves, un análisis más detallado de los temas tratados y de las tareas propuestas a los estudiantes resulta en un tratamiento del contenido que expresa las visiones que se describieron anteriormente con respecto al conocimiento a enseñar: tratamiento de familias de funciones, riqueza en los sistemas de representación y profundidad en las dimensiones operacional y estructural de los conceptos.

El manejo de la interacción entre el profesor y el estudiante dentro del salón de clase alrededor del conocimiento matemático también sufrió cambios importantes, al pasar de una situación en la que se seguía de cerca el libro texto dentro de un esquema de exposición del profesor y resolución individual de ejercicios típicos por parte de los estudiantes a una situación de interacción en grupos de tres o cuatro

estudiantes, que gira principalmente alrededor de la resolución de situaciones problemáticas complejas y diferentes, seguida de discusiones de todo el grupo de estudiantes en las que se enfatiza la argumentación y el consenso global para aceptar la validez de las afirmaciones propuestas.

Finalmente, la evaluación dejó de ser exclusivamente una herramienta para clasificar a los estudiantes y se convirtió en un medio a través del cual estudiantes y profesores se comunican en su proceso de interacción en la búsqueda de la construcción del conocimiento y en el que se reconocen y enfatizan las capacidades de comunicación y argumentación, la coherencia del discurso, la diversidad de estrategias posibles, la experimentación y la formulación y verificación de conjeturas. Se introdujeron nuevos esquemas de trabajo tales como ensayos escritos, portafolios y proyectos de investigación.

Libro de problemas

Los cambios en el diseño y desarrollo curricular generaron una nueva situación en la que se estaba experimentando con esquemas y estrategias diferentes. Esto fue lo que motivó al grupo de trabajo a realizar un primer compendio de las situaciones problemáticas que se han desarrollado dentro del curso.

El haber vivido un proceso de cambio en nuestras creencias nos ha llevado a desear que el libro sirva para que profesores de matemáticas y áreas afines vivan un proceso similar, y que utilicen las situaciones propuestas como modelo para hacer una mejora y una profundización en ejercicios tradicionales que les lleven a producir unas nuevas situaciones para temas específicos de sus cursos. Se espera que el libro sirva para permitir que la creatividad de los profesores tenga un espacio nuevo y propio que revitalice su quehacer diario.

El libro puede ser usado por profesores que deseen dinamizar algunas de sus clases y por aquellos que deseen hacer una innovación en su clase y que además deseen iniciar una indagación acerca de la forma en que se dan los procesos de enseñanza y aprendizaje de su grupo de estudiantes. También va dirigido a investigadores en la disciplina que deseen estudiar lo que sucede dentro del aula y profundizar en las teorías relacionadas con estos procesos. Aquellos estudiantes que deseen avanzar por su cuenta en la construcción de su conocimiento, encontrarán valioso el material de este libro: precisamente porque enfoca los

conocimientos de una manera diferente, le permitirá evidenciar su estado de comprensión de los conceptos que se ponen en juego en cada actividad.

Sugerencias de uso

Hay diversas formas de utilizar las situaciones problemáticas. Una de ellas es llevarla a la clase, organizar grupos de tres personas y entregarla como actividad que se desarrollará en 40 minutos; en los siguientes 10 o 20 minutos, se pide una exposición a cada grupo de lo que sucedió con el trabajo. El profesor actúa como mediador en las discusiones de los grupos y como organizador de las ideas que exponen los estudiantes. Un buen ejercicio consiste en pedir que algún estudiante haga un resumen de lo que sucedió con la actividad: para qué sirvió, qué cosas fueron difíciles, qué relación tiene con otros temas, etcétera.

Otra forma de utilizarla es como trabajo de investigación fuera de la clase. El profesor entrega una o varias situaciones problemáticas a los estudiantes para que ellos, por su cuenta, individualmente o en grupos, las analicen y produzcan una solución que se explicará luego al resto de la clase. El profesor puede preguntar sobre las dificultades que se hayan tenido con la actividad y hacer que la clase analice los argumentos presentados por la persona que expone la solución. Una modificación a este esquema, consiste en escoger una situación para cada semana y entregarla a los estudiantes, puede ser un grupo por semana, para que realicen el trabajo de investigación y expongan los resultados a la clase.

Cualquiera que sea el esquema de uso con el grupo de estudiantes, es muy importante que el profesor tenga presente que se debe contar con un espacio de negociación en grupos pequeños de estudiantes y en plenaria. Este es uno de los procesos que favorecen la consolidación del conocimiento por parte del grupo.

Contenido

El curso en el que se desarrolló el proyecto considera el estudio de diversos tipos de funciones –temas longitudinales– según diversos aspectos –temas transversales–. Así, cada uno de los temas longitudi-

nales, se estudia teniendo como referencia cada uno de los temas transversales

| Temas longitudinales | Temas transversales |
|-----------------------------|---|
| Funciones lineales | Trabajo dentro de la representación gráfica |
| Funciones cuadráticas | Trabajo dentro de la representación simbólica |
| Funciones cúbicas | Relación entre manipulaciones |
| Funciones polinómicas | Características de la función |
| Funciones racionales | Características de la familia de funciones |
| Funciones con radicales | Sistemas de ecuaciones |
| | Desigualdades |
| | Aplicaciones |

Los estudiantes deben estudiar con anterioridad a la clase la teoría y los ejercicios que se van a tratar. Es así como existen actividades que pueden desarrollarse sin haber profundizado mucho en un tema; otras en las que se busca consolidar o recoger el trabajo adelantado alrededor de un cierto tema; y otras en las que se pretende profundizar en un tema específico o avanzar en la construcción de conocimiento. Se han diseñado siete tipos de situaciones problemáticas: tablas, familias, construcción de objetos, diversas representaciones, de planteo, ensayos y proyectos de investigación.

Por lo general las tablas se utilizan en las clases de introducción de tema, mientras que las de construcción de objetos, las de planteo y los ensayos, se usan en las clases de consolidación de conocimientos. Las situaciones de familias, las de diversas representaciones, los ensayos y los proyectos de investigación se utilizan para avanzar y profundizar en un tema.

A continuación se da una breve descripción de los diferentes tipos de situaciones problemáticas que se encuentran en este libro.

Tablas. En las tablas los estudiantes rellenan las casillas vacías; se suele dar información en algunas de ellas para que los estudiantes puedan encontrar patrones de comportamiento que les permitan formular alguna hipótesis, que luego se validará con la información de otras casillas. Las tablas dan una visión general y permiten evidenciar relaciones entre representaciones o conceptos.

Familias. Los ejercicios de este tipo se apoyan en una representación parametrizada de una función. Se busca que el estudiante hable de la familia, según una relación que se da entre los parámetros. En general, esta relación se muestra gráficamente. En los casos más complejos, se pide hablar, en general, de la familia, con base en el papel que representan los parámetros en la expresión.

Construcción de objetos. En estos ejercicios se busca que el estudiante dé la descripción más completa posible de un objeto matemático, que puede ser una función, una desigualdad o una ecuación. Para eso, se da información parcial pero complementaria en sus representaciones verbal, tabular, gráfica y simbólica.

Diversas representaciones. En estas actividades se busca que el estudiante trabaje en las diversas representaciones simbólicas de un objeto con el fin de profundizar en el significado de los parámetros de esas representaciones.

Planteo. Estos ejercicios son los que se presentan utilizando lenguaje natural. En ellos, usualmente, se describen situaciones de la vida real. Se busca que el estudiante haga un proceso de modelaje de la situación.

Ensayos. En estos ejercicios se pide al estudiante que hable acerca de un objeto matemático. Se pide que integre todas las representaciones y características posibles del objeto en un texto que podría ser leído por otras personas.

Proyectos de investigación. Se busca que los estudiantes, en grupo, trabajen fuera de clase en un problema que requiere hacer un trabajo de investigación que involucra situaciones de manipulación concretas, formulación de hipótesis y modelaje. Los estudiantes deben producir un reporte y presentar al resto de la clase sus resultados. El trabajo se desarrolla durante más de dos semanas.

El libro se organiza de acuerdo a los temas longitudinales. En el primer capítulo se presentan comentarios a cada una de las situaciones típicas desarrolladas. El segundo capítulo presenta situaciones diseñadas para trabajar con funciones lineales; el tercero, con funciones cuadráticas; el cuarto con funciones polinómicas de grado mayor que dos; el quinto, con funciones racionales y con radicales y en el sexto, se colo-

caron las situaciones que hacen referencia a conceptos generales sobre funciones.

Una de las principales dificultades que el grupo de trabajo ha encontrado tiene que ver con la producción de situaciones problemáticas relacionadas con el mundo real. El lector encontrará que en ciertos ejercicios de palabras, los contextos utilizados se sienten “prestados”, algo irreales o con instancias sin sentido. Sin embargo, ha existido siempre una gran preocupación porque este tipo de situaciones esté presente, puesto que somos conscientes de que una porción importante de la matemáticas han surgido como consecuencia del análisis de fenómenos reales y que las matemáticas escolares deben tener una función práctica evidente para el estudiante. Por otra parte, consideramos que la utilización de fenómenos reales como espacio dentro del cual se pone en juego el conocimiento matemático no es la única instancia en la que este conocimiento se convierte en algo significativo para el estudiante. Es necesario tener en cuenta que las actividades que se proponen deben estar acordes con unas metas que sean relevantes para quien aprende (Schliemann, 1995). La aplicación del conocimiento matemático en la vida real es un aspecto central de este criterio de relevancia. No obstante, también es necesario incluir en este ámbito la relevancia de aquellas actividades y tareas que aportan a la construcción de un conocimiento posterior más profundo. En este sentido, la mayor parte de las situaciones problemáticas que se proponen en el libro contribuyen a estos propósitos.

La mayoría de los problemas propuestos pueden ser resueltos sin la ayuda de la calculadora gráfica. Sin embargo, los problemas han sido diseñados de tal forma que, si se utiliza esta tecnología, el estudiante tiene la oportunidad de experimentar nuevos esquemas de trabajo con los que él puede construir un conocimiento matemático que sea coherente, holístico y rico en relaciones tanto desde el punto de vista de las conexiones entre los sistemas de representación, como en sus aspectos estructurales y operacionales. Hay, sin embargo, algunas situaciones problemáticas que exigen explícitamente el uso de la calculadora para su desarrollo. Esto se enuncia en el texto de la actividad.

Hemos eliminado la frase “Justifique su repuesta” de la mayoría de los problemas. La razón es que creemos que la solución de las situaciones demanda, de manera natural, la construcción de argumentos que corresponden a lo que usualmente llamamos “justificación”.

Situaciones típicas comentadas

PRESENTACIÓN

Para desarrollar este capítulo se han escogido siete situaciones problemáticas que son representativas de cada uno de los tipos que se presentan en el libro. Para cada una de ellas se darán los objetivos, el contenido matemático, algunas de las dificultades de aprendizaje que se pueden evidenciar y sugerencias de manejo para una sesión de 60 minutos de clase.

Por la dificultad de encontrar un nombre para cada situación problemática, se ha decidido numerarlas e identificarlas según el tema longitudinal, el tema transversal y el tipo. A continuación se muestran los identificadores de cada elemento:

| Identificadores de temas longitudinales | Identificadores de temas transversales | Identificadores de tipos situaciones |
|---|--|--------------------------------------|
| Funciones Lineales | Generalidades | Tabla |
| Cuadráticas | Representación gráfica | Familias |
| Otras funciones | Representación simbólica | Construcción objeto |
| Generalidades sobre funciones | Relación entre representaciones | Diversas representaciones |
| | Características función | Planteo |
| | Características familia | Ensayo |
| | Ecuaciones | Proyecto investigación |
| | Desigualdades | |
| | Aplicaciones | |

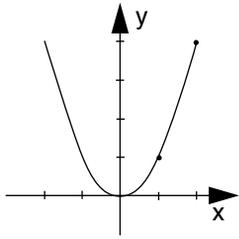
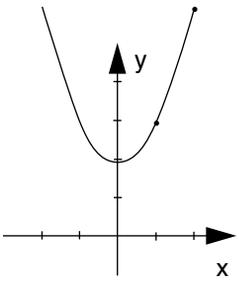
Los títulos de los identificadores se utilizaron para definir los capítulos del libro. Así, una situación se puede identificar como: Cuadráticas • Aplicaciones • Planteo. La numeración sirve para diferenciar situaciones que tengan características similares. Cuando una misma situación involucre más de un tema longitudinal y más de un tema transversal, se utilizará el identificador que sea más relevante para la situación.

Situación 40: Relación entre representaciones

• Tabla¹

Texto²

Complete los espacios en blanco. En las gráficas, cada marca representa una unidad

| Gráfica | Expresión simbólica | Vértice | Eje de simetría | Foco | Directriz | Acción con relación a $y=x^2$ | Dominio | Rango |
|---|---------------------|----------|-----------------|-------------------------------|--------------------|--|---------------|---------------|
|  | $y = x^2$ | $0 = 0$ | $x = 0$ | $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ | $y = -\frac{1}{4}$ | | \mathcal{R} | $(0, \infty)$ |
|  | | $(0, 2)$ | | $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ | $y = \frac{7}{4}$ | Traslación en y de dos unidades hacia arriba | \mathcal{R} | |

1. Funciones cuadráticas.

2. Se muestra una parte de la tabla.

| Gráfica | Expresión simbólica | Vértice | Eje de simetría | Foco | Directriz | Acción con relación a $y=x^2$ | Dominio | Rango |
|---------|---------------------|---------|-----------------|------|--------------------|-------------------------------|---------------|-------|
| | $y = x^2 - 1$ | | | | $y = -\frac{5}{4}$ | | \mathcal{R} | |
| | $y = 2x^2$ | | | | | | | |

Comentarios

Dependiendo del momento en que se desarrolle la actividad, se lograrán objetivos diferentes. Una alternativa es realizarla una vez se ha dado la definición “geométrica” de parábola y cuando los estudiantes tienen familiaridad con los conceptos involucrados en esta definición: foco, directriz, vértice, eje de simetría, concavidad. También se puede hacer cuando se ha dado la definición de parábola como representación gráfica de la función cuadrática. Como mínimo, se requiere que los estudiantes sepan localizar puntos en el plano cartesiano cuando se ha dado una expresión simbólica de una función. La actividad permite relacionar el efecto que realizar diversas transformaciones sobre la representación gráfica tiene sobre la representación simbólica y viceversa. Permite esclarecer cómo se afectan las características del objeto cuando se hacen esas transformaciones: lo que permanece invariante y lo que no. La presentación en forma de tabla da lugar para que se

formulen conjeturas sobre casillas para las que no se conoce respuesta, conjeturas que se pueden contrastar con el contenido de las casillas que tienen información.

Se pueden manejar muchos niveles de rigurosidad. Por ejemplo, puede pedirse una demostración formal de que las coordenadas del foco de la parábola definida por $y=ax^2$, son $(0, \frac{1}{4a})$ y que la ecuación de

la directriz está dada por $y = -\frac{1}{4a}$. También es posible aproximarse a este resultado haciendo diversas construcciones geométricas en las que se varía la dilatación de la parábola. Esto se requiere para poder validar la conjetura que se hará al responder las casillas en las que se piden las coordenadas del foco, cuando la parábola se ha dilatado.

Tal vez la mayor dificultad de comprensión radique en el manejo de esta última relación. Esto usualmente genera la tendencia a buscar una fórmula que resuelva el asunto; como no es necesariamente claro que exista una fórmula, se empieza a poner a prueba el proceso de formular hipótesis y contrastarlas. El significado de dominio y rango suele ser un punto de discusión interesante; se tiende a resumir el asunto del rango encontrando las coordenadas del vértice; sin embargo, usualmente hay confusión entre los dos conceptos.

Una forma posible de desarrollar la actividad es asignarla para trabajo individual fuera de clase. Durante la clase se puede revisar qué dificultades se encontraron y organizar un trabajo en grupos para encontrar solución a esas dificultades. Hacia el final de la clase se pueden destinar unos minutos para que los estudiantes expresen la forma en que se resolvieron las dudas y dificultades. El profesor puede intervenir para dar un resumen, mostrando una visión global de las diferentes transformaciones, de su significado y de su implicación en cada representación, y buscando hacer énfasis en la coherencia y el sentido del proceso más que en el resultado.

Situación 156: Relación entre representaciones

• Familias³

Texto

- Suponga que $a = 1$. La Figura N° 1 muestra el plano h - k , donde un punto (h, k) representa una función cúbica $y = (x - h)^3 + k$. Dibuje en diferentes planos cartesianos x - y las funciones o familias de funciones correspondientes a A, L_1 , L_2 y L_3 .

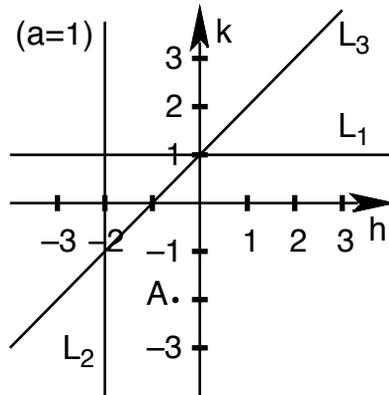


Figura N° 1.

- Suponga que $h = 2$. La Figura N° 2 muestra el plano a - k , donde un punto (a, k) representa una función cúbica $y = a(x - 2)^3 + k$. Dibuje en diferentes planos cartesianos x - y las funciones o familias de funciones correspondientes a A, L_1 , L_2 y L_3 .

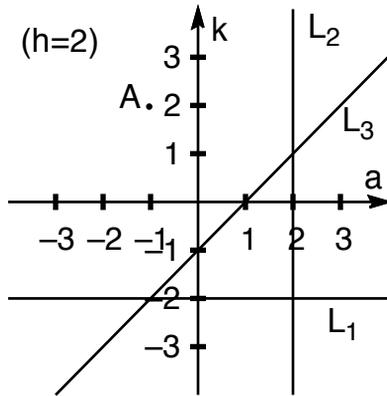


Figura N° 2.

3. Suponga ahora que $a = 1$ y $r_1 = r_2$, en la expresión cúbica de la forma $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$. La Figura N° 3 muestra el plano r_1-r_3 . Dibuje en diferentes planos cartesianos $x-y$ las funciones o familias de funciones correspondientes a A , L_1 , L_2 y L_3 .

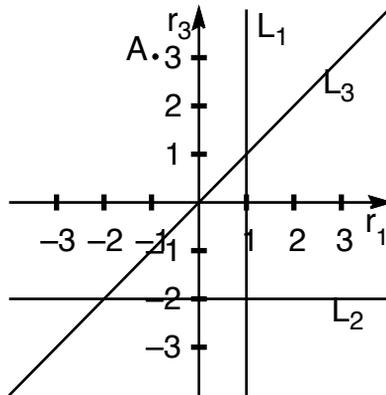


Figura N° 3.

4. ¿Cuáles son las funciones cúbicas en el plano r_1-r_3 de la Figura N° 3 que se pueden expresar en la forma $f(x) = a(x - h)^3 + k$?
5. Si se conocen las raíces de una función cúbica, ¿cómo se puede saber si ésta se puede expresar en la forma $f(x) = a(x - h)^3 + k$ o no?

Comentarios

Este ejercicio permite disociar la idea de que el plano cartesiano únicamente representa relaciones que son de la forma $y=f(x)$. Permite representar relaciones entre parámetros en forma gráfica y dar un sentido diferente a esas relaciones y sus implicaciones con la familia que se describe (esto es, cuando la relación es positiva, ¿qué pasa con la familia? o ¿qué funciones se generan cuando x está en tal intervalo?). Permite afianzar el concepto de gráfica de una función (como los puntos de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ que son de la forma $(x, g(x))$). Se requiere algún conocimiento de las diferentes representaciones simbólicas de las funciones cúbicas y de la restricción que existe para la forma $y = a(x-h)^3+k$.

En la parte final se requiere un trabajo simbólico importante; hay un espacio para lanzar conjeturas que se deben validar y confrontar con ejemplos particulares para luego hacer una generalización. Lo más interesante de la argumentación que se da aquí es que se apoya en cuatro representaciones diferentes: la gráfica de los parámetros, la gráfica de la familia, la simbólica de la familia y la simbólica de los parámetros.

Es muy importante que el estudiante sepa manejar la definición de parámetro; debe saber: (1) que es posible dar diferentes valores a un parámetro; (2) que cuando se cambia el parámetro, cambia algo en el objeto; y (3) que para interpretar la relación, hay que tomar varios valores para hacerse una idea del comportamiento de funciones que se están definiendo a través de ella.

Una parte de esta actividad puede adelantarse en clase, dejando el trabajo simbólico para realizar en casa. Al final del trabajo en clase se puede hacer una comparación entre grupos para observar qué hizo cada uno y ver si se encuentran diferencias en las respuestas o en las aproximaciones utilizadas.

Situación 80: Desigualdades • Construcción objeto⁴

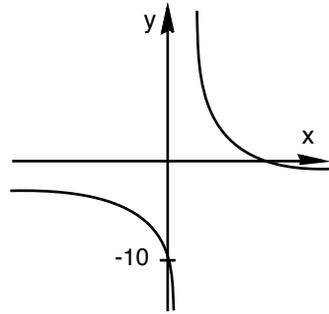
Texto

La desigualdad: $x^3 - p \geq g(x)$ tiene como conjunto solución: $[0, d) \cup [2.40, \infty)$.

4. Otras funciones.

Se sabe que:

- ▲ p y d son números positivos
- ▲ $g(x)$ corta el eje de las x en 4
- ▲ -3 no pertenece al rango de $g(x)$
- ▲ La figura muestra la gráfica de $g(x)$



1. Halle p , d y $g(x)$.
2. Verifique que la desigualdad tiene el conjunto solución propuesto.

Comentarios

Esta actividad busca hacer explícito el sentido de las desigualdades y relacionar múltiples dimensiones de los objetos involucrados. Para tener éxito en el trabajo, se requiere tener una visión de una desigualdad como un objeto (relación) que sirve para comparar funciones, cada una de las cuales es a su vez un objeto. Al dar información sobre los objetos en forma parcial, no redundante y en diferentes representaciones, se obliga al estudiante a tener en cuenta el significado de cada concepto en cada representación antes de poder utilizarlo. Permite formular conjeturas que se pueden contrastar y reformular con la información que se presenta y da al proceso de resolución de desigualdades una visión diferente de la tradicional.

Es importante que los estudiantes se hayan familiarizado con las funciones racionales y cúbicas y que sepan cuál puede ser la representación simbólica de cada una; también deben saber cómo encontrar los ceros de un polinomio; sin embargo, en la situación propuesta los ceros del polinomio que se obtiene no son racionales. Esto hace necesario recurrir a métodos numéricos o a una calculadora.

Este ejercicio puede realizarse durante la clase dejando al final tiempo para exponer la solución. En la exposición, es interesante pedir explícitamente las razones que dieron lugar a la determinación de los parámetros. Por ejemplo, que el extremo derecho del primer intervalo del conjunto solución es la asíntota vertical de la función racional; o

que el valor de p es 10, etcétera. Hay muchas formas de encontrar los parámetros. La exposición debe mostrar todas estas formas y construir argumentos cada vez más formales para hacer las demostraciones correspondientes.

Situación 69: Aplicaciones • Planteo⁵

Texto

La suma de la longitud y el perímetro de la base de un bulto postal es de 60cm. El paquete puede ser rectangular y de sección recta cuadrada o cilíndrica.

1. ¿Cuál de las dos formas origina mayor volumen?
2. ¿Cuál de las dos formas es mejor?

