Gestión del profesor enfocada en aspectos de la construcción de significado de una definición y de una proposición condicional

Camilo Sua y Leonor Camargo

Introducción

Podría suponerse que tener el enunciado de una definición geométrica o de una proposición condicional es suficiente para poder reconocer los objetos o relaciones involucrados en él, identificar representaciones que ejemplifican el significado del enunciado, establecer la forma en que los objetos involucrados se relacionan, y sacar provecho de los usos que pueden tener los enunciados en la actividad matemática. Sin embargo, esta suposición no es evidente al observar la actividad matemática que desarrollan los estudiantes de diferentes niveles de escolaridad. Para que ellos puedan sacar provecho de un enunciado, en las vías señaladas, se requiere de una gestión cuidadosa del profesor en el aula de matemáticas, en pro de la construcción de significado de tales enunciados, a partir de las interpretaciones que de estos puedan tener los estudiantes. En este artículo ejemplificamos tal gestión en dos situaciones relacionadas con una definición y una proposición condicional, con el objetivo de hacer un llamado a los profesores acerca del cuidado que deben tener al momento de trabajar con enunciados de ambos tipos. En el caso de la definición, la gestión está orientada a la producción de una representación de la relación bisecarse y a la diferenciación de las expresiones “se bisecan” y “biseca a”. En el caso de la proposición condicional, la gestión se enfoca en cómo usar un teorema para justificar la existencia de un punto en un rayo a una distancia dada del origen.

Qué entendemos por "construir significado"

Para referirnos a la construcción de significado nos valemos de elementos de la teoría del signo triádico de Charles S. Peirce, con base en elaboraciones de dicha teoría realizadas por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012). Desde el punto de vista de Peirce, la semiosis es la actividad comunicativa en la que se crean o se usan SIGNOS. En un SIGNO se ponen en relación tres componentes: un objeto, a lo que se alude en la comunicación o el pensamiento; una representación con la que se alude al objeto (e. g., palabras, gestos, gráficos, combinación de estos tres elementos); y un interpretante, lo que produce la representación en la mente de quien lo percibe y lo interpreta, es decir, del intérprete (Figura 1).

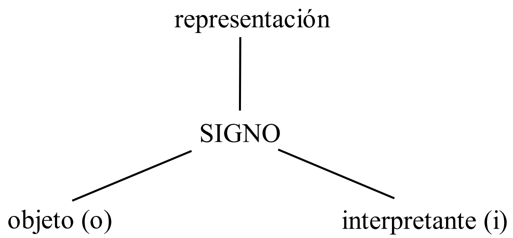


Figura 1: Estructura general del SIGNO

La enseñanza y el aprendizaje se conciben como procesos dialógicos de interpretación que generan secuencias de SIGNOS, que implican distintos sistemas de representación (matemáticos, lingüísticos, gestuales, sociales, etc.). En estos procesos, el profesor y los estudiantes que se involucran en una conversación exhiben diferentes niveles de conocimiento con respecto a un objeto, en nuestro caso, un objeto matemático. La interacción discursiva tiene como meta la construcción de significado por parte de los estudiantes, con el apoyo del profesor. La secuencia de SIGNOS se produce en sucesivos ciclos de interpretación colectiva, a partir de representaciones expuestas de ciertos aspectos de tal objeto, de diferente naturaleza, que bajo la óptica de quien las emite (profesor o estudiante) sirven para comunicar o inferir aspectos del objeto, con base en la interpretación que el receptor (profesor o estudiante) hace de los mismos. La construcción de significado busca lograr la compatibilidad de las ideas de los estudiantes con las de la comunidad del discurso matemático de referencia, representada por el profesor, con base en una meta educativa particular.

La gestión del profesor relacionada con la construcción de significado en el aula, asunto en el que centramos el presente artículo, consiste en impulsar acciones interpretativas deliberadas con el propósito de lograr la convergencia de los interpretantes de los estudiantes hacia la interpretación pretendida. Las acciones que el profesor pone en juego son respuesta principalmente a las inferencias que hace acerca de los interpretantes de los estudiantes en un determinado momento de la construcción de significado. En el intercambio comunicativo, el profesor ajusta los aspectos del objeto matemático que quiere destacar a aquellos aspectos interpretados por él, cuando actúa como receptor, que considera útiles en la evolución que pretende. Para ilustrar la gestión del profesor, presentamos a continuación dos ejemplos.

