Prefacio

Desde 2003, el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría -Æ·G-* del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN, Colombia) ha encaminado sus acciones de indagación, innovación y desarrollo curricular hacia el mejoramiento del aprendizaje y la enseñanza de la demostración en geometría, principalmente en el nivel universitario y más exactamente en el ámbito de la formación inicial del profesor de matemáticas. Varias son las publicaciones que se han hecho de los trabajos del grupo en revistas y congresos de la comunidad de Educación Matemática.

La innovación realizada en el curso Geometría Plana de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN tiene como uno de sus productos una aproximación metodológica a la enseñanza cuyo propósito es generar un entorno favorable para aprender a demostrar. De manera sucinta, describimos tal aproximación así: las tareas geométricas que se proponen a los estudiantes para que las resuelvan en el aula, trabajando en grupos pequeños o individualmente, y con frecuencia apoyados en un programa de geometría dinámica, propician la realización de construcciones geométricas y la formulación de conjeturas. Las construcciones y las conjeturas producidas por los estudiantes son los insumos que utiliza el profesor, en intercambios comunicativos colectivos, para promover y guiar la participación de los estudiantes en la organización y el desarrollo del contenido geométrico que se trata en el curso. Con tal aproximación, a lo largo del curso se va conformando un sistema teórico constituido por postulados, definiciones y teoremas.

Movidos por las reacciones de sorpresa, incredulidad y curiosidad que detectábamos en nuestros interlocutores cuando les presentábamos nuestra propuesta de aproximación metodológica, vimos una oportunidad para ahondar en el conocimiento y la reflexión sobre esta. Es así como durante los últimos cinco años, el grupo se ha concentrado en documentar y analizar, desde una perspectiva semiótica, diversos aspectos de la implementación de la aproximación metodológica en varias versiones del curso Geometría Plana. En los años 2010 y 2011, indagamos sobre los sucesos de la clase para identificar y describir, por una parte, la acción instrumentada que da lugar a la producción de signos personales y, por la otra, la mediación semiótica del profesor para hacer evolucionar dichos signos hacia signos institucionales. En los años 2013 y 2014, analizamos la actividad semiótica de la comunidad del aula, mediada por el profesor, a través de la cual se organizó y desarrolló el contenido geométrico asociado al Teorema Localización de Puntos, partiendo de las conjeturas que los estudiantes formularon, asociadas a la resolución de un problema designado como Problema de los Cuatro Puntos. Para hacer tal análisis nos concentramos en once sesiones de clase. La primera de ellas corresponde al planteamiento del Problema y la introducción de los elementos teóricos (definición de bisecar y Teorema Existencia del Punto Medio) requeridos para precisar el significado del enunciado del Problema. La última sesión corresponde al empleo del Teorema Localización de Puntos en la validación teórica de la construcción realizada para resolver un nuevo problema relacionado con triángulos congruentes. En las clases intermedias se revisan las conjeturas formuladas por los estudiantes después de resolver el Problema de los Cuatro Puntos, se reformula una de ellas y se hace su demostración, se examina cómo varía la demostración de la conjetura al cambiar la pertenencia de un punto a un recta por la pertenencia a un rayo, se reformula la definición de rayo para hacerla operativa, se formula el enunciado del Teorema Localización de Puntos y se hace su demostración.

Aunque los artículos que componen este libro provienen principalmente de nuestro más reciente trabajo investigativo, no son documentos de investigación sino de divulgación. En ellos nos acercamos, mucho más de lo que es habitual para un profesor, a asuntos clave para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, entendido este como participación en prácticas propias de la comunidad del discurso matemático. El libro está dirigido principalmente a profesores de matemáticas en ejercicio de su profesión y a estudiantes de postgrado en el campo de la Educación Matemática.