Comentarios

Esta es una actividad de análisis de una situación que requiere modelar, mediante una función, el comportamiento del elemento sobre el que se hace la indagación, en este caso el volumen del paquete de correo. Se trata de una situación en la que es necesario analizar las funciones de manera global; las soluciones particulares dan información parcial y posiblemente inadecuada para la realidad. Puede convertirse en un ejercicio de desigualdades. Se requiere definir una relación para modelar los volúmenes de los posibles diseños del bulto, bajo la restricción del perímetro; sin embargo se necesita utilizar una variable común: o bien la altura o bien el lado o el radio de la base. Dependiendo de la variable que se escoja se obtienen expresiones y gráficas distintas y, por supuesto, interpretaciones diferentes. Aunque es posible dar demostraciones rigurosas acerca de cuál sólido produce más volumen las gráficas dan una visión más directa. En este problema no hay una respuesta única para la segunda pregunta. Es necesario establecer algún criterio para decidir.

Se puede organizar el curso en grupos de tres personas para trabajar un cierto tiempo en el ejercicio. Pueden observarse dificultades en el proceso de escribir una expresión para el volumen en función de una sola variable (es posible que haya dificultades para establecer el

5. Funciones Polinómicas.

volumen de los sólidos de los que se habla); sin embargo, la dificultad más importante está en decidir cuál forma es mejor. Hay que tener en cuenta aspectos como el tipo y forma de objetos que se envían, las condiciones de transporte, etcétera.

Situación 78: Características familia • Ensayo⁶

Escriba un ensayo sobre la familia de funciones de la forma

$$f(x) = \frac{a}{Q(x)} + b, \text{ donde } Q(x) \text{ es un polinomio de grado 2.}$$

Texto

Esta situación requiere que se haya trabajado con las funciones cuadráticas y que se tenga un cierto conocimiento de las funciones racionales que se obtienen cuando se dividen dos polinomios de grado 1. Es un trabajo que permite dar sentido a las funciones racionales como resultado de división entre polinomios. Para poder hacer un ensayo completo es necesario hacer explícita la forma en que las características de las funciones cuadráticas determinan las características de las funciones racionales resultantes: dominio, rango, asíntotas, comportamiento en el infinito, concavidad e intervalos de crecimiento.

Puede asignarse como un trabajo de investigación individual durante la clase para después pedir un trabajo de revisión con otros dos compañeros, antes de hacer la exposición ante la clase. Uno de los puntos que puede causar más dificultad es el análisis del comportamiento de la función racional alrededor de los ceros de la función cuadrática. Pueden manejarse diferentes niveles de rigor: desde el análisis con algunos valores numéricos, hasta el análisis de la expresión simbólica mediante tabla de signos, pasando por el análisis gráfico del comportamiento de la función.

6. Funciones racionales.

Situación 43: Relación entre representaciones

• Diversas representaciones⁷

Texto⁸

A continuación se presentan las distintas formas en que se pueden expresar simbólicamente las funciones cuadráticas (suponga que a y p son números reales diferentes de 0):

a. $y = a(x - h)^2 + k$

b. $y = a(x - r_1)(x - r_2)$

c. $y = ax^2 + bx + c$

d. $4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$

Cada una de estas formas contiene unos parámetros. Por ejemplo, en la forma b, los parámetros son a , r_1 y r_2 . En el caso de la forma d, los parámetros son p , y_0 y x_0 .

A usted le será asignada una de estas formas simbólicas para desarrollar una serie de actividades.

Primera parte

Para cada parámetro de la expresión que le correspondió:

1. Pinte, en un mismo plano cartesiano, dos parábolas tales que el parámetro en cuestión tenga valores diferentes y los otros dos parámetros tengan el mismo valor en ambas parábolas.
2. Explique el significado gráfico de cada parámetro.

Segunda parte

Grupo $y = a(x - h)^2 + k$

Explique la relación algebraica entre los parámetros a , h y k y los parámetros de las demás formas dadas. Es decir, exprese a , h y k en

7. Funciones cuadráticas.

8. Se presentan sólo las dos primeras partes del texto.

función de a , r_1 y r_2 de la forma b ; haga lo mismo con las demás formas.

Grupo $y = a(x - r_1)(x - r_2)$

Explique la relación algebraica entre los parámetros a , r_1 y r_2 y los parámetros de las demás formas dadas. Es decir, exprese a , r_1 y r_2 en función de a , h y k de la forma a ; haga lo mismo con las demás formas.

Grupo $y = ax^2 + bx + c$

Explique la relación algebraica entre los parámetros a , b y c y los parámetros de las demás formas dadas. Es decir, exprese a , b y c en función de a , h y k de la forma a ; haga lo mismo con las demás formas.

Grupo $4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$

Explique la relación algebraica entre los parámetros a , x_0 y y_0 y los parámetros de las demás formas dadas. Es decir, exprese a , x_0 y y_0 en función de a , h y k de la forma a ; haga lo mismo con las demás formas.

Comentarios

Esta situación funciona bien cuando se divide el curso en cuatro grupos, cada uno de los cuales trabajará con una representación simbólica diferente. Con esta actividad se busca hacer explícita la relación entre las diversas representaciones simbólicas de las parábolas que son funciones. Permite hablar de las parábolas de manera general, mencionando características de las mismas y la relación de esas características con las expresiones simbólicas y gráficas. Este es el punto más importante: ¿cómo se afecta la parábola cuando se cambia este parámetro en esta expresión? y ¿qué puedo prever, apoyándome en las expresiones simbólicas, que va a suceder con todas las características de la parábola: el vértice, los cortes, el eje de simetría, la directriz, el foco, la concavidad, el crecimiento?

Esta actividad se puede presentar antes de que se hayan trabajado las representaciones simbólicas que se mencionan, pero su complejidad no disminuye mucho si se presenta cuando el estudiante se ha familiarizado con el significado de los parámetros de cada una de las representaciones. Se requiere un trabajo algebraico importante, por la necesidad de relacionar los parámetros de las diferentes representacio-

nes: despejar ecuaciones, simplificar, elevar al cuadrado o sacar raíz cuadrada a ambos lados de una igualdad, utilizar la fórmula cuadrática, completar cuadrados, etcétera.

Hay tres puntos que requieren especial atención y que pueden facilitar mucho el proceso de desarrollo de la actividad. El primero tiene que ver con el sentido de “parámetro”. Es muy importante que el estudiante sepa que: (1) es posible dar diferentes valores a un parámetro; (2) que cuando se cambia el parámetro, cambia algo en el objeto; y (3) que para efectos de “ver” qué hacen los parámetros, hay que analizarlos separadamente, dejar dos fijos y alterar el restante.

El segundo punto tiene que ver con el parámetro b de la expresión general cuadrática. No es fácil deducir las implicaciones de este parámetro en la representación gráfica. Cuando se modifica este parámetro dejando los otros fijos, las parábolas que se generan no parecen seguir un patrón; cuando se escriben las coordenadas del vértice, h y k , en función de a , b y c se descubre que al cambiar b el vértice de la parábola sigue una trayectoria parabólica.

El tercer punto tiene que ver con reconocer que todas las representaciones, aunque diferentes, hablan del mismo objeto. Este hecho, que parece trivial, puede marcar la diferencia entre poder hacer la segunda parte del ejercicio o no. El que se trate de un único objeto permite igualar los coeficientes de los términos semejantes de dos expresiones que lo están representando, lo que lleva a establecer las relaciones entre parámetros que se piden.

En este ejercicio es muy importante la forma en que los estudiantes presentan los resultados obtenidos, pues el argumento que se construya requiere un buen manejo de las representaciones gráficas y simbólicas. El trabajo en grupo sirve para complementar los diversos puntos de vista del ejercicio, pero hay una alta componente de trabajo individual que se debe hacer para llegar a una comprensión completa del sentido del ejercicio: la manipulación simbólica es fundamental y debe haber una cierta destreza para que las expresiones obtenidas sirvan para formular las conjeturas. Una sugerencia es que haya especialistas en parámetros; cada representación tiene tres parámetros, -en realidad dos, pues el parámetro a es común- y hay cuatro representaciones. Se puede pedir que cada estudiante se especialice en un parámetro de dos representaciones diferentes. Esto da 24 posibilidades diferentes de trabajo. Si se asigna el trabajo por parejas, hay suficiente trabajo para un grupo de 48 estudiantes. Se puede asignar al

trabajo una semana, permitiendo las consultas entre sí y con los profesores.

Los resultados se pueden presentar de acuerdo con los sistemas de representación. Los estudiantes, libremente hablan de todo lo que han encontrado en su investigación sobre una representación determinada. El profesor puede hacer en el tablero una tabla similar a la siguiente:

| Parámetro | Primera forma | Segunda forma | Tercera forma | Cuarta forma |
|-----------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| a | | | | |
| h | | | | |
| k | | | | |
| b | | | | |
| c | | | | |
| r_1 | | | | |
| r_2 | | | | |
| p | | | | |

Papel de los parámetros. Relación con otros parámetros

la cual se va llenando con la información que han encontrado los estudiantes. Al frente de cada parámetro se da la expresión que lo relaciona con los parámetros de las otras expresiones. No es la única tabla que se puede construir. La que se muestra puede servir de guía para hacer otras que puedan utilizarse para resaltar otros puntos importantes.

Situación 70: Aplicación • Proyecto de investigación

Texto

Tome una hoja tamaño carta (22 cm x 28 cm). Se desea construir con esa hoja una caja con tapa, que se va a sellar con cinta pegante y que cumpla con las siguientes condiciones:

- ▲ Use la mayor cantidad de papel posible
- ▲ Use el mínimo de cinta pegante
- ▲ Almacene el mayor volumen posible

Comentarios

Esta actividad toma mucho tiempo. Se busca que los estudiantes analicen el comportamiento de las funciones de perímetro, área y volumen para tomar decisiones con respecto cuál es la mejor caja. Sin embargo, la forma como se ha presentado busca que haya una evolución de las aproximaciones seguidas por los estudiantes: desde una etapa concreta y de soluciones intuitivas hasta una en que se utilizan funciones para modelar el perímetro, el área superficial y el volumen de la caja.

El proyecto se puede desarrollar en tres entregas. En la primera se busca que los estudiantes produzcan diferentes diseños que se pueden construir con la hoja de papel. Se puede usar el siguiente cuestionario:

Primera parte

1. Haga un análisis en papel de los diferentes diseños que definen una caja.
2. Haga una crítica de los diseños, suponiendo que, además, se quiere utilizar el mínimo de cinta pegante.
3. Escoja uno de los diseños. Llame x a la altura de su caja. ¿Es posible expresar las demás dimensiones de la caja (largo y ancho) en función de x ? En caso afirmativo, dé las expresiones; en caso contrario, explique por qué no se puede.
4. Repita el proceso para otro diseño.
5. Suponga que usted necesita construir cajas, pero que no sabe cuál diseño le implica menos gasto de cinta pegante. Con la información de los puntos b y c , ¿es posible saber cuál de los dos diseños le conviene? Comente.

Segunda parte

Tenga en cuenta los dos diseños analizados para responder las dos preguntas siguientes:

6. ¿Cuánta cinta pegante requiere una caja de 3 cm de altura?

7. ¿Qué dimensiones tiene una caja que requiera 40 cm de cinta?

Es posible suscitar discusiones con los estudiantes acerca de qué tipos de cajas han diseñado: ¿son en forma de cubos? ¿Son cilíndricas? ¿Qué desearían guardar allí? ¿Qué formas son más prácticas de construir? ¿Por qué no es usual hacer cajas en forma esférica?

En una segunda entrega se espera concretar algo con respecto al perímetro y al área superficial. Esto se puede manejar a través de un cuestionario similar al siguiente:

Tercera parte

Se desea construir con una hoja metálica de 22 cmx28 cm una caja con tapa y se va a utilizar soldadura para armarla. En esta ocasión se desea estudiar la cantidad de material que se requiere. A su grupo se le asignarán dos diseños para analizarlos.

8. Para los dos diseños asignados, diga qué área superficial tiene una caja de altura 3 cm. ¿Con cuál diseño se utiliza más material?

9. escoja uno de los diseños. Llame x a la altura de la caja.

▲ Exprese el área superficial en función de x

▲ Exprese la cantidad de soldadura que se requiere en función de x

10. Repita el proceso para el otro diseño.

11. ¿Cuántas cajas de área superficial 225 cm^2 se pueden obtener con los diseños dados? ¿Por qué?

12. Analice las funciones de área superficial y de cantidad de soldadura de cada uno de los diseños, para:

▲ Encontrar las dimensiones de la caja de mayor área superficial

▲ Encontrar las dimensiones de la caja que utiliza menos soldadura

13. Atendiendo al criterio: menos soldadura y mayor área superficial, ¿cuál diseño es mejor?

En esta segunda parte se ha cambiado el papel por lámina metálica para minimizar el trabajo en material concreto y buscar un mayor apoyo en herramientas más formales. Durante esta etapa es frecuente que los estudiantes tomen decisiones sobre casos concretos. Es común encontrar que los estudiantes asignan un mismo valor de x a ambos modelos y dependiendo del resultado deciden cuál diseño es mejor. El profesor debe lograr que los estudiantes vean la necesidad de analizar las funciones de manera general –posiblemente utilizando su gráfica–, mostrando que, aunque es cierto que para un valor particular de x un diseño supera al otro, en otros, sucede lo contrario o no se puede decidir.

En la última parte, que se muestra a continuación, se incorpora la indagación acerca del volumen, adicionando una ganancia por cada centímetro de cúbico que tenga la lata. Se espera que en este momento los estudiantes puedan producir las gráficas de costos y puedan utilizarlas para tomar una decisión. Si no se disponen de herramientas de cálculo, puede utilizarse una calculadora graficadora o el computador, bien para producir las gráficas y hacer estimaciones visuales, o bien para encontrar puntos de corte, máximos o mínimos, según se requiera.

Quinta parte

En esta última entrega se quiere investigar cómo se comporta el volumen de las cajas que se han estado analizando. Ustedes deben analizar los dos diseños con el fin de decidir cuál de ellos es el que permite construir la caja que:

- ▲ Usa la mayor cantidad de papel posible
- ▲ Usa el mínimo de cinta pegante
- ▲ Almacena el mayor volumen posible

Por otra parte, deben mostrar que la situación cambia cuando se colocan precios a cada elemento que se está considerando. Para esto último, supongan que cada cm de soldadura cuesta \$12; reciclar un cm^2 de lá-

mina sobrante cuesta \$8 y que se reciben \$3 por cada cm^3 de volumen que almacene la caja.

Se espera que usted haga un análisis de las funciones de desperdicio de área superficial, cantidad de soldadura y volumen y de las funciones de ingresos y egresos correspondientes.

Funciones lineales

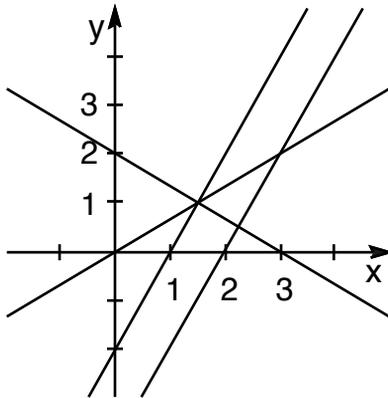
1. ECUACIONES • RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

Considere el siguiente sistema
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -3x + y = 5 \end{cases}$$

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de las dos rectas y es perpendicular a la recta $2x + 3y = 4$.

2. ECUACIONES • RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

- Para responder este punto utilice la figura siguiente como referencia.



- Escriba un sistema de dos ecuaciones lineales que esté representado en la gráfica y cuya solución sea el punto $(\frac{3}{2}, 1)$.
- Verifique simbólicamente la solución.
- Escriba un sistema de ecuaciones lineales que sea inconsistente y que esté representado en la gráfica.

2. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} ax + \frac{1}{2}y = 54 \\ -3x + 4x + b = 0 \end{cases} \quad \text{determine todos los valores de } a \text{ y } b \text{ para}$$

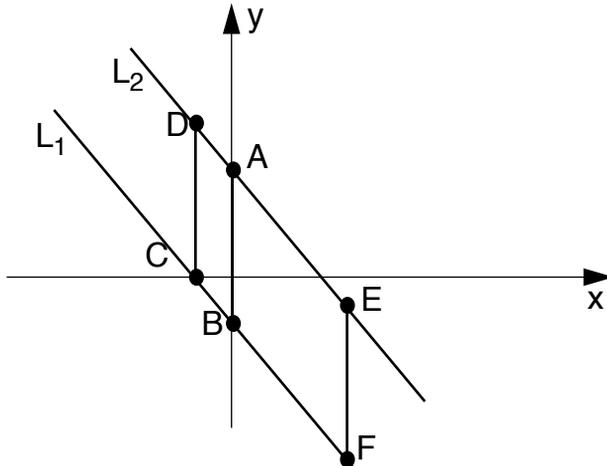
los que:

- El sistema tiene infinitas soluciones.
 - El sistema no tiene solución.
 - El sistema tiene una única solución.
3. Interprete gráficamente las soluciones dadas.

3. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

- DIVERSAS REPRESENTACIONES¹

Considere la siguiente figura:



1. ¿Qué puede decir acerca del signo de las pendientes de L_1 y de L_2 ?

1. Adaptado de Moschkovich et, al. (1993). pp. 85.

2. ¿Qué puede decir del signo de los cortes de las rectas con el eje Y?
3. La siguiente lista incluye las ecuaciones de las dos rectas. ¿Cuáles son? ¿Por qué? $y = 2x + 6$; $y=2x-2$; $y=-2x$; $y=-2x-2$; $y=-2x+6$; $y=2x$.
4. Halle las coordenadas de los puntos A, B, C y D (Se sabe que los segmentos CD y EF son paralelos al eje Y).
5. Si la coordenada en X del punto E es 5, ¿cuál es la coordenada en Y de E y cuáles las coordenadas de F? ¿Es coherente su resultado con la gráfica?
6. Halle las longitudes de los segmentos EF, CD y AB. ¿Tienen sentido sus resultados?
7. Dibuje otro segmento que conecte las dos rectas y que sea paralelo al eje Y. ¿Qué longitud tiene? ¿Se puede saber ese valor sin conocer las coordenadas de los extremos de los puntos? ¿Ayuda la ecuación?
8. Haga un plan para hallar el área de la figura CDEF.
9. Use ese plan para hallar el área.

4. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES • FAMILIAS

1. Cada una de las gráficas que se presentan en las Figuras 1 a 3, representa una familia de funciones lineales. De la lista de expresiones simbólicas que se proponen y para cada familia de funciones usted debe identificar cuáles son las expresiones simbólicas que permiten representar esa familia. Usted debe justificar cada una de las elecciones. Las expresiones simbólicas son:
 - a. $y = mx - 2$
 - b. $y = 2x + b$
 - c. $y = -2x + b$
 - d. $y = -2x - b$
 - e. $y = 2(x - h)$
 - f. $y = mx + 2$
 - g. $y = m(x + 2)$
 - h. $y = m(x - 2)$

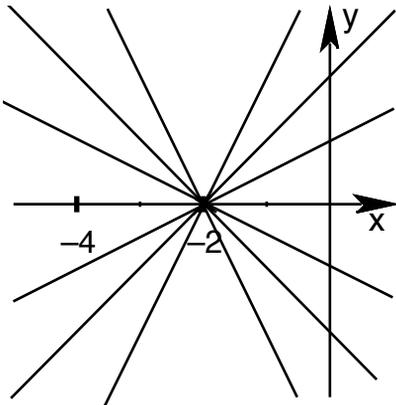


Figura N° 1.

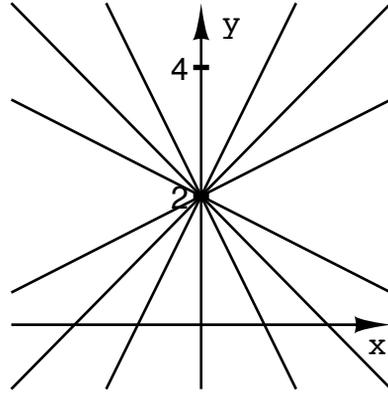


Figura N° 2.

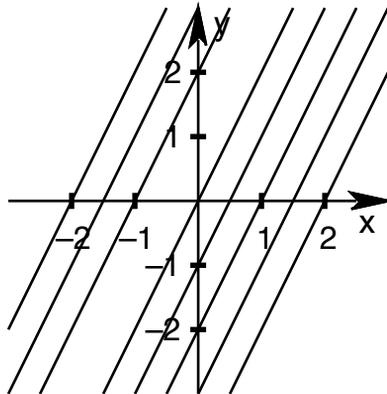
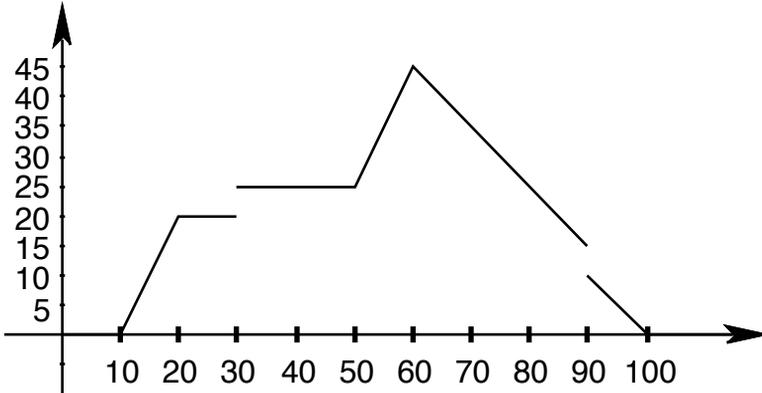


Figura N° 3.

5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA • PLANTEO

1. La figura muestra el nivel del agua en la tina del señor Galvis en función del tiempo. El señor Galvis puede abrir o cerrar el grifo, puede entrar o salir de la tina y puede abrir o cerrar el desagüe. Usted debe describir en palabras lo que muestra la figura, indicando qué unidades se están representando en los ejes y hallar la expresión simbólica de la función mostrada.



2. Invéntese un ejemplo de una situación similar a la del ejercicio anterior (por ejemplo, el consumo de energía en su casa durante un día o la cantidad de gasolina en el automóvil de su casa). Haga una gráfica de la situación y halle la representación simbólica correspondiente.

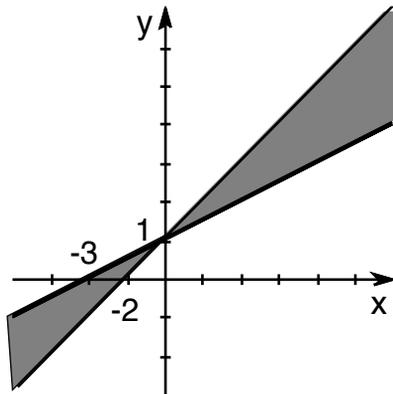
6. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

1. Utilizando la función parte entera de la calculadora, trace la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{[x]}$.
2. Dé un argumento que justifique la forma de la gráfica.
3. Dé una expresión simbólica que defina la función a trozos.
4. Haga una descripción de la función, a partir de la gráfica. Mencione todas las características posibles.

7. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES • FAMILIAS

1. Dé una expresión que caracterice a todas las rectas que están en la región sombreada:



2. Señale la región en la que se ubican las rectas perpendiculares a las rectas del punto anterior y que pasan por el punto (0,1).
3. Dé la expresión simbólica de esta familia de rectas.

8. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • FAMILIA

La ecuación $y = m(x - 2) + 3$ describe una recta para cada valor de m , donde m es cualquier número real. Este grupo de rectas se llama una familia. La recta $y = -x + 5$ pertenece a esta familia.

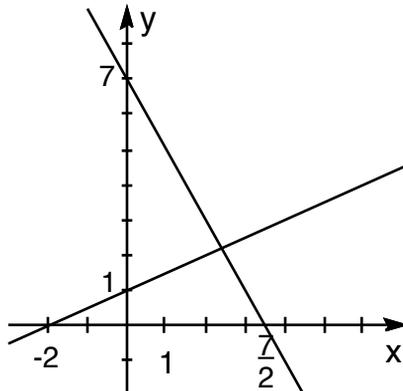
1. ¿Existe un par de rectas de esta familia que sean paralelas? Si es así, encuéntrelas. Si no, explique por qué no las hay.
2. ¿Existe un par de rectas de esta familia que sean perpendiculares? Si es así, encuéntrelas. Si no, explique por qué no las hay.
3. Describa en palabras esta familia de rectas. Es decir describa las características que hacen que una recta pertenezca o no a la familia.

9. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES • FAMILIAS

1. Señale la región del plano cartesiano que contiene rectas que pasan por el origen cuya pendiente es inferior a 1.
2. Señale la región que contiene rectas cuya pendiente es superior a 1, que pasan por el punto $(0,-2)$.
3. Escoja una recta que cumpla la característica dada en 1. A partir de esa recta, trace la recta cuya pendiente es la mitad de la pendiente de la recta escogida. Dé la ecuación correspondiente.
4. Escoja una recta que cumpla la característica dada en 2. Trace la recta cuya pendiente es el triple de la pendiente de la recta escogida.

10. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

Para responder este punto utilice la figura siguiente como referencia.

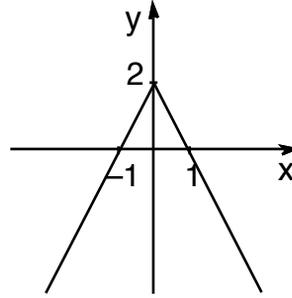
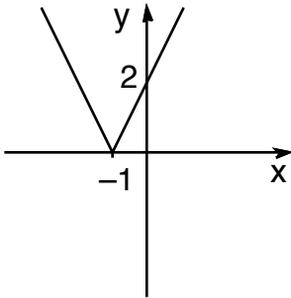
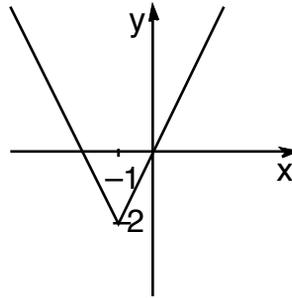
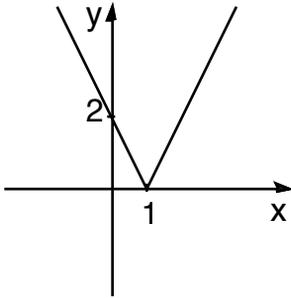


1. Halle las ecuaciones de las rectas que aparecen en la gráfica.
2. Halle el punto de corte entre las rectas.

11. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

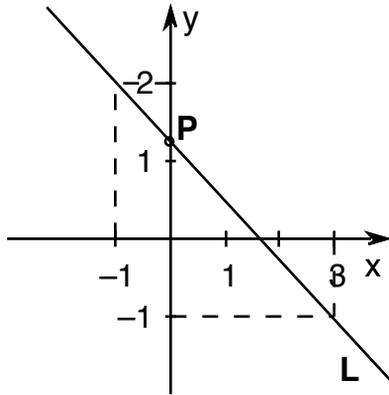
1. Se sabe que $f(x) = 2(x+1)$ y que a es un número real. Diga cuáles de las siguientes gráficas son de la forma $|f(x)| + a$ y cuáles no y explique porqué.



2. Halle la recta perpendicular a $2x + 2$ y que pasa por el punto $(0,2)$. Llámela $g(x)$.
3. Sea $h(x) = |f(x)|$. Resuelva la desigualdad $g(x) < h(x)$.

12. ECUACIONES • DIVERSAS REPRESENTACIONES

Para responder este punto utilice la figura siguiente como referencia.



1. Determine la ecuación de la recta L que se muestra en la figura.
2. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular a L que pasa por el punto P?
3. Dé la ecuación de la recta que es paralela a L y está a la misma distancia del origen que L.
4. Se tienen las ecuaciones de tres rectas. Con una cuarta recta es posible completar un cuadrado; ¿qué condiciones debe cumplir esa recta para completar el cuadrado? Halle la ecuación de esta recta y dé la gráfica correspondiente.

13. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES • DIVERSAS REPRESENTACIONES

1. Halle la representación simbólica de la función lineal cuya representación gráfica se muestra en la Figura N° 1:

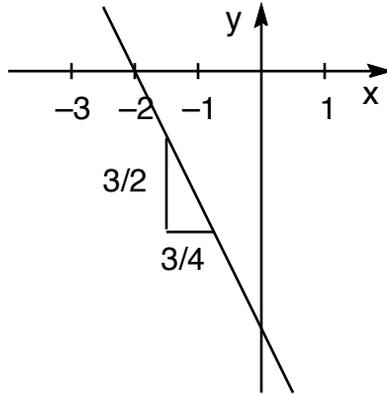


Figura N° 1.

2. Halle la representación simbólica de la función lineal cuya representación gráfica se muestra en la Figura N° 2. Halle el valor de a .

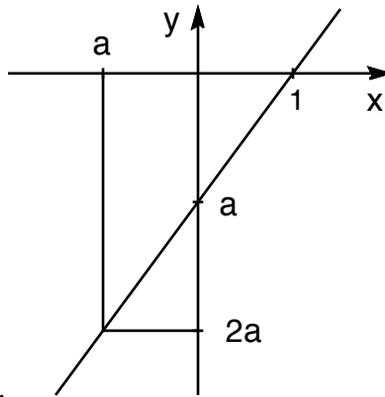


Figura N° 2.

3. Otra manera de representar simbólicamente una recta es $y = m(x-h)$. ¿Qué significado tiene h en la gráfica de la función lineal correspondiente?
4. Para las Figuras 1 y 2, exprese las funciones lineales en la forma $y = m(x-h)$.

14. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

Para este juego se requiere que todos los participantes tengan calculadora gráfica. Las reglas son las siguientes:

1. Se conforman grupos de 4 personas.
2. Cada grupo está compuesto por dos equipos de dos personas cada uno.
3. Cada equipo hace en una de sus calculadoras la gráfica de una función lineal tal que m y b sean enteros, entre -4 y 4 .
4. Cada equipo debe tener lista la gráfica correspondiente a los cinco minutos de comenzar la iteración.
5. Si un equipo no tiene una gráfica lista en ese momento, pierde esa iteración.
6. Una vez intercambiadas las calculadoras, los equipos no pueden tocar ninguna de las teclas de la misma.
7. Una vez intercambiadas las calculadoras, cada equipo debe determinar la expresión simbólica de la gráfica representada.
8. Gana el equipo que primero determine correctamente la expresión simbólica.
9. El equipo que crea tener la expresión correcta debe decir ¡YA! y el equipo contrincante debe parar de trabajar. En este momento se observa en la calculadora la expresión simbólica que generó la gráfica y se compara con la expresión simbólica que propuso el equipo que dijo ¡YA!
10. Si la expresión simbólica del equipo que dijo ¡YA! es incorrecta, gana el equipo contrario.
11. Si un equipo considera que la gráfica que le entregaron no tiene información suficiente, debe decir ¡YA!. Los dos equipos paran de trabajar y cada equipo debe preparar un argumento para justificar que

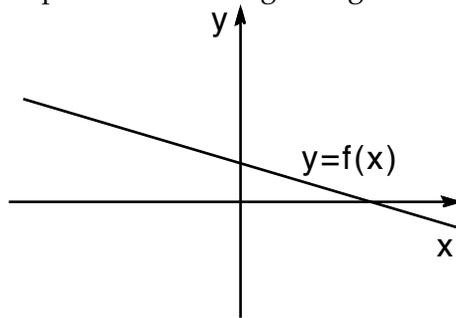
la información es o no suficiente. El profesor determinará quién tiene la razón.

12. Pierde el equipo que no cumpla con alguna de las reglas anteriores.

13. El profesor determinará una calificación para cada uno de los equipos a partir de la calidad (o interés) de las gráficas propuestas, la calidad de las respuestas, la calidad de los argumentos propuestos cuando hay diferencias y el número de iteraciones que el grupo juegue.

15. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

Para responder este punto utilice la figura siguiente como referencia.



1. Represente gráficamente, en el mismo plano, las siguientes expresiones:

a. $y_1 = 3f(x)$

b. $y_2 = \left(\frac{1}{4}\right)f(x)$

c. $y_3 = -f(x)$

2. Cada uno de los puntos de la gráfica de f son de la forma $(x, f(x))$.

a. ¿Cuál es la representación gráfica de los puntos de la forma $(f(x), x)$?

- b. ¿Cuál es la representación gráfica de los puntos de la forma $(x, -f(x))$?
- c. ¿Cuál es la representación gráfica de los puntos de la forma $(x, f(-x))$?
- d. ¿Cuál es la representación gráfica de los puntos de la forma $(-x, f(x))$?
- e. ¿Cuál es la representación gráfica de los puntos de la forma $(-x, f(-x))$?
3. Suponga que el punto de corte en y es 2 y que el punto de corte en x es 6. Trace las gráficas de las siguientes expresiones:
- a. $y_4 = f(x) + 2$
- b. $y_5 = -\left(\frac{1}{2}\right)f(x) - 1$
4. Determine los puntos (x,y) del plano que cumplen:
- a. $y = f(x) + 1 = 2$
- b. $y = f(x - 2) = 2$
5. Determine en la gráfica los valores de x para los cuales $f(x) < 0$.
6. Determine los valores de x para los cuales $f(x) < -1$.
7. Si $-4 < x < -2$, ¿qué valores toma $f(x)$?

16. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • FAMILIAS

Una recta puede representarse en la forma $y = mx+b$. Asignando diversos valores a m y a b se obtienen diferentes rectas. m y b se denominan parámetros. En el plano cartesiano izquierdo de la Figura N° 1 se ha puesto en el eje horizontal el parámetro **m** y en el eje vertical el parámetro **b**. De esta forma, un punto en este plano cartesiano determina a una recta en un plano cartesiano con ejes x y y. En la Figura N° 1

se observa la relación entre los puntos **A** y **B** del plano **m-b** y las correspondientes rectas en el plano cartesiano **x-y**.

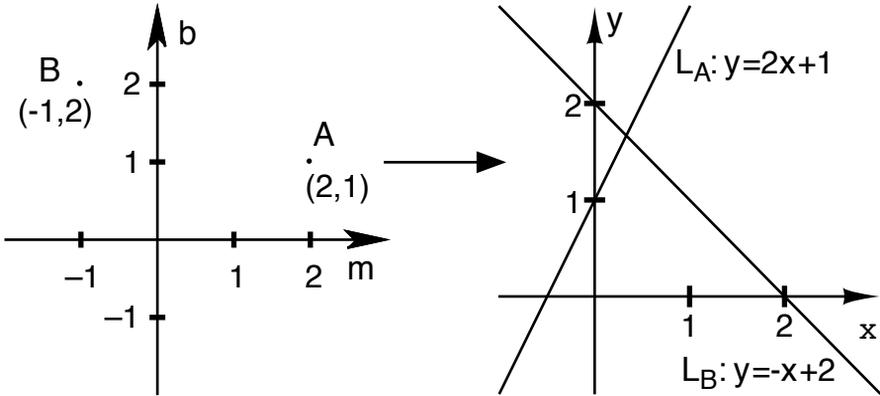


Figura N° 1.

De acuerdo con esta convención, una recta en el plano **m-b** representa una familia de rectas en el plano **x-y**. Así, en la Figura N° 2, la recta **L** del plano **m-b** representa las rectas con pendiente $m = -1$:

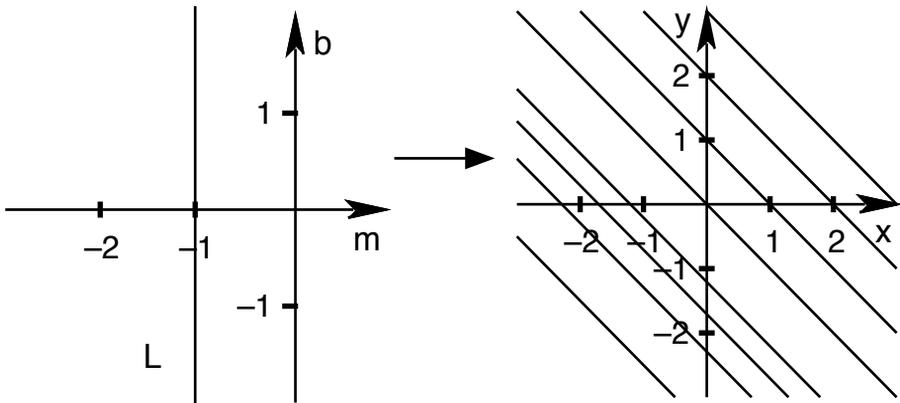


Figura N° 2.

1. ¿Qué familia de rectas, en el plano $x-y$, representa la recta L del plano $m-b$ de la Figura N° 3?

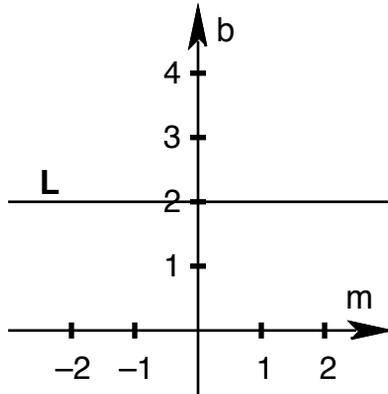


Figura N° 3.

2. ¿Cómo se identifica en el plano $m-b$ la familia de rectas de la Figura N° 4?

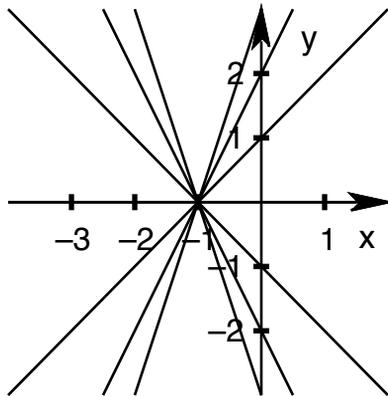


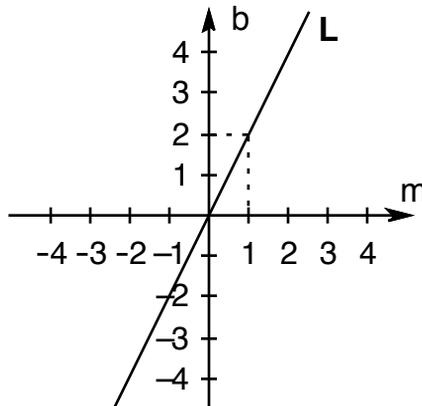
Figura N° 4.

3. Desarrolle ahora su propia teoría: describa cómo sería un nuevo plano cartesiano $m-h$ donde h representa la abscisa al origen de la recta. Desarrolle unos ejemplos de la relación entre el plano $m-h$ y el plano $x-y$.

- ¿Qué recta en el plano m - b representa la familia de rectas de la Figura N° 4?
- ¿Cómo se relacionan los planos m - b y m - h ?

17. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • FAMILIA

Considere la familia de funciones lineales de la forma $y = mx + b$ y para la cual los parámetros m y b se relacionan según como se muestra en la figura:



- Describe la familia de rectas que están representadas por la recta L .
- Describe la familia de rectas cuya relación entre m y b es una recta perpendicular a L y que pasa por el origen.

18. REPRESENTACIÓN GRÁFICA • CONSTRUCCIÓN OBJETO

Para cada una de las funciones que se presentan en las figuras 1 a 8, halle su expresión simbólica y explique la relación entre las características de la expresión simbólica y las características de la representación gráfica.

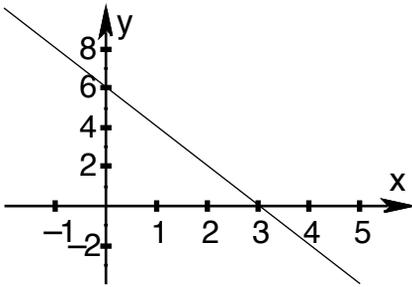


Figura N° 1.

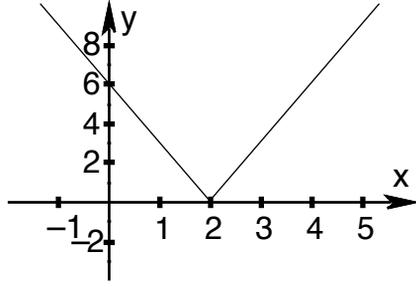


Figura N° 2.

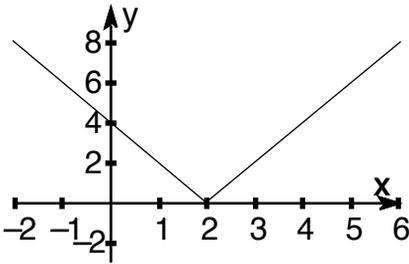


Figura N° 3.

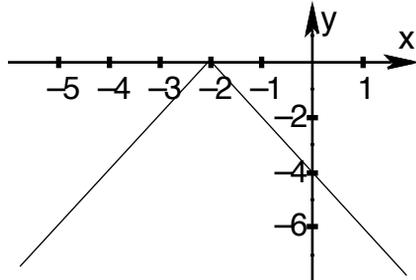


Figura N° 4.

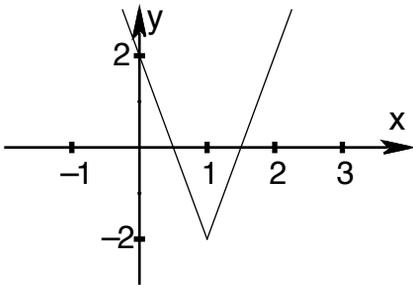


Figura N° 5.

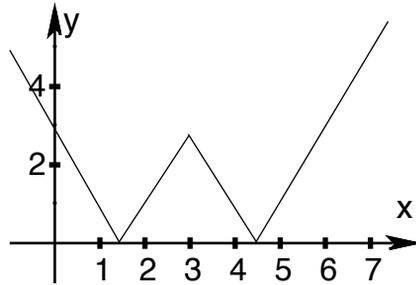


Figura N° 6.

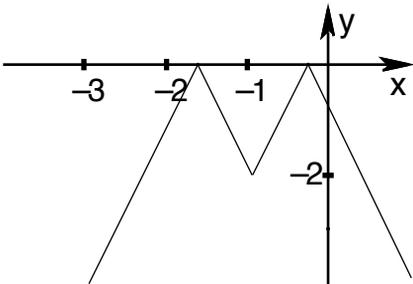


Figura N° 7.

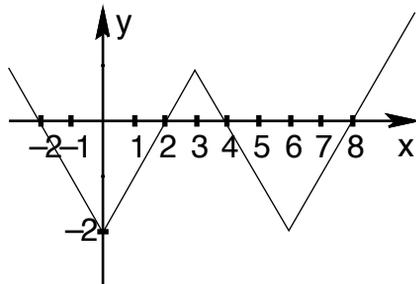
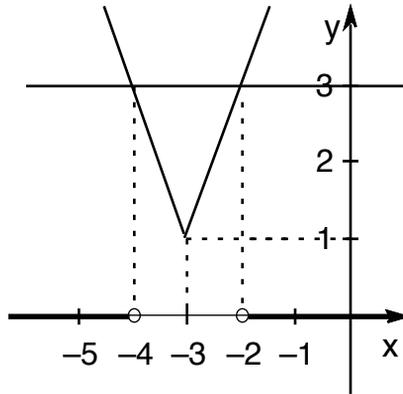


Figura N° 8.

19. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

Lo que se presenta a continuación son apartes de la solución correcta que un estudiante dio a un problema sobre desigualdades. Usted debe decir cuál era el texto del problema, expresando y justificando su razonamiento.



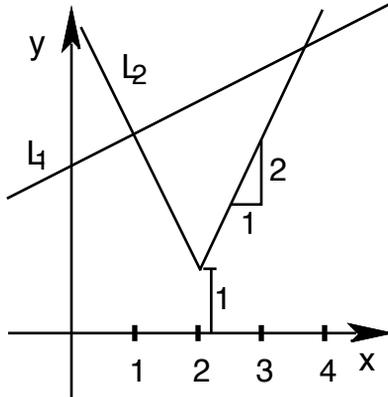
Conjunto solución = $\{x | -\infty < x < -4 \quad \text{o} \quad -2 < x < \infty\}$

20. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN • ENSAYO

Escriba un ensayo en el que explique qué es el valor absoluto. Presente por lo menos un ejemplo para sustentar sus afirmaciones.

21. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

Los siguientes son apartes de la solución que un estudiante dio a un problema. La gráfica hace parte de la solución. Las frases entre comillas fueron escritas por el estudiante. Todo lo que escribió el estudiante estaba correcto. Usted debe reconstruir el texto del problema y hallar su solución.

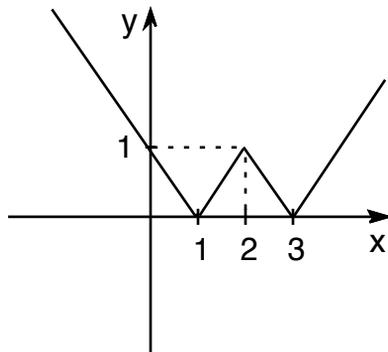


“Como la recta L_1 es perpendicular a la recta L_2 y la recta L_1 corta el eje x en $x = -5$, entonces” (...) “el conjunto solución de la desigualdad propuesta es $(-\infty, \dots] \cup [\frac{11}{3}, \infty)$...”

22. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

Encuentre dos expresiones simbólicas para una función que tenga la siguiente gráfica:



Indicaciones:

1. Esta gráfica resultó de haber aplicado valor absoluto a la gráfica de otra expresión. ¿Cuál era esa gráfica?

2. La gráfica que usted obtuvo en el punto anterior, también se puede ver como la gráfica de una función que se ha trasladado verticalmente ¿En que sentido se hizo? ¿De cuánto fue? ¿Cómo era la gráfica antes de la traslación? ¿Por qué?
3. Esta última gráfica, también se puede ver como el resultado de haber aplicado un valor absoluto ¿Cómo era la gráfica antes de haber aplicado el valor absoluto? ¿A qué expresión se le aplicó?
4. Recopilando todo lo que usted ya hizo en los tres pasos anteriores, escriba una expresión simbólica que corresponda a la gráfica original. Utilice la calculadora para verificar el resultado.

23. DESIGUALDADES • DIVERSAS REPRESENTACIONES

A continuación se presenta un proceso de solución de la desigualdad $5(3 - 2x) \geq 10$:

$$5(3 - 2x) \geq 10 \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right) \cdot 5(3 - 2x) \geq \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 10 \quad (2)$$

$$3 - 2x \geq 2 \quad (3)$$

$$3 - 2x + (-3) \geq 2 + (-3) \quad (4)$$

$$-2x \geq -1 \quad (5)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x) \leq \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) \quad (6)$$

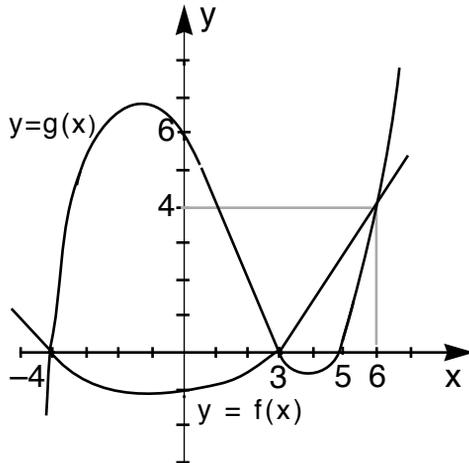
$$x \leq -\frac{1}{2} \quad (7)$$

1. Para cada uno de los pasos (1), (3), (5) y (7), haga la gráfica de las funciones que se encuentran a ambos lados de la desigualdad correspondiente y señale sobre el eje de las x los valores de x para los cuales se cumple la desigualdad.

2. A partir de lo hecho en a), explique la frase: “la propiedad de orden en la adición y la propiedad de orden en la multiplicación mantienen la desigualdad”.
3. Explique el concepto de desigualdades equivalentes con este ejemplo.