Ejemplo 1. Construcción de significado de la relación bisecar

Para ejemplificar aspectos de la gestión del profesor en la construcción de significado del enunciado de una definición, tomamos fragmentos de intercambio dialógico en una clase de geometría euclidiana plana, de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, en la que el profesor impulsa una conversación relacionada con la solución al siguiente problema, que los estudiantes han resuelto usando el programa de geometría dinámica Cabri:

> **Problema de los Cuatro Puntos (PCP)**: Dados tres puntos no colineales A, B y C, ¿existe un punto D tal que los segmentos AB y CD se bisequen?

Construcción de dos segmentos que, según el grupo de Molly, se bisecan

Por sugerencia del profesor, Molly pasa al tablero, conecta su computador a un *video-beam* y presenta en frente a todos los estudiantes el procedimiento que su grupo llevó a cabo, en Cabri, para hacer la construcción que les permitió resolver el interrogante planteado.

Profesor: […] Entonces vamos a mirar la propuesta del grupo de Molly. ¿Qué hicieron primero?

Molly: (En el tablero). Bueno, nosotros primero construimos los tres puntos y… (construye en Cabri tres puntos no colineales y los designa por *A, B* y *C* [Figura 2]). Ya después hicimos el segmento *AB*.

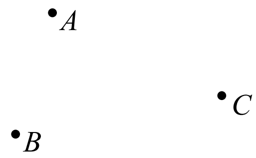


Figura 2

Profesor: ¿Esos tres puntos tienen alguna condición en especial, Molly?

Molly: Solo que no sean colineales.

Profesor: Entonces, a medida que vamos diciendo las cosas que se construyen, vamos a ir diciendo, a su vez, las condiciones [que tienen]. ¿Listo?

Molly: (Mientras el profesor dice lo anterior, Molly construye el segmento *AB* [Figura 3]).

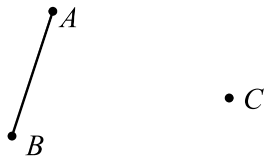


Figura 3

Profesor: (Comienza a escribir en el tablero la enumeración de los pasos de la construcción del grupo de Molly) Entonces… puntos *A, B, C* no colineales. ¿Después qué fue lo que hicieron, Molly?

Molly: Eeee, realizamos el segmento *AB*.

Profesor: Ajá. (Escribe en el tablero el segundo paso). Realizamos el segmento *AB,* listo.

Molly: Después colocamos el punto medio del segmento *AB*.

Profesor: Ujum. (Escribe en el tablero el tercer paso: "Colocamos el punto medio")

Molly: (Construye el punto medio del segmento *AB* y lo designa por *D* [Figura 4])

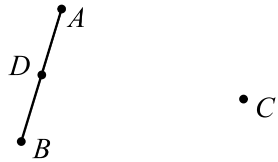


Figura 4

Profesor: (Incluye esta información en el tercer paso que ha escrito) Entonces, colocamos el punto medio *D* del segmento *AB*, listo. Y, ¿luego?

Molly: Eeee, trazamos el segmento *CD* (construye lo mencionado [Figura 5])

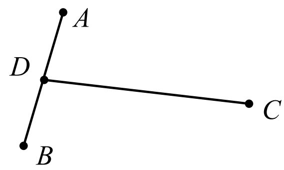


Figura 5

Profesor: (Anota en el tablero el cuarto paso: "Trazamos el segmento *CD*"). Listo. Y, ¿qué pasó?

Molly: Yyyy, pues, según la definición de bisecar, tenemos que el segmento *AB* y el segmento *CD* se bisecan.

La interacción comunicativa entre Molly y el profesor se centra en la reproducción de los pasos de la construcción hecha por el grupo de la estudiante, y la especificación que la estudiante o el profesor hacen de los objetos construidos y las condiciones que tienen. La representación geométrica expuesta en la Figura 5 junto con la verbalización: "según la definición de bisecar, tenemos que el segmento *AB* y el segmento *CD* se bisecan" nos permiten inferir lo que para el grupo de Molly significa que dos segmentos se bisequen. Según estos estudiantes, dos segmentos se bisecan si uno de ellos contiene el punto medio del otro. La intervención de Molly ofrece al profesor la oportunidad de abrir un espacio en la clase para revisar el significado del término "bisecar". Este grupo, al parecer, está confundiendo la expresión "los segmentos se bisecan" con "un segmento biseca a otro". Según los estudiantes, los segmentos *AB* y *CD* se bisecan si el punto de intersección de ellos es el punto medio del segmento *AB* y extremo del segmento *CD*.