En el artículo "Entender el enunciado de un teorema: ¿componente único de su significado?", su autor presenta tres elementos fundamentales que, para el grupo Æ•G, hacen parte del significado de un teorema: la estructura y el contenido geométrico de su enunciado; las relaciones del teorema con otros teoremas del sistema al que pertenece en términos de la comparación de las respectivas hipótesis, tesis y demostraciones; y el uso experto del teorema en el marco del sistema teórico al que pertenece, lo cual se refiere a saber cuándo y cómo usar el teorema. Estos tres elementos, afirma Molina, pueden ser de utilidad tanto para la evaluación del aprendizaje de los estudiantes como para el diseño curricular de propuestas didácticas interesadas en construir significado de un teorema. Al final del artículo, a manera de invitación al lector, Molina presenta, de manera ilustrada, una propuesta retadora: construir significado de un teorema sin contar previamente con el enunciado del mismo.

En el artículo "Gestión del profesor enfocada en aspectos de la construcción de significado de una definición y de una proposición condicional", sus autores ponen de manifiesto la necesidad de que el profesor gestione la construcción de significado en el aula y lo haga a partir de las interpretaciones que pueda inferir de los aportes verbales de los estudiantes durante el proceso. En este artículo, Sua y Camargo muestran que la construcción de significado de una definición que un profesor podría despachar muy rápidamente (señalando un error, repitiendo la definición y pidiendo a los estudiantes que se fijen bien en ella para reformular la representación de la situación en la que el objeto definido se pone en juego), está lejos de ser un asunto baladí. En el segundo ejemplo que presentan es posible ver cómo la gestión del profesor en pro de la construcción de significado de un objeto geométrico (en este caso, el enunciado del Teorema Localización de Puntos), no se agota en el momento en que se enuncia y demuestra el Teorema sino que se requiere también en momentos en que se usa en el marco de la resolución de un nuevo problema.

En el artículo "Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa", partiendo de las premisas de que un tratamiento didáctico especial para las definiciones puede contribuir a la construcción de conocimiento y que el uso de una definición hace parte del significado del objeto definido, las autoras presentan e ilustran tres aproximaciones a la enseñanza de las definiciones, que bien pueden ser adoptadas y adaptadas en la clase de geometría de los niveles elemental y medio. Por otra parte, Camargo y Samper, abordan el uso de las definiciones en la producción de demostraciones, para lo cual consideran dos situaciones: i) De un objeto específico (o_i) se sabe que tiene algunas (no todas) propiedades que caracterizan a un cierto objeto genérico (O), y se quiere demostrar que en realidad o_i es un caso de O; es decir, se requiere ir de las propiedades al objeto. ii) De un objeto específico (o_i) se sabe que es un caso de un objeto genérico (O) y de tal premisa se requiere deducir nuevos pasos útiles para la demostración, es decir, se requiere hacer operativa la definición, yendo del objeto a las propiedades que su definición expresa, ajustándolas al contexto en el que se está trabajando para que sean provechosas para la demostración. La complejidad relativa a la enseñanza de las definiciones que se muestra en este artículo permite ver la necesidad de que el profesor se prepare adecuadamente para su quehacer profesional. Enseñar definiciones es mucho más que dictarlas y dar ejemplos del objeto definido.

En el artículo "¿Es esto "machetear"?", sus autoras documentan una estrategia espontánea de los estudiantes para demostrar la existencia de un objeto geométrico que cumple dos propiedades (R y S). La estrategia no es aceptable ya que al usarla no es posible obtener de manera matemáticamente válida lo que se propone lograr; consiste en considerar un objeto específico que cumple la propiedad R para luego tratar de demostrar que tal objeto cumple la propiedad S, siendo que la propiedad S no se puede deducir de la propiedad R pero lo contrario sí es posible. La problemática que se entrevé detrás de esta estrategia incluye el hecho de que los estudiantes pueden creer que considerar un objeto con la propiedad S desde el comienzo de la demostración es incurrir en una práctica no correcta desde la matemática porque es más exigente. Samper y Perry señalan la necesidad de una mediación del profesor planificada, con miras a no pretender que los estudiantes, *motu proprio*, reinventen adecuadamente el procedimiento para demostrar existencia sin que ello signifique excluirlos de su participación en el proceso de construcción de significado del procedimiento aceptable.

Para terminar, en nombre del grupo Æ•G, hago llegar nuestro agradecimiento al Centro de Investigaciones y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y a Colciencias por el apoyo económico y administrativo que recibimos para realizar tanto la investigación como la publicación del presente libro.

Patricia Perry