24. DESIGUALDADES • DIVERSAS REPRESENTACIONES

Dadas las gráficas de f y g en la figura, halle los conjuntos solución de las desigualdades propuestas:



- a. $f(x) < g(x)$
- b. $g(x) < f(x)$
- c. $|f(x)| \leq g(x)$
- d. $f(x) \geq |g(x)|$
- e. $|f(x)| \leq |g(x)|$

25. DESIGUALDADES • ENSAYO

1. Interprete al menos de tres formas diferentes (por ejemplo: verbalmente, en una recta, en una desigualdad, en el plano) los siguientes enunciados:
 - a. $|x - 2| < 1$
 - b. $|x - c| < 1$
 - c. $|x - c| < \delta$
2. Trace las gráficas de las siguientes expresiones, utilizando transformaciones de la gráfica de $y=x$:
 - a. $y = 4|x| - 3$
 - b. $y = 4|x + 2| - 3$
 - c. $|y| = 4|x + 2| - 3$
3. Haga un comentario con respecto a la relación que hay entre las gráficas.

26. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

El conjunto solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$ es $[-2,0) \cup (1,3]$. Se sabe que

▲ f es una función segmentada² definida sobre todos los reales

▲ g es una función de la forma: $g(x) = a|x - b| + c$, donde a, b y c son números enteros

1. Encuentre expresiones para f y para g , de manera que cumplan las condiciones dadas.

2. En el curso se denomina: “lineal, definida a trozos”.

2. Resuelva la desigualdad planteada y muestre que tiene el conjunto solución propuesto.

27. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

Halle los valores de a y b de tal forma que la siguiente afirmación sea verdadera:

“El conjunto solución de la desigualdad $-|x + 2| + 4 > a$ es $S = (b,0)$ ”.

28. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

De la función f se sabe que:

a. Es de la forma $f(x) = ||a(x - b)| - c| - d$, con a, b, c y d reales

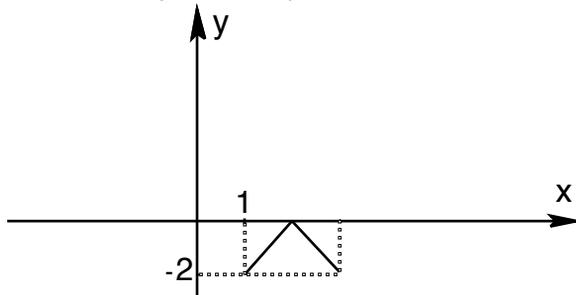
b. Su expresión como función a trozos es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \text{-----} & \text{si } x \leq 1 \\ \text{-----} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \text{-----} & \text{si } 2 < x \leq e \\ a(x - 4) & \text{si } e < x \end{cases}, \text{ siendo } e \text{ un número real}$$

c. $f(3) = -2$

d. El conjunto solución de $f(x) < 2$ es $(-1,5)$

e. Una porción de la gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura:



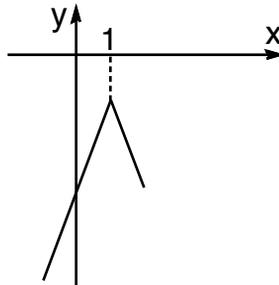
Halle la función f . Usted puede utilizar únicamente la información que está dada explícitamente. Para ello, usted debe:

1. Hacer la gráfica completa.
2. Hallar la expresión de f como función a trozos (forma b.).
3. Hallar la expresión simbólica de f en la forma a.
4. Verificar que la afirmación d. es verdadera.

29. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

De una función $f(x)$ se sabe lo siguiente:

- a. Es de la forma $f(x) = a | |b(x-c) | +d | +e$, con a, b, c, d y e números reales.
- b. El conjunto solución de $f(x) \leq -3$ es $(-\infty, 0] \cup \{2\} \cup [4, \infty)$.
- c. $f(1) = -1$.
- d. Parte de la gráfica de $f(x)$ es así:



- e. La definición a trozos de $f(x)$ es de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dots, & x \in (-\infty, 1) \\ \dots, & x \in [1, 2) \\ 2x - 7, & x \in [2, 3) \\ \dots, & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Usted debe:

1. Completar la expresión a trozos de la función.
2. Hallar los valores a , b , c , d , y e de la expresión en valor absoluto.
3. Completar la gráfica.
4. Verificar que satisface la desigualdad dada en la segunda condición.

30. APLICACIONES • PLANTEO

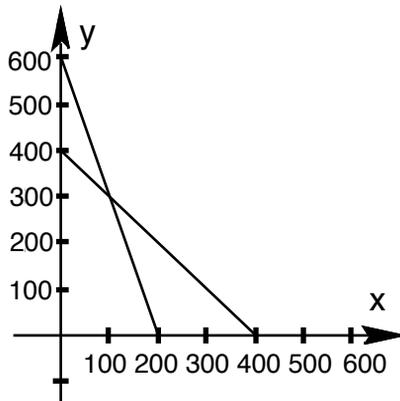
1. Pruebe que los puntos A: $(6,-13)$, B: $(-2, 2)$, C: $(13,10)$ y D: $(21,-5)$ son los vértices de un cuadrado. Para eso:
 - a. Determine qué datos le dan.
 - b. Determine qué le piden.
 - c. Represente gráficamente la situación.
 - d. Teniendo en cuenta las características que tiene un cuadrado y los datos que le dan, analice qué otra información puede obtener.
 - e. Haga un plan para resolver el problema.
 - f. Desarrolle el plan.
 - g. ¿Cómo verifica que sus respuestas son correctas?

31. APLICACIONES • PLANTEO

John es dueño de un restaurante de comida rápida, llamado **John's**. En su restaurante, él vende a sus clientes, por \$1,200 pesos, un paquete consistente en 6 gaseosas y 2 hamburguesas.

En otro restaurante, **Jairo's**, el dueño propone otro negocio similar: una gaseosa y una hamburguesa por \$400.

1. Explique por qué la relación entre el precio posible de la gaseosa (llámelo x) y el precio posible de la hamburguesa (llámelo y) en el restaurante John's es: $y = -3x + 600$.
2. Explique por qué en el caso del restaurante Jairo's la relación es:
 $y = -x + 400$.
3. En el plano cartesiano que aparece a continuación se encuentran las gráficas de la relación entre los precios de la gaseosa y de la hamburguesa tanto en John's, como en Jairo's. Identifique la gráfica de cada restaurante y justifique su elección.



4. Explique por qué en el restaurante John's no es posible que la gaseosa valga \$200 y la hamburguesa \$300. Proponga un precio de gaseosa y hamburguesa que sea posible en John's, de acuerdo al negocio que este restaurante propone. Haga lo mismo con Jairo's.
5. Dé un ejemplo de un precio de gaseosa y un precio de hamburguesa que no sea posible en John's y una pareja de precios que no funcione con el negocio de Jairo's. Explique.
6. Halle el único valor de la gaseosa y de la hamburguesa que son posibles al mismo tiempo en John's y en Jairo's. Resuelva esto simbólicamente (con las ecuaciones) y justifique su respuesta gráficamente.

7. ¿Para qué precios de la gaseosa, es más cara la hamburguesa en John's que en Jairo's? Expresa este problema simbólicamente, resuélvalo y justifíquelo gráficamente.

32. APLICACIONES • PLANTEO

“-¿Cuánto cuestan los pasteles?- preguntó al dependiente

-Depende del tamaño; tenemos grandes y pequeños. Uno grande cuesta lo mismo que tres pequeños.

-¿Cuánto me costarían siete grandes y cuatro pequeños?

-\$120 más que si comprase cuatro grandes y siete pequeños- fue la enigmática respuesta”.

¿Cuánto cuesta cada tipo de pastel?

33. APLICACIONES • PLANTEO

Una tienda de video ofrece dos planes de alquiler de películas. Si la persona paga \$9,000 de afiliación al club de video, el alquiler por película le cuesta \$800. Si la persona no quiere afiliarse al club, alquilar cada película le cuesta \$1,300.

1. Represente gráficamente la variación de costos de los dos planes con respecto al número de películas.
2. ¿Cuántas películas puede alquilar una persona que llega por primera vez a la tienda con \$15,000? ¿Cuántas, otra que llega con \$25,000?
3. ¿Cuánto cuesta alquilar 10 películas en cada plan?
4. ¿Es posible que haya un número de películas alquiladas para el cual en los dos planes se pague lo mismo? ¿Porqué? Si lo hay, ¿cuál es ese valor y cuánto hay que pagar?
5. Haga un comentario sobre cuál plan es mejor.

34. APLICACIONES • PROYECTO INVESTIGACIÓN

En la casa de Camilo, cuando se cocina sopa en la estufa eléctrica para cuatro personas, se hace lo siguiente en el tiempo:

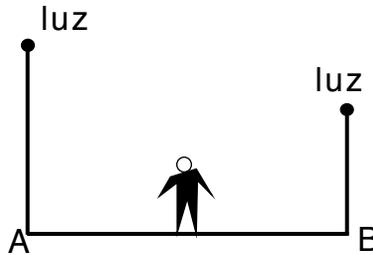
| Minutos | Acción |
|---------|---------------------------------|
| 0-10 | Preparación de los ingredientes |
| 10-15 | Se pone la estufa en "alto" |
| 15-25 | Se pone la estufa en "bajo" |
| 25-30 | Se apaga la estufa |

- Haga un bosquejo de las gráficas de las siguientes variables en función del tiempo:
 - El consumo total de energía eléctrica desde el momento 0 (en que se comenzó a hacer la sopa).
 - La cantidad de energía eléctrica que se está consumiendo en un instante dado (vatios por segundo).
 - La temperatura de la estufa en un momento dado.
 - El grado de cocimiento de las verduras que están en la sopa.
- Describa las relaciones que usted puede descubrir entre estas gráficas. Por ejemplo, ¿es posible deducir la forma de una gráfica dada, a partir de la forma de otra de las gráficas?
- Explique lo que sucede con las gráficas si se dan las siguientes situaciones (puede hacer las gráficas correspondientes, pero lo importante es su explicación).
 - Se hacen dos sopas iguales al mismo tiempo en la misma estufa.
 - Se hace una sopa para ocho personas.
 - El televisor está prendido durante el tiempo en que se hace la sopa.

- d. La sopa se hace en una estufa que gasta el doble de energía que la estufa original.
4. Formule y resuelva este ejercicio bajo la suposición de que el tema ya no es la sopa, sino un automóvil y las posibles variables de interés son, entre otras, distancia recorrida y velocidad.

35. APLICACIONES • PLANTEO

Se colocan dos luces en los extremos superiores de dos postes como se ilustra en el dibujo:



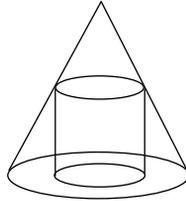
Una persona que está en el poste A empieza a caminar hacia el poste B. Se conoce la altura de la persona (170 cm), la de los postes 3 y 2 m respectivamente y la distancia que separa los postes (5 m).

1. Explique cómo varía la longitud de la sombra que proyecta la persona por efecto de la luz del poste A, a medida que la persona se aleja del poste.
2. Dé una expresión para la longitud de esa sombra en función de la distancia de la persona al poste A.
3. Dé una expresión, en función de la distancia de la persona al poste A, para la longitud de la sombra que proyecta la persona por efecto de la luz del poste B, a medida que la persona se va acercando al poste B.
4. Verifique que las expresiones tienen sentido, tomando algunos valores de la distancia de la persona al poste A, para los cuales usted puede conocer cuánto miden las sombras.

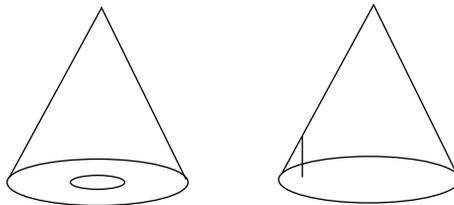
5. ¿Cuánto miden las sombras cuando la persona se encuentra a la mitad del camino entre A y B?
6. ¿Hay algún momento en el cual las dos sombras midan lo mismo? ¿Por qué?

36. APLICACIONES • DIVERSAS REPRESENTACIONES

En este ejercicio se quiere determinar el volumen de un cilindro inscrito en un cono de radio 9 cm y de 16 cm de altura.

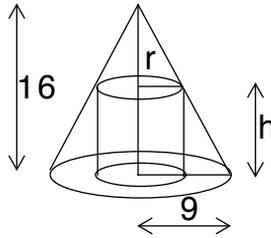


1. ¿Cuántos de estos cilindros se pueden construir? ¿De qué depende ese número?
2. Las dimensiones del cilindro son el radio de la base y la altura. En este caso ninguna de las dos se conoce pero cuando se conoce una, la otra queda determinada. ¿Por qué?
3. En cada uno de los conos siguientes, está determinada una de las dimensiones de un cilindro que se puede inscribir. Complete el cilindro en cada caso.

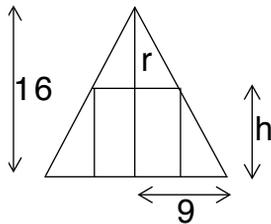


Entonces las variables del problema son dos, r (radio de la base del cilindro) y h (altura del cilindro). Estas variables no son independien-

tes. Están relacionadas y se quiere hallar esta relación. Para comenzar se colocarán en el dibujo todos los datos que se tienen.



Se puede hacer un corte vertical de esta figura para ver de otra forma, cómo se relacionan estos datos.



Se busca establecer la relación entre h y r. En esta figura hay varios triángulos semejantes que permiten determinar esta relación.

4. Escriba una ecuación que relacione h y r.
5. Escriba h en función de r.
6. ¿Cuánto vale h, si el radio de la base del cilindro inscrito es $4, \frac{1}{2}, 9, 0, \sqrt{3}$?

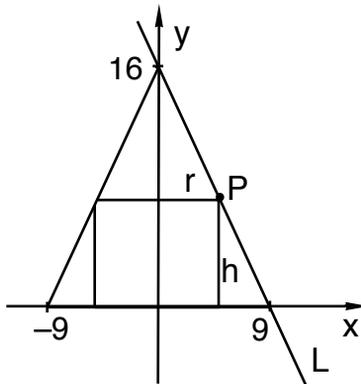
Además se quiere determinar el volumen del cilindro inscrito.

7. ¿Cuál es el volumen de este cilindro?
8. Escriba el volumen del cilindro en función de r.
9. ¿Qué volumen tiene el cilindro inscrito, si la base tiene de radio $4, \frac{1}{2}, 9, 0, \sqrt{3}$?

10. Escriba el volumen del cilindro inscrito en función de h .

11. ¿Cuál es el volumen del cono?

Otra forma de encontrar la relación entre h y r es colocar el corte vertical de la figura sobre el plano cartesiano, así:



12. ¿Qué coordenadas tiene el punto P?

13. Los puntos de la recta L satisfacen la ecuación $144 - 16x = 9y$. P es un punto de esta recta. ¿Qué relación hay entonces entre r y h ?

14. Exprese r en función de h .

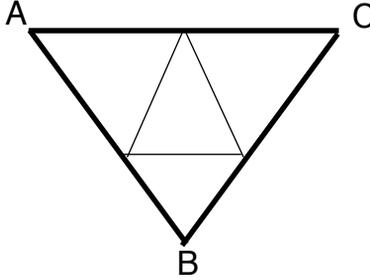
Existe otra forma de encontrar la relación entre h y r . Por una parte, se conoce el área del triángulo que se genera al tener el corte vertical del cono; esta área se puede expresar, a su vez, como la suma de las áreas de los tres triángulos y el cuadrado –éste último corresponde al corte vertical del cilindro–. Igualando esta suma de áreas al valor del área del triángulo se obtiene una ecuación en dos incógnitas.

15. ¿Cuál es esa ecuación? ¿Cuál es la relación entre h y r ?

16. Haga un comentario sobre los diferentes métodos utilizados para encontrar la expresión que relaciona h y r .

37. APLICACIONES • DIVERSAS REPRESENTACIONES

En el triángulo isóceles ABC, de base 6 cm y altura –tomada desde la base– 4 cm, se quiere inscribir otro triángulo isóceles, según se muestra en la figura:



El objetivo de este ejercicio es determinar expresiones que muestren cómo varían el perímetro y el área del triángulo inscrito en función de su altura. Para ello se buscará establecer una relación entre la altura y la base del triángulo usando diferentes caminos.

1. ¿Cuántos triángulos pueden inscribirse?
2. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que puede tomar la altura? ¿Cuánto valen el perímetro y el área en esos casos?

Semejanza de triángulos

3. Si la altura del triángulo inscrito cambia, su base también cambia. Establezca una relación entre la altura y la base del triángulo utilizando semejanza de triángulos.
4. Escriba expresiones para determinar el perímetro y el área del triángulo inscrito en función de una de las dimensiones del triángulo.
5. ¿Cuánto valen el área y el perímetro cuando las alturas de los triángulos inscritos son 2 , $5/4$, π , 0 y 4 ?

Plano cartesiano, primera posibilidad

6. Sitúe el origen del plano cartesiano en el punto medio del segmento AC del triángulo dado.

- a. Determine las coordenadas de los puntos A, B y C.
- b. Determine la ecuación de la recta AB.
- c. Utilice este hecho para establecer una relación entre la altura y la base del triángulo inscrito.

Plano cartesiano, segunda posibilidad

7. Sitúe el origen del plano cartesiano en el vértice B del triángulo dado.
 - a. Determine las coordenadas de los puntos A y C.
 - b. Halle la ecuación de la recta AB.
 - c. Use este hecho para establecer una relación entre la altura y la base del triángulo inscrito.

Areas

8. El hecho de que se conoce el área del triángulo ABC, se puede utilizar para determinar la relación entre la altura y la base del triángulo inscrito. Diga cómo y halle la relación.

Comentarios

9. ¿Cuál estrategia es mejor? Explique.

38. APLICACIONES • PLANTEO

El objetivo de este ejercicio es trabajar en el proceso general de resolución de problemas. Se va a dar información sobre una cierta situación. Usted debe analizarla para efectos de responder las preguntas que se formulan al final. No es necesario llegar a una solución concreta; será necesario tomar muchas decisiones a lo largo del proceso para poder llegar a alguna solución coherente.

El equipo de fútbol³

Un equipo dispone de cierta cantidad de dinero para repartir entre sus jugadores. Hay jugadores de primera y segunda categoría. Cada jugador, según un acuerdo previo, debe recibir por lo menos \$300,000. Los jugadores de primera categoría deben recibir por lo menos el doble de los de segunda. El director del equipo recibe un 45% más de lo que recibe el mejor jugador del equipo.

Hay dos jugadores destacados. Jaime, quien recibió ofertas de otros clubes y espera obtener, por lo menos el 10% del total repartido, y Carlos, indispensable en el equipo, quien recibirá dos tercios de lo que reciba Jaime.

El club, aunque tiene una cierta cantidad de dinero disponible, está en dificultades económicas, pues los ingresos por taquilla han disminuido significativamente, el arriendo se incrementó en un 35% y algunos empleados han solicitado aumentos hasta del 40%.

¿Cómo pueden repartir todo el dinero del que disponen?

Preguntas

1. ¿Qué se pide? ¿Cómo debe ser la respuesta (un número, una fórmula, un nombre, un conjunto de números)?
2. ¿Cuáles son las incógnitas? Haga una lista, e indique qué significa cada una.
3. ¿Qué datos, condiciones o relaciones se dan? Escríbalos.
4. Haga un diagrama, una gráfica, o presente un ejemplo con el que pueda entender mejor la situación. ¿Son los datos y condiciones dados suficientes? ¿Son redundantes? ¿Se contradicen entre sí?
5. Elabore un plan, ya sea para resolver todo el problema o para resolver una parte de él; si es necesario, cambie algunos datos, olvide algunas condiciones, haga hipótesis o ponga condiciones adicionales indicándolo claramente. Escriba su plan.
6. Desarrolle el plan.

3. La versión original de este problema fue propuesta por la doctora Margarita de Meza.

7. Revise el trabajo previo, verificando sus argumentos, hipótesis y resultados. Verifique que su respuesta satisface lo que se pide en el problema. ¿Es posible avanzar más en la solución del problema original?

39. APLICACIONES • PLANTEO⁴

Julio Mario Santodomingo, dueño de Avianca, leyó en *El Tiempo* que una aereolínea, en la que no tiene participación, invirtió 16.5 millones de dólares en la compra de 13 aviones de la Boeing. Él sabe que la Boeing vende tres tipos de aviones: el tipo A cuesta 1.1 millones de dólares; el B, 1.3 millones y el C, 1.8 millones. Necesita saber cuántos aviones de cada tipo pudo haber comprado la competencia.

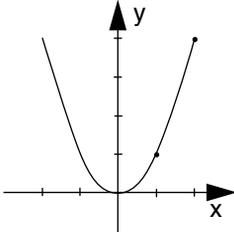
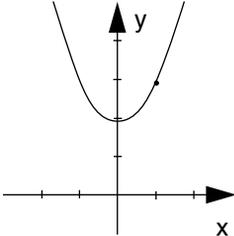
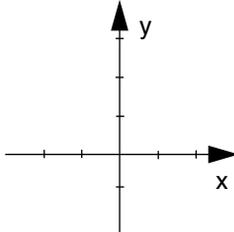
1. ¿Qué sugerencias le puede hacer?
2. Hay muchas maneras diferentes de encontrar la solución (tenga presente que no es posible comprar pedazos –fracciones– de aviones). ¿Cuál le parece mejor? Explique.

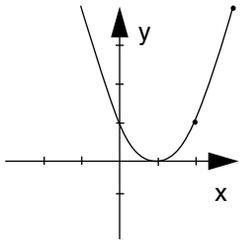
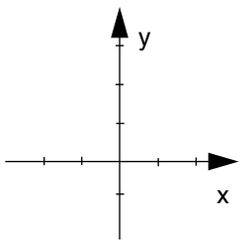
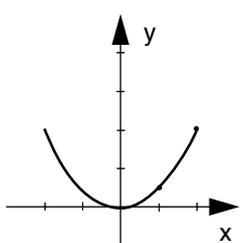
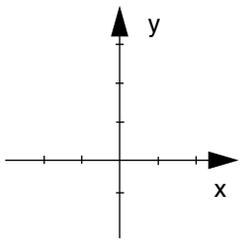
4. Adaptado de Sloyer, C. (1986). pp. 19-20.