¿La representación propuesta por Molly corresponde a segmentos que se bisecan?

El profesor promueve una conversación sobre el informe dado por Molly. Se genera una polémica en la que algunos estudiantes se refieren a cómo interpretaron la representación de dos segmentos que se bisecan.

Profesor: Mmmm ¿qué opinan ustedes de lo que hizo ese grupo [de Molly]?

Elisa: Yo tengo una inquietud. En el ejercicio dice que los dos segmentos se bisecan; no dice que uno biseca al otro.

Profesor: Ajá.

Elisa: Y en este ejemplo, vemos que el segmento... *CD* biseca al segmento *AB*. Mi pregunta es… si esa construcción está bien hecha o mal, porque yo entiendo que los dos segmentos se bisecan.

Profesor: ¿Qué dicen sus compañeros?

Varios: (Entre murmullos, se oye la voz de Camilo) Yo hice lo mismo [que Molly].

Profesor: Entonces, hay algo ¿no? Y es que Elisa dice: tengo la duda de si acá (señala en el tablero el dibujo presentado en la Figura 5) se está presentando que los dos segmentos se bisecan. Para ella, uno biseca a otro pero no los dos. (Le da la palabra a un estudiante, señalándolo.) ¿De acuerdo? ¿Qué dices?

Camilo: ¡No! [En desacuerdo con Elisa]. Ahí se cumplen las condiciones porque es que el punto *D* es también de ese segmento, de *CD*.

Varios: (Murmullos)

Profesor: ¡Ah! Tal vez, Camilo está pensando igual que aquel grupo (con el índice señala al grupo de Molly) ¿cierto?

Cuando el profesor pide a los estudiantes opinar sobre la representación hecha por Molly, Elisa plantea una objeción cuestionando si en la figura un segmento biseca a otro. En el interpretante de Elisa parece estar presente la distinción de significado para las expresiones “dos segmentos se bisecan” y “un segmento biseca al otro”. Por eso, ella considera equivocada la representación. Se refiere al enunciado aludiendo a que ambos segmentos se deben bisecar y probablemente tiene una imagen conceptual que incluye una representación diferente, en la que cada uno de los segmentos contiene el punto medio del otro.

El profesor no toma partido; pregunta a los demás estudiantes qué opinan de la objeción de Elisa. Con su intervención: “Para ella [Elisa], uno biseca a otro pero no los dos”, somete a discusión la diferenciación lingüística entre “un segmento biseca a otro” y “los dos segmentos se bisecan”.

Camilo está de acuerdo con Molly. Su imagen conceptual de la bisección de dos segmentos deja ver que, para él, la identificación de la relación "se bisequen" se da en términos de la contenencia del punto medio de un objeto en otro objeto.

Contraste entre la representación hecha y la definición del término "bisecar"

Antonio asocia la representación que están analizando con la definición de "bisecar" que han consignado en los cuadernos dos clases antes. Esto motiva una conversación sobre tal definición. Los estudiantes interpretan que la definición puede hacer referencia a que un objeto biseque a otro o a que ambos objetos se bisequen.

Profesor:	[…] Y es que, dice Camilo, que *D* pertenece al segmento *CD* y eso es suficiente. ¿Qué dicen? ¿Sí o no? ¿Por qué no, Antonio?
Antonio:	Por la definición de bisecar, tiene que contener el punto medio.
Profesor:	Sí. ¿Quién? ¿Quién tiene que contener el punto medio?
Dina:	Es que no dice si exactamente
Profesor:	(A Dina) Espera un momento. A ver, Antonio, otra vez.
Antonio:	Tenemos que *AB*… *CD* está bisecando a *AB*.
Profesor:	*CD* está bisecando a *AB*, bien.
Antonio:	Según lo que decía en la hoja [del enunciado del problema], se bisecaban los dos; entonces tendría que ser el punto medio de los dos.
Profesor:	Tendría que ser el punto medio de los dos. Sin embargo, en la construcción que ustedes mismos hicieron (la realizada por el grupo de Antonio)…
Varios:	(Risas)
Profesor:	En la construcción de ustedes, hicieron esto también, ¿cierto? ¿Por qué lo hicieron, entonces?

Antonio: Fue la primera idea que nos surgió, y después hicimos la otra.

Profesor: ¡Ah!, ya. Y, con esta primera idea que les surgió, ¿qué pasó? ¿Se dieron cuenta de qué o qué? ¿Por qué hicieron la otra?

Laura: Pues, también puede haber otra posibilidad de que se bisequen, que sea el punto medio de los dos segmentos.

El profesor impulsa una conversación sobre la interpretación de Camilo, la cual parece coincidir con la de Molly; gracias a la gestión que promueve, pone en discusión las diferencias en la interpretación del término "bisecar". Observamos tres reacciones diferentes en los estudiantes:

Antonio acude a una versión simplificada de la definición de "bisecar" y la relaciona con el enunciado del Problema. Según él, la definición de "bisecar" implica "contener el punto medio" y el enunciado del Problema pone la condición de que "se bisequen los dos" segmentos, razón por la cual cada segmento debería contener el punto medio del otro. En su explicación, Antonio no se refiere explícitamente a la diferencia entre las expresiones lingüísticas "se bisequen" o "uno biseque al otro", pero pone en juego la primera para interpretar, con la segunda, el enunciado del Problema.

Dina reacciona refiriéndose a la falta de claridad en una enunciación, probablemente de la definición de bisecar. Cuando el profesor le pide a Antonio aclarar a qué objeto se refiere al decir "tiene que contener el punto medio", ella interviene diciendo: "es que no dice si exactamente". Según Dina, como la definición dice: "Un objeto geométrico biseca a un segmento si contiene o es su punto medio" y no dice "Un objeto geométrico biseca a un segmento si contiene exactamente o es su punto medio", es factible tener la interpretación de Antonio o la de Molly. Dina parece considerar semánticamente iguales las expresiones "los segmentos se bisecan" y "un segmento biseca al otro".

Laura está de acuerdo con Dina. Para ella, hay dos interpretaciones de la expresión "se bisecan". Cuando el profesor comenta que Antonio y su grupo hicieron dos representaciones, una en la que el segmento *CD* biseca al segmento *AB* (como la de Molly) y otra en la que *AB* y *CD* se bisecan, y les pregunta por qué hicieron ambas, ella afirma: "Pues, también puede haber otra posibilidad de que se bisequen, que sea el punto medio de los dos segmentos".

Revisión de la definición del término “bisecar”

En vista de que aún no parece haber un consenso, el profesor regresa a la representación hecha por Molly y le pide argumentar por qué la construcción resuelve el problema. Molly intenta usar la definición de “bisecar” que ha consignado en su cuaderno.

Profesor: La pregunta es concreta: las dos cosas que ustedes hicieron, una de ellas es esta (señala el gráfico hecho por Molly, el que se presenta en la Figura 5); ¿esto responde al problema, sí o no? Porque ustedes (señala a Camilo) hicieron también esto. ¿Molly quieres defender tu idea?

Molly: Ja ja ja. Pues… eee, pues a mi modo de ver, la definición de bisecar dice que… o sea… (lee sus notas) si (enfatiza con la voz) el segmento contiene su punto, entonces en el segmento se

Profesor: ¿Su punto…?

Molly: O sea, biseca a un segmento si contiene su punto

Varios: Medio

Molly: No, su punto, o (enfatiza con la voz) es su punto medio… o, es o…

Varios: (Murmullos)

Profesor: ¿Cómo está en la definición? Si contiene o es su punto medio, ¿cierto? Si lo contiene o es su punto medio.

Molly: Ahhh, ok.

El profesor solicita a Molly que defienda la pertinencia de su representación, probablemente para que se dé cuenta de que solo el segmento *CD* biseca al segmento *AB*. La estudiante acude a la definición de “bisecar” que ha consignado en su cuaderno de apuntes, la cual tiene mal escrita, pues le sobra el primer “su punto”. Esta frase adicional, probablemente, es interpretada por Molly como: “si contiene un punto o es su punto medio”. Por eso para ella, el segmento *AB* biseca al segmento *CD* dado que contiene al punto *D* del segundo segmento. El profesor se da cuenta del error en la consignación de la definición por parte de Molly y pide a los demás revisar sus apuntes. Él mismo rectifica la definición, eliminando la frase sobrante. Con ello, Molly parece caer en cuenta del error de sus apuntes y quizá del porqué de la diferencia de interpretación.

Aclaración de la relación "se bisecan"

Una vez revisada la definición de "bisecar", nuevamente el profesor se refiere a la representación para preguntar cuál segmento es el que biseca al otro segmento, explicar por qué se puede afirmar lo anterior y expresar la relación "los dos segmentos se bisecan" de diferente forma.