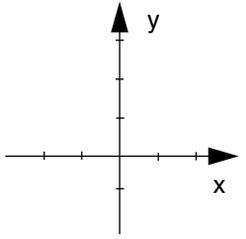
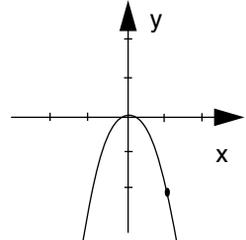
Funciones cuadráticas

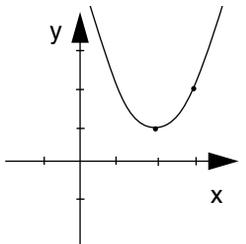
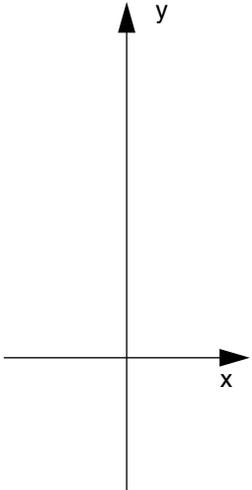
40. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN • TABLA

Complete los espacios en blanco. En las gráficas, cada marca representa una unidad.

| Gráfica | Expresión simbólica | Vértice | Eje de simetría | Foco | Directriz | Acción con relación a $y=x^2$ | Dominio | Rango |
|---|---------------------|----------|-----------------|-------------------------------|--------------------|--|---------------|---------------|
|  | $y = x^2$ | $0 = 0$ | $x = 0$ | $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ | $y = -\frac{1}{4}$ | Ninguna | \mathcal{R} | $[0, \infty)$ |
|  | | $(0, 2)$ | | $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ | $y = \frac{7}{4}$ | Traslación en y de dos unidades hacia arriba | \mathcal{R} | |
|  | $y = x^2 - 1$ | | | | $y = -\frac{5}{4}$ | | \mathcal{R} | |

| Gráfica | Expresión simbólica | Vértice | Eje de simetría | Foco | Directriz | Acción con relación a $y=x^2$ | Dominio | Rango |
|---|---------------------|---------|-----------------|------|-----------|--|---------|-------|
|  | | | | | | Traslación en x de una unidad hacia la derecha | | |
|  | $y = (x - 2)^2$ | | | | | | | |
|  | | | | | | Dilatación en y de 1/2 unidad | | |
|  | $y = 2x^2$ | | | | | | | |

| Gráfica | Expresión simbólica | Vértice | Eje de simetría | Foco | Directriz | Acción con relación a $y=x^2$ | Dominio | Rango |
|---|---------------------|---------|-----------------|------|-----------|---|---------|-------|
|  | | | | | | Dilatación en y de 1/2 unidad y reflexión con respecto al eje x | | |
|  | | | | | | Reflexión... | | |

| Gráfica | Expresión simbólica | Vértice | Eje de simetría | Foco | Directriz | Acción con relación a $y=x^2$ | Dominio | Rango |
|--|---------------------|---------|-----------------|-------------------------------|-----------|--|---------|-------|
|  | | | | $\left(2, \frac{5}{4}\right)$ | | | | |
|  | | | | | | Reflexión en el eje x, traslación en x de 2 unidades a la izquierda, en y de una unidad hacia arriba, dilatación en y de 1/3 de unidad | | |

41. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES • TABLA

Una parábola se puede expresar simbólicamente de cuatro formas distintas (se supone que $a \neq 0$ y $p \neq 0$):

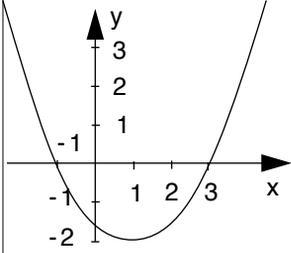
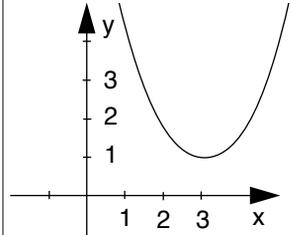
a. $y = a(x - h)^2 + k$

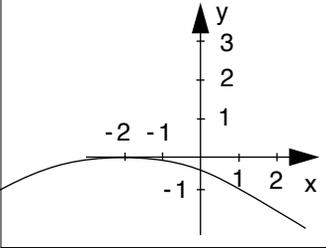
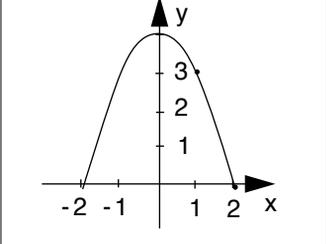
b. $y = ax^2 + bx + c$

c. $y = a(x-r_1)(x-r_2)$

d. $4p(y-y_0) = (x-x_0)^2$

Llene las casillas de la siguiente tabla:

| Gráfica | $y = a(x-h)^2+k$ | $y = ax^2+bx+c$ | $y = a(x-r_1)(x-r_2)$ | $4p(y-y_0)=(x-x_0)^2$ | Solución de $ax^2+bx+c=0$ | Cortes con el eje X | Cortes con el eje Y | Máximo | Mínimo |
|---|------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|---------------------|---------------------|--------|--------|
|  | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | |

| Gráfica | $y = a(x-h)^2+k$ | $y = ax^2+bx+c$ | $y = a(x-r_1)(x-r_2)$ | $4p(y-y_0)=(x-x_0)^2$ | Solución de $ax^2+bx+c=0$ | Cortes con el eje X | Cortes con el eje Y | Máximo | Mínimo |
|---|------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|---------------------|---------------------|--------|--------|
|  | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | |

42. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN • FAMILIAS

1. La expresión $y = ax^2$, con $a \neq 0$, representa una familia de parábolas. Descríbala en palabras.
2. Describe simbólicamente la familia de parábolas que cortan el eje x en los puntos -1 y 2.

3. Complete los espacios de la tabla

| $y = f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{25}{8}$ | Coordenadas del vértice | Coordenadas del foco | Cortes con x |
|---|-------------------------|----------------------|--------------|
| $f(x) + 3$ | | | |
| $f(x + 2)$ | | | |
| $2f(x)$ | | | |
| $f(0.5x)$ | | | |
| $-f(x)$ | | | |
| $f(-x)$ | | | |

4. Dé las coordenadas del vértice, el foco y la ecuación de la directriz de la parábola $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 5)$.
5. Los puntos de la gráfica de la parábola $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 5)$ son de la forma $(x, f(x))$. Trace la gráfica de los puntos de la forma $(f(x), x)$.

43. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

A continuación se presentan las distintas formas en que se pueden expresar simbólicamente las funciones cuadráticas (suponga que a y p son números reales diferentes de 0):

a. $y = a(x - h)^2 + k$

b. $y = a(x - r_1)(x - r_2)$

c. $y = ax^2 + bx + c$

d. $4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$

Cada una de estas formas contiene unos parámetros. Por ejemplo en la forma b, los parámetros son **a**, **r₁** y **r₂**. En el caso de la forma d, los parámetros son **p**, **y₀** y **x₀**.

A usted le será asignada una de estas formas simbólicas para desarrollar una serie de actividades.

Primera parte

Para cada parámetro de la expresión que le correspondió:

1. Pinte, en un mismo plano cartesiano, dos parábolas tales que el parámetro en cuestión tenga valores diferentes y los otros dos parámetros tengan el mismo valor en ambas parábolas.
2. Explique el significado gráfico de cada parámetro.

Segunda parte

Grupo $y = a(x - h)^2 + k$

Explique la relación algebraica entre los parámetros **a**, **h** y **k** y los parámetros de las demás formas dadas. Es decir, exprese **a**, **h** y **k** en función de **a**, **r₁** y **r₂** de la forma b; haga lo mismo con las demás formas.

Grupo $y = a(x - r_1)(x - r_2)$

Explique la relación algebraica entre los parámetros **a**, **r₁** y **r₂** y los parámetros de las demás formas dadas. Es decir, exprese **a**, **r₁** y **r₂** en función de **a**, **h** y **k** de la forma a; haga lo mismo con las demás formas.

Grupo $y = ax^2 + bx + c$

Explique la relación algebraica entre los parámetros **a**, **b** y **c** y los parámetros de las demás formas dadas. Es decir, exprese **a**, **b** y **c** en

función de **a**, **h** y **k** de la forma a ; haga lo mismo con las demás formas.

Grupo 4p $(y - y_0) = (x - x_0)^2$

Explique la relación algebraica entre los parámetros **a**, **x₀** y **y₀** y los parámetros de las demás formas dadas. Es decir, exprese **a**, **x₀** y **y₀** en función de **a**, **h** y **k** de la forma a ; haga lo mismo con las demás formas.

Tercera parte

Identifique las técnicas matemáticas que se requieren para hacer las transformaciones que son necesarias en cada una de las relaciones (por ejemplo, factorización, completación de cuadrados, etcétera).

Cuarta parte

En la gráfica que se presenta en la Figura N° 1 identifique las coordenadas de los puntos marcados utilizando los nombres de los parámetros que aparecen en las cuatro formas simbólicas trabajadas.

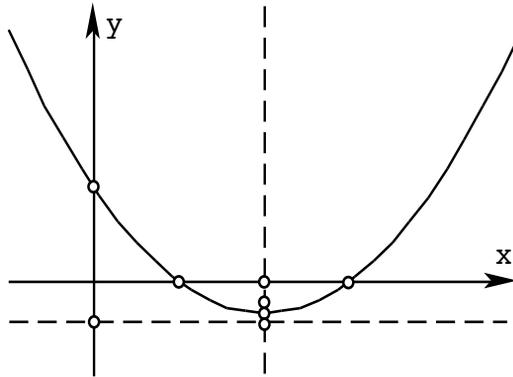


Figura N° 1.

Quinta parte

Grupo $y = (x - h)^2 + k$

Tomando como base la gráfica de la figura 1, y suponiendo que a y k permanecen fijos, describa lo que sucede con cada uno de los parámetros de las otras formas simbólicas cuando h aumenta.

Grupo $y = a(x - r_1)(x - r_2)$

Tomando como base la gráfica de la Figura N° 1, y suponiendo que a y r_1 permanecen fijos, describa lo que sucede con cada uno de los parámetros de las otras formas simbólicas cuando r_2 aumenta.

Grupo $y = ax^2 + bx + c$

Tomando como base la gráfica de la Figura N° 1, y suponiendo que a y b permanecen fijos, describa lo que sucede con cada uno de los parámetros de las otras formas simbólicas cuando c disminuye.

Grupo $4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$

Tomando como base la gráfica de la Figura N° 1, y suponiendo que p y x_0 permanecen fijos, describa lo que sucede con cada uno de los parámetros de las otras formas simbólicas cuando y_0 disminuye.

Sexta parte

Para cada una de las conjeturas que acaba de formular, muestre que ella concuerda con las relaciones simbólicas que halló en la segunda parte.

44. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • FAMILIAS

1. En las Figuras 1 a 4 aparecen cuatro familias de funciones cuadráticas. Describa simbólicamente cada una de estas familias.

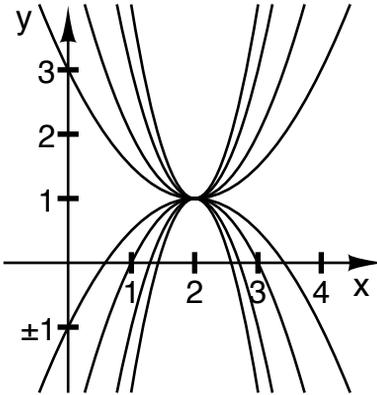


Figura N° 1.

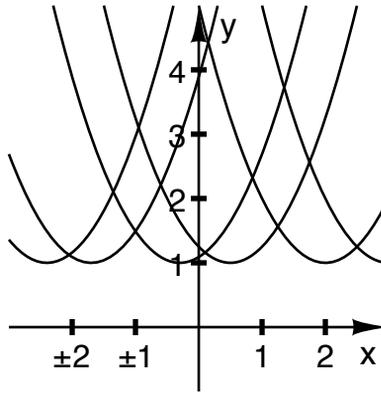


Figura N° 2.

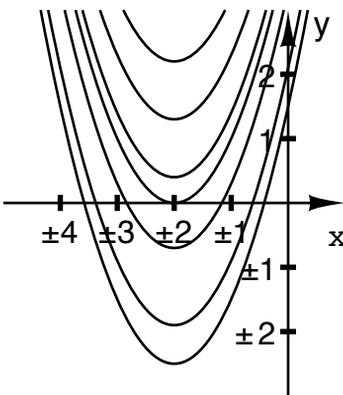


Figura N° 3.

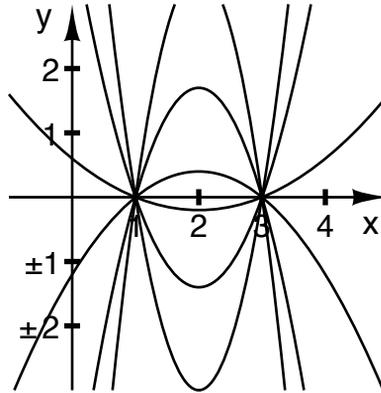


Figura N° 4.

2. Considere la forma simbólica $y = a(x - h)^2 + k$. Si se supone que $k=1$, cada uno de los puntos del plano $a-h$ representa una parábola particular. En la Figura N° 5 se tiene un ejemplo de tres puntos en el plano $a-h$ ($k=1$) y sus correspondientes parábolas en el plano $x-y$.

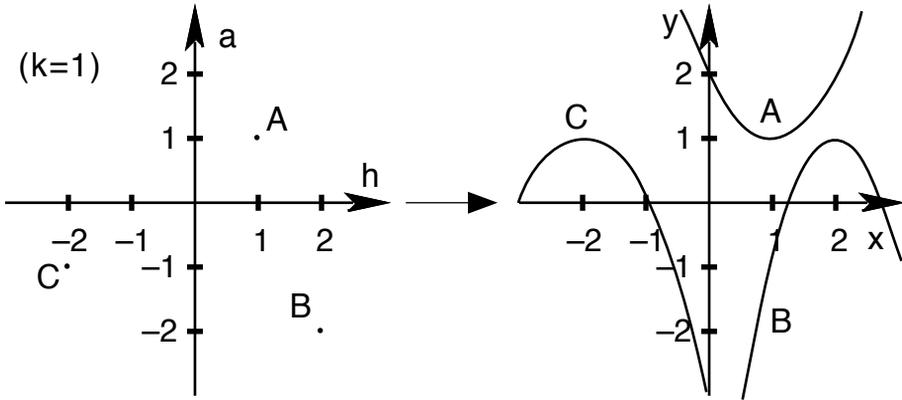


Figura N° 5.

De esta forma, una recta en el plano $a-h$ (k fijo) representa una familia de parábolas.

- Haga la gráfica en el plano $x-y$ de las familias de parábolas representadas por las rectas de las Figuras 6 a 11. Describa en palabras las familias representadas.

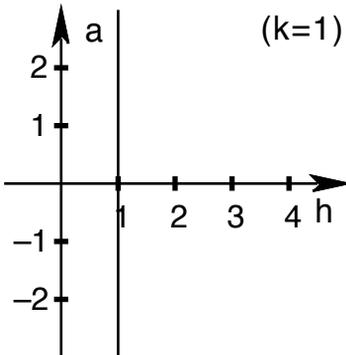


Figura N° 6.

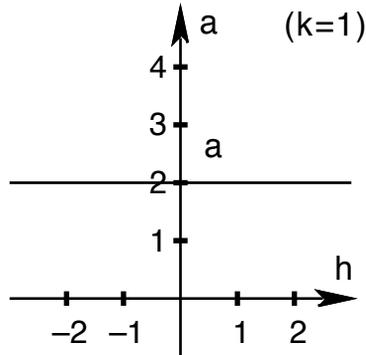


Figura N° 7.

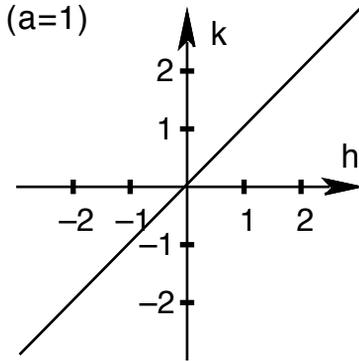


Figura N° 8.

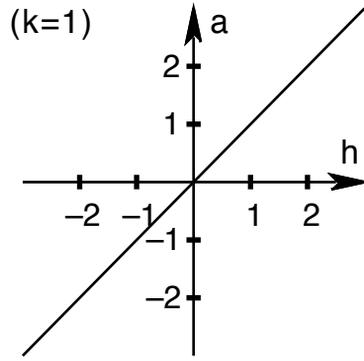


Figura N° 9.

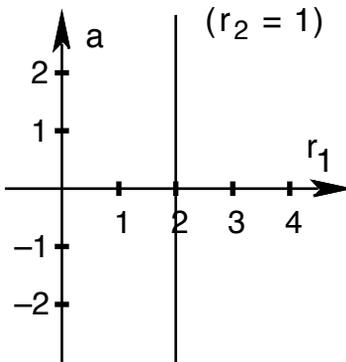


Figura N° 10.

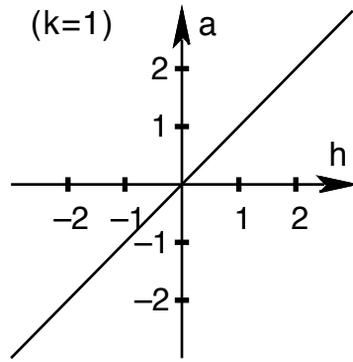


Figura N° 11.

45. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES • PLANTEO

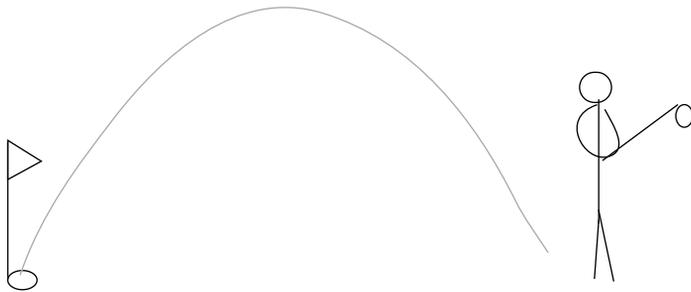
Una bala se dispara hacia arriba desde la azotea de un edificio que tiene 28 pisos (aproximadamente 100 metros de alto). Arranca con una velocidad inicial de 32mts/seg y sigue una trayectoria que esta dada por la expresión $h(t) = -16t^2 + 32t + 100$; $h(t)$ representa la altura de la bala (en metros) después de t segundos.

1. Haga en la calculadora una gráfica de $h(t)$. Use $(-5, 5)$ como rango para x ; y $(-20, 120)$ como rango para y .

2. ¿Qué porción de la gráfica representa el recorrido de la bala (la situación del problema)?
3. ¿Para qué valores de x de la gráfica tiene sentido la situación?
4. ¿Qué altura alcanza la bala luego de medio segundo de su lanzamiento?
5. ¿En qué momento vuelve la bala a alcanzar la altura del edificio?
6. ¿En qué momento alcanza la bala la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?
7. ¿En qué parte de la gráfica se ve que la bala toca el piso? ¿En qué momento ocurre esto?

46. APLICACIONES • PLANTEO

La siguiente gráfica representa la trayectoria de una pelota golpeada por un golfista (se registran 22 segundos desde que la pelota recibe el golpe hasta que llega al hoyo):



Las siguientes son gráficas que produjeron tres estudiantes para representar la forma en que cambia la velocidad de la pelota cuando va por el aire en este golpe de golf:

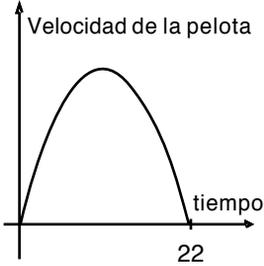


Figura N° 1.

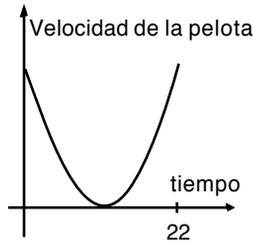


Figura N° 2.

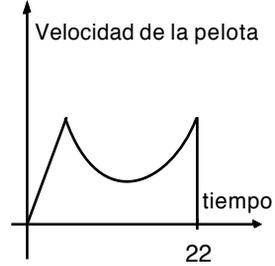


Figura N° 3.

Las justificaciones dadas por los estudiantes fueron:

Figura N° 1: "Porque la pelota sube y baja"

Figura N° 2: "La pelota sale rápida, se para un instante y después va otra vez rápida"

Figura N° 3: "La pelota acelera luego del golpe; pierde luego velocidad; después gana velocidad y después cae en el hoyo"

1. ¿Considera usted válidas estas interpretaciones? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?
2. Produzca una gráfica en la que se muestre cómo cambia la velocidad de la pelota cuando va por el aire en este golpe de golf. Tenga en cuenta aspectos como los siguientes: velocidad inicial, velocidad cuando está en el punto más alto, velocidad cuando llega al hoyo, velocidad mínima que puede llevar, etc.
3. Con base en la gráfica que hizo en 2, produzca una gráfica que represente el espacio horizontal recorrido por la pelota.

47. ECUACIONES • DIVERSAS REPRESENTACIONES

Se desea saber para qué valores de x la circunferencia con centro en $(3,2)$ y radio 1 está por debajo de la parábola cóncava hacia arriba, con vértice en $(3,1)$ y dilatación 1.

1. Halle la expresión simbólica de la parábola y de la circunferencia,

▲ Para el círculo en la forma canónica.

▲ Para la parábola en la forma $y = a(x-h)^2+k$.

2. Haga la gráfica de las dos curvas en la calculadora sin utilizar la opción CIRCLE¹ para la circunferencia y estime una solución para el problema.

3. A continuación se da un esquema para resolver el problema de manera simbólica:

a. Usted debe llegar a la ecuación

$$(x-3)^2 + ((x-3)^2 - 1)^2 - 1 = 0$$

b. Haga en la calculadora la gráfica de la función

$$f(x) = (x-3)^2 + ((x-3)^2 - 1)^2 - 1$$

c. ¿Para qué sirve hacer esta gráfica?

d. ¿Cómo se compara la información que usted obtiene de esta gráfica con la que obtuvo en 2?

e. Utilice el siguiente “truco” de sustitución: llame $u = (x-3)^2$. Reemplace u en la ecuación del punto 3a y resuelva simbólicamente el problema.

4. Compare estos resultados con los que usted estimó en el punto 2.

1. Se hace referencia a la calculadora TI-85. Lo que se desea es que se utilicen las opciones que permiten hacer gráficas de *funciones*.

48. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

El conjunto solución de la desigualdad $f(x) \leq g(x)$ es $[2, 5]$. Se sabe que:

▲ f es una función de la forma $f(x) = (x - h)^2 + k$.

▲ g es una función de la forma $g(x) = a|x - b| + c$.

Usted debe:

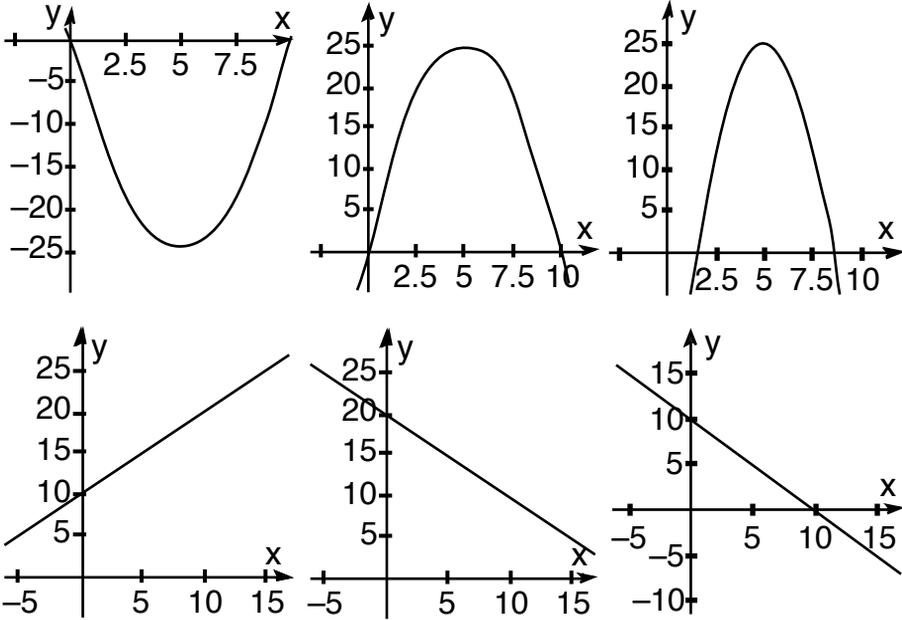
1. Hallar dos funciones f y g que cumplan con las dos condiciones dadas.
2. Resolver la desigualdad $f(x) \leq g(x)$ y mostrar que tiene el conjunto solución propuesto.

49. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

• PLANTEO

Juan quiere comprarle un lote a Pedro. Pedro le vende a Juan el lote y el alambre de púas para cercarlo. El alambre de púas mide 20 metros y, cualesquiera que sean las dimensiones del lote que Pedro escoja, el lote tiene que estar cercado por los 20 metros de alambre. El lote tiene que tener una forma rectangular y Juan puede escoger las dimensiones del lote. A Juan le interesa que el lote tenga la mayor área posible y a Pedro la menor área. Suponga que un lado del lote se llama x y el otro lado se llama y .