Profesor: ¿Qué dice esa definición? Entonces, en este caso (en el tablero señala el dibujo correspondiente a la Figura 5), ¿cuál segmento biseca a cuál?

Juan: *CD* biseca a *AB*.

Profesor: *CD* biseca a *AB*. *CD* es una figura geométrica y biseca a *AD*, ¿por qué?

Juan: A *AB*.

Profesor: A *AB*… Porque contiene su punto medio, que es *D*. Hasta ahí, estamos. Pero, ¿será que *AB* biseca al segmento *CD*, en este caso?

Varios: No.

Profesor: No. ¿Y el enunciado [del Problema] qué decía?

Varios: (Murmullos)

Profesor: Que se bisequen. Es decir, uno biseca al otro y el otro biseca al uno. ¿Ven? O sea que esta opción no funciona (señala el gráfico hecho por Molly). ¿Listo? No funciona porque no corresponde con lo que se está solicitando en el Problema. Acá solamente se está cumpliendo parcialmente la condición: efectivamente un segmento biseca al otro, pero no los dos entre sí. ¿Listo? […]

La gestión del profesor se basa en las interpretaciones que hace de las intervenciones de los estudiantes. Solo al final de la conversación toma partido, cuando cree que debido al trabajo colectivo, el significado se ha afianzado o modificado. Al no conocer la definición de "bisecar" que Molly había consignado en sus apuntes, y que la llevó a proponer la representación de la Figura 5, encaminó sus intervenciones a lograr la distinción entre las expresiones lingüísticas "los dos segmentos se bisecan" y "un segmento biseca al otro". En ese sentido, procuró valerse de las interpretaciones de los estudiantes para producir el significado.

Ejemplo 2. Localización de un punto *B* en un rayo

La siguiente conversación tiene lugar, con los mismos estudiantes, unas semanas después de precisar la definición de bisecar. Nos enfocamos en el uso que se da a un enunciado condicional en la resolución de un problema propuesto por el profesor. Para resolver este problema también se empleó Cabri:

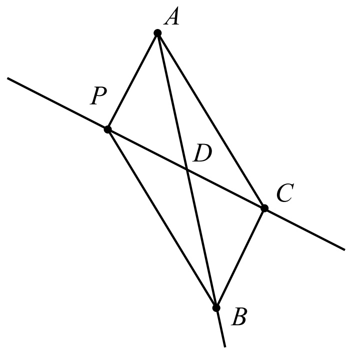
> **Problema Triángulos Congruentes**: Sean la recta *PC* y un punto *A* que no pertenece a la recta, contenidos en un plano. Propongan dos métodos para determinar un punto *B* en el mismo plano, de tal manera que los triángulos *ACP* y *BCP* sean congruentes.

En lo que sigue, se ilustran, con fragmentos de conversación, aspectos de la gestión del profesor en la construcción de significado del enunciado condicional:

> **Teorema Localización de Puntos (TLP):** Dado el rayo *CT* y un número real z, $z > 0$, entonces existe un único punto X que pertenece al rayo *CT* tal que la distancia de C a X es igual a z.

Específicamente, nos centramos en el momento en que el profesor pide a los estudiantes cambiar un paso de la construcción hecha por un grupo para resolver el problema. Los estudiantes (Camilo y Joaquín) han hecho un reporte de la construcción (Cuadro 1) y el profesor se detiene en los pasos cuarto y quinto. A la pregunta del profesor sobre cómo han construido el punto *B*, Joaquín explica que él y su compañero usaron la opción *Circunferencia* del menú de Cabri para determinar el punto *B* en la intersección del rayo *AD* y la circunferencia de centro en *D* y radio la distancia de *D* a *A*.

1. recta *PC*, segmento *PC*
2. *D* punto medio del segmento *PC*
3. rayo *AD*
4. punto *B* tal que *D* está entre *A* y *B*
5. *D* punto medio del segmento *AB*
6. triángulos *APC* y *BCP* son congruentes



Cuadro 1: Procedimiento de Camilo y Joaquín

Los estudiantes proponen TLP como una alternativa para justificar la determinación del punto *B* en la ubicación deseada

Los estudiantes mencionan que el punto medio *D* del segmento *PC* existe gracias al Teorema Existencia del Punto Medio (ya incorporado al sistema teórico). Afirman que, dados los puntos *A* y *D*, se puede construir el rayo *AD*. Después, Joaquín explica el cuarto paso del procedimiento diciendo que usaron la opción Circunferencia del menú de Cabri. El profesor pide a los estudiantes buscar un recurso para construir *B* y poder justificar su existencia desde la teoría.