1. ¿Cuál de las gráficas representa el comportamiento del lado llamado y y del lote con respecto al lado x ? Justifique su respuesta y explique por qué tiene ese comportamiento.
2. ¿Cuál de las gráficas representa el comportamiento del área del lote con respecto al lado x ? Justifique su respuesta.

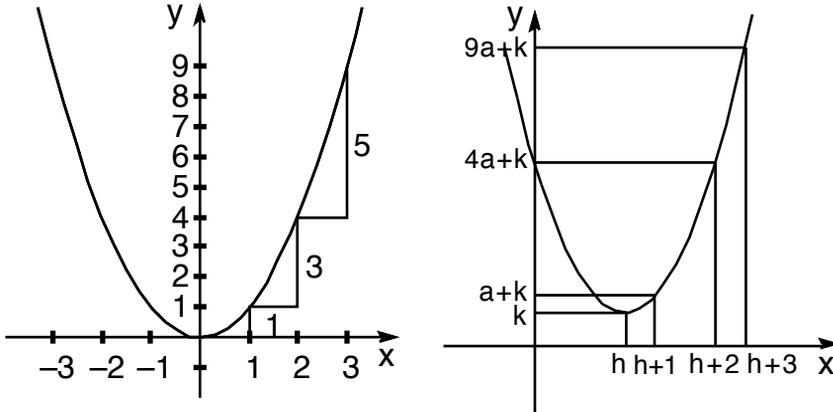


3. Explique por qué el área tiene ese comportamiento.
4. ¿Cuáles son las dimensiones posibles del lote? ¿Por qué?
5. ¿Cuáles son las áreas posibles del lote? ¿Por qué?
6. ¿Qué dimensiones le interesan a Juan?
7. ¿Qué dimensiones le interesan a Pedro?

50. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN • ENSAYO

1. Comente la siguiente frase de un estudiante: “para hallar la dilatación de una parábola a partir de su gráfica hay que hacer como con las rectas; averiguar cuantas unidades avanza en y por una unidad que avanza en x”. Puede usar la siguiente información: en el caso de

las parábolas $y = x^2$ $y = (x - h)^2 + k$, para las cuales la dilatación es $a=1$, las gráficas son las siguientes:



2. ¿Cuál cree usted que es el método más sencillo para hallar la dilatación de una parábola si se conocen sus desplazamientos en x y en y ?
¿Por qué?

51. APLICACIONES • PLANTEO

Un industrial requiere tornillos para efectos de ensamblar un producto que está fabricando. Tiene dos opciones:

- a. Mandarlos a hacer en la fábrica "Su Repuesto S. A.", que le cobra \$4 por el cuadrado del número de piezas que encargue y le ofrece una rebaja de \$100 por cada pieza.
 - b. Fabricarlos él mismo. En tal caso debe comprar la máquina de hacer los tornillos la cual le vale \$1'000.000 y hacer la pieza. Esto requiere la contratación de personal y el pago de materiales de fabricación. Esto último implica que fabricar cada pieza le cuesta \$30.
1. ¿Qué le aconseja usted al industrial que haga? ¿Por qué?

2. Suponga que usted debe fijar los precios en “Su Repuesto S. A.” ¿Cómo lo haría para que le compraran cantidades inferiores a 1,000 tornillos?
3. ¿Cuál debería ser el descuento por pieza “Su Repuesto S. A.” y cuál el costo por pieza en la fábrica del interesado, para que fuera mejor ordenar a “Su Repuesto S. A.” cantidades inferiores a 800 tornillos?
4. ¿Cuál debería ser el costo por el cuadrado de piezas en “Su Repuesto S.A.” y cuál el costo por pieza en la fábrica para que fuera mejor ordenar a “Su Repuesto S. A.” cantidades inferiores a 800 tornillos?
5. Considere las dos nuevas fórmulas de precios de “Su Respuesto S. A.” obtenidas en 3 y 4. ¿Cuál es más conveniente para “Su Repuesto S. A.”?

52. APLICACIONES • PLANTEO

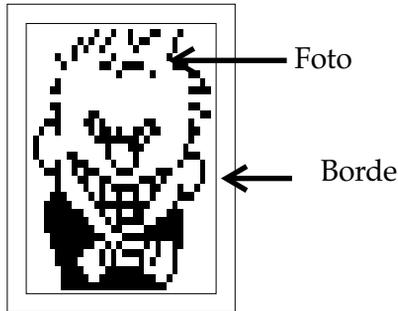
Un organizador de conciertos espera que al próximo evento vayan 25.000 personas. Se está pensando colocar un precio de \$15.000 por entrada. Por experiencia en conciertos anteriores, se sabe que por cada \$1.000 que se aumente el valor de la boleta, la asistencia se disminuye en 500 personas.

1. Determine una expresión simbólica que represente los ingresos del organizador del concierto.
2. ¿Hasta dónde puede el organizador subir el valor de la entrada para asegurar ingresos?
3. ¿Qué precio le da los mejores ingresos?
4. Si quiere tener ingresos superiores a 450 millones de pesos, ¿cuál debe ser el precio de la entrada?

53. APLICACIONES • PLANTEO

Las láminas de un álbum del pasado mundial de fútbol tenían las siguientes características:

- ▲ Las láminas tienen en el centro la foto del futbolista y un borde blanco alrededor, como se muestra en la figura:



- ▲ El borde es de anchura uniforme
 - ▲ El perímetro de la foto del futbolista (sin borde) es 12 cm
 - ▲ El ancho de la foto es el doble del ancho del borde
1. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la lámina para que la foto tenga un área máxima?
 2. Suponga que se requiere que el ancho de la foto sea 5 veces el ancho del borde. Haga una conjetura acerca de las dimensiones de la lámina. Halle las dimensiones simbólicamente.
 3. ¿Qué puede decir acerca de lo que predijo? Explique.

Funciones polinómicas

54. REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

• CONSTRUCCIÓN OBJETO

1. Para cada situación, busque un polinomio que cumpla las condiciones dadas. Cuando no sea posible encontrar uno, explique las razones.
 - a. Grado 3; raíces: 2 y $\frac{1}{2}$.
 - b. Grado 4; coeficientes enteros; raíces: $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.
 - c. Grado 3; coeficientes enteros; raíces: $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.
 - d. Grado 3; coeficientes enteros; raíces: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.
 - e. Grado 4; coeficientes enteros; raíces: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.
2. Halle el valor de b para que el polinomio $p(x) = x^3 + bx^2 - 13x + 10$,
 - a. Sea divisible por $x-2$.
 - b. Al dividirlo por $x-2$ deje residuo 4.

55. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

Para cada una de las gráficas de las Figuras 1 a 9 usted debe dar la expresión simbólica correspondiente. Observe que algunas gráficas están relacionadas entre sí.

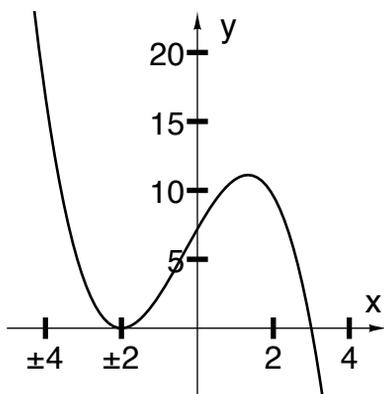


Figura N° 1.

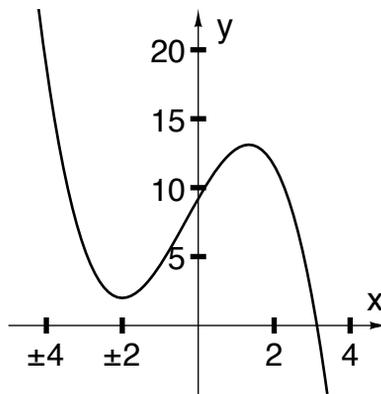


Figura N° 2.

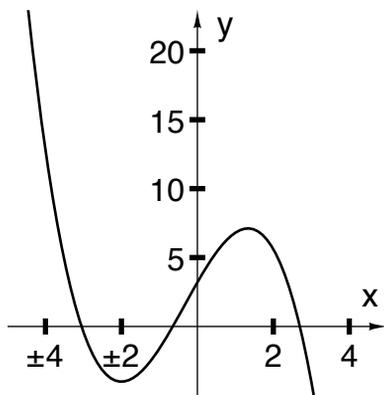


Figura N° 3.

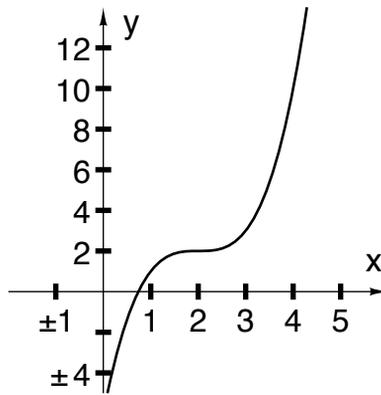


Figura N° 4.

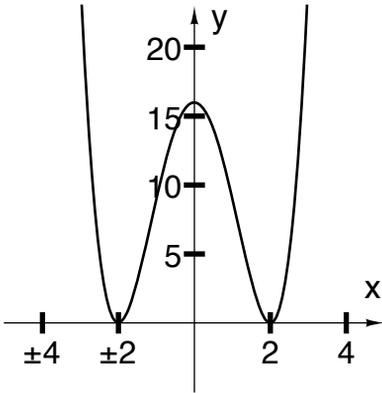


Figura N° 5.

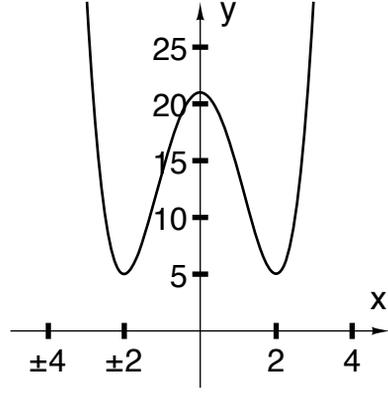


Figura N° 6.

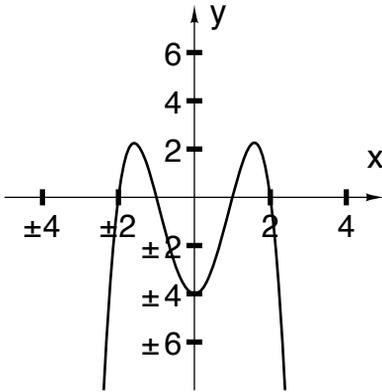


Figura N° 7.

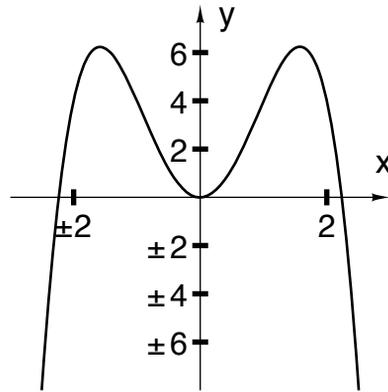


Figura N° 8.

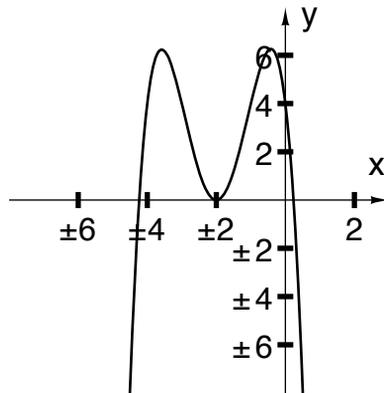


Figura N° 9.

56. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES • TABLA

Para cada una de las funciones o familias de funciones de la columna “función”, llene las casillas de la tabla que usted considera que es posible llenar. Suponga que a, b, c, d, h y k son reales y que $a \neq 0$.

| Función | Dominio y rango | Gráfica | Cortes con los ejes | Simetría | Paridad |
|---|-----------------|---------|---------------------|----------|---------|
| $y = f(x) = 2(x + 2) \times (x - 1)$ | | | | | |
| $y = f(x) - 1$ | | | | | |
| $y = f(x + 2)$ | | | | | |
| $y = -f(x)$ | | | | | |
| $y = f(x) + 2 $ | | | | | |
| $y = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ r_1, r_2, r_3 reales | | | | | |
| $y = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ r_1, r_2, r_3 reales; $r_1 = r_2$ | | | | | |
| $y = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ r_1, r_2, r_3 reales; $r_1 = r_2 = r_3$ | | | | | |
| $y = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ r_2 y r_3 complejos | | | | | |
| $y = a(x - h)^3 + k$ | | | | | |
| $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ | | | | | |

57. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • DIVERSAS REPRESENTACIONES

Toda función cúbica se puede expresar de la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (1)$$

También se puede expresar de la forma:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3). \quad (2)$$

Sin embargo, no todas se pueden expresar en la forma

$$f(x) = a(x - h)^3 + k. \quad (3)$$

1. Explique el significado gráfico de los parámetros de la forma (2).
Presente ejemplos.
2. Explique el significado gráfico de los parámetros de la forma (3).
Presente ejemplos.
3. Halle las relaciones simbólicas entre los parámetros de la forma (3)
y los de la forma (2). Es decir, ¿cómo se puede expresar k en función
de r_1, r_2 y r_3 ? Haga lo mismo para h .

58. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • FAMILIAS

1. Suponga que $a = 1$. La Figura N° 1 muestra el plano $h-k$, donde un
punto (h, k) representa una función cúbica de la forma $y = (x - h)^3 + k$.
Dibuje en diferentes planos cartesianos $x-y$ las funciones o fami-
lias de funciones correspondientes a A, L_1, L_2 y L_3 .

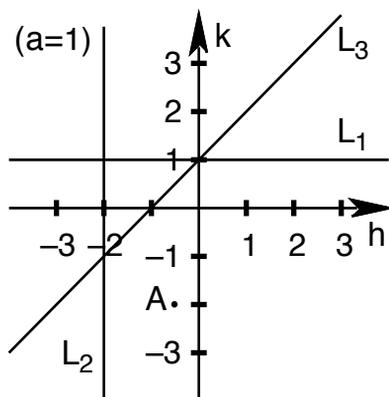


Figura N° 1.

2. Suponga que $h = 2$. La Figura N° 2 muestra el plano $a-k$, donde un punto (a, k) representa una función cúbica $y = a(x - 2)^3 + k$. Dibuje en diferentes planos cartesianos $x-y$ las funciones o familias de funciones correspondientes a A, L_1 , L_2 y L_3 .

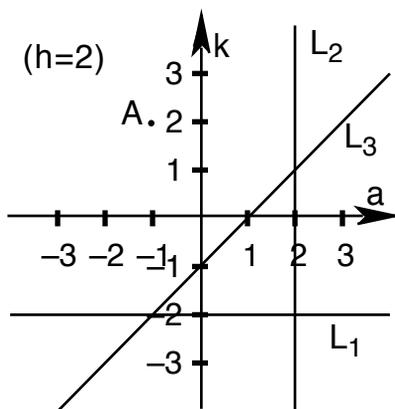


Figura N° 2.

3. Suponga ahora que $a = 1$ y $r_1 = r_2$, en la expresión cúbica de la forma $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$. La Figura N° 3 muestra el plano r_1-r_3 . Dibuje en diferentes planos cartesianos $x-y$ las funciones o familias de funciones correspondientes a A, L_1 , L_2 y L_3 .

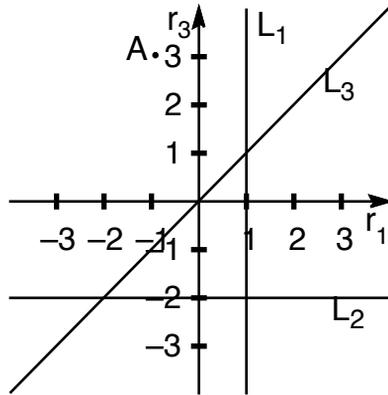
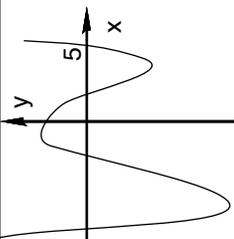


Figura N° 3.

4. ¿Cuáles son las funciones cúbicas en el plano r_1 - r_3 de la Figura N° 3 que se pueden expresar en la forma $f(x) = a(x-h)^3 + k$?
5. Si se conocen las raíces de una función cúbica, ¿cómo se puede saber si ésta se puede expresar en la forma $f(x) = a(x-h)^3 + k$ o no?

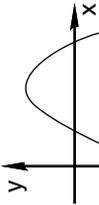
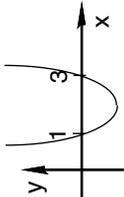
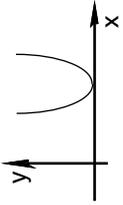
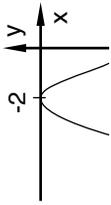
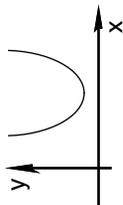
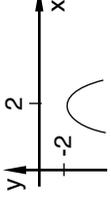
59. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN • TABLA

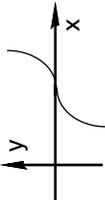
En la tabla se encuentra información sobre seis funciones polinómicas. Para cada una de estas funciones polinómicas, y a partir de la información dada, usted debe completar el resto de la tabla de tal forma que se describa esa función con todo el detalle posible. Para cada dato que usted halle sobre la función, escriba un argumento que sustente su hallazgo y en el que se haga explícita la aplicación de los teoremas de factorización.

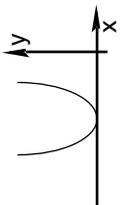
| Función | Grado | Raíces reales | Raíces complejas | Ejemplos de valores que toma el polinomio | Factores | Expresión simbólica | Expresión gráfica |
|---------|-------|---------------|------------------|---|-----------------------------|--------------------------------------|---|
| 1 | | | | | | $p(x) = x^6 - 5x^4 + 4x^2$ | |
| 2 | | | | $P(-2)=0$ | | $p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 10$ | |
| 3 | 4 | -2 | 2+i | $P(2)=0$ | | | |
| 4 | 5 | 0, -2 | 1-2i | $P(1)=-24$ | | | |
| 5 | 4 | | | | $(x+7)$ es factor de $P(x)$ | $p(x) = (x^2 + x - 2) Q(x)$ |  |
| 6 | 7 | 0 (doble) | 3i | $P(-3)=0$ $P(-1)=-240$ | $(x+2)$ es factor de $P(x)$ | | |

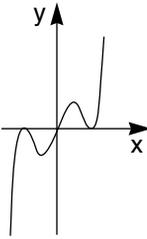
60. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • TABLA

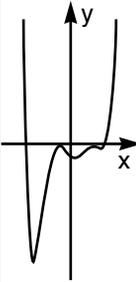
Usted va a llenar una serie de tablas en las que se consigna información relevante relacionada con las funciones polinómicas de grado 3, 4, n par y n impar. Se espera que usted generalice las características que se aprecian en las funciones polinómicas de grado 2, 3 y 4 a las funciones polinómicas de grado n. A continuación se presenta la tabla correspondiente a la función polinómica de grado 2.

| Función polinómica de grado 2 | | | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------|--------------------|---|----------------|------------------------------|--|
| Nº de raíces reales | Nº de raíces reales repetidas | Nº de raíces complejas | Nº total de raíces | Gráfica | Nº de vértices | Ejemplo, expresión simbólica | Ejemplo expresión gráfica |
| 2 | 0 | 0 | 2 |  | 1 | $y = 4(x-1)(x-3)$ |  |
| 2 | 1 doble | 0 | 2 |  | 1 | $y = -3(x+2)^2$ |  |
| 0 | 0 | 1 par | 2 |  | 1 | $y = -4(x-2)^2 - 2$ |  |

| Función polinómica de grado 3 | | | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------|--------------------|--|----------------|------------------------------|---------------------------|
| Nº de raíces reales | Nº de raíces reales repetidas | Nº de raíces complejas | Nº total de raíces | Gráfica | Nº de vértices | Ejemplo, expresión simbólica | Ejemplo expresión gráfica |
| 3 | | 0 | | | | | |
| 3 | 1 doble | 0 | | | | | |
| 1 | | 1 par | | | | | |
| 1 | | | |  | | | |

| Función polinómica de grado 4 | | | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------|--------------------|---|----------------|------------------------------|---------------------------|
| Nº de raíces reales | Nº de raíces reales repetidas | Nº de raíces complejas | Nº total de raíces | Gráfica | Nº de vértices | Ejemplo, expresión simbólica | Ejemplo expresión gráfica |
| 4 | | | | | | | |
| 4 | | 0 | | | | | |
| 4 | | | |  | | | |
| 2 | | | | | | | |
| | | 2 pares | | | | | |

| Función polinómica de grado n, n impar | | | | | | | |
|--|--|------------------------|--------------------|---|----------------|------------------------------|---------------------------|
| Nº de raíces reales | Nº de raíces reales repetidas | Nº de raíces complejas | Nº total de raíces | Gráfica | Nº de vértices | Ejemplo, expresión simbólica | Ejemplo expresión gráfica |
| n | | 0 | | | | | |
| n | | | |  | | | |
| n | m raíces dobles, $m \leq \frac{n-1}{2}$ | | | | | | |
| n-2 | 0 | | | | | | |
| | 0 | $\frac{k}{2}$ pares | | | | | |
| 0 | | | | | | | |

| Función polinómica de grado n , n par | | | | | | | |
|---|-------------------------------------|------------------------|--------------------|--|----------------|------------------------------|---------------------------|
| Nº de raíces reales | Nº de raíces reales repetidas | Nº de raíces complejas | Nº total de raíces | Gráfica | Nº de vértices | Ejemplo, expresión simbólica | Ejemplo expresión gráfica |
| n | | 0 | | | | | |
| n | 1 doble | | | | | | |
| n | m dobles, $m \leq \frac{n}{2}$ | | |  | | | |
| $n-2$ | 0 | | | | | | |

| Función polinómica de grado n, n par | | | | | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|------------------------|--------------------|---------|----------------|------------------------------|---------------------------|
| Nº de raíces reales | Nº de raíces reales repetidas | Nº de raíces complejas | Nº total de raíces | Gráfica | Nº de vértices | Ejemplo, expresión simbólica | Ejemplo expresión gráfica |
| n-k, k par | 0 | | | | | | |
| 0 | | | | | | | |

61. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN

Considere el polinomio $p(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$, donde a, b y c son números enteros y $a \neq 0$.

1. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $p(x)=0$? ¿Por qué? (Utilice en su argumento los teoremas de factorización).
2. Utilizando el teorema del factor, muestre que $(x-2)$ es factor de $p(x)$.
3. Explique por qué el hecho de que $(x-2)$ sea factor de $p(x)$ está de acuerdo con el enunciado del teorema de la raíz racional.
4. Halle $q(x) = \frac{p(x)}{x-2}$.
5. ¿Qué condiciones (sobre a, b y c) se deben cumplir para que todos los ceros de $p(x)$ sean reales? Justifique.

6. ¿Qué debe suceder para que $p(x)$ tenga una raíz real doble?
7. Haga la gráfica de un polinomio típico (de los que resultan de darle valores a a , b y c) que tenga una raíz real doble.
8. ¿Qué debe suceder para que $p(x)$ tenga tres raíces reales diferentes?
9. Haga la gráfica de un polinomio típico que tenga tres raíces reales diferentes.
10. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que $p(x)$ tenga una raíz compleja?
11. Haga la gráfica de un polinomio típico que tenga una raíz compleja.
12. Explique las diferencias y similitudes entre las tres gráficas que ha hecho.
13. Halle todos los ceros de $p(x)$ (en función de a , b y c).
14. Muestre que si $p(x)$ tiene ceros complejos, entonces estas raíces cumplen con el enunciado del teorema de la raíz conjugada.

62. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

1. Las Figuras 1 a 4 muestran la gráfica de 4 funciones polinómicas. Dé las expresiones simbólicas de cada una de ellas.

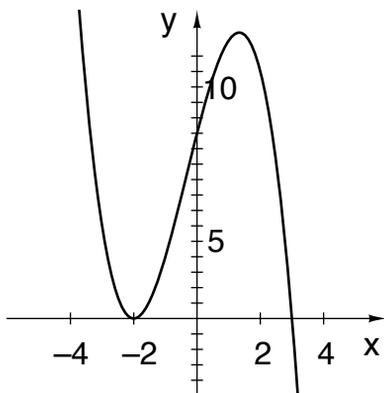


Figura N° 1.

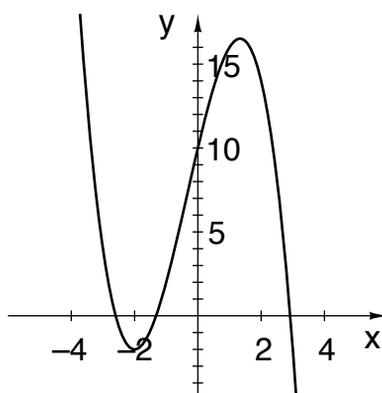


Figura N° 2.

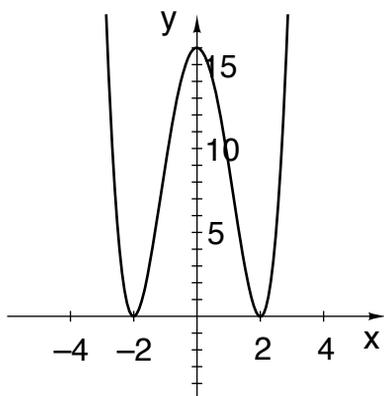


Figura N° 3.

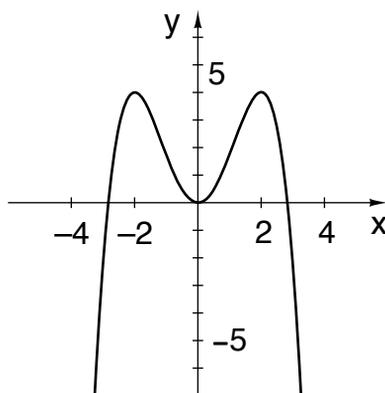


Figura N° 4.

2. Plantee una desigualdad entre las funciones de las Figuras 1 y 3, de manera que el conjunto solución sea de la forma $\{a\} \cup [b,c]$ con a , b y c reales.

63. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

1. Dé la expresión simbólica de las funciones cuyas gráficas se presentan en las Figuras 1 y 2. Para cada una, usted debe encontrar una expresión que no requiera la definición a trozos. (**Ayuda:** parta de la gráfica de $f(x) = (-x - 1)^3$ para construir la expresión de una de ellas; la expresión contiene un valor absoluto).

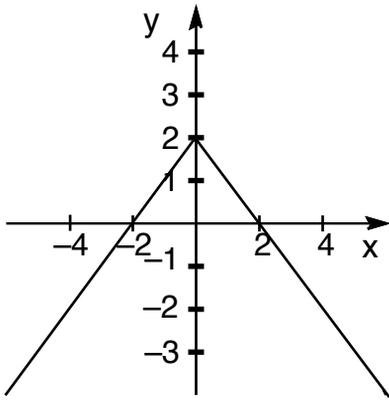


Figura N° 1.

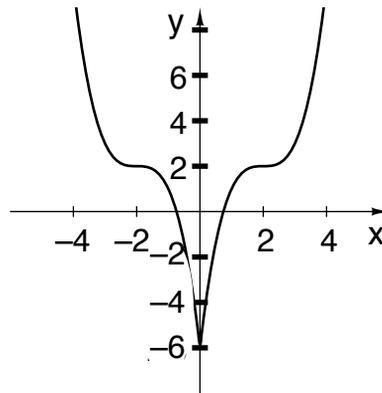


Figura N° 2.

2. A partir de la gráfica que se presenta en la Figura N° 3:

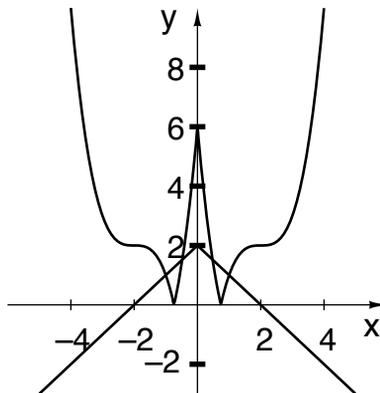


Figura N° 3.

- a. Identifique la expresión simbólica (que no requiera definición a trozos) de las dos funciones.

- b. Identifique la expresión simbólica de cada una de las partes de las funciones que allí aparecen.
- c. Proponga una desigualdad entre esas dos funciones.
- d. Escriba las ecuaciones que le permitirían hallar los puntos de corte por medio de los cuales es posible determinar el conjunto solución de la desigualdad propuesta.
- e. Con la calculadora, halle valores aproximados de estos puntos de corte.
- f. Verifique que estos valores aproximados cumplen con las ecuaciones propuestas en d).
- g. Dé el conjunto solución de la desigualdad.
- h. Halle simbólicamente los puntos de corte.

64. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

De una función $f(x)$ se sabe lo siguiente:

▲ Para $x \leq 0$ es una parábola que corta el eje Y en 3, tiene como eje de simetría $x = -1$ y tiene un sólo corte con el eje X.

▲ Para $x > 0$ es $x^3 + 3$.

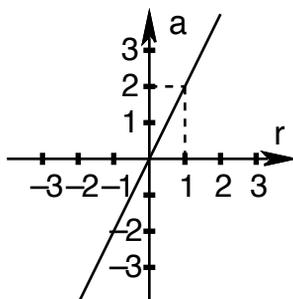
1. Dé la expresión simbólica y gráfica de $f(x)$.
2. Indique el conjunto solución de $f(x) < x + 3$.

65. CARACTERÍSTICAS FAMILIA

- CONSTRUCCIÓN OBJETO

En este ejercicio usted va a trabajar con una familia de polinomios. Se sabe que cualquier polinomio P que sea miembro de esta familia cumple con las siguientes condiciones:

- ▲ P tiene grado 7
- ▲ 1 es raíz doble de P
- ▲ $2i$ es raíz de P
- ▲ $P(-1) = 0$
- ▲ $(x+2)$ es factor de $P(x)$
- ▲ Si r es la raíz que no está determinada por las condiciones anteriores y a es la dilatación del polinomio, entonces la familia de polinomios está determinada por la relación que se muestra en la figura



1. Halle una expresión simbólica que describa a todos los miembros de la familia.
2. Se sabe que para el polinomio Q , miembro de esta familia, $Q(0) = 1$ y -2 no es una raíz doble de Q . Halle $Q(x)$.

66. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN

- CONSTRUCCIÓN OBJETO

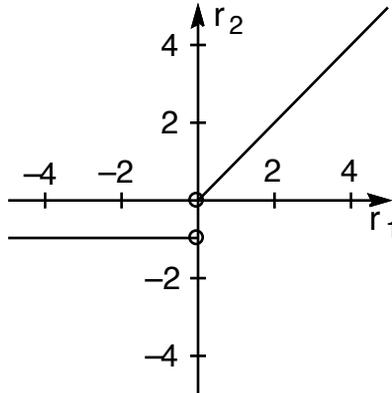
Un polinomio p tiene las siguientes características:

- ▲ Es de grado par
- ▲ $p(-3) = 0$
- ▲ Su gráfica es simétrica con respecto al eje Y
- ▲ Tiene tres vértices
- ▲ Tiene dos puntos de inflexión
- ▲ 0 es una raíz doble
- ▲ $p(2) = 10$
- ▲ i es raíz

Halle la expresión simbólica de p y haga su gráfica.

67. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • CONSTRUCCIÓN OBJETO

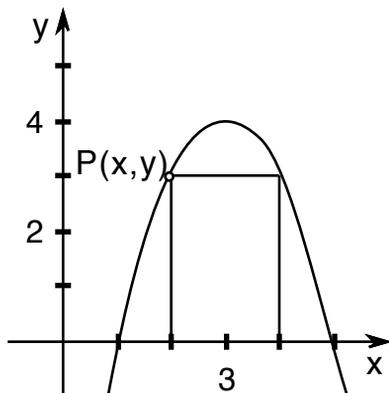
1. Considere la familia de funciones de la forma $F(x) = -2(x - r_1)(x - r_2)$ con r_1 y r_2 relacionados como se muestra en la gráfica:



- Dé una expresión simbólica para las funciones que pertenezcan a esta familia.
 - Haga un bosquejo de la gráfica de la familia.
 - Dé las características que tiene una función que pertenece a esta familia.
2. Encuentre la expresión simbólica y gráfica de un polinomio $P(x)$ de grado 4 que cumple con las siguientes características:
- ▲ Es de la forma $P(x)Q(x)$, siendo $P(x)$ un polinomio de la familia descrita en el punto 1
 - ▲ $2i$ es raíz
 - ▲ $r_2 = 1$

68. APLICACIONES • PLANTEO

Se quiere construir un rectángulo dentro de una parábola tal y como se muestra en la figura:



1. Determine la expresión de la parábola.
2. ¿Qué área tiene un rectángulo de base 2?
3. Escriba una expresión para el área del rectángulo en función de su base. ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo de máxima área?
4. Si en vez de escribir el área del rectángulo en función de la base, se escribe en función de x , ¿cómo cambia el ejercicio? ¿Se obtienen respuestas diferentes? ¿Son equivalentes los métodos? Compare las dos alternativas de solución.

69. APLICACIONES • PLANTEO

La suma de la longitud y el perímetro de la base de un bulto postal es de 60cm. El paquete puede ser rectangular y de sección recta cuadrada o cilíndrico.

1. ¿Cuál de las dos formas origina mayor volumen?
2. ¿Cuál de las dos formas es mejor?

70. FUNCIONES POLINÓMICAS

La fabricación de una lata de metal cilíndrica requiere que las dos tapas sean soldadas y que se haga también una soldadura a lo largo de la altura de la lata. El productor de latas tiene la restricción de mantener el costo total de soldadura de una lata en \$24. El costo del centímetro de soldadura es de \$2 y el costo del centímetro cuadrado de metal es de $\$ \frac{1}{\pi}$. Por cada centímetro cúbico de volumen que se pueda alma-

cenar en la lata, el productor obtiene $\$ \frac{30}{\pi}$ de ingresos.

¿Para qué latas (dimensiones) los ingresos son mayores que los egresos?

71. APLICACIONES • PROYECTO INVESTIGACIÓN

Tome una hoja tamaño carta (22cm x 28cm). Se desea construir con esa hoja una caja con tapa, que se va a sellar con cinta pegante y que cumpla con las siguientes condiciones:

- ▲ Use la mayor cantidad de papel posible
- ▲ Use el mínimo de cinta pegante
- ▲ Almacene el mayor volumen posible

Primera parte

1. Haga un análisis en papel de los diferentes diseños que pueden usarse para construir la caja.
2. Haga una crítica de los diseños, suponiendo que además, se quiere utilizar el mínimo de cinta pegante.
3. Escoja uno de los diseños. Llame x a la altura de su caja. ¿Es posible expresar las demás dimensiones de la caja (largo y ancho) en función de x ? En caso afirmativo, dé las expresiones; en caso contrario, explique porqué no se puede.

4. Repita el proceso para otro diseño.
5. Suponga que usted necesita construir cajas, pero que no sabe cuál diseño le implica menos gasto de cinta pegante. Con la información de los puntos b y c, ¿es posible saber cuál de los dos diseños le conviene? Comente.

Segunda parte

Tenga en cuenta los dos diseños analizados para responder las dos preguntas siguientes:

6. ¿Cuánta cinta pegante requiere una caja de 3cm de altura?
7. ¿Qué dimensiones tiene una caja que requiera 40 cm de cinta?

Tercera parte

Se desea construir con una hoja metálica de 22 cmx28 cm. una caja con tapa y se va a utilizar soldadura para armarla. En esta ocasión se desea estudiar la cantidad de material que se requiere. A su grupo se le asignarán dos diseños para analizarlos.

8. Para los dos diseños asignados, diga qué área superficial tiene una caja de altura 3cm. ¿Con cuál diseño se utiliza más material?
9. Escoja uno de los diseños. Llame x a la altura de la caja.

▲ Exprese el área superficial en función de x

▲ Exprese la cantidad de soldadura que se requiere en función de x

10. Repita el proceso para el otro diseño.
11. ¿Cuántas cajas de área superficial 225 cm^2 se pueden obtener con los diseños dados? ¿Por qué?
12. Analice las funciones de área superficial y de cantidad de soldadura de cada uno de los diseños para efectos de:

- ▲ Encontrar las dimensiones de la caja de mayor área superficial
- ▲ Encontrar las dimensiones de la caja que utiliza menos soldadura

13. Atendiendo al criterio: menos soldadura y mayor área superficial, ¿cuál diseño es mejor?

Cuarta parte

14. Suponga que cada cm de soldadura cuesta \$12 y que reciclar un cm^2 de lámina sobrante cuesta \$8. Analice la función de egresos resultante, para efectos de ver si hay cambios con respecto a la respuesta dada a la pregunta 13.

Quinta parte

En esta última entrega del proyecto, se quiere investigar cómo se comporta el volumen de las cajas que se han estado analizando. Ustedes deben analizar los dos diseños con el fin de decidir cuál de ellos es el que permite construir la caja que:

- ▲ Usa la mayor cantidad de papel posible
- ▲ Usa el mínimo de cinta pegante
- ▲ Almacena el mayor volumen posible

Por otra parte, deben mostrar que la situación cambia cuando se colocan precios a cada elemento que se está considerando. Para esto último, supongan que cada cm de soldadura cuesta \$12; reciclar un cm^2 de lámina sobrante cuesta \$8 y que se reciben \$3 por cada cm^3 de volumen que almacene la caja. Se espera un análisis de las funciones de cantidad de área, cantidad de soldadura y volumen y de las funciones de ingresos y egresos correspondientes.

Otras funciones

72. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN

• CONSTRUCCIÓN OBJETO

De una función racional se conoce lo siguiente:

- ▲ Tiene dos asíntotas verticales
- ▲ Corta el eje X en 0 y en 3
- ▲ Es creciente en todo su dominio
- ▲ Es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -4) \cup (0,1)$ y cóncava hacia abajo en $(-4,0) \cup (1, \infty)$
- ▲ Cuando x tiende a $-\infty$ y a ∞ la función tiende a 1

1. ¿De qué función (o funciones) se trata?
2. Muestre que todas las representaciones (simbólica, verbal y gráfica) de la función satisfacen las condiciones dadas.

73. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN

• CONSTRUCCIÓN OBJETO

La expresión simbólica de una función es la siguiente:

$$g(x) = \sqrt[n]{h - a|x|}, \text{ con } n, h \text{ y } a \text{ reales diferentes de } 0.$$

Se cumplen además las siguientes condiciones:

- ▲ $g(17) = -2$
- ▲ 1 es una solución de la ecuación $g(x) = 0$
- ▲ En -1 hay un punto de inflexión
- ▲ El dominio de la función es \mathfrak{R}

▲ El rango de la función es $\left(-\infty, 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$

- ¿Cuáles son los posibles valores que pueden tomar n , h y a , para que se cumplan las condiciones anteriores?
- Para un caso particular, verifique que la función cumple con todas las condiciones dadas. ¿Qué otras características describen a la función?

74. DESIGUALDADES

• CONSTRUCCIÓN OBJETO

Sean $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$.

- Haga las gráficas de f y g , explicando y justificando todas las características que usted considere relevantes.
- Establezca una desigualdad entre f y g y resuélvala.

75. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

El estudio de las funciones racionales implica algunas dificultades simbólicas y gráficas. Aunque la forma general de una función racional es $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de cualquier grado, aquí vamos a considerar únicamente el caso en que $P(x)$ es de grado menor o igual a 1 y $Q(x)$ es de grado 1.

- Explique el comportamiento de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.
 - ¿Por qué la gráfica se comporta de esa manera?

- b. ¿Dónde quedan y qué son las **asíntotas**?
- c. ¿Cuál es el dominio y por qué?
- d. ¿Cuál es el rango y por qué?
2. Explique el comportamiento de la función $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$, donde a , h y k son números reales.
- a. Haga la gráfica de una función que pertenezca a esta familia.
- b. ¿Cuál es el significado gráfico de a , h y k ? ¿Cómo se relaciona esta gráfica con la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$?
- c. ¿Dónde quedan las asíntotas? ¿Cuál es el dominio y por qué? ¿Cuál es el rango y por qué?

76. CARACTERÍSTICAS FAMILIA

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

La forma general de una función racional es $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, en donde P y Q son polinomios con coeficientes reales. Cuando tanto P como Q son polinomios de grado 1 existen 3 formas simbólicas diferentes de representar las funciones racionales:

$$f(x) = \frac{a}{x-h} + k \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{m(x-r)}{n(x-t)}, \quad n \neq 0 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{sx+u}{px+q} \quad (3)$$

1. Explique cuál es el significado gráfico de los parámetros de cada una de las tres formas simbólicas.

- Encuentre la relación simbólica entre los parámetros de las tres formas; es decir, exprese **a**, de la primera forma en función de:

▲ **m, n, r** y **t** de la segunda

▲ **s, u, p** y **q** de la tercera

- Muestre cómo al cambiar un parámetro en una de las formas cambian los parámetros de las demás formas y cómo se refleja esto en las gráficas. Apóyese en las expresiones encontradas en el punto 2.

77. CARACTERÍSTICAS FAMILIA

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

La forma general de una función racional es $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con P y Q polinomios con coeficientes reales. Suponga que P es de grado 1 y que Q es de grado 2. La forma general de tipo de funciones racionales es la siguiente:

$$f(x) = \frac{sx + u}{px^2 + qx + v} \quad (1)$$

donde **s, u, p, q** y **v** son números reales y $p \neq 0$.

También se puede expresar una función de este tipo en la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{a_1(x - t_1)}{a_2(x - t_2)(x - t_3)} \quad (2)$$

en donde **a₁**, **a₂** y **t₁** son reales, $a_2 \neq 0$ y **t₂** y **t₃** pueden ser reales o complejos (¿Por qué?).

- Explique cuál es el significado gráfico de los parámetros de la forma simbólica (2). Suponga que todos los parámetros son reales.
- Suponga que todos los parámetros son números reales. ¿Cómo son las gráficas de estas funciones cuando sucede que $t_1 < t_2 < t_3$?

- Haga un análisis para otras posibilidades para t_1, t_2 y t_3 .
- Analice la situación para el caso general.

78. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • DIVERSAS REPRESENTACIONES

Primera parte

Proponga dos funciones cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$ que sean lineales y haga la gráfica de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

- Halle los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. ¿A qué corresponden en la gráfica?
- Halle los valores de x para los cuales $g(x) = 0$. ¿A qué corresponden en la gráfica?
- Analice simbólicamente qué sucede cuando x tiende a $-\infty$. ¿Qué se aprecia en la gráfica?
- Analice simbólicamente qué sucede cuando x tiende a $+\infty$. ¿Qué se aprecia en la gráfica?
- ¿Qué se observa cuando $x=0$?
- ¿Para qué valores de x , $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$? Encuéntrelos simbólicamente. ¿Coincide con lo que se aprecia en la gráfica?

Segunda parte

Proponga dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cualesquiera, de manera que $f(x)$ sea lineal y $g(x)$ sea cuadrática. Haga la gráfica de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

- Halle los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Señálelos en la gráfica.

8. Halle los valores de x para los cuales $g(x) = 0$. ¿Es posible reconocerlos siempre en la gráfica? ¿Cuándo sí? ¿Cuándo no?
9. Analice simbólicamente qué sucede cuando x tiende a $-\infty$ y a $+\infty$. ¿Qué se aprecia en la gráfica?
10. ¿Qué se observa cuando $x=0$?
11. Para qué valores de x , $f(x)/g(x) < 0$? Encuéntrelos simbólicamente. ¿Coincide con lo que se aprecia en la gráfica?
12. ¿Qué sucede si $f(x)=0$ y $g(x)=0$ tienen una solución común? Tome un ejemplo concreto y haga la gráfica. ¿Cómo cambian las respuestas de las preguntas 7 hasta 11?

Tercera parte

Proponga dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cualesquiera, de manera que $f(x)$ sea cuadrática y $g(x)$ sea lineal. Haga la gráfica de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

13. Halle los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. ¿Es posible reconocerlos siempre en la gráfica? ¿Cuándo sí? ¿Cuándo no? Verifíquelo en su gráfica.
14. Halle los valores de x para los cuales $g(x) = 0$. Señálelos en la gráfica.
15. Analice qué sucede cuando x tiende a $-\infty$ y a $+\infty$. ¿Qué se aprecia en la gráfica?
16. ¿Qué se observa cuando $x=0$?
17. ¿Para qué valores de x , $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$? Encuéntrelos simbólicamente. ¿Coincide con lo que se aprecia en la gráfica?
18. ¿Qué sucede si $f(x)=0$ y $g(x)=0$ tienen una solución común? Tome un ejemplo concreto y haga la gráfica. ¿Cómo cambian las respuestas de las preguntas de 13 hasta 17?

Cuarta parte

A partir de lo hecho y teniendo en cuenta el tipo de análisis desarrollado, escriba un párrafo en el que se describa un procedimiento que se pueda aplicar para trazar la gráfica de una expresión racional cualquiera, suponiendo que usted no va a tener calculadora a la mano.

79. CARACTERÍSTICAS FAMILIA**• ENSAYO**

Escriba un ensayo sobre la familia de funciones de la forma $f(x) = \frac{a}{Q(x)} + b$, donde $Q(x)$ es un polinomio de grado 2, y a y b son números reales

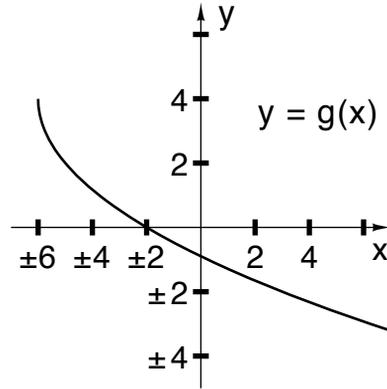
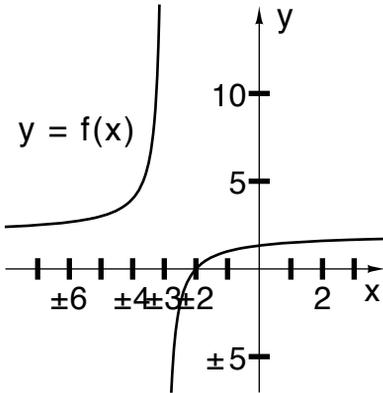
80. CARACTERÍSTICAS FUNCIÓN**• CONSTRUCCIÓN OBJETO**

1. Para cada una de las dos funciones cuyas gráficas se presentan, usted debe:

- ▲ Hallar la expresión simbólica de la función
- ▲ Identificar todas las características de la función

Se sabe que:

- ▲ f es una función racional de la forma $\frac{a}{x-h} + 2$ con a y h reales, a diferente de 0
- ▲ g es una función con radicales



2. Muestre que los puntos de corte entre las dos funciones satisfacen la siguiente ecuación: $x^3 + 11x^2 + 37x + 38 = 0$.
3. Busque con la calculadora uno de los puntos de corte. Usando división sintética, compruebe que efectivamente ése es un corte.
4. Explique por qué este corte satisface el teorema de la raíz racional.
5. Halle simbólicamente el otro corte.
6. Defina una desigualdad entre estas dos funciones.
7. Halle el conjunto solución de la desigualdad propuesta. (Tenga en cuenta los dominios de las funciones para escribir el conjunto solución)

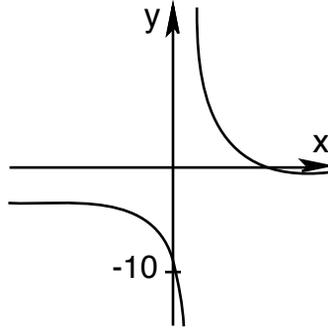
81. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

La desigualdad: $x^3 - p \geq g(x)$ tiene como conjunto solución:
 $[0,d) \cup [2.4,\infty)$.