Profesor: [Desde la teoría] Podemos construir rectas, podemos construir segmentos, podemos construir el punto medio, podemos construir rayos como decía Camilo [tercer paso de la construcción]. Después debemos construir el punto *B* como queremos que sea, es decir, que *D* sea el punto medio del segmento *AB*. ¿Cómo construimos esto? Porque Joaquín nos dijo que con circunferencia. Vale, pero desde el punto de vista teórico, ¿cómo haríamos una construcción que se pueda validar?

Varios: Con el Teorema de Localización de Puntos.

Varios estudiantes proponen valerse del TLP para justificar la existencia de *B*. En sus interpretantes parece estar la idea de que cuando el profesor pregunta por una construcción que se pueda validar se refiere a identificar únicamente cómo justificar teóricamente la existencia del punto *B*, sin tener en cuenta las afirmaciones consignadas en el reporte de la construcción. Los estudiantes no ven la necesidad de modificar el procedimiento expresado en el reporte (Cuadro 1) incluyendo las afirmaciones que se requieren para poder usar el TLP como garantía de la existencia del punto, ya que en los tres primeros pasos no se encuentran las condiciones establecidas en el antecedente del Teorema para poder usarlo como garantía de la posible construcción de *B*.

Para usar el TLP no basta mencionar un número y un rayo indeterminados

El profesor aprovecha la oportunidad que le brinda la respuesta de los estudiantes para explorar cómo pretenden usar el TLP en la justificación del procedimiento de construcción del punto.

Profesor: Teorema de Localización de Puntos. ¿De qué manera? En esencia, queremos que aparezca este punto *B*. Acá tenemos *A* y tenemos *D*, ¿cómo haríamos para que aparezca?

Antonio: [Levanta la mano]

Profesor: Antonio.

Antonio: Tenemos la distancia de *A* a *D*; eso va a ser un número… Por el Teorema Localización de Puntos… tenemos el rayo… tenemos ese número, entonces aparece el punto en el rayo.

Profesor: ¿Con que número vas a localizar este punto?

Antonio y Dina: Con la medida de *A* a *D*.

En el interpretante del profesor parece estar la identificación de la necesidad de enfocar la atención de los estudiantes en la producción de una afirmación que corresponda a un paso posterior a los tres primeros del procedimiento relatado (Cuadro 1), que haga posible determinar el punto *B* y garantizar su existencia con el TLP. Para ello, los estudiantes deben referirse explícitamente a la existencia del rayo *AD* y al número que deben escoger convenientemente (el doble de la distancia de *A* a *D*) para ubicar a *B* en dicho rayo.

Para Antonio, el procedimiento para determinar el punto *B* se justifica con el TLP, en el que juegan un papel la distancia de *A* a *D* y un rayo. Sin embargo, no es evidente que él esté proponiendo incluir un paso en la construcción, pues no se refiere con precisión al rayo en el que va a localizar el punto. Suponemos, más bien, que está asociando el proceso de construcción mencionado por Joaquín (circunferencia con centro en *D* y radio la distancia de *A* a *D*) con el rayo opuesto al rayo *DA* o relacionando el rayo *AD* con la ubicación de *B* en este, a una distancia de *D*, igual a la distancia de *A* a *D*. En ambos casos no parece que Antonio vea necesario explicitar cuál es el rayo que se debe tener para hacer, a partir de su origen, la localización de *B*. En ese sentido, más que ver el TLP como una expresión condicional en la que el consecuente se puede afirmar solo si se tienen las condiciones expresadas en el antecedente, parece querer hacer alusión solo a los objetos geométricos mencionados en el teorema. Es decir, parece creer que la acción de garantizar teóricamente una afirmación fuera un mero asunto de nombrar un elemento del sistema y no de aplicarlo, para lo cual es necesario verificar que se tienen las condiciones exigidas en el antecedente y, en caso de que no se tengan, obtenerlas.

Escogencia del número adecuado (¿*w* o su doble?) para determinar el punto *B* en el rayo *AD*

El profesor promueve una interacción comunicativa en busca de precisar lo dicho por Antonio.

Profesor: No señor. ¿Por qué estoy diciendo que no? Antonio no está teniendo en cuenta todo ¿Por qué no? ¿Por qué no? La idea general funciona, pero no hay precisión en ella.

Julia: Digamos *AD* es igual a *w*.

Profesor: *AD* es igual a *w*, (escribe en el tablero) vale.