Se sabe que:

▲ p y d son números reales positivos

- ▲ $g(x)$ corta el eje de las X en 4
- ▲ -3 no pertenece al rango de $g(x)$
- ▲ La figura muestra la gráfica de $g(x)$



1. Halle p , d y $g(x)$.
2. Verifique que la desigualdad tiene el conjunto solución propuesto.

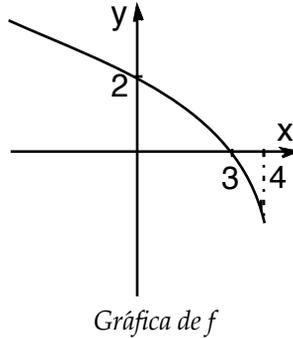
82. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

El conjunto solución de la desigualdad $g(x) > (h \circ f)(x)$ es $(0,1)$.

A partir de la información que se da a continuación usted debe:

1. Hallar las expresiones gráficas y simbólicas de las funciones f , g y h .
2. Comprobar que el conjunto solución propuesto es correcto.

De la función f se sabe que es una función con radicales. Su representación gráfica se muestra en la figura.



De la función g se sabe que:

- ▲ Es una función racional
- ▲ Tiene dilatación negativa
- ▲ El dominio de la función es $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- ▲ Corta el eje x en $x = -1$
- ▲ Tiene una asíntota horizontal y una asíntota vertical
- ▲ Cuando x tiende a ∞ , la función tiende a -2

La función h es de la forma: $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

83. CARACTERÍSTICAS FAMILIA • TABLA

Se desea estudiar las características de algunas funciones pertenecientes a la familia de las funciones con radicales. Para ello llene la tabla que se presenta a continuación, teniendo en cuenta las restricciones dadas a los parámetros de la expresión simbólica.

| $y = a\sqrt{x-h} + k$ | | | | | | | | | |
|-----------------------|----------|----------|----------------|----------------|--------------|--------------------------------|---|--------------------------|------------------------|
| a | h | k | Gráfica | Dominio | Rango | Intervalo de concavidad | Relación con \sqrt{x} | Ejemplo simbólico | Ejemplo gráfico |
| >0 | >0 | >0 | | | | | | | |
| <0 | >0 | >0 | | | | | | | |
| <0 | <0 | <0 | | | | | | | |

| $y = \sqrt{a(x-h)} + k$ | | | | | | | | | |
|-------------------------|----------|----------|----------------|----------------|--------------|--------------------------------|---|--------------------------|------------------------|
| a | h | k | Gráfica | Dominio | Rango | Intervalo de concavidad | Relación con \sqrt{x} | Ejemplo simbólico | Ejemplo gráfico |
| >0 | >0 | >0 | | | | | | | |
| <0 | >0 | >0 | | | | | | | |
| <0 | <0 | <0 | | | | | | | |

| $y = \sqrt[3]{a(x-h)} + k$ | | | | | | | | | |
|----------------------------|----|----|---------|---------|-------|-------------------------|----------------------------|-------------------|-----------------|
| a | h | k | Gráfica | Dominio | Rango | Intervalo de concavidad | Relación con $\sqrt[3]{x}$ | Ejemplo simbólico | Ejemplo gráfico |
| >0 | >0 | >0 | | | | | | | |
| <0 | >0 | >0 | | | | | | | |
| <0 | <0 | <0 | | | | | | | |

| Generalización | Gráfica | Dominio | Rango | Intervalo de concavidad | Ejemplo simbólico | Ejemplo gráfico |
|---|---------|---------|-------|-------------------------|-------------------|-----------------|
| $y = \sqrt[n]{a(x-b)} + c, n \text{ par}$ | | | | | | |
| $y = \sqrt[n]{a(x-b)} + c, n \text{ impar}$ | | | | | | |

84. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

1. Construya una función racional, $f(x)$, que tenga, por lo menos, las siguientes características:

▲ $f(x)$ tiene una asíntota horizontal negativa

▲ $f(x)$ tiene una asíntota vertical

▲ $f(x)$ es creciente siempre

$$\blacktriangle f(5) = -5$$

$$\blacktriangle f(x) \text{ tiene un corte con el eje } X$$

2. Encuentre el conjunto solución de: $|f(x)| < (x-5)^2 + 5$.

85. DESIGUALDADES • CONSTRUCCIÓN OBJETO

La siguiente desigualdad: $\frac{x+4}{x+2} < g(x)$, tiene como conjunto solución el intervalo $(0, b)$. Se sabe que $g(x)$ es una función con radicales de la forma: $g(x) = \sqrt{h-x}$. Encuentre h , b y verifique que la desigualdad tiene el conjunto solución propuesto.

86. ECUACIONES • FAMILIAS

Se tienen dos familias de funciones lineales:

$$-ax + 2y = 3 \quad (1)$$

$$x + y = a \quad (2)$$

1. Describa las familias de funciones.
2. Fije varios valores de a y trace en un mismo plano cartesiano las rectas correspondientes. Señale los puntos de corte para cada par de rectas determinadas por un mismo valor de a . ¿Puede descubrir algún patrón de comportamiento de los puntos de corte de las dos familias?

87. APLICACIONES • PLANTEO

Para construir latas cilíndricas sin tapa que almacenen 1000 cc, la compañía A utiliza un material que tiene un costo por cm^2 de \$3. Para

sellar cada lata (por el contorno inferior y por el costado) requiere un sellante especial que cuesta \$2 el cm.

La compañía B para producir sus latas, usa material que cuesta \$2.50 el cm^2 y sellante que cuesta \$2.50 el cm.

1. ¿Qué dimensiones tiene la lata menos costosa en A? ¿Qué dimensiones tiene la lata menos costosa de B? ¿Para qué dimensiones de las latas, son menores los costos en A que en B?
2. Una tercera compañía, C, ofrece latas que no necesitan sellamiento lateral. El material que se necesita cuesta \$4.50. ¿Qué ventajas puede ofrecer esta compañía sobre los otros dos competidores?

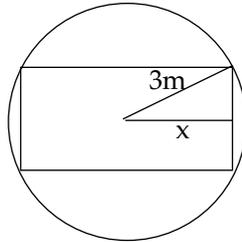
88. APLICACIONES • PLANTEO

Las ciudades A y B se encuentran sobre las orillas de un río. La ciudad A está en la margen derecha y la B en la izquierda. Las ciudades no están enfrentadas. La ciudad A dista de la ciudad B, diagonalmente 13km en línea recta. Un atleta que está en A y debe ir hasta B, debe escoger entre nadar perpendicularmente los 5 km que tiene de ancho el río y correr el resto del recorrido por el borde del río hasta B o nadar directamente hasta llegar a B. También puede escoger alternativas diferentes, nadando en diagonal hasta cierto punto de la otra orilla y correr el resto del trecho. El nada a una velocidad de 4 kph. y corre a 6 kph.

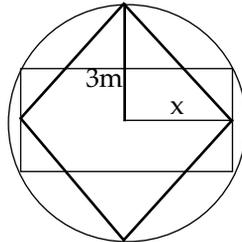
1. ¿Con cuál recorrido gasta el mayor tiempo?
2. ¿Con cuál recorrido gasta el menor tiempo?
3. ¿Con qué velocidad debería correr para que el tiempo mínimo se obtuviese cuando el atleta use los siguientes recorridos:
 - a. Nadar perpendicularmente hasta llegar a la orilla opuesta y correr el resto.
 - b. Nadar en diagonal hasta el punto en que restan 6 km de recorrido hasta B.
 - c. Nadar directamente hasta B.

89. APLICACIONES • PLANTEO

En una discoteca se tiene una superficie circular de radio 3 metros. Se quiere inscribir en ella un rectángulo que delimitará una pista de baile:



Adicionalmente se quiere decorar la pista, inscribiendo un rombo, tal y como se muestra en la siguiente figura:



Los contornos de las dos figuras se delimitarán con material sintético fluorescente.

1. ¿En qué casos (para qué valores de x) se necesita más material para delimitar el rombo que para delimitar el rectángulo?
2. ¿Cómo se interpreta la situación en que $x = 0$? ¿Puede deducirse esta interpretación a partir de un razonamiento gráfico o de un razonamiento simbólico? Explique.

Se quiere utilizar material sintético de diferentes colores para delimitar las dos figuras. El que se quiere utilizar para el rombo cuesta la cuarta parte de lo que cuesta el que se quiere utilizar para hacer el rectángulo.

3. ¿En qué casos es más caro decorar el rombo que el rectángulo?

90. APLICACIONES • PLANTEO

Antiguamente los frascos de crema Ponds' tenían la forma de un cilindro. Sin embargo, con el propósito de ahorrar algo de dinero, los productores diseñaron un frasco en el que la base no era plana: la base era una semiesfera de tal forma que la cantidad de crema en el frasco era menor de lo que el cliente podía intuir. El frasco, incluida la tapa, estaba fabricado del mismo material que de hecho era lo que más costaba del producto. El frasco tenía el mismo grosor en todas partes.

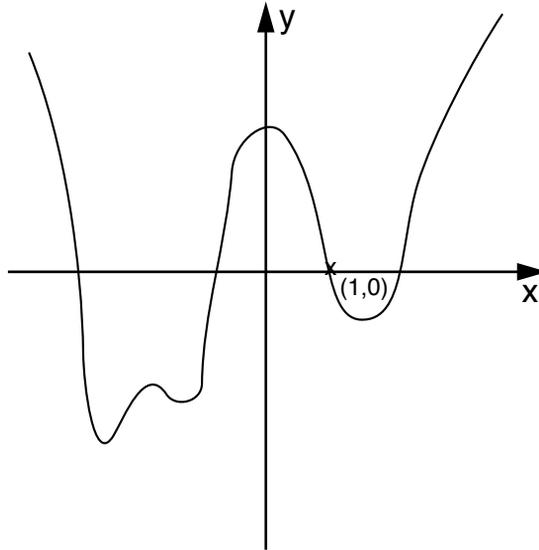
Para un volumen dado, ¿cuáles deberían ser las dimensiones del frasco de tal forma que se minimice el costo del frasco? Halle la función del radio y del volumen a partir de la cual, para un valor del volumen, se puede hallar con la calculadora el valor del radio que minimiza el costo.

Halle las dimensiones del frasco para volúmenes de 50, 100 y 200 cm^3 .

Generalidades sobre funciones

91. FUNCIONES¹

La gráfica representa una función (los puntos en la gráfica tienen por tanto coordenadas $(x, f(x))$). A partir de la gráfica responde las siguientes preguntas calcándola tantas veces como sea necesario.



- Halle aproximadamente el valor de:
 - $f(1)$
 - $f(0)$
 - $f(-2)$
- Halle aproximadamente los valores de x tales que:
 - $f(x) = 1$
 - $f(x) = 0$
 - $f(x) = -2$
- Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, justificando su respuesta:
 - $f(-1) < 3$
 - $2f(2) \geq -5/2$
 - $f(0) \leq f(3)$.
 - f crece cuando x varía entre -2 y 0 .
 - Si $-1 \leq x \leq 1$ entonces $-3 \leq f(x) \leq 3$.
 - Si $-3 \leq f(x) \leq 3$ entonces $-1 \leq x \leq 1$.

1. Problema diseñado por Margarita de Meza.

4. Sitúe los puntos (x, y) tales que $x = 2$.

a. $y = f(x)$

b. $y = f(x) + 1$

c. $y = 2 f(x)$

d. $y = -\frac{1}{2} f(x)$

e. $y = f(x-2)$

f. $y = |f(x)|$

5. Sitúe los puntos (x, y) tales que:

a. $y = 2$

b. $y = f(x) = 3$

c. $y = f(x) + 3 = 2$

d. $y = 2f(x) = 2$

e. $y = |f(x)| = 2$

6. Sitúe los puntos (x, y) tales que (x, y) esté en la gráfica y $f(x) < 0$.

7. Sitúe en el eje x los valores de x tales que $f(x) < 0$.

8. Sitúe en el eje y los valores de y tales que $f(x) \leq 0$.

9. Trace la gráfica de $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.

10. Resuelva gráficamente: $f(x) \leq \left| \frac{x}{2} + 1 \right|$.

11. Trace la gráfica de $f(x) + g(x)$.

92. GENERALIDADES

1. Dadas las siguientes expresiones:

$$f(x) = (x+1)(x-3)$$

$$g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

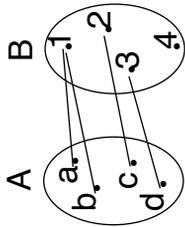
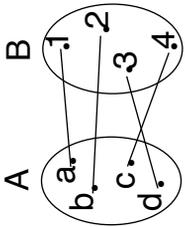
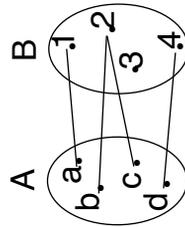
$$h(x) = g(x+5)$$

$$j(x) = (f \circ g \circ h)(x)$$

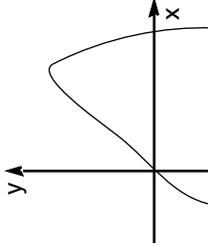
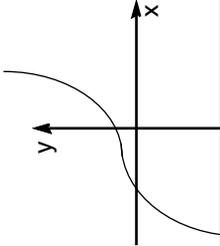
- a. Diga si son funciones o no y por qué.
 - b. Halle el dominio y el rango de cada una.
2. Encuentre una función $k(x)$ tal que $(f \circ k)(x) = |x|^2 - 2|x| - 3$.
3. Dé el dominio y el rango de la función $(f \circ k)(x)$.

93. GENERALIDADES • TABLA

Para las siguientes relaciones, suponga, en el caso de los diagramas, que el conjunto de partida, A , es el conjunto $\{a, b, c, d\}$ y el de llegada B , es el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Para los demás, el dominio y el codominio es el conjunto de los números reales, \mathfrak{R} . Llene el cuadro, dando una explicación en cada caso.

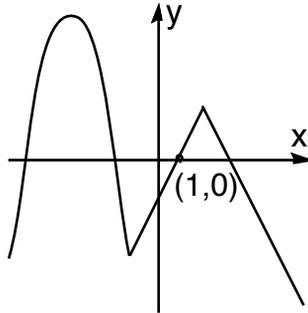
| | ¿Función? | Rango | ¿Inyectiva? | ¿Sobreyectiva? | ¿Biyectiva? | ¿Tiene inversa? | Expresión de la inversa |
|--|-----------|-------|-------------|----------------|-------------|-----------------|-------------------------|
|  | | | | | | | |
|  | | | | | | | |
|  | | | | | | | |

| | ¿Función? | Rango | ¿Inyectiva? | ¿Sobreyectiva? | ¿Biyectiva? | ¿tiene inversa? | Expresión de la inversa |
|--|-----------|-------|-------------|----------------|-------------|-----------------|-------------------------|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

| ¿Función? | Rango | ¿Inyectiva? ¿Sobreyectiva? ¿Biyectiva? | ¿Tiene inversa? | Expresión de la inversa |
|---|-------|--|-----------------|-------------------------|
|  | | | | |
|  | | | | |
| $f(x) = x-2 $ | | | | |
| $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ | | | | |
| $f(x) = \sqrt{x-4}$ | | | | |

94. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

A partir de la gráfica dada, la cual representa la función $f(x)$, realice cada uno de los ejercicios propuestos:



1. Sitúe los puntos (x, y) tales que $x = 3$ y además:

- a. $y = f(x)$
- b. $y = f(x) + 1$
- c. $y = 2f(x)$
- d. $y = -\frac{1}{2}f(x)$
- e. $y = f(x-2)$

2. Sitúe los puntos (x, y) tales que

- a. $y = 3$
- b. $y = f(x) = 3$
- c. $y = f(x) + 1 = 3$
- d. $y = 2f(x) = 3$

e. $y = -\frac{1}{2}f(x) = 3$

f. $y = f(x-2) = 3$

3. Sitúe los puntos (x, y) tales que:

a. $y = f(x) + 1$

b. $y = |f(x)|$

4. Sitúe los puntos (x, y) tales que (x, y) esté en la gráfica de f y además $f(x) < 0$.

5. Sitúe en el eje X los valores de x para los que $f(x) \leq 0$.

6. Sitúe en el eje Y los valores de y para los que $f(x) > 0$.

7. Resuelva gráficamente la desigualdad $f(x) \leq 2x + 3$.

8. Resuelva gráficamente la desigualdad $f(x) \leq |2x + 3|$.

95. GENERALIDADES

1. Haga la gráfica de $f(x) = 2g(x+2) + 1$, si $x \geq -2$, siendo $g(x) = x^2$.

2. Determine f^{-1} , su dominio y rango.

3. Se construye un triángulo rectángulo con uno de sus catetos sobre el eje x , un vértice coincide con una raíz de f^{-1} y el otro vértice se mueve hacia la derecha sobre la función f^{-1} . Determine una función que defina el área del triángulo.

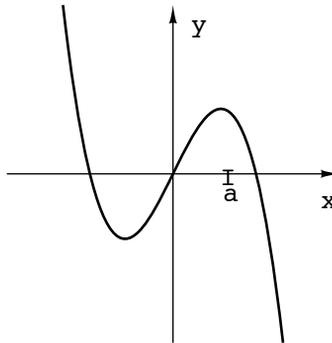
96. APLICACIONES

La pendiente de la tangente en un punto a del dominio de la función $y = \frac{1}{x}$ está dada por $-\frac{1}{a^2}$. Determine el área del triángulo que determina la tangente en cualquier punto con los ejes coordenados.

97. RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES

• DIVERSAS REPRESENTACIONES

La siguiente es la gráfica de $f(x)$:



- Dibuje $y = 2f(x-1) - 1$.
- Dibuje $f^{-1}(x)$.
- Invéntese un expresión para $f(x)$.
- Halle $f^{-1}(x)$.
- Trace la recta $x=a$. Esta recta corta cada una de las gráficas de f y de f^{-1} . Determine las coordenadas de los puntos de corte en términos de a .

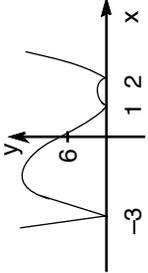
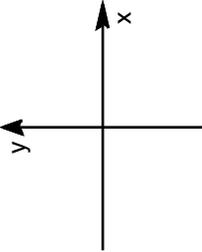
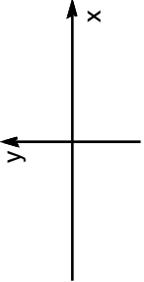
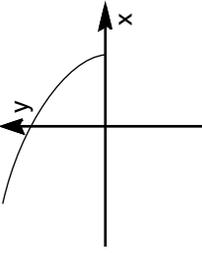
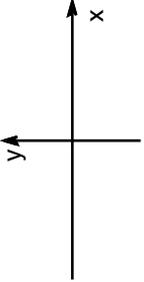
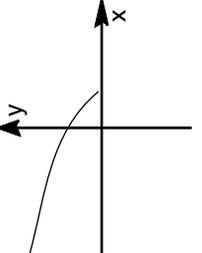
98. GENERALIDADES • TABLA

Se dan tres funciones, $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$, $g(x) = 2$ y $h(x) = |x|$. Haga la gráfica de las expresiones que resultan luego de hacer las operaciones que se piden. Explique qué pasa, en cada caso, con respecto a las funciones originales, teniendo en cuenta aspectos como dominio, rango, cortes, simetrías, etcétera. Al final haga un comentario acerca de las propiedades de las operaciones involucradas.

| Operación | Expresión simbólica | Expresión gráfica | Aspectos | Comentarios |
|---------------------|---------------------|-------------------|----------|-------------|
| $g(x) + f(x)$ | | | | |
| $g(x) - f(x)$ | | | | |
| $f(x) - g(x)$ | | | | |
| $g(x) \times f(x)$ | | | | |
| $\frac{f(x)}{g(x)}$ | | | | |
| $\frac{g(x)}{h(x)}$ | | | | |
| $(f \circ g)(x)$ | | | | |
| $(f \circ h)(x)$ | | | | |
| $(h \circ f)(x)$ | | | | |

99. GENERALIDADES • TABLA

1. Usted va a trabajar con dos funciones, $f(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$ y $f(x) = \sqrt{3-x}$. En cada fila obtenga la gráfica y la expresión simbólica de la función g que se obtiene a partir de la de f .

| | | | | | |
|---|-----------------|---|----------------------------|---|----------------------------|
| | | $f(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$ | Expresión simbólica de g | $f(x) = \sqrt{3-x}$ | Expresión simbólica de g |
| 1 | $g(x) = f(x) $ |  | |  | |
| 2 | $g(x) = 2f(x)$ |  | |  | |
| 3 | $g(x) = f(2x)$ |  | |  | |

2. Dé argumentos simbólicos para explicar:

- ▲ La relación que hay entre los cortes de f y los de g
- ▲ El comportamiento de las abscisas y las ordenadas de los máximos y mínimos de g en comparación con los de f
- ▲ El comportamiento del crecimiento de la función g comparado con el de la función f

3. Refiérase a la expresión de g de la fila 1. ¿Qué función, llámela $h(x)$, es tal que $(h \circ f)(x) = g(x)$ ó $(f \circ h)(x) = g(x)$?

4. Repita el ejercicio para las expresiones de g de las filas 2 y 3.

100. GENERALIDADES • TABLA

De la misma manera que es posible resolver una ecuación del tipo

$$3 + x = 4, \quad (1)$$

se puede resolver una ecuación del tipo

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = h(x), \text{ conocidas } f \text{ y } h. \quad (2)$$

En la ecuación (1), la incógnita es x ; en la ecuación (2), la incógnita es $g(x)$. El objetivo de este ejercicio es que usted resuelva las ecuaciones que se plantean en cada fila de la tabla. En la columna de gráficas, trace las gráficas de todas las funciones involucradas y analice su comportamiento en relación con la ecuación propuesta.

| $f(x)$ | $h(x)$ | Ecuación | Solución | Gráficas |
|--------|--------|------------------|----------|----------|
| $x+3$ | $2x-7$ | $f(g(x)) = h(x)$ | | |

| f(x) | h(x) | Ecuación | Solución | Gráficas |
|-------------|-------------|------------------|-----------------|-----------------|
| $x+3$ | $2x-7$ | $g(f(x)) = h(x)$ | | |
| $x^2 - 4$ | $2x - 7$ | $f(g(x)) = h(x)$ | | |
| $x^2 - 4$ | $2x - 7$ | $g(f(x)) = h(x)$ | | |
| $x^2 - 4$ | x | $g(f(x)) = h(x)$ | | |

Referencias bibliográficas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- California, S. D. o. E. (1985). *Mathematics Framework for California Public Schools Kindergarten through Grade Twelve*. Sacramento, CA: California State Department of Education.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education. Studies in Mathematics Education*. London: Palmer Press.
- Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87 pp. 519-524.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Moschkovich, J., Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. En Romberg, T., Fennema, E. y Carpenter, T. (Eds.). *Integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale: LEA.
- NCTM (1991a). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston: NCTM.
- NCTM (1991b). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: NCTM.
- Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think*. Washington, DC: National Academy.
- Romberg, T. A. (1993). How one comes to know: Models and theories of the learning of mathematics. En Niss, M. (Ed.). *Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Rico, L. et al. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Granada: Universidad de Granada.
- Schliemann, A. D. (1995). Some concerns about bringing everyday mathematics to mathematics education. En Meira, L. & Carraher, D. (Eds.) *Proceedings of the 19th PME Conference*. pp. 1.45-60. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws, D.

A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Sloyer, C. (1986). *Fantastiks of Mathematiks*. Dedham: Janson.