Julia: Y tenemos el rayo.

Profesor: ¿Qué rayo?

Julia: Eeee… *AD*

Profesor: Tenemos el rayo *AD* (escribe en el tablero: “Sea rayo *AD*”).

Julia: Entonces para localizar a *B*… entonces, digamos el punto *B*… tiene que ser la medida de… *w*

Antonio: De 2*w*

Ángela: *DB* tiene que ser igual a

Antonio: Al doble, tiene que ser el doble.

Julia: (Sonríe y asiente con la cabeza) Sí, sí.

Laura: Tiene que ser, porque si no [es]… localiza al punto *D*.

El profesor interpreta que Antonio va por buen camino, pero que no ha considerado convenientemente el rayo ni el número real, de acuerdo a las especificidades del antecedente del TLP, para poder usarlo como garantía. Por esa vía, Antonio está buscando transformar el procedimiento de manera que contenga información correspondiente al antecedente del TLP para poder garantizar la existencia de *B* con tal teorema.

Julia es quien primero reacciona ante la intervención del profesor. Parece que ella interpreta que la falta de precisión en lo dicho por Antonio está en no haber asignado una letra para referirse adecuadamente a la distancia escogida. El profesor escribe lo que ella dice, a la espera de que los estudiantes se den cuenta de la falta de precisión, por parte de Antonio, al mencionar el número y el rayo que intervendrían en la localización del punto B. Julia continúa en el uso de la palabra mencionando, además de lo dicho por el profesor, una instancia del consecuente del TLP. Con sus intervenciones ofrece un procedimiento de localización de *B* que guarda similitud con el consecuente del TLP.

Antonio y Laura caen en cuenta del error en la determinación del número. Seleccionan el número real adecuado y Laura explica tal selección. Posiblemente se sustraen de su experiencia de construcción en Cabri, se ubican en el mundo teórico para elaborar la instancia pertinente del antecedente del TLP teniendo en cuenta que la localización se hace a partir del origen del rayo *AD*. La intervención de Antonio parece tener efecto sobre el interpretante de Julia, quien asiente admitiendo que el número es 2*w*.

Selección del punto (¿*A* o *D*?) a partir del cual se determina a *B* en el rayo

Ahora el foco de la interacción se centra en el punto a partir del cual se determina *B*. La conversación se da mientras el profesor va completando la escritura de los pasos adicionales del procedimiento, que se asemejan a pasos de deducción de la conclusión necesaria, cuya garantía es el TLP. Hasta el momento, tienen como dados el rayo *AD* y el número 2*w* con *w* igual a la distancia de *A* a *D*.

Profesor: Existe… A ver, Laura, existe un punto (ha escrito en el tablero: “Existe *B* tal que”)

Laura: Ah, bueno, sí, tal que la distancia de *D* a *B* es igual a…

Profesor: Noooo no nonono. ¿Por qué digo que no?, ¿por qué les digo que no?

Antonio: Tal que *B* pertenece al rayo *AD*

Profesor: *B* pertenece al rayo *AD* (escribe en el tablero: “Existe *B* tal que *B* pertenece al rayo *AD*”), vale.

Antonio: y la distancia de *D* a *B*

Profesor: Noooo no nononono

Ángela: De *A* a *B*

Profesor: Ángela, la distancia…

Ángela: De *A* a *B* tiene que ser igual a dos veces *w*.

Profesor: Exacto (ha quedado escrito en el tablero: “Existe *B* tal que *B* pertenece al rayo *AD*”) […]

En la conversación identificamos que inicialmente el profesor considera que los estudiantes ya han comprendido cómo transformar los pasos cuarto y quinto del procedimiento de construcción para poder justificar la existencia de *B* y, por tanto, las intervenciones de Laura y Antonio le resultan sorpresivas. Aunque parecía que los dos estudiantes habían interpretado cómo usar el TLP como garantía, declaran la existencia de *B* sin fijarse en que el número real escogido fija la posición de *B* a partir de *A,* y no desde cualquier punto del rayo. Un problema, que se puede apreciar en las intervenciones que tuvieron lugar, radica en no explicitar de manera conjunta el rayo y el número que estaban considerando. Posiblemente, los estudiantes que hacían referencia al número *w* estaban considerando utilizar un rayo distinto al escrito en el tablero por el profesor, por ejemplo el rayo opuesto al rayo *AD*. Por el contrario, Ángela parece haber seguido el hilo de la transformación del procedimiento; su intervención nos indica que su interpretación coincide con la pretendida por el profesor.

Identificación del error en el uso del TLP

En busca de que otros estudiantes, además de Ángela, capten el error en el que incurrieron Laura y Antonio, el profesor pregunta a los estudiantes cuál es dicho error.

Profesor: Exacto (ha quedado escrito en el tablero: "Existe *B* tal que *B* pertenece al rayo *AD* y distancia de *A* a *B es* 2*w"*), porque… ¿cuál es el error… cuando por ejemplo dijeran *DB* igual a *w*?

Laura: (En voz baja) Ahhh, ya.

Profesor: ¿Cuál es el problema si dicen eso?

Antonio: (En voz baja) Queeee

Josefina: (Cara de desconcierto)

Profesor: ¿Cuál es el problema? ¿Por qué no vale decir eso con la teoría que tenemos?

Antonio: Porque es respecto a… (ademán con la mano derecha moviéndola desde un punto, que indica con la otra mano en posición vertical, hacia abajo)

Profesor: ¿Es con respecto a quién que se utiliza el Teorema Localización de Puntos?

Antonio: (En voz baja) Al punto y al rayo

Dina: (En voz baja) Al rayo construido

Profesor: Con respecto al vértice o al punto extremo del rayo, ¿listo? Entonces por esto es que no está bien.

El profesor interpreta que aún hay estudiantes que no ven la obligatoriedad de partir del punto origen y no de cualquier punto del rayo para hacer la localización del punto, si se quiere usar el TLP como garantía. Los gestos y expresiones verbales de los estudiantes, son representaciones cuyo interpretante parece contener la precisión que pretende el profesor, acompañada, para el caso de Antonio y Dina de una representación del rayo *AD* y de *B* a una distancia *2w* de *A*. Con la mediación del profesor se produce la transformación deseada, del paso de construcción que involucra el uso de la circunferencia, a la justificación de la determinación del punto *B*.

Aspectos destacables de la gestión del profesor

En los ejemplos propuestos se evidencian rasgos de la interacción con la que el profesor promueve la construcción de significado de la definición de bisecar y del TLP. Más allá de impulsar la participación de los estudiantes con ideas sobre cómo resolver los problemas planteados, el profesor busca la explicitación verbal de las interpretaciones que están dando en ese momento a los objetos y relaciones involucrados en la situación, fomenta el intercambio, la precisión y ampliación de tales interpretaciones y procura incidir en los interpretantes de los estudiantes con miras a la construcción de los significados pretendidos. A continuación destacamos tres aspectos de la gestión del profesor.

Uno, la gestión incluye un trabajo de interpretación de las expresiones lingüísticas que usan los estudiantes, tanto de aquellas que se institucionalizan verbalmente o por escrito, como de aquellas contenidas en los apuntes de los estudiantes. Un giro lingüístico que podría parecer inocuo, como decir “biseca” en lugar de “se bisecan”, o “si contiene un punto o es su punto medio” en lugar de “si contiene o es su punto medio”, conduce a interpretantes no necesariamente cercanos a los pretendidos.

Dos, en ambos ejemplos vemos que impulsar la tarea de examinar en detalle procesos de construcción de objetos geométricos y pedir justificaciones de tales construcciones es una gestión importante para construir significado colectivamente en el aula. El segundo ejemplo, en particular, ilustra las tensiones que los estudiantes experimentan al proponer procedimientos justificables teóricamente, pues no relacionan los pasos de la construcción con las condiciones específicas dadas en la hipótesis del enunciado de un teorema, para poder valerse de este, al momento de justificar.

Tres, es importante la gestión del profesor en el establecimiento de un puente entre los procedimientos de construcción empírica y los procedimientos para hacer justificaciones deductivas, a partir del impulso a los procedimientos de construcción "justificables teóricamente". En tal gestión, no debe descuidarse la explicitación del ámbito en el que se está trabajando, empírico o teórico, y cuidar el lenguaje en cada uno.

Con los ejemplos, esperamos llamar la atención sobre el efecto que tiene la gestión del profesor en la construcción de significado de un objeto o relación matemática. En la comunicación en el aula coexisten, en una dinámica no exenta de dificultades, las interpretaciones que se hacen de lo que alguien dice y las interpretaciones de dichas interpretaciones. De ahí la importancia de la mediación semiótica que el profesor despliegue en el aula, en favor del aprendizaje de sus estudiantes.

Referencia

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. (pp. 3117-3126). Disponible en http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip