INVESTIGAR Y ENSEÑAR

VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Editor

LUIS PUIG

una empresa docente®

Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Bogotá, 1997

PRIMERA EDICIÓN, DICIEMBRE DE 1997

INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACION MATEMATICA
Editor: Luis Puig

Diseño carátula: una empresa docente®

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Serapio Rendón 125. Col. San Rafael, 06470 México, D.F.
Apartado 5-192, C.P. 06500 Tel. 705-05-85
Reg. CNIEM 1382

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976 Tel. (57-1) 284-9911 ext. 2717. Fax: 284-1890
Servidor WWW: http: //ued. uniandes. edu.co
Bogotá. Colombia

ISBN

Impreso en México / *Printed in Mexico*

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Lo más prudente que puede decirse de las relaciones entre la investigación en educación matemática y la práctica docente es que son complejas. Es habitual encontrarse entre los profesores en ejercicio con la opinión de que la investigación no atiende a los problemas que realmente tienen los profesores en su práctica cotidiana y que sus resultados no les son de ninguna utilidad. Por otra parte, como señala Filloy (in progress), entre algunos practicantes de la investigación en educación matemática "es corriente encontrar la opinión de que se han desarrollado marcos teóricos que, dado su nivel de complejidad, desbordan la posibilidad de ser entendidos por los maestros en servicio. Incluso se va más allá y se defiende que 'existe una objetividad de los procesos didácticos', deslindable de las prácticas concretas en que los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se llevan a cabo en los sistemas escolares actuales, pudiendo pensarse la Didáctica de las Matemáticas como un cuerpo de conocimiento cuyo objetivo de estudio la aleja de la transformación de las prácticas docentes". Desde la posición del profesor en ejercicio escéptico o desencantado y la posición del investigador autonomizado por el desarrollo conceptual de su disciplina que critica Filloy, poco puede hacerse para que la relación entre los campos de actividad de ambos sea fructífera o siquiera pueda darse. Afortunadamente, éstas no son las únicas posiciones que profesores en ejercicio e investigadores adoptan y es posible tender puentes de estilos variados entre uno y otro campos.

En este libro se recogen parte de las intervenciones de un conjunto de personas, mayoritariamente profesores e investigadores a la vez, en un seminario que se celebró en Madrid, auspiciado por el Centro de Investigación y Documentación Educativa del Ministerio de Educación y Ciencia de España, con el objetivo de abordar esa relación compleja entre la investigación en Educación Matemática y la práctica docente en cualquiera de los sistemas escolares. Los textos que publicamos son los escritos que ponentes del seminario entregaron, correspondientes a sus intervenciones orales, y los hemos reordenado.

En primer lugar, figuran textos de miembros de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), que presentan en cierta manera los puntos de vista del organismo que la comunidad internacional de educadores matemáticos ha elegido como su representante oficial. El texto del presidente de ICMI, Miguel de Guzmán, encabeza la selección, seguido por el de Mogens Niss, que aborda la pregunta general ¿Por qué enseñamos matemáticas en la escuela? y el de Jeremy Kilpatrick, que trata de cómo juzgar la calidad de la investigación en educación matemática. La representación del ICMI se cierra con un texto de Colette Laborde, que dis-

L. PUIG (ED.). *INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, V-VI

cute un terreno concreto de investigación: los problemas didácticos que plantea el poderoso mundo del Cabri.

En segundo lugar, figuran tres textos que abordan desde la universidad la problemática de la investigación en didáctica de las matemáticas, ya sea su institucionalización y desarrollo, su naturaleza o la teorización de su relación con la práctica docente. Son los textos de Luis Rico, Luis Puig y Juan Díaz Godino.

Finalmente, el libro se cierra con dos voces que se erigen en representantes de los profesores en ejercicio. Son la de Florencio Villarroya, que presenta algunas cuestiones que preocupan a un profesor de secundaria acerca de la investigación en didáctica de las matemáticas, y la de Juan Antonio García Cruz, que deja bien claro en el título de su texto, Investigadores y profesores: dos culturas, cuál es la naturaleza del problema que se debate.

No me cabe la menor duda de que la difusión de estos textos, fruto de un debate que tuvo lugar en España, por "una empresa docente®" a través del Grupo Editorial Iberoamérica entre un público mucho más amplio que el que ha tenido acceso a ellos hasta ahora en España contribuirá a que las complejas relaciones entre la investigación en educación matemática y la práctica docente sean mejor comprendidas y puedan ser más fructíferas para los practicantes de cualquiera de las dos actividades. Lo que redundará en definitiva en beneficio de la educación de los pueblos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Filloy, E. *Aspectos teóricos de la investigación en álgebra educativa.* (Work in progress).

CAPÍTULO 1

MADUREZ DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. EL PAPEL DEL ICMI

MIGUEL DE GUZMÁN
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Los estudios sistemáticos iniciales en Educación Matemática que se desarrollaron en torno a los comienzos del siglo 20 están íntimamente relacionados con los orígenes y consolidación de la Comisión Internacional en Educación Matemática, el organismo que hoy llamamos ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). Se puede afirmar que el ICMI ha propulsado con eficacia los estudios relativos a los problemas de la Educación Matemática a lo largo del siglo 20 y ha contribuido muy poderosamente a la constitución de la nueva disciplina científica que se ocupa de los problemas relacionados con la Educación Matemática.

En estas notas trataré de señalar brevemente algunos momentos de particular importancia en esta marcha y algunas de las características más salientes de la situación actual que revelan la madurez de la investigación en Educación Matemática.

EL ICMI

La actividad científica se organiza a nivel global en la actualidad a través de un organismo internacional e interdisciplinar que se denomina el Consejo Internacional de Uniones Científicas. Lo forman 20 uniones científicas entre las cuales se cuenta, como órgano internacional que de algún modo coordina las diversas actividades en torno a la matemática, la Unión Matemática Internacional (la IMU, *International Mathematical Union*).

La actividad matemática internacional se estructura por tanto a través de la IMU, un organismo que coordina las acciones comunes en el campo matemático de 52 países actualmente. Cada uno de ellos envía representantes a las Asambleas Generales de la IMU que se celebran cada 4 años, generalmente en el transcurso del Congreso Internacional de Matemáticos. Ellos eligen los miembros del Comité Ejecutivo de la IMU, así como los miembros del Comité Ejecutivo del ICMI (Comisión Internacional de Educación Matemática), que se encarga de coordinar las actividades en el campo de la educación matemática de los diferentes niveles de la educación propiamente académica, así como las que se refieren a la interacción de las matemáticas con la sociedad. Además del ICMI, existe otra Comisión (CDE, *Commission on Development and Exchange*) que se encarga de

L. PUIG (ED.). *INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 1-5

fomentar el desarrollo propiamente matemático a través del intercambio personal e institucional.

El ICMI agrupa de una forma u otra a más de 70 países actualmente. Todos los países miembros de la IMU son automáticamente miembros de pleno derecho del ICMI, pero existen otros que pertenecen al ICMI aun sin ser, por diversas razones, miembros de la IMU.

El ICMI se estructura en la actualidad alrededor de un Comité de unas 10 personas elegidas por la Asamblea General de la Unión Matemática Internacional para un período de cuatro años. A nivel nacional existe en unos cuantos países, como se recomienda intensamente, una Subcomisión del ICMI, en la que se integran, fundamentalmente, los organismos nacionales que tienen que ver con los problemas de la Educación Matemática a nivel práctico y teórico, que normalmente se encarga de elegir los representantes del respectivo país en las Asambleas del ICMI, que tienen lugar usualmente cada cuatro años aprovechando la celebración de los Congresos Internacionales en Educación Matemática. Se piensa que esta forma de estructura nacional logra dar un mayor dinamismo y una mayor permanencia de la influencia del ICMI que si sus actividades se hacen depender demasiado estrechamente del interés y personalidad de uno o dos individuos.

El ICMI, en realidad, es un órgano mucho más antiguo que la Unión Matemática Internacional, que nació en 1952. El ICMI fue fundado en 1908, a partir de una idea del matemático americano David Eugene Smith, quien la propuso en el marco del cuarto Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado entonces en Roma.

Su primer Presidente fue el matemático alemán Felix Klein, y su órgano oficial fue entonces, y lo sigue siendo actualmente, la prestigiosa revista *L'Enseignement Mathématique* (Suiza). Otros Presidentes fueron, por períodos en general de 4 años, con algunas interrupciones en la actividad debidas a las guerras mundiales, sucesivamente: Smith (Estados Unidos), Hadamard (Francia), Behnke (Alemania), Stone (Estados Unidos), Lichnerowicz (Francia), Freudenthal (Holanda), Lighthill (Gran Bretaña), Iyanaga (Japón), Whitney (Estados Unidos), Kahane (Francia). Siendo Presidente Châtelet en 1952 se creó la Unión Matemática Internacional y fue entonces cuando se decidió que el ICMI pasara a ser una Comisión de la Unión.

Una de las actividades más importantes del ICMI actualmente es la supervisión de los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME, *International Congress on Mathematical Education*), que se celebran cada 4 años. Los últimos Congresos de este tipo se han celebrado en: Adelaide (Australia, 1984), Budapest (Hungría, 1988), Québec (Canadá, 1992). En el de Québec, asistieron unos 3.500 matemáticos de todo el mundo, especialistas en la educación matemática de los diferentes niveles, que trataron de examinar los problemas que desde los diferentes puntos de vista la enseñanza matemática propone a la comunidad de matemáticos y a la sociedad. El Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática tendrá lugar en Sevilla en Julio de 1996.

El ICMI acoge en su entorno diversos grupos de estudio en algún modo afiliados a él. Se trata de grupos constituidos para el desarrollo de la investigación en torno a problemas específicos relacionados con la educación matemática. Tales son en la actualidad: *The International Organization of Women and Mathematics Education (IOWME), The International Study Group for the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics (ISGHPM), The International Study Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), The World Federation of Mathematical Olympiads (WFMO)*. A través de tales organizaciones, algunas de ellas con una muy potente vitalidad, se realiza con permanencia una buena parte de la actividad del ICMI en torno a problemas muy importantes.

EL FOMENTO DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMATICA

El ICMI, desde su mismo comienzo a principios de siglo, ha propiciado muy intensamente la investigación en educación matemática. *L'Enseignement Mathématique*, incluso antes de constituirse en órgano oficial del ICMI, tuvo una gran influencia en el desarrollo de diversos campos de estudio alrededor de la investigación en educación matemática. El estudio-encuesta publicado entre 1905-1907 sobre las formas de trabajo de los matemáticos, los estudios comparativos sobre la enseñanza matemática en diversos países europeos, son buena prueba del interés en los comienzos del siglo veinte por temas importantes relacionados con la educación matemática.

Desde 1969 se vienen celebrando cada cuatro años los ICMEs, Congresos Internacionales de Educación Matemática (1969 Lyon, 1972 Exeter, 1976 Karlruhe, 1980 Berkeley, 1984 Adelaide, 1988 Budapest, 1992 Québec). Tales congresos constituyen una de las piezas clave en el intercambio de información en torno a los principales problemas de la educación matemática, convirtiéndose en vitales foros de discusión, en donde se debaten los principales temas de estudio del momento con espíritu crítico y abierto.

Fiel a este espíritu, el ICMI, sobre todo a partir de la década de los 80, bajo la inspiración de Jean-Pierre Kahane y de Geoffrey Howson, viene supervisando también en la actualidad la organización de reuniones de estudio enfocadas hacia problemas más específicos, como los siguientes:

- Influencia de la informática sobre la matemática y su enseñanza (Strasbourg, 1985).
- La enseñanza de la matemática en los 90 (Kuwait, 1986)

- Cognición y educación matemática (juntamente con el grupo Psychology of Mathematical Education).
- Matemática como ciencia auxiliar (Udine, Italia, 1987).
- Popularización de la matemática (Leeds, Gran Bretaña, 1989).
- Evaluación en la enseñanza matemática (Costa Brava, 1991).
- Género y Educación Matemática (Höör, Suecia, 1993).
- ¿Qué es investigación en Educación Matemática? (Washington, 1994).
- La enseñanza de la geometría hacia el siglo 21 (Catania 1995).

Los estudios correspondientes han sido publicados por Cambridge University Press y Kluwer Academic Press. (El estudio realizado en Kuwait se publicó en español con el título "Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90", Editorial Mestral, Valencia, 1987).

Se puede afirmar que el estudio de Washington sobre la naturaleza de la investigación en educación matemática viene a señalar la madurez como disciplina científica, con objetivos y métodos propios, de los estudios que se han venido realizando ya por largo tiempo.

Son muchos los temas que se perfilan como problemas muy importantes que hay que explorar y escudriñar a fondo a fin de poder realizar con mayor efectividad las tareas propias de la educación matemática. Como ejemplos enunciaré tan sólo algunos de ellos:

- pensamiento matemático avanzado, con muchas preguntas:
  —la peculiar psicología del pensamiento matemático,
  —el carácter cognitivo especial del pensamiento matemático,
  —la abstracción,
  —la representación simbólica,
  —la representación gráfica,
  —la utilización de modelos diferentes visuales,
  —la aparente transparencia y la relativa opacidad de los procesos de transmisión;
- aplicaciones en la construcción y diseño a diferentes niveles;
- la demostración a lo largo del tiempo, la demostración hoy, el papel de la demostración en los procesos de transmisión y aprendizaje.

La madurez de la investigación en educación matemática como disciplina científica se pone de manifiesto en la existencia de más de 250 revistas en todo el mundo cuya finalidad principal es el estudio de los temas relacionados con ella, así como la actividad de escuelas de pensamiento en diferentes países con características de pensamiento y de métodos de trabajo bien asentados, que viene a enriquecer el panorama de la investigación mediante la complementariedad de sus paradigmas propios.

Las muchas publicaciones y congresos de diferentes tipos, a escala local y global que se van realizando son una buena muestra de la pujante vitalidad del estado actual de la investigación en educación matemática.

CAPÍTULO 2

¿POR QUÉ ENSEÑAMOS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA?

MOGENS NISS
ROSKILDE UNIVERSITY, DINAMARCA

¿POR QUÉ DEBE PREOCUPARNOS ESTA PREGUNTA?

Introducción

Comencemos por advertir que la pregunta del título no es de hecho una pregunta que se haga habitualmente en serio. A veces se hace con intención retórica o provocativa, otras para hacer promesas de boquilla a instancias ajenas a la enseñanza de las matemáticas, de las que se espera que tengan algo que decir o influyan en las condiciones de la enseñanza de las matemáticas. Casi siempre *damos por sentada* la existencia de las matemáticas como asignatura en la escuela y lo hacemos con la sensación de confianza y seguridad que da el estar tratando con una materia que tiene casi tres milenios de antigüedad y que disfruta de la categoría de ser la única asignatura que se enseña en todas las escuelas del mundo.

Aun así, igual que con cualquier otra materia, la presencia de las matemáticas en el currículo no es en absoluto *evidente por sí misma*, especialmente si la consideramos en relación con distintos grupos de receptores. Ninguna materia tiene derecho *automáticamente* a figurar en el currículo. Hay que justificar su presencia respecto al conjunto general de fines y metas de la educación en la sociedad y cultura que sean propios del (sub)-sistema de enseñanza en cuestión. Esto no implica necesariamente que sea difícil justificar una asignatura dada en un currículo dado, sólo que la ley de la inercia no proporciona esa justificación *per se*, aunque puede muy bien ser de hecho una *razón* en la práctica.

En otras palabras, hay un *problema de justificación*, o al menos existe la *cuestión* de justificar cualquier asignatura escolar y, por tanto, también las matemáticas. Aunque puede ser perfectamente posible justificar la inclusión de las matemáticas en el currículo con razones y argumentos muy diferentes, incluso contradictorios, la cuestión no es que el problema de justificación sea un asunto de acuerdo (inherente o negociado) o consenso, sino sencillamente la observación de que tiene que haber razones para la presencia de las matemáticas en el currículo. Puede muy bien darse el caso de que esas razones sean indirectas, implícitas y difusas, o largamente olvidadas. Sin embargo, si no hubiera una razón efectiva para mantener las matemáticas en el currículo, en un entorno en el que cientos de materias no

L. PUIG (ED.). *INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 7-16

están incluidas, ni siquiera la fuerte ley de la inercia podría, a la larga, haber evitado que las matemáticas fuesen suprimidas del currículo.

Tres respuestas a la pregunta "¿por qué preocuparnos?"

En primer lugar me parece *intelectualmente inaceptable* —o al menos no satisfactorio— no saber por qué ejercemos nuestras distintas profesiones pertenecientes al campo de la educación matemática. Deberíamos comprometernos a reflexionar y hablar sobre los fines y propósitos últimos de lo que hacemos. Esto, claro está, no es exclusivo de las matemáticas, pero el problema de la justificación es un poco más difícil de abordar aquí que en otras materias. Además, resulta que nos ocupamos de las matemáticas ¿no es así?, que otras materias hablen y contesten por sí mismas.

En segundo lugar, deberíamos estar preparados y listos para *dar argumentos* que justifiquen la enseñanza de las matemáticas: de cara a nuestros alumnos, o a la comunidad, es decir, a la sociedad en general (políticos, empresarios, medios de comunicación, instituciones de educación), pero también de cara a entornos más cercanos como padres, autoridades responsables del currículo, compañeros de otras materias, etc.

En tercer lugar, y en mi opinión lo más importante, las respuestas que demos a la pregunta del título contribuyen de manera decisiva a fijar los propósitos, metas y aspiraciones de la enseñanza de las matemáticas que ofrecemos a nuestros alumnos, y la forma de percibir, organizar, llevar a cabo y poner en práctica a diario la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

TIPOS DE RESPUESTAS QUE TRADICIONALMENTE NOS ENCONTRAMOS

En lo escrito sobre la enseñanza de las matemáticas (dentro de un amplio espectro que va desde documentos legales oficiales, pasando por artículos de investigación, a declaraciones personales) encontramos diversos intentos, de todos los tiempos, de hablar del problema de la justificación de la enseñanza de las matemáticas. En 1901, John Perry, un profesor británico de ingeniería, después de haber establecido que "el estudio de las matemáticas comenzó porque era útil, continúa porque sigue siendo útil, y es valioso para el mundo por la utilidad de sus resultados", sugirió las ocho "formas obvias por las que es útil" que se citan a continuación (citado en ME, 1958):

(1) es la causa de intensas emociones y proporciona placer a la mente,
(2a) desarrolla el cerebro,
(2b) da lugar a formas lógicas de pensamiento,
(3) las herramientas matemáticas sirven de ayuda al estudio de la física,

> *(4) sirve para aprobar los exámenes,*
> *(5) al dar al hombre herramientas mentales tan fáciles de usar como las piernas y los brazos, le permite continuar su educación (desarrollo del alma y del cerebro) a lo largo de la vida, utilizando para este propósito toda su experiencia. Hay una analogía exacta con el poder de educarse a sí mismo a través de la afición a la lectura.*
> *(6) Quizá incluido en (5): al enseñar al hombre la importancia de pensar las cosas por sí mismo le libra así del actual y terrible yugo de la autoridad, y le convence de que, ya sea obedeciendo o dando órdenes, es una de las criaturas más elevadas.*
> *(7) Hace que los hombres de cualquier profesión de ciencia aplicada sientan que conocen los principios sobre los que se funda y según los cuales se desarrolla.*
> *(8) Da a mentes filosóficas agudas un ideal lógico de perfección encantador y satisfactorio a la vez, e impide así que intenten desarrollar cualquier tema filosófico desde un punto de vista puramente abstracto, porque lo absurdo de tal intento se hace obvio.*

Años después, en nuestro siglo, un profesor alemán de matemáticas en una escuela secundaria de Bielefeld, W. Schmiedeberg, ganó el primer premio en un concurso organizado en 1915 por la Asociación para el fomento de la enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias. En su trabajo (ver Niss, 1981), W. Schmiedeberg señalaba que el propósito de la enseñanza de las matemáticas debe ser contribuir a propósitos generales de la enseñanza tales como:

> *Necesitamos un pueblo fuerte que pueda defenderse a sí mismo, gente trabajadora que pueda generar grandeza económica, gente leal y patriota que se entregue con su fuerza y su trabajo conscientemente a los ideales de la nación.*

Y más adelante

> *Si reconocemos que el futuro de Alemania depende del mantenimiento y desarrollo posterior del trabajo de calidad, nos daremos cuenta de que una enseñanza que conduzca a la devoción absoluta al deber debería ser nuestra meta principal en educación para todo tipo de escuelas.*

También hay una cita británica de más o menos la misma época: En 1919 la *Mathematical Association* escribió (Niss, 1981):

> *1. La enseñanza que damos a un chico en la escuela debería prepararlo para ser un ciudadano en el sentido más amplio de la palabra: así, con este fin, se deben desarrollar las facetas moral, literaria,*

> *científica (incluyendo matemática), física y estética de su naturaleza. Así, en lo que a las Matemáticas se refiere, su educación debe capacitarlo no sólo para aplicar las matemáticas en asuntos prácticos, sino también para entender aquellos grandes problemas del mundo, cuya solución depende de las matemáticas y la ciencia.*
> *2. El aspecto utilitario de las matemáticas debe recibir una buena parte de atención en los cursos de matemáticas.*

Damos ahora un salto a los tiempos modernos donde se han introducido nuevas facetas. Zoltan Dienes (en Wain, 1978) propone que

> *[...] la meta principal de la enseñanza de las matemáticas debe ser el desarrollo de ciertas pautas de pensamiento, de ciertas estrategias, que la gente puede desarrollar al enfrentarse a situaciones nuevas en las que nunca se había encontrado antes.*

En su análisis, Dienes halla que las matemáticas pueden contribuir al desarrollo de cuatro capacidades generales: abstraer, generalizar, descifrar y codificar mensajes.

Nuestra cita final y popular es del *Informe Cockcroft* (*Las Matemáticas sí cuentan*, DES 1982). Este informe formula los propósitos de la enseñanza de las matemáticas indirectamente a través de las tareas que el profesor de matemáticas debería (luchar por) cumplir:

> *—posibilitar que cada alumno desarrolle, dentro de sus capacidades, la comprensión y destrezas matemáticas exigidas para la vida adulta, para el trabajo y para posteriores estudios y aprendizajes, teniendo presentes las dificultades que algunos alumnos experimentarán para lograr una comprensión apropiada;*
> *—proporcionar a cada alumno las matemáticas que pueda necesitar al estudiar otras asignaturas;*
> *—ayudar a cada alumno a desarrollar, en la medida de sus posibilidades, el gusto por las matemáticas mismas, y a tomar conciencia del papel que han desempeñado y seguirán desempeñando en el desarrollo, tanto de la ciencia y la tecnología, como de nuestra civilización;*
> *—y, sobre todo, hacer consciente a cada alumno de que las matemáticas le proporcionan un poderoso medio de comunicación.*

Como preludio al esquema que sigue en el que analizamos estas y otras razones relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, tenemos que poner de manifiesto que para que un argumento con este efecto evite ser circular (“la razón por la cual enseñamos matemáticas es porque debemos hacerlo”)

—requisito mínimo para un razonamiento que tenga sentido— tiene que ceñirse y referirse a asuntos fuera de las matemáticas en sí mismas.

En las citas presentadas, así como en muchas otras publicaciones sobre el problema de la justificación, encontramos dos categorías principales de razones: las utilitarias y las de enseñanza en general. Más específicamente nos encontramos con las siguientes

razones utilitarias

- las necesidades profesionales;
- que la gente tenga un dominio de su vida personal cotidiana;
- requisito previo para estudiar otras asignaturas;

y las siguientes

razones de la enseñanza en general

- el desarrollo de capacidades formativas, tales como
  - reforzar las facultades mentales, incluyendo
    - el pensamiento lógico,
    - el pensamiento estructurado, sistemático y analítico,
    - la memoria,
    - la imaginación,
    - la claridad y la precisión en la expresión,
    - la creatividad y la intuición;
- el desarrollo de la personalidad y las actitudes
  - pensamiento y conducta independientes y autónomos,
  - actitudes críticas e investigadoras,
  - actitudes de cara a resolver problemas,
  - tener conciencia de uno mismo y confianza en sí mismo,
  - puntualidad y exactitud,
  - disciplina y perseverancia en el trabajo;
- disfrute estético y recreativo;
- profundizar en la cultura humana y sus realizaciones.

(Me gustaría que quedara claro que estos argumentos se dan como ejemplos de lo que podemos encontrar escrito, y por tanto atributos asignados a la enseñanza de las matemáticas por distintos autores de la especialidad. Así pues, dichos argumentos no son *necesariamente* algunos en los que yo crea o que yo sostenga).

Ambas categorías de argumentos se pueden invocar como ayuda en la consecución de dos tipos distintos de fines globales de la enseñanza de las matemáticas. El fin de la enseñanza de las matemáticas puede ser *servir a la sociedad como un todo, en lo que se refiere a*

- la demanda de trabajadores cualificados para un mayor desarrollo económico/tecnológico;
- ideología y política;
- cultura;

o servir a las necesidades individuales, relativas a su

- bienestar socioeconómico y profesional;
- vida privada diaria;
- vida social y ciudadanía.

Si consideramos las dos categorías de argumentos con los tipos de fines que acabamos de esbozar como dimensiones de nuestra problemática y las combinamos obtenemos lo que podríamos llamar matriz argumento-fin

Fin **Argumento**	**Servir a la sociedad**	**Servir al individuo**
Utilitario		
Educativo		

Las cuatro casillas son no vacías, tanto desde una perspectiva analítica como en el sentido de que podemos encontrarlas representadas en documentos y escritos sobre la enseñanza de las matemáticas. En épocas y lugares distintos se ha dado distinto peso a las distintas casillas. A menudo, la educación básica proporcionada por la sociedad ha estado dirigida a fines sociales. Por ejemplo, el argumento utilitario de que las matemáticas tienen una importante contribución que hacer en la educación de la futura fuerza laboral (p. e., en épocas anteriores: el hombre como una calculadora viviente) con la intención de que la sociedad disponga de recursos para su mantenimiento y desarrollo es un ejemplo importante de un par específico (argumento, fin) que encaja en la casilla superior izquierda. Tradicionalmente, la educación superior ha puesto relativamente más énfasis en fines individuales como, por ejemplo, la enseñanza de las matemáticas como "ascensor", fuerza que impulsa, social (si un individuo es mejor en matemáticas que la media de sus iguales en formación, ese individuo puede conseguir un empleo que le permitirá alcanzar cotas sociales y económicas más altas (casilla superior derecha)), o como medio de desarrollo personal (p. e. si se ha tenido éxito aprendiendo muchas matemáticas difíciles en la escuela, se puede uno sentir animado a comprometerse con otro tipo de empeños que exijan esfuerzo (casilla inferior derecha)).

INTENTOS DE RECONSTRUIR LAS "VERDADERAS" RAZONES PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS A LA POBLACIÓN EN GENERAL

Ciertamente no existe una identidad automática entre los argumentos ofrecidos en los escritos (incluyendo documentos oficiales) y las "verdaderas" razones de la sociedad para enseñar matemáticas a varios grupos de receptores. Para encontrar las razones "verdaderas" tenemos que hacer una reconstrucción analítica de la función de las matemáticas en el mundo (es decir en la naturaleza, la sociedad y la cultura). De nuevo, tenemos que tener en cuenta que este papel ha cambiado según época y lugar.

En otro sitio (Niss, 1965) he analizado lo que llamo la naturaleza de cinco caras de las matemáticas como disciplina. Las matemáticas son:

- una ciencia pura;
- una ciencia aplicada que permite comprender y desarrollar temas ajenos a las matemáticas;
- un sistema de herramientas para la práctica, p. e., productos y procesos que pueden contribuir a decisiones y acciones fuera de las matemáticas;
- un ámbito de la estética (belleza, disfrute, y emoción);
- una asignatura que hay que enseñar.

Naturalmente, otras disciplinas y otros temas poseen una o más de estas propiedades. Sin embargo las matemáticas tienen una trascendencia única para la sociedad porque

a. más que ninguna otra disciplina, las matemáticas tienen esas cinco propiedades al mismo tiempo;

b. en general hay una "irrazonable efectividad de las matemáticas" (frase acuñada por el físico Eugene P. Wigner) que concierne a muchos temas y áreas prácticas;

c. debido a (b), las matemáticas están íntimamente ligadas al funcionamiento y al desarrollo de la sociedad en general según se pone de manifiesto en los siguientes sectores:
(1) otras asignaturas de carácter científico (física, ingeniería, biología, información, economía, sociología, lingüística);
(2) áreas prácticas especializadas (predicción, toma de decisiones y control en la esfera social), descripción y pronóstico de fenómenos y acontecimientos en parcelas de la naturaleza, utilización y colocación de recursos naturales renovables o para extinguir, diseño, manejo y regulación de sistemas industriales y técnico-sociales;

(3) áreas prácticas generales (esencial, pero a veces invisible): representación de números, transacciones de dinero y negocios simples, calendarios, coordenadas geográficas, medida del tiempo, espacio, peso, moneda, representaciones gráficas y tablas, dibujos en el trabajo y en el arte, formas de objetos, códigos. Competencia numérica en general.

En otras palabras, las matemáticas son una parte esencial de la tecnología material e inmaterial y de la infra-estructura social en un sentido general. Contribuyen a dar forma a la sociedad, y lo hacen en grado alto y creciente para bien o para mal. La sociedad lo reconoce —aunque más en términos generales que particulares, es decir en gran parte de modo "subconsciente"— y, por lo tanto, proporciona a la enseñanza de las matemáticas más y más tipos de beneficiarios. Sin embargo, paradójicamente, el papel de las matemáticas en la sociedad es invisible en gran parte cuando descendemos a términos concretos.

ENSEÑAR MATEMÁTICAS PARA LA DEMOCRACIA —REFLEXIONES PERSONALES

Volvemos al problema de la justificación

¿A qué tipo de alumnos y estudiantes deberíamos impartir enseñanza de las matemáticas más allá de la matemática elemental y por qué? Mi respuesta a la primera pregunta es: A todos. La respuesta a la segunda (justificación) se brinda a continuación:

El problema de la justificación no es en forma alguna el único problema importante que valga la pena considerar. También el problema de si es factible ("¿hasta qué punto es de hecho posible conseguir dar a los alumnos y estudiantes en cuestión una enseñanza eficaz de las matemáticas?") y el problema de la realización ("¿cómo debemos diseñar, organizar y llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas para asegurar a los beneficiarios una educación matemática que recoja las respuestas dadas a los problemas de justificación y de posibilidad de tal manera que los receptores se puedan beneficiar de ella?") son no menos cruciales.

Nuestras reflexiones se tienen que basar en la siguiente *observación* que es trivial pero fundamental:

La enseñanza de las matemáticas tiene lugar en una sociedad y es para seres humanos que vivirán en esa sociedad. Por lo tanto enseñanza de las matemáticas =

f (*las matemáticas*, el papel de las matemáticas en la sociedad; *la sociedad*, su contenido cultural, político y económico, su estructura y organización; *el individuo*, su puesto en la sociedad; *los valores*, de naturaleza cultural, ideológica y política).

De las *matemáticas* ya hemos hablado antes. Desempeñan un papel instrumental en el desarrollo de la sociedad. La capacidad en matemáticas tiende a contribuir a la creación de un gobierno de expertos mientras siga siendo un recurso escaso.

La sociedad no tiene una armonía estable, ni un consenso ni una uniformidad de intereses. Por el contrario, abundan las diferencias y conflictos en valores e intereses, en las condiciones y situaciones de vida. En particular, hay un conflicto fundamental entre la parte que gobierna la sociedad y "los que son gobernados", es decir, los ciudadanos como individuos.

El individuo tiene que tener el derecho y la capacidad de dominar su vida social, profesional y privada y su vida como ciudadano y no sólo como súbdito en la sociedad.

En cuanto a los valores, creo además que la democracia es una forma de gobierno en la que a cada individuo se le da el derecho de y se le capacita para expresar sus opiniones e intereses y ejercer una influencia en el gobierno y desarrollo de la sociedad. Esto contrasta fuertemente con ideologías sociales tanto autoritarias como populistas.

En mi opinión la enseñanza de las matemáticas tiene que contribuir a fomentar la ciudadanía inteligente e inquieta para todos los miembros de la sociedad. Más específicamente, la enseñanza de las matemáticas debería darse a todo el mundo para ayudar a crear la perspectiva de "lo general", es decir de los rasgos constitutivos y las fuerzas directrices esenciales que hay detrás del desarrollo de la naturaleza, de la sociedad y de la vida de los seres humanos. Además, la enseñanza de las matemáticas tendría que capacitar a todos los alumnos en la escuela para entender, relacionarse con y actuar contribuyendo al papel de las matemáticas en el mundo. Es importante observar que esto va mucho más allá de lo que normalmente se llama "conocimiento para la vida diaria".

Si estas consideraciones han de tomarse en serio, las implicaciones tienen un largo alcance. Incluyen:

- los alumnos adquirirán la capacidad e independencia de poner en acción y aplicar las matemáticas a problemas de la realidad (construir, manejar y evaluar modelos matemáticos a niveles adecuados);
- los alumnos adquirirán la capacidad de descubrir, entender y evaluar el uso implícito y explícito que otros hagan de las matemáticas en situaciones fuera de las mismas;
- los alumnos adquirirán un sentido y una experiencia del alcance y las limitaciones de la aplicación de las matemáticas a situaciones y fenómenos fuera de ellas;

- los alumnos adquirirán la capacidad de actuar con confianza, visión de conjunto y creatividad dentro de universos matemáticos;
- los alumnos deberán ser capaces de comunicarse con otros sobre temas de contenido matemático;
- los alumnos adquirirán la idea de la especial naturaleza de las matemáticas;
- los alumnos adquirirán cierta perspectiva de la génesis y el desarrollo histórico de las matemáticas;
- los alumnos adquirirán un conocimiento de las relaciones entre las matemáticas y la sociedad.

Es verdad que estas implicaciones resultan casi utópicas. Aun así, conseguirlas sólo parcialmente representa un avance. Si queremos ir seriamente en la dirección sugerida arriba, lo que queda no es silencio. El trabajo nos llama.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Departament of Education and Science (DES)/Welsh Office, Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools. (1982). *Mathematics Counts* ('The Cockcroft Report'). London: Her Majesty's Stationery Office. [Traducción castellana, *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC, 1985.]

Ministry of Education (ME). (1958). *Teaching Mathematics in Secondary School*. Ministry of Education Pamphlet 26. London: Her Majesty's Stationery Office.

Niss, M. (1981). Goals as a Reflection of the Needs of Society. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education* (2, 1-21). Paris: UNESCO

Niss, M. (1994). Mathematics in Society. En R. Biehler et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 367-378). Dordrecht: Kluwer.

Wain, G. T. (Ed.). (1978). *Mathematical Education*. Wokingham and New York: Van Nostrand Reinhold Company.

CAPÍTULO 3

VALORACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: MÁS ALLÁ DEL VALOR APARENTE

JEREMY KILPATRICK
UNIVERSIDAD DE GEORGIA, ATHENS, EE.UU.

¿Qué criterios predominan actualmente en investigación sobre didáctica de las matemáticas? ¿Qué criterios permiten al investigador seleccionar problemas y metodologías que aseguren la calidad de los resultados? Entender estas cuestiones y vislumbrar posibles respuestas exige una comprensión previa de las perspectivas potenciales desde las que puede afrontarse una determinada investigación.

A medida que la investigación en educación matemática evolucionaba durante los últimos 100 años (Kilpatrick, 1994), se ha ido desplazando desde una gran dependencia de la emulación psicologista de las ciencias naturales, en el siglo XIX, hasta una mayor disposición a adoptar métodos utilizados en otras ciencias humanas. Al mismo tiempo, la psicología ampliaba sus planteamientos metodológicos. La psicología conductista de principios de siglo, en un enfoque ahora llamado "positivista", buscaba en los fenómenos educativos regularidades similares a las leyes físico-químicas. Hasta los años setenta, la mayor parte de la investigación en didáctica de las matemáticas, y especialmente la desarrollada en Norte América, trataba de describir el comportamiento de alumnos y profesores mediante el análisis de los componentes de sus conductas. El mundo de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas aparecía como un sistema de variables interactivas. El propósito de la investigación era describir estas variables, descubrir sus interrelaciones e intentar manipular algunas de ellas para provocar cambios en las otras. Este enfoque, aunque sigue teniendo sus defensores, ha dado lugar a otros planteamientos alternativos.

En Europa y en Australia, los enfoques fenomenológicos han impregnado durante mucho tiempo la investigación educativa. En los últimos años, han comenzado a influir profundamente en la investigación en educación matemática. Uno de estos enfoques, semejante al del antropólogo, trata de identificar y compartir la visión de profesores y alumnos respecto del acto educativo. El propósito es aportar un conocimiento específico y contextualizado sobre la correspondiente acción social. En EE.UU. se conoce como visión interpretativista: el investigador —presente en el aula, actuando él mismo como participante o no— intenta interpretar el signifi-

L. PUIG (ED.). *INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 17-31

cado que los participantes otorgan al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Otro de los planteamientos corresponde al del sociólogo crítico que considera que escuela y sociedad han de ser liberadas de toda manipulación, represión o dominación y que el investigador en educación matemática debe jugar un papel activo para ayudar a profesores y alumnos a conseguir esa libertad. El investigador, además de entender el significado que los participantes atribuyen al proceso educativo, debe ayudar a transformar aquellos significados producto de la distorsión ideológica. En Australia y en Nueva Zelanda se designa este enfoque como "investigación-acción".

En la investigación conductista —si bien la visión epistemológica no se corresponde con el positivismo lógico— el investigador se sitúa fuera del acto educativo, adoptando la posición de un observador neutral. En el enfoque interpretativista, el investigador trata de entender el acto, sin juzgarlo. En la investigación crítica, el investigador se aproxima al acto no sólo para comprenderlo sino para transformarlo en aquellas direcciones que aporten a los participantes una mayor libertad de acción.

Cada uno de estos planteamientos hace su aportación específica a la investigación: ninguno de ellos debe rechazarse de antemano. La educación matemática necesita las diversas perspectivas que tanto estos tres enfoques como otros —los que se utilizan hoy y los que se desarrollarán mañana— prestan al fenómeno enseñanza-aprendizaje.

A veces la disparidad de enfoques ha conducido al llamado "debate cualitativo/cuantitativo" (Howe & Einsenhart, 1990; Salomon, 1991). Los investigadores se enfrentan al dilema de adoptar métodos en los que las medidas se sustentan en datos numéricos o métodos en los que la información obtenida no se presenta en formato numérico. Salomon considera que la auténtica diferencia metodológica estriba entre el enfoque analítico —manipulación, aislamiento, control y medida, de aspectos externos al sujeto humano con objeto de realizar inferencias sobre aspectos internos, tales como el aprendizaje o la toma de decisiones— y el sistémico —estudio de los diferentes aspectos en su mutua interrelacción. Salomon considera complementarios los estudios (realizados utilizando estos dos enfoques) sobre los efectos en el aula del ordenador-procesador de textos: "el analítico saca provecho de la precisión, mientras que el sistémico saca partido de la autenticidad" (pág. 16).

El enfoque sistémico domina actualmente la investigación en educación matemática. Los escenarios naturalistas gozan de clara preferencia sobre aquellos en los que se han manipulado ciertas circunstancias y, consecuentemente, falta autenticidad. Pero los investigadores en didáctica de las matemáticas nunca deberían encajonarse en un determinado enfoque, epistemología, paradigma, modo de representación o método. Todos son parciales: ninguno puede contar la historia completa. En particular, ningún método de investigación puede, por sí solo, responder a todo el repertorio de cuestiones que interesan a los profesores de matemáticas. Si bien un determinado investigador puede centrarse en un método específico, la investigación en su conjunto debe estimular múltiples métodos. Más aún, los investigadores deben tratar de encontrar todos los criterios posibles de calidad presentes en un determinado estudio, yendo incluso más allá de su valor aparente[1]. Algunos métodos conducen a un tipo de investigación que satisface criterios que no alcanzan otros; la utilización de múltiples métodos conseguiría unos resultados de gran calidad en su conjunto, a pesar, incluso, de las deficiencias de algunos de sus estudios individuales.

Por otra parte, cualquier informe sobre una determinada investigación en educación matemática —independientemente del enfoque elegido en ella— es, simultáneamente, dependiente e independiente de aquélla. El estudio o investigación se asemeja a una idea plasmada en un relato, y el informe es ese relato. En algunos informes, el estudio aparece semi-oculto y difícil de entender. El lector puede tener serias dificultades para discernir si el defecto radica en el estudio o en el informe. Para el investigador, el estudio es independiente del informe, mientras que el lector no puede separar el estudio de su respectivo informe: el estudio es visto a través del informe, que actúa a modo de lente con la que el lector ha de captar el caso objeto del estudio.

Cuando el usuario trata de aplicar criterios de calidad científica a una determinada investigación debe diferenciar el estudio de su informe, por difícil que resulte trazar la línea divisoria. Los criterios, dirigidos al estudio de la investigación, resultan a veces difíciles de aplicar, debido a la incoherencia, torpeza o superficialidad del informe. Un mismo estudio, evaluado a través de un cierto informe, puede satisfacer criterios que no cumple cuando se valora utilizando un informe diferente.

A continuación se examinan ocho criterios que han sido utilizados para evaluar la calidad científica de la investigación educativa. Algunos de los presentes quizá consideren estos criterios obsoletos e inadecuados para valorar el trabajo que se lleva a cabo actualmente en didáctica de las matemáticas. Yo les diría que, aunque pueden existir otros modos de analizar la investigación, los criterios que aquí se exponen, correctamente interpretados, siguen siendo útiles. No sólo porque representan la percepción, importante, de nuestros predecesores intelectuales, sino porque nos ayudan a completar la gama de lo que debe considerarse investigación de calidad. Comienzo la exposición incluyendo la pertinencia como criterio de calidad científica.

1.En el original inglés, "*face value*", cuya traducción literal es "valor facial" (de una moneda), en contraposición al valor del metal que contiene. Ésta es también la expresión que aparece en el título original de este artículo. [Nota del editor.]

PERTINENCIA

Freudenthal, en sus conferencias en China (1991), comenzaba sus reflexiones sobre investigación en didáctica de las matemáticas con la observación: "aunque cada vez hay más personas investigando en una mayor cantidad de campos, el número de razones para hacerlo se mantiene limitado e invariable. Si a la pregunta ¿para qué sirve? le añadimos ¿para quien?, obtendríamos una respuesta distinta" (pág. 147). Freudenthal observa que, si bien la investigación en matemáticas satisface criterios de verdad, además de los de belleza y utilidad, la investigación en ciencias sociales carece de criterios de verdad. Respecto de la investigación educativa opina que "cuanto mayores son las pretensiones de la investigación, peor responde a la pregunta ¿para qué sirve?" (pág. 149).

El escepticismo de Freudenthal respecto a la investigación educativa está posiblemente justificado y, ciertamente, merece una consideración atenta. La carencia de criterios de verdad en la investigación educativa no significa que ésta carezca de utilidad. Aún no siendo ciertas en el mismo sentido en que ha de serlo un aserto matemático, determinadas inferencias basadas en resultados de investigaciones pedagógicas pueden ser útiles para los educadores. Todo trabajo de investigación debe responder a las preguntas ¿para qué sirve?, ¿para quién es útil? Si la investigación no resuelve problemas que preocupan a los educadores matemáticos, profesores incluidos, es improbable que resulte útil para otros.

Una investigación puede tener una importancia directa para los profesores, pero es más frecuente que la tenga para otros investigadores. Su importancia para los profesores se hace patente, generalmente, cuando se resume una línea de investigación o un conjunto de trabajos para lograr aplicaciones prácticas en la docencia. Buena parte de la investigación en didáctica de las matemáticas no ha afectado a la práctica didáctica, no solamente por su aislamiento de ésta y por su baja calidad, sino por su carencia de soporte teórico y por la ausencia de profesores implicados en ella (Kilpatrick, 1981b).

Bishop (1977) considera que los profesores pueden utilizar de los investigadores sus procedimientos, sus datos y sus constructos. La investigación será pertinente para los profesores si les permite formular hipótesis sobre sus métodos de enseñanza, verificar sistemáticamente esas hipótesis y examinar sus consecuencias. Los profesores pueden utilizar datos procedentes de una determinada investigación para comprobar sus propias observaciones. También pueden utilizar los constructos y los modelos y teorías correspondientes usados en una determinada investigación y aplicarlos a su propia situación. En consecuencia, la investigación resulta pertinente en la medida en que permite la adaptación y uso de algunos de sus aspectos.

La mayor parte de la investigación en didáctica de las matemáticas busca elevar la calidad de su enseñanza/aprendizaje. "Los problemas que se plantean en investigación en educación matemática derivan, generalmente, de la pregunta general: ¿cómo puede mejorarse la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas?" (Eisenhart, 1988, pág. 100). Algunas investigaciones intentan incidir directamente en esta calidad: aportando a los profesores ideas o materiales, o sugiriéndoles actividades; otras investigaciones tienen una influencia indirecta: sugiriendo nuevas formas de interpretar los conceptos erróneos que puedan tener los alumnos o examinando las diferencias entre el saber transmitido por el profesor y el aprehendido por su clase. Incluso aquella investigación que no parece aplicable en el aula puede afectar a la práctica docente a través de la modificación del perfil de la educación matemática en las publicaciones profesionales o de la aportación de un nuevo vocabulario para el análisis del modo de pensar del niño. Investigaciones cuyo valor práctico resulta hoy nulo pueden, un día, desempeñar un importante papel en el modo en que la profesión afronta su trabajo. Con independencia del carácter "práctico" o "teórico" de una determinada investigación —e independientemente de que esta dicotomía tenga o no sentido— cualquiera de ellas contribuye al conocimiento que toda profesión ha de compartir necesariamente.

La investigación en didáctica de las matemáticas ha sido a veces clasificada en términos de *básica* o *aplicada*. Esta diferenciación parece perder paulatinamente sentido a medida que los educadores matemáticos observan que el carácter básico o aplicado no es propiedad del trabajo de investigación, sino una descripción del uso que se puede dar a tal estudio.

> *Respecto a un determinado estudio, conocido por el público sólo a través de un informe o resumen, la clasificación básico o aplicado depende de la perspectiva del lector del informe. Este modelo puede denominarse modelo lente: la investigación puede resultar básica o aplicada según la lente utilizada al leer el resumen. Debe entenderse esta lente como la metáfora de los deseos e intenciones del lector que interpreta el informe. Si el resumen le ayuda a formular una teoría, el estudio está actuando como investigación básica, independientemente de las intenciones del autor. Si el estudio ayuda al lector a resolver un problema práctico, el estudio, para ese lector, ha sido investigación aplicada. (Kilpatrick, 1981b, pág. 24).*

Schoenfeld (1991) diferencia entre "calidad" y utilidad de la investigación. Puntualiza que:

> *buena parte de cualquier disciplina aplicada (incluida la educación matemática) no interesa directamente a los usuarios de dicha disciplina. Así son las cosas, y ello no debería importar demasiado a los profesionales de la disciplina. Lo importante es que el trabajo básico*

> *realizado como fundamento del campo de aplicación sea de la máxima calidad (pág. 274).*

Y cita la famosa disculpa de Hardy por no haber hecho matemáticas "útiles", argumentando que "la justificación final de nuestro trabajo reside tanto en su calidad como en su utilidad inmediata" (pág. 275).

En mi opinión, cuando analizamos la investigación en educación matemática, calidad, pertinencia y utilidad forman un todo. Las tres son interdependientes. La calidad de la investigación depende de su conexión con el tema tratado y de cómo se ha utilizado o podría utilizarse. La pertinencia depende de que cumpla o no otros criterios de calidad, así como de su utilidad en ese contexto. La utilidad de la investigación, a su vez, depende de cómo se ha diseñado y desarrollado, y de si aporta o no resultados pertinentes respecto al tema tratado.

VALIDEZ

La validez se refiere al modo en que justificamos las interpretaciones que hacemos de la investigación. La dicotomía tradicional en la investigación educativa experimental aparece entre la validez interna y la externa. La validez interna se refiere al grado de confianza con el que podemos afirmar que nuestros resultados provienen de condiciones experimentales; la validez externa, a nuestra capacidad de extrapolación a otras condiciones y circunstancias, y, sobre todo, a situaciones más naturales que las que se dan en condiciones experimentales.

Hoy en día consideramos la validez con una perspectiva más amplia. Tal como Kvale (1989) ha afirmado: "Validar es cuestionar". Cuando indagamos acerca de la confianza en los resultados de la investigación, estamos cuestionando si nuestro método de investigación nos ha permitido investigar lo que realmente pretendíamos. Vamos más allá de la validez aparente para explorar lo que realmente hemos estudiado. Cuando intentamos hacer generalizaciones a partir de los casos estudiados, nos preguntamos "¿Cuál es el significado de este caso?" (Shulman, 1988, pág. 10). Hacemos inferencias entre lo que se ha estudiado y aquello a lo que se pretende generalizar los resultados. Un estudio de investigación no es válido en sí mismo: la validez se refiere a las conclusiones extraídas del estudio.

Interpretamos las investigaciones, extraemos conclusiones de ellas y las utilizamos. La validez de nuestras interpretaciones, conclusiones y utilizaciones debe examinarse según sus consecuencias (Linn, 1991; Linn, Baker & Dunpar, 1991). Los estudios de investigación en educación matemática deberían proporcionar unas consecuencias válidas. Deberíamos cuestionar no sólo la utilización, intencionada o no, de la investigación, sino también las consecuencias, intencionadas o no, de esas utilizaciones.

OBJETIVIDAD

Desde que los avances en la filosofía de la ciencia han aceptado que la subjetividad es un componente inevitable de la tarea científica, existe actualmente la tendencia a abandonar nuestros esfuerzos para lograr la objetividad. Los ataques al positivismo y el auge del constructivismo han creado un clima en la investigación en didáctica de las matemáticas que considera la objetividad una *non grata* reliquia legada por técnicas ya superadas. Incluso algunos investigadores ven con desconfianza los intentos por lograr objetividad por medios intersubjetivos, utilizando diversos observadores o codificadores.

Aunque la objetividad absoluta sea en realidad inalcanzable, podemos seguir considerándola como una meta que hay que conseguir. Esto nos permite preguntarnos el grado de objetividad logrado por una determinada investigación. Se puede aplicar al conocimiento derivado de la investigación en educación matemática el comentario de Freudenthal respecto al conocimiento matemático:

> *No veo vínculo alguno entre la enseñanza matemática y la pretendida o supuesta falta de fe en el conocimiento matemático objetivo, llamémosle constructivismo o cualquier otra cosa (Freudenthal, 1991, págs. 146-147).*

La investigación debería conseguir si no objetividad total, al menos la suficiente para minimizar el margen de error. Los investigadores deben tratar de identificar el margen de error que aportan a su trabajo y, después, explicar cómo distorsiona sus resultados. Deben también intentar refutar sus propias conclusiones, reforzando así su razonamiento.

La mejor imagen para expresar la necesidad de objetividad es la que usa Geertz (1973)

> *no comparto el razonamiento de que, puesto que la objetividad total en estos temas es imposible —lo que es cierto— podríamos dar rienda suelta a nuestra imaginación. Esto equivaldría a decir que, "puesto que la asepsia total es imposible, las intervenciones quirúrgicas pueden realizarse en una alcantarilla", como señala Robert Solow (pág. 30).*

ORIGINALIDAD

La auténtica investigación se caracteriza por su originalidad, por presentarnos hechos conocidos bajo una nueva perspectiva, sorprendiendo nuestras expectativas con pruebas irrefutables. Un estudio clave en educación matemática es el informe de Erlwanger (1973) sobre Benny, un niño de 12 años considerado por su profesora como uno de sus mejores alumnos, pero que resultó tener serios errores conceptuales relativos a fracciones y decimales. Gran parte de la originalidad de este estudio radicaba en la utilización de un caso individual para cuestionar un programa de enseñanza individualizada en matemáticas.

Otro trabajo original es el de Hativa (1988). Su estudio de Sigal, un alumno de segundo grado que participaba en un programa de aritmética a través de ordenador, es también un estudio de casos. Su originalidad consiste en un análisis detallado de cómo y por qué sus avances en informática no eran acordes con su trabajo en clase. Hativa demuestra que Sigal consideraba la aritmética a través del ordenador diferente de la que aprendía en clase. La originalidad puede provenir no sólo de la utilización de una nueva técnica o de una antigua empleada de forma nueva, sino también de un nuevo modo de interpretar las pruebas obtenidas, con independencia de la técnica empleada.

En la investigación en didáctica de las matemáticas se echan en falta estudios de réplica, estudios que permitirían confirmar o refutar conclusiones extraídas de trabajos anteriores. Una de las causas radica, quizá, en el criterio de originalidad. Los investigadores se muestran reacios a replicar un estudio porque consideran que una réplica no aporta nada original. Les preocupa también que sus réplicas no sean publicadas.

Estos investigadores no se dan cuenta de que la ciencia progresa gracias a las réplicas: sólo reuniendo un conjunto de estudios centrados en un fenómeno específico podemos entender su funcionamiento. Tampoco son conscientes de que la réplica no consiste en repetir mecánicamente lo que alguien ha hecho: más que una simple copia de un trabajo anterior debe ser un ampliación. Una vez más nos remitimos a las palabras de Freudhental (1991): "reproducir no equivale a repetir cual papagayo" (pág. 161).

Por ejemplo, Baranes, Perry y Stigler (1989) no sólo repitieron en EE.UU. el paradigma empleado por los investigadores brasileños en el estudio de la utilización que hacen los niños del conocimiento del mundo para resolver problemas aritméticos de enunciado verbal, sino que también analizaron los datos de una forma diferente y realizaron un segundo estudio para aclarar algunos problemas surgidos en el curso de la réplica. Los comentarios a estos estudios (Carraher, 1989; Saxe, 1989) demuestran cómo hallazgos aparentemente conflictivos necesitan ser considerados como el resultado de diferentes paradigmas y, al mismo tiempo, que estudios contradictorios pueden encuadrarse en un marco más amplio.

Originalidad no significa desconexión con investigaciones precedentes. Consiste en organizar y presentar las pruebas para hacer reflexionar al lector. Nos sorprende leer un estudio original, porque, antes de leerlo, no esperábamos ese modo de contar las cosas o ese desenlace: nos aporta algo nuevo incluso si la situación es de sobra conocida o, quizá, precisamente por serlo.

RIGOR Y PRECISIÓN

Si comparamos la investigación en educación matemática realizada en EE.UU. con la de la antigua Unión Soviética, nos encontramos con una diferencia bastante clara en la utilización de lo que podríamos llamar técnicas de investigación *rigurosas*: control de variables, selección y asignación aleatorias, fiabilidad de medida, fórmulas estadísticas para estimación de errores. Los investigadores americanos anteriores a 1985 utilizaban mucho estas técnicas; los soviéticos muy poco. Por otra parte, la investigación soviética en didáctica de las matemáticas trataba cuestiones más importantes para los profesores, y hasta podríamos decir que más significativas para nuestro campo de investigación. Si consideramos rigor y pertinencia como criterios ortogonales, la investigación americana tendría una alta calificación en el primero y baja en el segundo; y la soviética, al contrario (Kilpatrick, 1981a). La cuestión es si la importancia atribuida al criterio de pertinencia justifica el abandono del rigor.

El concepto tradicional de rigor está ligado a la manipulación experimental de variables controladas, tan generalizada en la investigación en educación matemática. Este tipo de investigación ha tratado, en general, situaciones y modelos lejanos a la complejidad del aula, poco útiles en el enfoque de los problemas de la práctica docente.

El término *rigor*, como tantos otros, tiene connotaciones positivas y negativas. En su aspecto negativo implica rigidez, inflexibilidad y una estricta sumisión a normas y procedimientos: el investigador se siente prisionero de un marco inamovible siguiendo normas establecidas e incapaz de responder al momento fenomenológico. En el lado positivo, rigor implica exactitud y precisión: el investigador intenta despejar las nubes de la duda que rodean a un fenómeno y entenderlo con la máxima exactitud.

Al igual que el criterio de validez, el de rigor y precisión necesita una interpretación de mayor alcance. Lo mismo que el criterio de objetividad, ha de entenderse como algo relativo y no absoluto. Los investigadores en educación matemática se han preocupado de la precisión con la que se miden el pensamiento y el aprendizaje. Estos fenómenos son, por su propia naturaleza, inaccesibles a la observación y medida directas.

La búsqueda de rigor necesita ampliarse desde la acepción de precisión de medida a la de precisión de significado. Los investigadores deben intentar usar el lenguaje cuidadosamente para transmitir con la máxima exactitud lo que han observado y las conclusiones alcanzadas. Deben buscar explicaciones alternativas a sus pruebas y someterlas a un cuidadoso escrutinio. Una investigación debe considerarse rigurosa no sólo porque se atenga a cánones estrictos de diseño y análisis, sino también porque el investigador ha demostrado tener una fina sensibilidad respecto al significado que los participantes en la situación estudiada otorgan a enseñar y aprender, lo mismo que respecto a las interpretaciones que otros pudieran hacer de estos fenómenos. Diseñando y realizando cuidadosamente el estudio, el investigador ha anticipado y tratado de evitar posibles malentendidos. El rigor y la precisión emanan más del espíritu con que se realiza la investigación —el cuidado con que se desarrolla la observación, la atención al detalle, la disposición a comprobar alternativas— que de la fidelidad a un procedimiento normalizado.

CAPACIDAD PARA PREDECIR

Los objetivos habituales de la ciencia —explicación, predicción y control— parece que tienden a substituirse en gran parte de la investigación educativa por un nuevo trío: entendimiento, interpretación y acción (Carr y Kemmis, 1986; Kilpatrick, 1988). Si bien, en parte, se trata de un mero juego de palabras (explicación y entendimiento eran y continúan siendo objetivos propios de la investigación educativa), el abandono de la predicción y el control sí resulta significativo.

Quizá el control del proceso enseñanza-aprendizaje, en el sentido en que se controla el crecimiento bacteriano en un laboratorio biológico, nunca fuese un objetivo razonable de investigación, pero la predicción continúa siendo importante. Sería conveniente poder predecir, dentro de ciertos límites, cómo los niños van a responder a una determinada tarea o con qué dificultades se pueden encontrar los profesores al explicarla.

El comportamiento humano es demasiado complejo para poder predecir lo que una persona va a hacer en una situación determinada, pero observando a la gente y las situaciones podemos detectar ciertos patrones de comportamiento. Ciertas tareas permiten predecir ciertos errores. Al hacer unas preguntas determinadas a una clase cabe esperar ciertas respuestas. Los profesores captan muchas de estas regularidades, algunas de ellas estudiadas por los investigadores.

En la visión habitual de la ciencia —basada en el concepto de Hume sobre las relaciones causales, consideradas como relaciones contingentes regulares— la explicación y la predicción son simétricas (House, 1991): las dos emanan de leyes causales generales. Por ello, las técnicas de correlación y regresión han sido tan comunes en la investigación educativa: permiten a los investigadores hacer predicciones aún careciendo de teoría y experimentación. La capacidad para predecir ha sido siempre la prueba crítica de una tarea científica. Si, bajo condiciones iniciales dadas, una teoría puede predecir un hecho, la teoría adquiere más validez. Según House, el error presente en este punto de vista es:

> *los hechos en sí mismos no constituyen el enfoque definitivo del análisis científico. Más bien, los hechos deben explicarse mediante el examen de sus estructuras causales, resultado, a su vez, de complejas interacciones entre un cúmulo de entidades subyacentes. La realidad no consiste solamente en aquello que podemos ver, sino también en las entidades causales subyacentes no siempre directamente discernibles. La realidad, en fin, está estratificada. Los hechos se explican mediante estructuras subyacentes, y éstas se explican, a su vez, a partir de otras estructuras en niveles más profundos. Así, el descubrimiento científico es un proceso continuo (pág. 4).*

En el aula no existe la conjunción constante de hechos necesaria para el tipo de predicción que se realiza en un laboratorio. El aula está lejos de ser un sistema cerrado protegido contra entidades causales interactivas. Pero, a pesar de que en clase de matemáticas no podemos predecir con certeza comportamientos específicos, sí podemos buscar aquellas estructuras causales que tienden a producir determinados efectos. También podemos buscar generalizaciones, no en cuanto leyes naturales que determinen la labor de los profesores o de los alumnos, sino como tendencias o patrones en el discurrir de las actividades lectivas.

Una manera de aplicar el criterio de predictibilidad es preguntándonos hasta qué punto las inferencias extraídas de la investigación basada en una teoría nos permiten anticipar lo que ocurrirá en una situación de enseñanza-aprendizaje. De esta forma, la predictibilidad se convierte en un criterio que hay que aplicar no sólo a un estudio de investigación determinado sino también a un conjunto de estudios interrelacionados. La predictibilidad nos informa hasta qué punto hemos podido penetrar en el galimatías de las circunstancias que pueden influir en los hallazgos de los estudios individuales, y ver así lo que suele ocurrir en general. Mas aún, como los profesores son en sí mismos influencias causales poderosas, pueden entender mejor que un extraño cómo el patrón de entidades causales identificado funciona en sus clases. Pueden, sobre la marcha, hacer inferencias específicas que les permitan predecir hechos relacionados con su trabajo con más exactitud de lo que les permitiría una ley de carácter general.

REPRODUCTIBILIDAD

Un informe correcto sobre un estudio de investigación debe dejar suficientemente claros los procedimientos utilizados por el investigador como para que otra persona pudiera, al menos en principio, reproducir el estudio. Este es un precepto *sine qua non* para hacer informes sólidos. Mas aún, también deben ser reproducibles los hallazgos del estudio —observaciones, patrón de resultados—, aunque no necesariamente las interpretaciones que se les den.

La investigación en educación matemática no puede ser fantasiosa o meramente especulativa. Debe, como toda ciencia, utilizar procedimientos que otros pueden seguir, y producir resultados que otros pueden obtener de una u otra forma. Lo que hacemos y lo que encontramos al investigar no debe quedarse en un asunto privado. Debe difundirse para que pueda ser criticado, comprobado por otros e incluso refutado. Debe ser público.

Independientemente de si una situación observada en una investigación puede reproducirse en mi clase o en la tuya, el propio estudio y las conclusiones extraídas de él deben estar abiertos a la réplica. La reproductibilidad, como la predictibilidad, son aspectos de la generalización. Si no podemos generalizar nuestra investigación, es inútil. Si es así, no hemos conseguido un conocimiento útil. Freudenthal (1991) tiene, una vez más, la última palabra:

> *el conocimiento puede presentarse con éxito como resultado si podemos reproducir el proceso de su adquisición — una característica de las ciencias duras. Si no se cumple esta condición, el conocimiento presentado sin referencia alguna al proceso que lo originó, carece de las características de racionalidad que distingue el conocimiento verdadero del dogma (pág. 161).*

Relación con las matemáticas y su enseñanza

Un criterio obvio, aunque sutil, en la investigación en didáctica de las matemáticas es que debe estar relacionada a la vez con las matemáticas y con el proceso educativo. Toda investigación que pretenda vincularse a la educación matemática ha de hacer explícita su relación con el ámbito educativo (aunque los editores de revistas de investigación en didáctica de las matemáticas reciben, de vez en cuando, manuscritos que contienen pruebas de teoremas matemáticos sin mencionar conexión alguna con la enseñanza-aprendizaje). Seguramente hay que prestar más atención a este criterio: la investigación en educación matemática debe mantener una íntima relación con las matemáticas.

Con frecuencia se utilizan las matemáticas en una investigación sólo como vehículo para explorar algún aspecto de la enseñanza, el aprendizaje, el pensamiento o la escolarización. Por ejemplo, en muchos estudios relacionados con la resolución de problemas, los problemas de matemáticas podrían substituirse por problemas de física o poesía y, aún así, seguir estudiando los mismos procesos psicológicos. En algunos estudios sobre profesores, tanto daría que la asignatura estudiada fuera matemáticas como historia o francés. En las investigaciones sobre niños trabajando en grupo, las actividades que hacen pueden ser matemáticas o no y, en todo caso, este aspecto carece de importancia para el investigador. En un estudio epistemológico, los fenómenos examinados puede que sean matemáticos, pero puede que el trabajo no añada nada a nuestra comprensión de lo que significa saber matemáticas, en contraposición a saber biología o gramática.

En los casos en que las matemáticas se utilizan como elemento vehicular en un estudio de investigación, hay que plantearse la importancia de sus aportaciones a nuestra disciplina. Puede que sea una investigación útil en otros campos, pero, si no trata las matemáticas de una manera rigurosa, es poco probable que sirva a los profesores de esta materia.

En todo caso, hay que procurar no rechazar un estudio por considerarlo poco útil o informativo, simplemente porque no ha utilizado las matemáticas de una forma integral o esclarecedora. Aunque podemos intentar aplicar el criterio de estar relacionado con las matemáticas y su enseñanza para decidir lo que debe ser considerado como una buena investigación en educación matemática, debemos reconocer la naturaleza necesariamente interdisciplinar de nuestro campo. Debemos estar dispuestos a tomar ideas de investigaciones realizadas en otros campos, en especial, pero no exclusivamente, cuando éstas tienen alguna conexión con la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, incluso cuando de ellas se haya desprendido poca luz obvia sobre nuestra disciplina.

CONCLUSIÓN

¿Por qué necesitamos criterios para investigar en nuestra disciplina? La existencia de criterios, por muy provisionales o incompletos que sean, permite a los investigadores valorar la calidad y las aportaciones del trabajo propio y ajeno. No se pretende que el conjunto de criterios aquí discutido sea algo fijo, exhaustivo, especial o definitivo. Estos criterios nos ofrecen, simplemente, herramientas para pensar, plantillas para contrastar los problemas estudiados por la investigación, los medios utilizados para investigar esos problemas, los resultados obtenidos y la utilización hecha o por hacer de dichos resultados. Dicho de otro modo, los criterios son lentes que se pueden utilizar para visionar el paisaje de la investigación.

La investigación en didáctica de las matemáticas debe continuar aspirando a un estatuto científico. En este campo somos más bien lentos en reconocer que la ciencia se presenta en gran variedad de formas. Podemos utilizar enfoques distintos y seguir haciendo ciencia.

Muchos investigadores interpretan inadecuadamente lo que es la ciencia. Siguiendo a Hume, se preguntan cómo podemos conocer aquello que no hemos experimentado. Asumen que la ciencia ha de basarse en la experiencia. Como la experiencia de un determinado individuo en el campo de las matemáticas es personal y, a la postre, difícil de conocer, habrá mucha gente que afirme que la investigación en educación matemática no puede ser científica. Sin embargo, como señala Woolgar (1988), la ciencia no se plantea esta pregunta de Hume. La ciencia no es inducida por la experiencia. El científico construye una representación que luego determina los objetos que hay que investigar. La pregunta es "¿cómo podemos conocer lo que no hemos representado?" El conocimiento científico exige que traspasemos la experiencia y los hechos para llegar a las estructuras que producen dichos hechos (House, 1991).

La ciencia nos ha dejado un importante legado que no debe abandonarse o tratarse a la ligera. Tenemos que mantener una postura de sano escepticismo respecto al trabajo propio y ajeno, a la vez que una disposición, incluso un deseo, de someter ese trabajo a comprobaciones críticas. Al usar criterios desarrollados a lo largo del tiempo, debemos continuar preguntándonos si nuestro trabajo responde a esos criterios, tal como ahora los entendemos. Para juzgar la calidad científica —a pesar de que la ciencia sea un esfuerzo humano sujeto a modas y errores— no debemos rechazar las metodologías y estructuras científicas, despreciar el andamiaje hasta ahora erigido. No debemos abandonar los principios de la ciencia: vinculación a estructuras teóricas, especificación cuidadosa de procedimientos, precisión de significados, exhibición pública de datos, presentación académica de resultados y apertura a la crítica y a la refutación.

A largo plazo, estamos intentando conseguir una comunidad en educación matemática en la que los profesores, realizando un trabajo profundo y reflexivo, comprendan las posibles consecuencias de su quehacer. La investigación puede ayudar al profesor a adoptar este planteamiento. Aunque no se puedan establecer criterios definitivos de calidad, los educadores matemáticos deben mantener un nivel adecuado en sus investigaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baranes, R., Perry, M., & Stigler, J. W. (1989). Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction, 6,* 287-318.

Bishop, A. (1977, October). *On loosening the constructs*. Unpublished manuscript.

Carr, W. & Kemmis, S. (1986). *Becoming critical: Education, knowledge and action research*. London: Falmer.

Carraher, T. N. (1989). The cross-fertilization of research paradigms. *Cognition and Instruction, 6,* 319-323.

Eisenhart, M. A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 324-336.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI Mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1* (2), 7-26.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. (Mathematics Education Library, Vol. 9). Dordrecht: Kluwer.

Geertz, C. (1973). Thick description. En C. Geertz (Ed.), *The interpretation of cultures*. New York: Basic Books.

Hativa, N. (1988). Sigal's ineffective computer-based practice of arithmetic: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 195-214.

House, E. R. (1991). Realism in research. *Educational Researcher, 20* (6), 2-9, 25.

Howe, K. & Eisenhart, M. (1990). Standards for qualitative (and quantitative) research: A prolegomenon. *Educational Researcher, 19* (4), 2-9.

Kilpatrick, J. (1981a). Research on mathematical thinking and learning in the Unites States. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2,* 363-379.

Kilpatrick, J. (1981b). The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 2* (2), 22-29.

Kilpatrick, J. (1988). Educational research: Scientific or political?. *Australian Educational Researcher, 15* (2), 13-28.

Kilpatrick, J., Rico, L. & Sierra, M. (1994). *Educación Matemática e Investigación.* Madrid: Ed. Síntesis.

Kvale, S. (1989). To validate is to question. En S. Kvale (Ed.), *Issues of validity in qualitative research* (pp. 73-92). Lund: Studentlitteratur.

Linn, R. L. (1991, November 18). *Notes on consequential validity for MSEB committee*. Unpublished manuscript.

Linn, R. L., Baker, E. L., & Dunbar, S. B. (1991). Complex, performance-based assessment: Expectations and validation criteria. *Educational Researcher, 20* (8), 15-21.

Salomon, G. (1991). Transcending the qualitative-quantitative debate: The analytic and systemic approaches to educational research. *Educational Researcher, 20* (6), 10-18.

Saxe, G. (1989). Transfer of learning across cultural practices. *Cognition and Instruction, 6,* 325-330.

Schoenfeld, A. H. (1991). On pure and applied research in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 10,* 263-276.

Shulman, L. S. (1988). Disciplines of inquiry in education: An overview. En R. M. Jaeger (Ed.), *Complementary methods for research in education* (pp. 3-17) Washington, DC: American Educational Research Association.

Woolgar, S. (1988). *Science: The very idea*. Chichester, England: Ellis Horwood.

CABRI-GEÓMETRA O UNA NUEVA RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA

COLETTE LABORDE
COAST, CNRS, LYON ET IMAG-LSD2 CNRS,
UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER, GRENOBLE

LAS RELACIONES ENTRE EL DIBUJO Y EL OBJETO GEOMÉTRICO

La geometría enseñada trata de objetos teóricos pero pone también en juego representaciones gráficas, cuyo papel en el aprendizaje de la geometría no es necesario destacar.

La figura como relación entre el dibujo y el objeto geométrico

En cuanto entidad material sobre un soporte, el dibujo puede ser considerado como un significante de un referente teórico (objeto de una teoría geométrica como la de la geometría euclídea o la de la geometría proyectiva). La figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos, queda entonces definida como el conjunto de pares formados por dos elementos, siendo el primer elemento el referente, el segundo uno de los dibujos que lo representa; el segundo elemento se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente. El término figura geométrica así entendido remite al establecimiento de una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representaciones. Visto así, las relaciones entre un dibujo y su referente construidas por un sujeto, lector o productor del dibujo, constituyen el significado, para este sujeto, de la figura geométrica asociada. Este significado corresponde a lo que Fishbein (1993) llama *figural concept*.

Las relaciones entre dibujo y objeto geométrico se pueden caracterizar, a grosso modo, por el hecho de que propiedades del objeto geométrico se traducen gráficamente por relaciones espaciales. Por ejemplo, un trazo rectilíneo que toca un trazado circular se puede interpretar, en una teoría geométrica, como una recta tangente a un círculo. Interesa sin embargo subrayar la complejidad de las relaciones entre el dibujo y el objeto geométrico; en efecto, el paso del dibujo al objeto geométrico es objeto de una interpretación por un sujeto humano. De ello se deduce que:

L. PUIG (ED.). *INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 33-48

(i) por una parte, un dibujo geométrico no es necesariamente interpretado por su lector como algo que le remita a un objeto geométrico.

(ii) por otra parte las interpretaciones de un mismo dibujo en tanto que significante de un objeto geométrico son múltiples por dos razones: la primera consiste en que las interpretaciones dependen del lector y de sus conocimientos así como del contexto; la segunda tiene que ver con la naturaleza misma del dibujo, que por sí solo no puede caracterizar un objeto geométrico.

Precisemos estas afirmaciones que sirven de puntos de partida a nuestro marco teórico.

Un dibujo remite a los objetos teóricos de la geometría en la medida en que el que lo lee decide hacerlo: la interpretación evidentemente depende de la teoría con la que el lector elige leer el dibujo, así como de los conocimientos de dicho lector. El contexto desempeña un papel fundamental en la elección del tipo de interpretación.

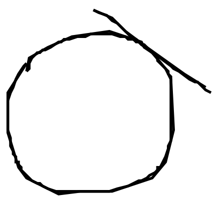

Figura Nº 1.

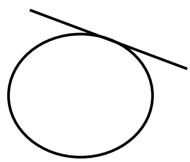

Figura Nº 2.

La Figura Nº 1 se puede interpretar, por tanto, como el dibujo de una manzana a la que queda unido un trozo de tallo. En un contexto de matemáticas, un matemático reconocerá en ella, sin duda alguna, un círculo. Pero será más reticente a hacerlo en el caso del dibujo de la derecha (Figura Nº 2), a pesar de que el conjunto de marcas de tinta en el papel del dibujo de la derecha es probablemente una mejor aproximación por mínimos cuadrados a un círculo.

Este comportamiento encuentra explicación si se tiene en cuenta la elección del tipo de interpretación del lector. El matemático en su contexto de trabajo considera esos dibujos dentro de una interpretación totalmente geométrica y, ya que en esta interpretación los dibujos deben remitir a objetos establecidos por la teoría, teniendo en cuenta el trazado a mano alzada, intentará ver un círculo en el primero, mientras que dudará si se trata de un círculo o de una elipse en el segundo, a la vista de la exactitud aparente del trazado.

Incluso un mismo dibujo geométrico se puede interpretar de múltiples formas y, en particular, la percepción interviene en la construcción de una interpretación siempre y cuando el lector no tenga sólidos conocimientos teóricos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva. Se ha podido así poner de manifiesto que los aspectos perceptivos (Duval, 1988, Mesquita 1989, Padilla, 1990) del dibujo pueden entorpecer o por el contrario favorecer la lectura geométrica para alumnos de secundaria, al atraer la atención sobre elementos del dibujo no pertinentes para esa lectura. Los alumnos de *3ème*[1] no reconocen con el mismo grado de facilidad la configuración de Thales en los dos dibujos que siguen (Figura Nº 3) (Cordier & Cordier, 1991).

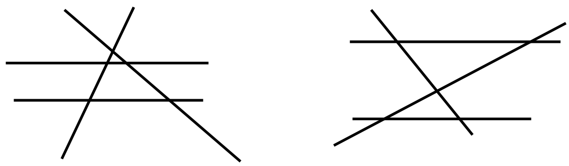

Figura Nº 3.

En el transcurso del tiempo se han ido formando dibujos prototipo de objetos geométricos (Noirfalise, 1991), como resultado de influencias a la vez perceptivas y culturales (en sentido amplio y escolar). Algunos son harto conocidos (cuadrado/rombo); otros, menos, como el del paralelogramo: el dibujo prototipo de un paralelogramo es, al menos en Francia, aquel en el que la diagonal AC es perpendicular al lado AD (Figura Nº 4); precisamente hemos aislado este caso típico utilizando Cabri-geómetra. Mariotti (1993) ha mostrado cómo las imágenes mentales estándar de objetos sólidos interactúan con lo que el sujeto visualiza y dan lugar a una imagen mental resultante de un objeto inconsistente.

Figura Nº 4.

En tanto que significante de un objeto geométrico, el dibujo indica propiedades de este objeto pero sólo lo hace parcialmente. Se puede unir un *dominio de funcionamiento* al dibujo (conjunto de las propiedades geométricas representadas por ciertas propiedades espaciales del dibujo). Así un dibujo

1. Equivalente a 3º de Enseñanza Secundaria Obligatoria del sistema educativo de España, 9º del de USA u 8º de la educación básica colombiana. [Nota del editor.]

no informa del dominio de variación de los elementos del objeto geométrico. A partir de un dibujo, es imposible inferir si un punto de un segmento pertenece sólo al segmento o a la recta soporte del segmento, si dos círculos secantes lo son por hipótesis o pueden estar en una posición relativa cualquiera. *Es necesaria una descripción discursiva que caracterice al objeto geométrico* para eliminar las ambigüedades inherentes al dibujo (Duval, 1988; Parzysz, 1988).

A la inversa, todas las propiedades espaciales del dibujo no pueden ser interpretadas como que remiten a propiedades del objeto: al dibujo está ligado un *dominio de interpretación*. La posición del dibujo en la hoja por ejemplo está fuera del dominio de interpretación de los dibujos en tanto que significantes de objetos de la geometría euclídea. Algunos problemas con los que se han encontrado los alumnos se deben precisamente a que trabajan con un dominio de interpretación distinto al de la geometría euclídea.

Las relaciones entre dibujo y objeto geométrico en la enseñanza de la geometría

La enseñanza de la geometría ignora las relaciones entre objeto geométrico y dibujo al silenciar la diferencia entre ambos, o haciendo como si un lazo natural los uniera. Querríamos retomar la tesis defendida por Berthelot y Salin (1992) y el marco teórico aferente desarrollado a propósito de las relaciones entre conocimientos espaciales y conocimientos geométricos: el sacrificio de los conocimientos espaciales en provecho de los conocimientos geométricos aboca a que la geometría enseñada se apoye sin control sobre una relación privilegiada con el espacio reservado para el tratamiento de objetos pequeños o de trazados que caben en una hoja de papel, sobre la evidencia perceptiva: “se puede ver que…” (Bessot, 1993). Interpretamos el que la enseñanza ignore las relaciones entre dibujo y objeto geométrico en relación con este sacrificio. La enseñanza desdeña la posibilidad de una lectura espacial del dibujo y no considera más que la lectura geométrica del dibujo, desconoce la existencia del dominio de interpretación de un dibujo: la evidencia perceptiva se interpreta de modo natural e inmediato en ella en términos geométricos. Es preciso decir que el lenguaje facilita esta confusión espacial geométrica, ya que a menudo el mismo término designa la propiedad espacial y la geométrica ligada a ella. Por esta indiferenciación, la enseñanza desconoce la especificidad de las relaciones entre dibujo y geometría y no las toma como objeto de aprendizaje.

Se podría describir brevemente estas relaciones diciendo que, por una parte, la geometría puede ser considerada como el resultado de una modelización del dibujo, y que así puede servir de instrumento de producción y de control del dibujo, o incluso de predicción. Pero, inversamente, el dibujo en geometría puede ser considerado como modelo del objeto geométrico (Laborde, 1992), y así ofrece un campo de experimentación gráfica (Chevallard, 1990). Puesto que la enseñanza ignora las relaciones entre dibujo y objeto geométrico, este carácter de experimentación no es percibido, por decirlo así, por los alumnos y aún menos utilizado (añadir a un dibujo elementos no mencionados en el enunciado o por el profesor no depende de decisiones tomadas espontáneamente por los alumnos sino que necesita un aprendizaje). En tanto que modelo de la geometría, el dibujo se presta a experimentos que dan cuenta de preguntas planteadas en la teoría, traducidas luego al dibujo, y cuya respuesta en el dibujo no da una respuesta en la teoría sino que proporciona supuestos, pistas para el trabajo teórico. Así, se puede trazar un gran número de triángulos y observar la inclinación donde concurren sus alturas.

Estas relaciones son sutiles, lo que significa que, para que los alumnos sean conscientes de ellas, habría que desarrollar en la enseñanza

- situaciones problema que traten de dibujos, en las que la geometría sea una herramienta eficaz de modelización y de solución; por ejemplo, en las que permita hacer dibujos que satisfagan restricciones dadas, de manera menos costosa que el tanteo controlado por la percepción y que la geometría garantice la corrección del resultado: por ejemplo, la geometría nos asegura la tangencia de una recta a un círculo cuando es perpendicular al radio.
- situaciones en geometría en las que el recurso al dibujo y la experimentación con él eviten perderse en soluciones teóricas demasiado largas.

Con esta filosofía se han desarrollado desde hace algunos años entornos informáticos que ofrecen un sistema de representación de objetos geométricos mediante dibujos en la pantalla del ordenador que pueden ser producidos por medio de comandos dados en un lenguaje geométrico. Estos objetos en la pantalla presentan un dominio de funcionamiento más extenso que los dibujos con lápiz y papel, y permiten descalificar algunas interpretaciones ilícitas. Cabri-geómetra es uno de ellos. Lo introducimos en el apartado siguiente.

CARACTERÍSTICAS DEL ENTORNO CABRI-GEÓMETRA

Dos características importantes de este entorno informático (para una descripción del entorno ver Bellemain & Caponi 1992 y Laborde & Straesser 1990) residen en la coexistencia de *primitivas de dibujo puro* y *primitivas geométricas* y en la manipulación directa del dibujo. Si se desplaza con la ayuda del ratón uno de los elementos base del dibujo, éste se deforma respetando las propiedades geométricas que han servido para su trazado y las que se deriven de ellas; por consiguiente, si se ha realizado un dibujo mediante primitivas de dibujo puro, es decir a ojo, pierde sus propiedades espaciales aparentes en su estado original al desplazar uno de sus elementos. La Figura Nº 5 representa un paralelogramo obtenido trazando 4 segmentos colocados a ojo en la pantalla (los vértices son los puntos básicos), a la izquierda en su estado original y a la derecha después de desplazar *A*.

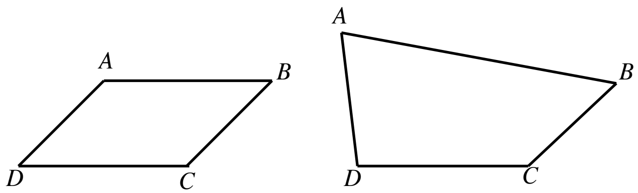

Figura Nº 5.

El trazado en la pantalla de un dibujo ligado a un objeto geométrico tiene que conservar en el transcurso del desplazamiento las propiedades espaciales que dan cuenta de las propiedades geométricas de ese objeto, entonces tiene que hacerse mediante las primitivas geométricas (tales como punto medio, mediatriz, recta paralela, recta perpendicular, etc.). De esta manera, la exigencia de comunicar al programa un procedimiento geométrico de construcción permite caracterizar el objeto geométrico (nos encontramos de nuevo la necesidad que hemos mencionado antes de la descripción discursiva del objeto geométrico para su caracterización).

En el trazado en la pantalla del dibujo de un objeto geométrico, la interacción entre las dos características del programa es, por tanto, lo que trae consigo el uso de las primitivas geométricas, como indica el esquema de la Figura Nº 6. El programa ha sido elaborado con la idea de que este paso por las primitivas geométricas debería favorecer el uso de conocimientos geométricos.

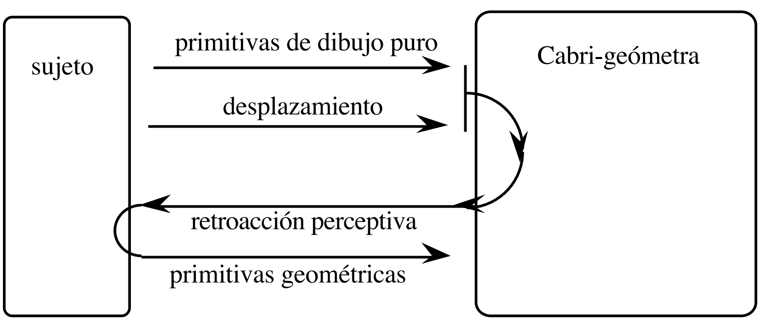

Figura Nº 6.

El entorno responde pues a la intención de ofrecer un sistema de significantes que tenga un dominio mayor de funcionamiento en relación con la geometría y que haga más evidentes los límites del dominio de interpretación. Dado que el desplazamiento del dibujo está controlado por una teoría geométrica (a grosso modo la de la geometría euclídea), el entorno da cuenta en particular de la variabilidad de los elementos del objeto geométrico y de su dominio de variación (extensión del dominio de funcionamiento) y permite descalificar interpretaciones no pertinentes (puestas en evidencia de los límites del dominio de interpretación): en efecto, las propiedades atribuidas al objeto por haber sido leídas en un dibujo estático que las representa tienen muchas probabilidades de dejar de cumplirse aparentemente al deformar el dibujo.

El campo de experimentación ofrecido por el dibujo en los dibujos con lápiz y papel está limitado por razones materiales (imprecisión del trazado, imposibilidad de hacer temporalmente invisible una parte del dibujo, limitación del número de elementos que hay que gestionar). El entorno Cabri-geómetra, no sólo por su funcionalidad de editor gráfico sino también por los conocimientos geométricos que integra, amplía el campo de experimentación posible. Ahora bien, tanto las acciones posibles como los retornos correspondientes, no sólo se amplían, sino que resultan ser de naturaleza diferente al estar basados en conocimientos geométricos. El tipo de representación gráfica que da el entorno es distinto, por tanto, del dibujo con lápiz y papel. Para señalar esta diferencia en lo que sigue, llamaremos Cabri-dibujo a una representación gráfica en la pantalla de Cabri-geómetra.

Podemos esperar nuevas posibilidades de organización de las situaciones de aprendizaje y cambios en la conducta de los alumnos.

LAS RETROACCIONES DEL ENTORNO INFORMÁTICO

El desplazamiento por manipulación directa es uno de los componentes importantes de Cabri-geómetra, que ofrece la retroacción a las acciones del alumno.

La importancia del carácter exterior de las retroacciones

Como el desplazamiento se basa en conocimientos de geometría, permite una retroacción exterior más rica sobre una misma producción del sujeto. Tomemos el ejemplo de un alumno que tenga que resolver una tarea que describiremos en términos clásicos como una tarea de construcción de una figura que satisfaga unas condiciones dadas (en nuestros términos, sería una tarea de trazado de un dibujo de un objeto geométrico dado, producido por un procedimiento controlado por conocimientos geométricos). En un contexto de lápiz y papel, el alumno puede dar la vuelta al papel y ver el dibujo en diferentes posiciones, pero no puede hacer variar los elementos variables más que trazando otro dibujo, es decir, emprendiendo otra acción basada en sus conocimientos.

No hay, por tanto, retroacción exterior sobre la *misma* producción del sujeto que puede perfectamente cambiar de forma implícita, e incluso inconsciente, el procedimiento de trazado en la producción de nuevas instancias del dibujo. El recurso al desplazamiento contiene en sí mismo el uso de conocimientos: la ventaja de ello es que estas retroacciones proceden de un dispositivo externo al sujeto e independiente del profesor y, de esta manera, son susceptibles de hacer evolucionar al sujeto.

Utilización en interacción de las posibilidades de acción y de retroacción

Como en toda situación, las retroacciones del medio pueden venir solicitadas por el sujeto que decide entregarse a algunas acciones cuya sanción por el medio proporcionará elementos de información sobre su producción. Se trata en cierto modo de una *experimentación en el modelo* proporcionado por el entorno informático.

El entorno Cabri-geómetra permite este tipo de experimentación a través de la conjugación del uso de las primitivas geométricas y del desplazamiento: para verificar así que dos rectas son perpendiculares, se traza la perpendicular a una de las rectas y se verifica que al desplazarla permanece confundida con la otra recta.

El sujeto puede entregarse incluso a una experimentación basada en un cálculo de inferencias: muestra la equivalencia de la propiedad P que hay que verificar y otra propiedad P', que puede verificar por el procedimiento indicado más arriba. Por ejemplo, para verificar que ha construido bien un rombo, puede trazar la mediatriz de una diagonal y verificar la coincidencia de esta mediatriz con la otra diagonal en el transcurso del desplazamiento.

En un análisis de un Cabri-dibujo dado, que tenga como finalidad descubrir las dependencias geométricas entre propiedades del objeto geométrico, otro tipo de experimentación posible consiste en suprimir relaciones geométricas entre elementos y en verificar si las relaciones que se suponían dependientes dejan de cumplirse.

La repetición

Margolinas (1993, pág. 117) puso de manifiesto la importancia de la repetición del problema en los trabajos de ingeniería didáctica, que hasta entonces no se habían tenido en cuenta en el plano teórico. Muestra bien que no se trata en modo alguno de una consecuencia de una opción conductista en la que la repetición de la confrontación con estímulos permitiría un aprendizaje por refuerzo sino de una consecuencia de una opción constructivista: la repetición de la confrontación con el mismo problema permite al alumno construir un sentido del problema (proceso de transferencia de responsabilidad[2]), lo “hace cada vez más consciente de lo que le impulsa a actuar”. La repetición es interesante cuando las retroacciones no son simplemente del estilo “verdadero o falso” sino de naturaleza rica. Al usar Cabri-geómetra de forma habitual durante un período prolongado en clases de *4ème*[3] y *3ème* (Capono & Laborde 1994), se pudo constatar en la resolución de problemas una ausencia de renuncia por parte de los alumnos, casi siempre una implicación importante, procedente de la sucesión de numerosos intentos de solución, y —ciertamente con menos frecuencia— una evolución de las soluciones.

UNA NUEVA RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA

Las situaciones adidácticas en geometría apuntan a que

- las estrategias de solución basadas en conocimientos geométricos aparezcan como más eficaces que las estrategias empíricas o basadas en la percepción. “La geometría resulta de una astucia, de un desvío cuya ruta indirecta permite acceder a lo que sobrepasa la práctica inmediata” (Serres 1993, pág. 196);
- esas estrategias no sean la respuesta a expectativas externas al problema que el alumno cree adivinar, por ejemplo, en el profesor o el autor del problema.

Aquí, nuestra atención se dirige a las situaciones que dan sentido a la noción de figura geométrica: estas situaciones ponen en juego un dibujo que puede ser interpretado como representante de un objeto geométrico con la ayuda de un análisis geométrico. Para que esta interpretación tenga lugar, es necesario que el problema que hay que resolver la solicite, es decir, que la resolución del problema conduzca a un tratamiento geométrico. En el apartado siguiente pretendemos determinar las modificaciones que aporta Cabri-geómetra a las características de las situaciones: ¿qué nuevo tipo de maneras de actuar es susceptible de favorecer en los alumnos un entorno como Cabri-geómetra? ¿Qué nuevo tipo de situaciones adidácticas resultan ser posibles?

¿Qué problemas en el entorno Cabri-geómetra?

Podemos distinguir dos tipos de problemas según la producción pedida a los alumnos:

---

2. En el original francés, ‘dévolution’. Esa palabra francesa es un *falso amigo* de la palabra castellana ‘devolución’. En francés es, en realidad, un término jurídico que significa “la transmisión por ley de un bien o un derecho de una persona a otra”; en la didáctica de las matemáticas es un término introducido por Guy Brousseau, precisamente para indicar el proceso por el cual la responsabilidad sobre el régimen de la verdad se transfiere del profesor al alumno. [Nota del editor].

3. Equivalente a 2º de Enseñanza Secundaria Obligatoria del sistema educativo de España, 8º del de USA o 7º de la educación básica colombiana. [Nota del editor.].

- problemas de producción de Cabri-dibujos,
- problemas de demostración.

En el primer tipo de problemas, la producción pedida es, como se ha visto, de naturaleza nueva: no se trata de hacer un trazado sino un dibujo en la pantalla que conserve ciertas propiedades espaciales impuestas cuando se desplace uno de los puntos básicos del dibujo. La tarea para el alumno consiste, por tanto, en elaborar un procedimiento de producción del Cabri-dibujo, basado en las primitivas geométricas disponibles.

Además del nuevo carácter de la producción pedida, el desplazamiento introduce nuevos tipos de problemas:

- producir Cabri-dibujos con un comportamiento restringido por lo que respecta a su desplazamiento,
- la búsqueda de la genericidad del procedimiento de construcción,
- a reproducción de un Cabri-dibujo dado en la pantalla, que se pueda explorar gracias al desplazamiento.

Un Cabri-dibujo es un dibujo dinámico; además de la invarianza de las propiedades espaciales, se puede imponer restricciones específicas de movimiento. Por ejemplo, se puede pedir la producción de un triángulo equilátero que gire alrededor de su centro. Esto viene a ser lo mismo que imponer los puntos fijos, los puntos móviles del Cabri-dibujo y ciertas trayectorias. Jugamos aquí con la nueva naturaleza del Cabri-dibujo: es un dibujo cuyos elementos describen trayectorias, que o bien se reducen a un punto del plano o a un subconjunto de puntos del plano o al plano entero. La geometría se convierte en este problema en una herramienta de modelización de las relaciones espaciales del dibujo en el transcurso del movimiento. Este tipo de situación requiere, por tanto, un análisis en términos geométricos.

Ciertos procedimientos de construcción dependen de las posiciones respectivas de ciertos elementos básicos y se modifican profundamente si estas posiciones cambian. Piénsese por ejemplo en el procedimiento de obtención de una tangente a un círculo de centro O que pase por un punto P dado: el procedimiento habitual cambia según que el punto esté sobre el círculo o fuera de él. En el primer caso, se traza la perpendicular al radio; en el segundo, un círculo de diámetro PO. Si desplazamos P, la tangente obtenida permanece tangente al círculo hasta desaparecer cuando P se lleva sobre el círculo. La producción de Cabri-dibujos conduce, por tanto, a un nuevo tipo de problemas: el del carácter genérico de un procedimiento de construcción.

En la reproducción de dibujos con lápiz y papel, los conocimientos geométricos son susceptibles de ser una herramienta eficaz, pero se sabe también que el trazado empírico controlado simplemente por la percepción puede suministrar un trazado visualmente satisfactorio. La reproducción de Cabri-dibujos descalifica el trazado empírico controlado por la visualización. Exige además el reconocimiento de invariantes geométricos de ese Cabri-dibujo con respecto a los desplazamientos, o, hablando con propiedad, necesita que se reconozcan propiedades geométricas con ayuda de invariantes espaciales del dibujo en el desplazamiento. Este tipo de problema pone pues el acento especialmente en la correspondencia entre la visualización de invariantes espaciales y su descripción geométrica. Llamamos *caja negra* a esas situaciones problema en las que los alumnos tienen que reproducir un Cabri-dibujo dado en la pantalla de forma que se obtenga un Cabri-dibujo que tenga un comportamiento idéntico con respecto al desplazamiento. Tales actividades pueden ser usadas en el aprendizaje de las transformaciones geométricas.

La demostración es susceptible de adquirir un estatuto distinto en el Cabri-geómetra en la medida en que permite explicar fenómenos visuales o incluso la imposibilidad de fenómenos visuales. Así alumnos de *5ème*[4] (Bergue 1992) se preguntaron si un triángulo podía tener dos ángulos obtusos. La precisión del programa y el desplazamiento continuo asegura a los ojos de los alumnos la imposibilidad de obtener tal triángulo. Están entonces en condiciones de hacer suya la pregunta por la explicación de tal imposibilidad. Hay transferencia de la responsabilidad (Brousseau 1986) del problema de la demostración matemática de la inexistencia de tales triángulos. La demostración adquiere, como consecuencia de ello, un estatuto distinto: el de explicar propiedades espaciales en contradicción con las esperadas por los alumnos. Otra fuente de problemas que llevan a una demostración consiste en pedir que se encuentren las condiciones que debe satisfacer un objeto geométrico para obtener en la pantalla un caso particular resistente al desplazamiento. Por ejemplo, siendo A, B, C tres puntos fijos, ¿qué condiciones debe cumplir D para que las mediatrices del cuadrilátero ABCD se corten en un único punto? (Figura Nº 7). Los alumnos tienen la posibilidad de obtener manualmente el trazado del punto D intentando satisfacer visualmente las restricciones de intersección de las cuatro mediatrices. Obtienen lo que uno de nuestros colegas, J. F. Bonnet,

4. Equivalente a 1º de Enseñanza Secundaria Obligatoria del sistema educativo de España, 7º del de USA 0 6º de la educación básica colombiana. [Nota del editor].

llama un *lugar blando*. De nuevo la demostración aparece como un medio para estar seguro de la naturaleza de ese lugar blando.

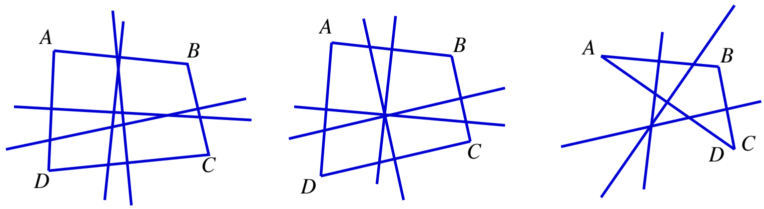

Figura Nº 7.

Discusión del carácter adidáctico de las situaciones de producción de Cabri-dibujos

El carácter adidáctico de las situaciones de producción de Cabri-dibujos puede parecer más fácil de satisfacer por dos razones:

- se trata de hacer hacer y no de hacer un dibujo; los alumnos tienen que comunicar un procedimiento de trazado al dispositivo y no hacer el trazado por sí mismos. El dispositivo obliga a la distinción entre trazado y procedimiento de trazado. Por otra parte el profesor está ausente en el proceso de comunicación con el dispositivo.
- un Cabri-dibujo es por definición un dibujo que conserva en el transcurso del desplazamiento las propiedades espaciales que dan cuenta de las propiedades geométricas ligadas al objeto geométrico que representa; los procedimientos de trazado a ojo son descalificados por el dispositivo mismo. El programa ofrece gracias al desplazamiento una invalidación de los trazados a ojo y los alumnos son conducidos a usar eficazmente primitivas geométricas para obtener el trazado en la pantalla de un Cabri-dibujo de un objeto geométrico.

Pero ¿es posible a partir de esta constatación establecer dos hipótesis adicionales según las cuales

(i) pedir que los alumnos hagan un Cabri-dibujo fijando el conjunto de primitivas geométricas disponibles abriría la posibilidad de una búsqueda de lo que espera el profesor y favorecería así la búsqueda por parte de los alumnos de procedimientos que se apoyen en conocimientos geométricos?

(ii) el recurso a primitivas geométricas se apoyaría necesariamente en un tratamiento geométrico?

¡Evidentemente no!

Querríamos matizar estas hipótesis, que dan un cuadro demasiado contrastado de las relaciones entre alumnos y máquina.

Por una parte, hay fenómenos de contrato que son susceptibles de producirse, así ciertas primitivas geométricas pueden surgir a los ojos del alumno como más deseables de utilizar que otras para el enseñante.

Por otra parte, establecemos la hipótesis de que las estrategias empíricas de los alumnos están reforzadas por el hecho de que hay un número limitado de comandos de construcción: pueden elegir tratar de construir el Cabri-dibujo pedido mediante el tanteo sucesivo de diversas combinaciones de menús, y aún más puesto que el número de primitivas es reducido. No es el uso de conocimientos geométricos lo que controla el proceso de trazado sino la búsqueda de una serie de menús que conduzcan a un Cabri-dibujo, que será validado por el desplazamiento. La concepción de situaciones adidácticas de construcción geométrica con Cabri-geómetra debe tener en cuenta la importancia de esta dimensión empírica, eligiendo para ser realizados trazados para los que tales estrategias sean costosas y no conduzcan al éxito.

Hemos podido constatar además que se establece un juego entre una actividad perceptiva favorecida por el desplazamiento, una estrategia combinatoria y el uso de conocimientos de geometría en las situaciones en que los alumnos tienen que producir un Cabri-dibujo a partir de una caracterización discursiva. Los alumnos atacan el problema mediante combinaciones sistemáticas de menús sobre los objetos existentes, pero puede suceder que descubran en el momento del desplazamiento uno de los invariantes geométricos pedidos pero asociado a otros objetos distintos de los deseados. Se sitúan entonces en una problemática geométrica al intentar volver a obtener este invariante entre los objetos deseados y, para ello, analizan geométricamente lo que han hecho de forma empírica: la geometría se convierte en un medio que les permite controlar la reproducción de un invariante obtenido de forma aleatoria.

LA GEOMETRÍA COMO HERRAMIENTA DE MODELIZACIÓN

Los saberes geométricos se pueden utilizar también en el entorno Cabri-geómetra como herramientas para resolver problemas no geométricos. Permiten la modelización de fenómenos, por ejemplo físicos, como la modelización geométrica en óptica relativa a la reflexión en un espejo o a la refracción en una lente. Pero la geometría puede también modelizar situaciones algebraicas y numéricas: la suma o el producto de dos números se puede representar geométricamente. Las representaciones gráficas de funciones polinómicas o de fracciones racionales pueden obtenerse como lugares geométricos en Cabri-geómetra.

Más abajo figura una ilustración del problema bien conocido de la caja (Figura Nº 8). Se trata de cortar cuatro cuadrados de lado h de las cuatro esquinas de un cuadrado de cartón de lado a. Se obtiene el desarrollo de una caja y se busca el valor de h que haga que la caja sea de volumen máximo. Se ha representado el desarrollo, la caja en perspectiva y el gráfico del volumen en función de h de manera que toda variación continua de h producida por el deslizamiento del ratón sobre el desarrollo repercuta continuamente sobre el dibujo en perspectiva y sobre la posición de M en el gráfico. Las tres representaciones se hacen con las primitivas geométricas de Cabri-geómetra, incluso el gráfico del volumen.

Esta correspondencia entre tres tipos de representación de un mismo objeto es interesante por una doble razón: muestra la diversidad de registros de expresión matemática que reposan en las relaciones espaciales, pero también su especificidad. La geometría, teoría del espacio, aparece entonces como una poderosa herramienta de expresión y de simulación.

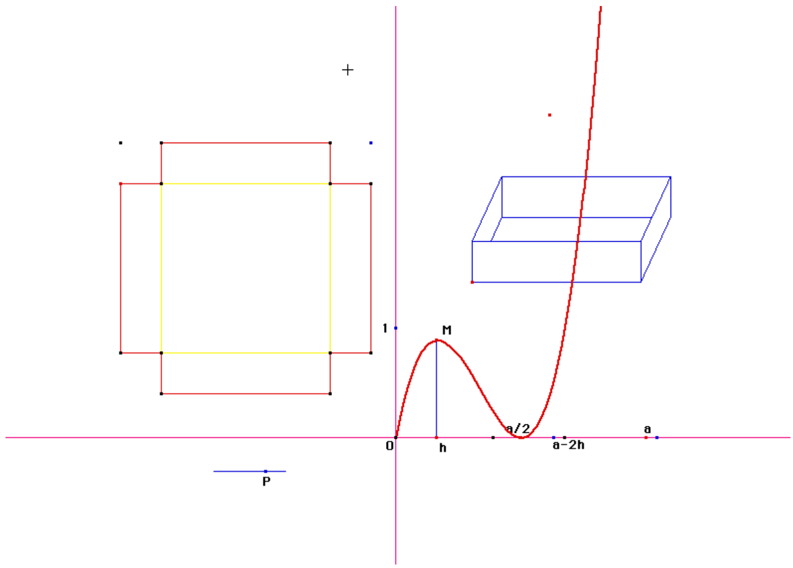

Figura Nº 8.

CONCLUSIÓN

El reconocimiento visual es susceptible de desempeñar un papel importante en el entorno Cabri-geómetra. Ahora bien, el reconocimiento visual de propiedades espaciales asociadas a las propiedades geométricas no es espontáneo y debe ser objeto de aprendizaje. La asociación entre visual y geométrico es difícil que adquiera sentido en el entorno de lápiz y papel, que aplasta la distinción entre visual y geométrico (estrechez del dominio de funcionamiento y ausencia de límites aparentes del dominio de interpretación). Como ya se ha dicho, el entorno Cabri-geómetra a sido concebido para permitir la distinción entre visual y geométrico. La observación de los alumnos muestra que lo geométrico puede aparecer en Cabri-geómetra además como *un medio de reproducir lo visual o de explicarlo* (explicación del comportamiento de un Cabri-dibujo). Lo geométrico no se construiría en este entorno solamente para paliar los límites de lo visual, sino también ligado a lo visual: lo geométrico es una *herramienta de modelización de lo visual*. Ésta es una dimensión que nos parece interesante en la medida en que la geometría encuentra su origen en el control de los fenómenos espaciales.

Entre el aplastamiento entre visual y geométrico, por una parte, y la ruptura entre estos dos aspectos, por otra, nos parece posible una vía distinta en que el aprendizaje de la geometría en sus inicios consistiría en *el aprendizaje del control de las relaciones entre lo visual y lo geométrico*. El entorno Cabri-geómetra ofrece posibilidades de organización de un medio para el aprendizaje de este control por tres razones:

- los fenómenos visuales adquieren importancia por la dimensión dinámica del Cabri-dibujo;
- estos fenómenos están controlados por la teoría ya que son el resultado de una modelización gráfica de un modelo analítico de ciertas propiedades geométricas;
- el sinnúmero de posibilidades de situaciones geométricas que pueden ser visualizadas con un gran número de objetos y en forma precisa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bellemain, F. & Capponi, B. (1992). Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. *Educational Studies in Mathematics, 23* (1), 59-97.

Bergue, D. (1992). Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5ème. *Petit x*. IREM de Grenoble, 29, 5-13.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux 1.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7* (2), 33-115.

Bessot, A. (1993). Représentations graphiques et maîtrise des rapports avec l'espace. *Publications du CIRADE*. Montréal, Canada: Université du Québec à Montréal.

Capponi, B. & Laborde, C. (1994). *Cabri-classe*. Argenteuil: Editions Archimède.

Chevallard, Y. (1990). Autour de l'enseignement de la géométrie. *Petit x, 27,* 41-76.

Cordier, F. & Cordier, J. (1991). L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 11* (1), 45-64.

Duval, R. (1988). Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg, 1, 57-74.

Fishbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24* (2), 139-162.

Laborde, C. (1992). Enseigner la géométrie: permanences et révolutions. En C. Gaulin, B. Hodgson, D. Wheeler & J. Egsgard (Eds.), *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 47-75). Québec: Les Presses de l'Université Laval.

Laborde, J. M. & Strässer, R. (1990). Cabri-Géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralbalt für Didactik der Mathematik, 90* (5), 171-90.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La Pensée Sauvage.

Mariotti, A. (1993). The influence of the standard images in geometrical reasoning. En I. Hirabayashi, et al. (Eds.), *Proceedings of PME XVII,* (Vol. II, 177-82) Tsukuba, Japon.

Mesquita, A. L. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves: éléments pour une typologie*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Noirfalise, R. (1991). Figures prégnantes en géométrie? *Repères - IREM, 2,* 51-58.

Padilla, V. (1990). Les figures aident-elles à voir en géométrie? *Annales de didactique et de sciences cognitives*. ULP, IREM de Strasbourg, 3, 223-252.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19* (1), 79-92.

Serres, M. (1993). *Les origines de la géométrie*. Paris: Flammarion.

CAPÍTULO 5

FORMACIÓN DE INVESTIGADORES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: EL PROGRAMA DE DOCTORADO DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA

LUIS RICO
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

ANTECEDENTES

Los especialistas en el área de conocimiento señalan los orígenes de la Investigación en Didáctica de la Matemática a finales del siglo XIX, cuando los sistemas educativos nacionales comenzaron a establecer la preparación y formación de los Profesores de Matemáticas dentro de la educación superior. (Kilpatrick, 1994). Conforme los países comenzaron a implantar sistemas escolares nacionales encontraron que necesitaban una gran cantidad de profesorado cualificado, con una formación profesional adecuada. Aunque la investigación no surgió en las primeras instituciones de enseñanza superior para la formación del profesorado, con el tiempo, y de forma diferente en países diferentes, la educación matemática llegó a ser reconocida como materia universitaria. Las expectativas de que las personas implicadas en la formación de profesores de matemáticas en la universidad debieran investigar, y no sólo enseñar, llevó a muchas de estas personas a iniciar investigaciones en educación matemática.

En estos comienzos se ha destacado la influencia de los matemáticos profesionales: Klein, con sus objetivos de reforma de planes de estudio y formación de profesores, la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI), fundada en 1908, con los primeros estudios comparativos sobre el estado de la enseñanza de las matemáticas en diversos países y la edición de la revista *L'Enseignement Mathematique*, Poincaré, etc. También es destacable la influencia de los psicólogos desde los comienzos: los estudios de Binet con sus contribuciones a la psicología del pensamiento e iniciador de los tests de inteligencia, Galton y sus trabajos sobre la herencia de la habilidad mental, Pearson, Burt y Spearman con su fundamentación de la psicología diferencial, están entre los pioneros de esta contribución de la psicología a la investigación sobre los problemas del aprendizaje de las matemáticas.

La comunidad de educadores matemáticos no se articula, sin embargo, hasta después de la Segunda Guerra mundial; en esta época surge un

L. PUIG (ED.). *INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 49-62

amplio movimiento internacional, con desarrollo considerable en algunos países. Durante los 50 y los 60 comenzaron a proliferar documentos de orientación sobre la enseñanza, dirigidos a profesores en ejercicio y basados en estudios e investigaciones. La educación matemática en estos años desarrolla su propio cuerpo de literatura de investigación y comienza a superar los estudios convencionales, con la incorporación de otras fuentes y modelos distintos de los basados en la psicología.

Las propuestas para la reforma del currículo de matemáticas se intensifican durante los 50, lo que lleva a diseñar planes de investigación para dirigir la mejora de los cursos de matemáticas y su enseñanza. El liderazgo de estos esfuerzos tiene lugar en USA, concretándose en varios informes de carácter nacional. Uno de los informes más conocidos, *A Survey of Mathematical Education: the Causes of Student Dropout, Failure and Incompetence at the Elementary and Secondary Levels* (Dyer, Kalin y Lord, 1956), recomendaba la formación de un comité de investigación en educación matemática que pudiese asesorar sobre el desarrollo de esta investigación. Se mantienen durante esta época los esfuerzos por coordinar el trabajo de expertos en diferentes materias: matemáticos, psicólogos, educadores, profesores de aula y usuarios de las matemáticas; estos esfuerzos se concretan en la organización de encuentros y en la elaboración y realización de proyectos conjuntos.

A finales de la década de los 60 tienen lugar tres conferencias importantes en USA, en las que se establecen las bases del desarrollo posterior de la investigación en educación matemática. La primera conferencia se celebró en 1965, en el Centro de Profesores de la Universidad de Columbia, y centró su atención en los recursos necesarios para la investigación, destacando la necesidad de un servicio que proporcionara acceso a la información del momento sobre los problemas de la educación matemática a nivel internacional.

La segunda conferencia tuvo lugar en 1967 en la Universidad de Georgia y supuso el comienzo real de la interdisciplinariedad en la investigación en educación matemática. Esta conferencia se centró en identificar los problemas, modelos teóricos, diseños de investigación y métodos adecuados en cada caso. La conferencia puso de manifiesto la complejidad de la tarea de investigación en educación matemática; también sirvió de aliviadero a las múltiples quejas sobre la calidad y cantidad de la investigación existente. Se asumió como rasgo distintivo la complejidad de la investigación en este campo y la aceptación de que la comunidad de investigadores es una comunidad diversa.

INSTITUCIONALIZACIÓN EN LA UNIVERSIDAD

La tercera conferencia tuvo lugar en la Universidad de Cornell en 1968. El objetivo de esta conferencia estuvo en determinar las condiciones institucionales y científicas para incorporar las investigaciones en educación matemática en los grados académicos universitarios. Gran parte de la discusión estuvo dedicada a determinar criterios para un programa de calidad en la investigación sobre educación matemática.

Un dato importante de esta conferencia estuvo en el énfasis puesto para implicar a los investigadores matemáticos en tareas de investigación en educación matemática, en la discusión sobre la mejor estrategia para desarrollar programas de doctorado sobre educación matemática y las condiciones necesarias para ello. El interés de la discusión y conclusiones llevó a la publicación de un trabajo en el *Educational Studies in Mathematics*, cuyo resumen de ideas principales presentamos:

> *La expansión hacia un sistema de educación obligatoria desde Preescolar hasta los 18 años parece, en este momento, un objetivo a lograr; esto producirá una expansión considerable en la Universidad. Al igual que ocurre en otras áreas, la carencia de profesores de matemáticas para esta expansión es una materia de estudio y reflexión. Ninguna organización gubernamental ni profesional está prestando atención adecuada al problema de la preparación y cualificación del profesorado de matemáticas. Debe aumentar el número de profesores preparados en todos los niveles, desde el Preescolar a la Universidad, y esa preparación debe mejorar; se debe dirigir la investigación para dominar los siguientes problemas:*
> *1. Ayuda a los alumnos de aprendizaje lento.*
> *2. Diseño de estrategias para el avance de los alumnos retrasados.*
> *3. Oferta de variedad de formaciones a los alumnos que concluyen sus estudios.*
> *4. Mejora en la educación profesional.*
> *5. Formación de especialistas en educación matemática.*
> *6. Fomento a los contactos entre la Universidad y los centros de bachillerato.*
> *7. Organización sistemática de la educación matemática.*

Los asistentes a este congreso consideraron que, para los propósitos de su trabajo la educación matemática puede definirse como un campo de actividad e investigación erudita, dirigido al conocimiento y comprensión de los procesos implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en la creatividad matemática.

La Educación Matemática debe ser libre para inspirarse en los recursos de la comunidad de investigadores matemáticos y debiera prestar una atención más consciente a los problemas cuyas soluciones son aplicables más directamente a las situaciones educativas existentes. Esta combinación de la experiencia de la investigación matemática con los problemas escolares no se encuentra con frecuencia.

Entre las críticas que se realizaron en esta conferencia tenemos las siguientes:

1) Los resultados de investigación en Educación Matemática no se han aplicado en las escuelas. Este fracaso puede atribuirse a muchos factores: las aplicaciones estuvieron planificadas inadecuadamente; la investigación se realizó con un propósito completamente distinto (por ejemplo para obtener una graduación); no existió comunicación con las escuelas; la investigación fue esencialmente trivial, etc.

2) Los informes de muchas de las investigaciones fallaron en expresar con claridad los supuestos del trabajo, conocimiento que es esencial si los resultados van a emplearse en otras circunstancias.

3) Las innovaciones curriculares y la práctica docente han resultado escasamente orientadas por resultados de investigación. La utilidad de una investigación en cualquier campo parece depender directamente de la significación de sus resultados e, inversamente, de la cantidad de trabajo que se requiere para determinar si tienen alguna significación.

4) La Educación Matemática necesita de un marco teórico estructurado que haga posible situar cualquier investigación dentro de un contexto, como puede hacerse con la investigación en matemáticas.

Por todo ello, se consideró que si la Educación Matemática se orientaba como una actividad académica, era necesario encontrar un lugar en el sistema universitario. Puesto que entonces no existía un espacio adecuado convenía proponer alguno.

Se insistió fuertemente que la Educación Matemática debiera encontrar su lugar en las universidades, dentro de una investigación generalizada sobre el currículo y un desarrollo de actividades, con problemas de investigación surgiendo de esta actividad. Un problema obvio en la relación de la Educación Matemática con la comunidad matemática supone el reconocimiento universitario de quienes la trabajan y los mecanismos institucionales de recompensa. Quitando casos excepcionales, los que se impliquen principalmente en Educación Matemática no serán miembros de la comunidad que investiga matemáticas ni tampoco miembros de la comunidad de Educación. En consecuencia, si este campo disciplinar debe lograr una identidad válida, distinta de las matemáticas y la educación, debieran existir normas apropiadas, y generalmente aceptadas, con respecto a las cuales se pueda establecer el éxito o el fracaso.

Fue un sentimiento compartido que una de las cualificaciones más importantes para trabajar en Educación Matemática es un alto nivel de pericia y habilidad en matemáticas, de mayor consideración según aumenta el nivel educativo de las matemáticas en las que el investigador está trabajando. Todos los que estén en el campo deben estar capacitados para distinguir entre matemáticas correctas e incorrectas en todos los niveles ligeramente superiores a aquel en el que se encuentra trabajando; éste es un requerimiento sustancial que cualquier programa de formación en Educación Matemática debe tener en cuenta. Algunos de los mejores investigadores en Educación Matemática actual tienen un doctorado en matemáticas y experiencia investigadora en matemáticas. Esta cantidad de preparación matemática no debiera considerarse excepcional, antes bien una meta a la que acercarse tanto como sea posible. Una solución a este problema de formación estaría en la participación significativa en Educación Matemática de algunos de los que investigan en matemáticas.

Por tanto, pareció conveniente que para que la Educación Matemática consolidara su posición como campo académico respetable, tanto la investigación como las personas implicadas debieran ser necesariamente de nivel académico superior.

La investigación curricular y los centros de desarrollo en las universidades podrían proporcionar el entorno para programas de graduación con sentido en Educación Matemática y también validar la Educación Matemática como actividad académica. Si se estableciesen tales programas de graduación relativos a Educación Matemática podrían proporcionar personas con buena cualificación para la investigación en este campo, con posibilidad de situarlos en los departamentos universitarios.

La principal razón para establecer un doctorado en Educación Matemática debe ser alcanzar excelencia en la investigación en este campo y no mantener la excelencia de la investigación en matemáticas.

El artículo concluye con una extensa lista de posibles trabajos de investigación en Educación Matemática agrupados en cinco grandes epígrafes:

1) Fundamentación profesional.
2) Análisis didáctico de contenidos matemáticos.
3) Estudios psicológicos.
4) Desarrollo curricular.
5) Implementación experimental.

Este Congreso abordó claramente las dificultades de la institucionalización universitaria de la Educación Matemática como disciplina diferenciada y autónoma, y ofreció soluciones cuyas líneas generales han permitido el desarrollo actual (Long, Meltzer y Hilton, 1970).

Aunque algunas de las denuncias formuladas en el año 70 aún mantienen su actualidad, la conferencia de Cornell supuso el punto de arranque de la institucionalización en la Universidad norteamericana de la investigación en educación matemática. A partir de los 70 diversas universidades europeas van incorporando planes académicos de formación de investigadores y, en algunos casos, programas de doctorado específicos.

CONTEXTO ESPAÑOL

Mientras el panorama internacional de la investigación en Didáctica de la Matemática comienza a despegar durante los 70, en España asistimos a la implantación de la Ley General de Educación que desarrolla el currículo de las *Matemáticas Modernas* e incorpora la investigación educativa dentro de las prioridades universitarias con la creación de los ICEs y del INCIE.

Como consecuencia derivada de estas reformas aparece por primera vez en la universidad española la disciplina *Didáctica de la Matemática*, como denominación de asignaturas que se imparten en los nuevos planes de estudio para la formación inicial de los Profesores de Educación General Básica, en primer lugar, y, posteriormente, en la especialidad de Metodología de la Licenciatura de Matemáticas que se sigue en algunas universidades.

Estos cambios, pequeños pero importantes, permiten que en algunas universidades comiéncen a trabajar en Didáctica de la Matemática grupos específicos de investigadores y que comiéncen a valorarse académicamente trabajos realizados en este campo. Esto ocurre en la Universidad de Granada en donde los años 75 y 76 se presentan dos tesinas de licenciatura encuadradas en la investigación en Didáctica de la Matemática. Sin embargo, las oportunidades y las condiciones institucionales son muy restringidas e impiden un desarrollo mas ambicioso y adecuado, hasta la reforma de la Universidad del año 84.

Uno de los objetivos básicos de la Ley de Reforma Universitaria (L.R.U. 1984) esta Ley consistió en potenciar los Departamentos como unidades organizativas básicas de las Universidades, cada uno de ellos especializado en un Área de Conocimiento determinada (o en varias afines), y capaces de satisfacer de modo eficaz y competente las necesidades docentes e investigadoras. Por ello la ley establecía que:

> *corresponde a los Departamentos la articulación y coordinación de las enseñanzas y de las actividades investigadoras de las Universidades.*

Con la nueva estructura universitaria se pretendió evitar que la organización tradicional en especialidades académicas y profesionales constituyera un obstáculo grave para el progreso intelectual, social, cultural y científico. Los especialistas fueron los primeros en reconocer esta necesidad de combinar y redefinir las disciplinas con el fin de crear nuevos campos científicos. Esta opción se realizó diversificando las disciplinas tradicionales en un nuevo catálogo de Áreas de Conocimiento, más adaptado al desarrollo actual de las ciencias y más acorde con las necesidades sociales y problemas que se plantean.

La ley establecía las Áreas de conocimiento como *aquellos campos del saber caracterizados por la homogeneidad de su objeto de conocimiento, una común tradición histórica y la existencia de comunidades investigadoras nacionales o internacionales*.

En este marco surge el Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática como uno de los campos de conocimiento en los que se estructura la Universidad, reconociendo el esfuerzo realizado por la comunidad de educadores matemáticos de nuestro país en los últimos treinta años. La constitución de Departamentos universitarios en los que está integrada el Área de Didáctica de la Matemática ha supuesto un paso importante para la Educación Matemática en España, disponiéndose de nuevos medios personales y materiales y potenciándose la docencia e investigación en el Área.

PROGRAMAS DE DOCTORADO

Uno de los logros mas importantes derivados de esta nueva situación ha sido la organización y desarrollo de Programas de Doctorado específicos de Didáctica de la Matemática, como ha ocurrido en la Universidad Autónoma de Barcelona, Universidad de Valencia y Universidad de Granada.

La importancia de los Programas de Doctorado se resalta en el Real Decreto que regula el Tercer Ciclo de Estudios Universitarios, donde encontramos:

> *El Tercer Ciclo, como demuestra la experiencia comparada, constituye condición esencial para el progreso científico y, por ello, para el progreso social y económico de una comunidad por cuanto de la profundidad de sus contenidos y la seriedad en su planteamiento depende la formación de los investigadores.*
> *Por lo demás, el Doctorado tiene una consecuencia adicional de extremada importancia: en él se inicia la formación del Profesorado Universitario. Si se toma en consideración que en la Universidad, docencia e investigación son dimensiones inescindibles, se comprende la importancia que el aprendizaje de ciencias y técnicas especializadas presenta para el Profesorado y, por tanto, para el futuro de los estudiantes universitarios y de la Universidad misma.*
> *Por ello, la Ley de Reforma Universitaria considera el Tercer Ciclo*

decisivo para promover la calidad de la enseñanza y para potenciar la investigación. Cualquier reforma universitaria debe considerarlo no como el apéndice burocrático de los dos primeros, sino como un periodo clave en el que tiene lugar la articulación entre docencia e investigación, y se forman tanto los investigadores como los futuros docentes universitarios. No en vano su superación permite acceder al título de mayor relieve académico.

A estos efectos, la Ley de Reforma Universitaria se plantea cuatro grandes objetivos en el campo de los estudios de postgrado:
** Disponer de un marco adecuado para la consecución y transmisión de los avances científicos;*
** Formar a los nuevos investigadores y preparar equipos de investigación que puedan afrontar con éxito el reto que suponen las nuevas ciencias, técnicas y metodologías;*
** Impulsar la formación de nuevo profesorado;*
** Perfeccionar el desarrollo Profesional, científico y artístico de los titulados superiores.*

Queda claro, desde estos supuestos y consideraciones, que el desarrollo de un Área de Conocimiento pasa, necesariamente, por el mantenimiento continuado de un Programa de Tercer Ciclo mediante el que se realicen y logren los anteriores objetivos. En este contexto, la Universidad de Granada aprobó durante el curso 87-88, y a propuesta del Departamento de Didáctica de la Matemática, el Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática, que se ha continuado a lo largo de estos años

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL PROGRAMA

El Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática quedó incluido en la Subcomisión Asesora IV, que comprende en la actualidad los tipos de Doctorado en Física, Biología, Geología, Ingeniería de Caminos, Informática, Matemáticas y Química. Forma parte de la mencionada Subcomisión el Coordinador del Programa.

El alumno inscrito en los estudios de doctorado deberá cursar y aprobar en el plazo de dos años, prorrogables a tres, un total de 32 créditos (320 horas) mediante los cursos y seminarios incluidos en el programa, así como con créditos obtenidos por la realización de un trabajo de investigación obligatorio, hasta un máximo de 9 créditos. Se exige un mínimo de 16 créditos en materias del área de conocimiento o fundamentales; el resto puede cursarse con asignaturas afines.

Los alumnos han de presentar en el Departamento, antes de terminar el Programa, un proyecto de tesis doctoral avalado por el que vaya a ser su director o directores. La tesis deberá terminarse en el plazo de cinco años desde la fecha de inicio de los estudios, ampliables en otros dos años a juicio de la Comisión de Doctorado.

Al comenzar el Programa se asigna un profesor Tutor a cada uno de los alumnos, encargado del asesoramiento y ayuda en todo lo relativo a la realización del Programa. El Tutor puede coincidir, o no, con el Director de la Tesis. El compromiso para la dirección de la Tesis se realiza, usualmente, cuando ha transcurrido parte del Programa y se formaliza con la aprobación por el Consejo del Departamento del proyecto de Tesis Doctoral. Este compromiso formal se articula en función de las líneas de investigación existentes en el Departamento y de los intereses científicos de los doctorandos; las líneas de investigación permiten aprovechar mejor los recursos limitados de personal, tiempo y materiales y facilita el trabajo en equipo, imprescindible para este tipo de investigaciones.

Concluidos los cursos y presentado el trabajo de investigación, cubriendo un total de al menos 32 créditos, el alumno, con la conformidad de su Tutor, los estudios preparatorios y siendo condición previa para la presentación de la Tesis. No obstante, el proyecto de Tesis ha podido ser presentado y aprobado con anterioridad a la conclusión de los créditos y cursos.

ORGANIZACIÓN DEL PROGRAMA

Según establecen las normas reguladoras de los estudios de Doctorado:

Los Programas de Doctorado deberán comprender:
a) Cursos o Seminarios relacionados con la metodología y formación en técnicas de investigación.
b) Cursos o Seminarios sobre los contenidos fundamentales de los campos científico, técnico o artístico a los que esté dedicado el Programa de Doctorado Correspondiente.
c) Cursos o Seminarios relacionados con campos afines al del Programa y que sean de interés para el proyecto de tesis doctoral del doctorando.

Siguiendo estas directrices generales, el Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática presenta la siguiente estructura:

a) Cursos metodológicos

La metodología de investigación en las áreas científicas sociales ha evolucionado profundamente en los últimos años, superando el paradigma positivista y los trabajos exclusivamente de laboratorio. En el campo de las Ciencias de la Educación, la Metodología de Investigación constituye actualmente un área de conocimiento diferenciada, cuya complejidad no es fácil controlar. Si a esto le añadimos los problemas específicos, derivados de las peculiaridades de la Didáctica de la Matemática, podemos apreciar la importancia considerable que tienen este tipo de cursos

La experiencia nos ha mostrado la importancia del marco metodológico para la realización de una Tesis; un diseño adecuado, junto con los instrumentos pertinentes para el análisis de datos y discusión de hallazgos y resultados, contribuyen a la calidad del producto final. En la actualidad hay tres cursos metodológicos en el programa: *Metodología de Investigación en Educación Matemática*, *Diseño de Investigaciones Educativas* y *Análisis de Datos*.

El curso *Metodología de Investigación en Educación Matemática* aborda tres núcleos de problemas:

i) los estadios lógicos de investigación en educación Matemática, con la delimitación del problema de investigación, la revisión de la literatura y la naturaleza de los datos empíricos;

ii) los métodos diferenciales de investigación en educación matemática, considerando: métodos centrados en la materia, métodos centrados en la enseñanza, métodos centrados en el aprendizaje, métodos centrados en el colectivo educativo y métodos integrados;

iii) la evaluación de la investigación en educación matemática.

b) Contenidos fundamentales

Constituyen la parte central del Programa y se exige, al menos, haber cursado 16 créditos de esta materia. Mientras que los cursos metodológicos, o afines, se pueden compartir con los Programas de doctorado de otras disciplinas, el contenido fundamental es el que marca la especificidad del Programa. En este tipo de cursos podemos diferenciar dos grupos: las materias troncales y las líneas de investigación específicas.

En las materias troncales se encuentran: el curso *Teoría de la Educación Matemática*, dedicado a los fundamentos de la Didáctica de la Matemática, sus problemas, fuentes de información, paradigmas de investigación y escuelas; el curso *Diseño, Desarrollo y Evaluación del Currículo de Matemáticas*, que aborda los fundamentos de la teoría curricular y los problemas que se derivan para la Didáctica de la Matemática del hecho de considerar la complejidad de los planes de formación que tienen lugar en las instituciones educativas. Estos cursos son complementados por el *Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática*, durante los dos años del programa; el Seminario de Investigación es el espacio natural en el que el alumno del Programa entra en contacto con investigaciones en curso y se enfrenta a los problemas prácticos que supone su puesta en marcha y desarrollo se ha descrito anteriormente. El carácter obligatorio de los cursos de este bloque destaca la importancia que tienen en el Programa.

Las líneas de investigación específicas son cursos más cortos, opcionales, en los que se trata de presentar al doctorando el estado de la cuestión en campos específicos de la Didáctica de la Matemática. Se presentan problemas concretos y prioridades de investigación en líneas tales como *Pensamiento Numérico*, *Epistemología y Didáctica de la Combinatoria y Probabilidad*, *Problemas Aritméticos* o *Estrategias para la Resolución de Problemas*. Los profesores visitantes intervienen en este tipo de cursos, que sirven para intercambiar información entre nuestro Departamento y otros centros de investigación en Educación Matemática.

c) Materias afines

Dentro de este grupo se incluyen aquellas materias que se consideran convenientes para completar la formación del doctorando, de cara a su labor de investigación en el campo de la Educación Matemática. También está previsto que el alumno, de conformidad con su tutor, pueda elegir materias de otros programas, hasta un total de 5 créditos. En este último caso se encuentran las materias cursadas previamente a la iniciación del Programa y que pueden ser convalidadas con la limitación indicada. Las ofertas de colaboración realizadas por otros Departamentos son un límite para cursar materias afines realmente interesantes.

INVESTIGACIÓN

Trabajo de Investigación

El Programa exige a los alumnos la realización de un trabajo de investigación, dirigido por un Profesor del Programa. El trabajo de investigación consiste en una primera aproximación a la Tesis, en el que se realiza un primer ataque al problema de investigación, pudiendo hacer correcciones o reorientaciones sobre el mismo. El Departamento ha entendido que la mejor forma de aprender a investigar consiste en realizar un trabajo de investigación y, por ello, se estimula a los alumnos a que presenten una Memoria de Tercer Ciclo con los resultados obtenidos. La Memoria no tiene carácter obligatorio ya que puede sustituirse por la redacción de algún artículo o comunicación e, incluso, convalidada por trabajos de investigación previos. Sin embargo, la experiencia ha mostrado que, en la mayor parte de los casos, los alumnos que optaron por realizar la Memoria de Tercer Ciclo son los que han finalizado o tienen muy avanzada su Tesis doctoral.

Tesis Doctoral

Para lograr el título de Doctor en Matemáticas, en el programa de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, además de los cursos y trabajos mencionados, se requiere realizar una Tesis Doctoral. El plazo máximo establecido es de 5 años, prorrogables por otros 2. En la práctica, este plazo de 5 años contados desde el comienzo de los cursos resulta corto y hay varias razones que así lo justifican

Balance actual

En el momento actual se han concluido siete tesis doctorales:

Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales, Dra. E. Castro; Director: Dr. L. Rico.

Niveles de comprensión en Problemas Verbales de Comparación Multiplicativa, Dr. E. Castro; Director: Dr. L. Rico.

Evolución de concepciones sobre nociones geométricas elementales en entorno de programación con lenguaje LOGO, Dr. A. Contreras; Directora: Dra. Batanero.

Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de los ordenadores, Dr. A. Estepa; Directora: Dra. Batanero.

Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio de los alumnos de Secundaria, Dra. V. Navarro-Pelayo; Director: Dr. Diaz.

Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico, Dra. L. Ruiz; Director: Dr. Diaz.

Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios, Dra. A. Vallecillos; Directora: Dra. C. Batanero.

Asimismo se han realizado doce Trabajos de Investigación dentro del Programa y una Tesina de Licenciatura.

PENSAMIENTO NUMÉRICO

La línea de investigación Pensamiento Numérico se encuentra dentro de las líneas de investigación establecidas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y en ella se enmarcan algunos de los trabajos mencionados anteriormente.

Con carácter general, denominamos Pensamiento Numérico a la línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el Sistema Educativo y en el medio social. El Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas.

Más en particular, el Pensamiento Numérico ha trabajado en el estudio de:

- la elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos con los que expresar los conceptos y relaciones de una estructura numérica;
- la organización, sistematización y desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica;
- los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica. (Castro, 1994)

El modelo de análisis que aquí se propone tiene en cuenta:

a. unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;

b. unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;

c. un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

Desde una perspectiva más amplia, el marco conceptual en el que se enmarca el Pensamiento Numérico tiene unas bases diversificadas:

1) Asume que la construcción del conocimiento matemático es un fenómeno social y cultural, cuya importancia para la sociedad tecnológica actual es determinante; tiene en cuenta que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad; por ello, la educación matemática debe considerar críticamente el conocimiento matemático y las acciones comunicativas mediante las que se transmite.

2) Considera como núcleo para su reflexión el campo de las matemáticas que comienza en la Aritmética escolar y las nociones básicas de número, avanza por los sistemas numéricos superiores (enteros, racionales y decimales) y continua con el estudio sistemático de las relaciones numéricas que aborda la teoría de números, la iniciación a los procesos infinitos que dan lugar al sistema de los números reales y los principales conceptos del análisis, vistos desde una perspectiva numérica. Denominamos conocimiento numérico a este modo de priorizar y destacar determinadas ramas de la matemática.

3) Tiene una orientación esencialmente curricular, entendiendo que la orientación de la investigación en educación matemática debe resolver los problemas de la práctica escolar considerando el carácter sistémico del cualquier plan de formación en matemáticas dentro del sistema educativo. La valoración del currículo como un plan operativo con diferentes niveles de reflexión e implementación es uno de los rasgos

definitorios de nuestra línea. La preocupación por los problemas que aparecen al considerar la evaluación escolar en matemáticas tienen una especial importancia.

4) El estudio de los errores y dificultades en la comprensión de los escolares sobre los campos conceptuales antes mencionados constituye, junto con las consideraciones cognitivas anteriormente citadas, la orientación psicológica de nuestras investigaciones.

5) Finalmente, estamos comprometidos en la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas y entendemos que esta línea de investigación debe considerar entre sus objetivos prioritarios el aumento de la autonomía intelectual y profesional del educador matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales*. Granada: Universidad de Granada.

Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra, M. (1994). *Educación Matemática e Investigación.* Madrid: Síntesis.

Long, R., Meltzer, N. & Hilton, P. (1970). Research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 2,* 446-468.

Rico, L., Diaz, J. y Batanero, C. (1994). El Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *UNO, 2,* 133-144.

CAPÍTULO 6

LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS COMO TAREA INVESTIGADORA

LUIS PUIG
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE VALENCIA

1987: *THE NEED FOR RESEARCH*

Durante los días 19, 20 y 21 de octubre del año 1987, se celebró en Madrid, en la sede de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, un simposio con el título *The Need for Research on Mathematical Education* [La necesidad de la investigación en educación matemática] auspiciado por Miguel de Guzmán y en el que participaron como ponentes varios miembros de ICMI, entre ellos quien entonces era su presidente, Jean Pierre Kahane. A mí me correspondió en aquella ocasión presentar la única ponencia española, ser la voz de los investigadores españoles o de los que deseaban embarcarse en la investigación en didáctica de las matemáticas en España. Mi ponencia se tituló *The State of Research on Mathematics Education in Spanish Universities* [El estado de la investigación sobre educación matemática en las universidades españolas]. Habréis notado[1] que, en dos ocasiones, al nombrar el título del simposio y el de mi participación en él, he tenido que ir del inglés al castellano, y es que, como un reflejo de cuál era el estado de la investigación en las instituciones españolas, los trabajos del simposio se hicieron en inglés —sin traducción a lengua alguna de las que se hablan en España— como una manera de apoyarnos en el organismo internacional, el ICMI, ante el que exponíamos nuestras miserias para que nos ayudara a zarandear estructuras inertes y a abrirnos un espacio en el que desarrollar el trabajo que veíamos como una necesidad.

Me vais a permitir que me cite a mí mismo —eso sí, en castellano[2]. El panorama que presenté de la investigación en didáctica de las matemáticas en España comenzaba con una imagen desoladora, decía:

> *sería fácil hacer un informe sobre el estado de la investigación en educación matemática en España usando cualquier indicador bi-*

1. He querido mantener el estilo propio de la exposición oral de este texto para subrayar su carácter de texto de intervención. En la versión escrita que he preparado para estas actas, he documentado, aclarado o extendido alguna de las afirmaciones en notas al texto oral.
2. No se publicaron actas de ese simposio, por lo que el texto que traduzco [Puig 1987] es inédito.

L. PUIG (ED.). *INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 63-75

> *bliométrico usual para evaluarlo. Breve y bonito. Ni Educational Studies in Mathematics, ni Journal for Research in Mathematics Education, ni ninguna otra revista internacional con prestigio ha publicado nunca un solo artículo escrito por algún investigador español. Ni un solo artículo español ha sido citado tampoco en ninguna de tales revistas. Más aún, la presencia de profesores españoles en los ICMEs ha de calificarse en el mejor de los casos de meramente anecdótica y los grupos internacionales afiliados a ICMI, como Psychology of Mathematics Education, History and Pedagogy of Mathematics o Women and Mathematics no han tenido miembros españoles hasta muy recientemente, si es que han llegado a tener alguno.Desde este punto de vista, la investigación española simplemente no existe, o, en todo caso, ésta es la imagen que ofrecemos a la comunidad internacional.*

Tras hacer una descripción somera de los esfuerzos individuales y aislados por hacer investigación en circunstancias adversas, mi deseo lo expresé en términos de *normalización*. Me cito de nuevo, traduciéndome:

> *mi objetivo […] es cambiar el título de este simposio, sus primeras palabras "La necesidad…" Podríamos argüir miles de razones por las que la investigación en educación matemática es necesaria. Pero no me siento inclinado a elevar una petición por ello. Lo que para mí es una necesidad real es que investigar en educación matemática llegue a ser una actividad normal en las universidades —y no sólo en ellas. Desde mi punto de vista, esto significa que exista una estructura que ponga fin a la necesidad de esfuerzos individuales y aislados. Esto significa también una creencia extendida en las universidades que permita el poder desarrollar investigación buena y mala, como es usual en cualquier otro campo de indagación. Lo subrayo: también investigación mala —o, si os asusta la palabra, investigación no tan buena.*

1995: SIGNOS DE NORMALIZACIÓN

Ésta era la situación y mis deseos de cambiarla hace tan sólo siete años y medio. Hoy, al verme ante este simposio, percibo signos de normalización; parece que puedo dar por satisfecho mi deseo o, al menos, lo que en él había de realizable —y no porque prolifere la investigación mala en didáctica de las matemáticas (o, al menos, no es eso lo que voy a usar como argumento), sino porque ya no es necesario el esfuerzo denodado de unos pocos, obstinados y extraordinarios, para que pueda hacerse. Las contribuciones de Luis Rico y de Juan Díaz Godino a este seminario[3] describen programas de investigación normalizados e institucionalizados en un programa de doctorado; pero, además, ya ha habido artículos de autores españoles en *Educational Studies in Mathematics* y *Journal for Research in Mathematics Education*, han sido citados autores españoles en publicaciones extranjeras, la presencia española en los organismos internacionales es habitual y notable, y el año próximo no sólo se celebrará el ICME en Sevilla, sino también el congreso anual de PME en Valencia.

Estos signos de normalización nos pueden permitir cambiar ahora la atención de nuestras reflexiones colectivas como comunidad de matemáticos, profesores de matemáticas y didactas de la matemática, pasando, de pensar en la constitución de un campo de actividad, a pensar en los problemas del oficio de investigar en didáctica de las matemáticas. El título que he dado a mi intervención en este seminario quiere indicar precisamente esa posibilidad —además de rendir homenaje al libro con que Hans Freudenthal combatió la llamada “matemática moderna”, *Mathematics as an Educational Task* [Las matemáticas como una tarea educativa].

EL OFICIO DE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Hablar del oficio de investigar en didáctica de las matemáticas, para que pueda conducirnos a entendernos de alguna manera, me obliga a intentar precisar qué entiendo yo por investigar, en qué conjunto de saberes creo que hay que situar la didáctica de las matemáticas y quiénes son los que, hoy por hoy, practican el oficio de investigar.

a) Para empezar, usaré “investigación” en el sentido de una indagación disciplinada con fines epistémicos —más o menos, como se usa la palabra en la pareja I+D. La disciplina de la indagación viene regulada por un conjunto de prácticas socialmente establecidas, de forma explícita o implícita, por la comunidad de investigadores y las agencias que proporcionan los fondos para la investigación, o que las evalúan: así, los *referees* de las revistas especializadas, los comités de programa de los congresos, las comisiones asesoras que conceden las subvenciones —con sus correspondientes formularios para la presentación de las investigaciones o la comunicación entre los implicados, y los modos de relación entre las personas involucradas, que, además, pueden encontrarse tanto en una posición como en otra de la red—; también, el conjunto de normas para la “evaluación de la actividad investigadora” del profesorado universitario, que conlleva la creación de la noción de “tramos de investigación”, en los que la actividad investigadora de cada persona ha de segmentarse; igualmente, los baremos de los

3. Cf. Rico (1997) y Díaz Godino (1997), en este mismo volumen.

concursos de acceso a la “condición de catedrático” y de traslado del profesorado de enseñanzas medias, etcétera.

b) El oficio de investigar en didáctica de las matemáticas, en España, lo practican profesores. No hay investigadores en el CSIC que la hagan, no existen institutos o centros de investigación dedicados a la didáctica de las matemáticas con personal fijo propio como los que conocemos en otros países —ya sean semipúblicos como el *Shell Centre for Mathematics Education* en el Reino Unido, o públicos como el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional en México.

Algunos profesores que practican este oficio tienen la obligación de hacerlo —quiero decir, la obligación establecida por su condición de funcionario—: son los profesores de universidad que están adscritos al área de conocimiento “didáctica de la matemática”. En la jerga de las siglas, los profesores de universidad somos PDI: personal docente e investigador. No hay en la universidad, estrictamente hablando, PD; sí que hay PI, pero la I está en ese caso “en formación”: me refiero al caso de los becarios de investigación —cuyo número, por otro lado, en el área “didáctica de la matemática” es próximo a cero. Los PDI adscritos al área “didáctica de la matemática”, entre los que me cuento, tenemos por la D obligaciones docentes y por la I obligaciones investigadoras en el área “didáctica de la matemática”. Los PDI adscritos a otras áreas de conocimiento tienen por su I obligación de investigar en sus áreas respectivas; si lo hacen en “didáctica de la matemática”, es por voluntad propia —ya sea por formar parte de equipos de investigación pluridisciplinares, por invadir territorios o por causas menos controladas.

Otros profesores que practican este oficio no tienen la obligación de hacerlo. Éste es el caso de los profesores no universitarios, que, por su cuenta, en grupo o junto con profesores universitarios, investigan. Aunque aún es pronto para hacer apreciaciones de carácter general, me atrevo a aventurar que gran parte de estos profesores tendrán una dedicación eventual al oficio —sobre todo, a la vista de la valoración que tiene para su desarrollo profesional desde las instituciones que participan en el establecimiento de las formas de valoración de la profesión (administración educativa, sindicatos, asociaciones profesionales, etcétera).

Aunque he subrayado que los que practican este oficio de investigar son profesores, no quisiera que eso os hiciera pensar que estoy defendiendo que el profesor, en el ejercicio de su acción docente, esté realizando una investigación. Bien al contrario, a mi entender, la función profesor y la función investigador, aun cuando puedan ser asumidas por la misma persona, incluso en ocasiones en una misma situación, son funciones distintas, con ritmos y fines distintos, que no pueden sino entrar en conflicto.

En un número reciente de *Journal for Research in Mathematics Education*, Silver y Kilpatrick, para conmemorar el vigésimoquinto aniversario de la revista, realizaron una encuesta entre profesores con el fin de caracterizar de esa manera la naturaleza de la investigación en educación matemática. Dos de las respuestas a su encuesta merecen ser traídas a colación para lo que estoy arguyendo:

> *Es una especie de "salir de uno mismo". Puedes distanciarte de ti mismo. De modo que puedes a la vez verlo porque eres parte del dominio, pero estás investigando y mirándolo desde fuera.*
> *La investigación es un tipo de actividad distinta de la enseñanza. Es como si dieras un paso atrás para verlo. Es analítico. Es reflexivo. Es esencialmente hacer preguntas, más que actuar en tiempo real*[4].

INVESTIGACIÓN/DOCENCIA NO ES TEORÍA/PRÁCTICA

Si he intentado mostrar que oponer profesores a investigadores es simplista cuanto menos y confundir profesores con investigadores hace un flaco favor a la calidad del oficio de unos y otros, ahora le toca el turno a otra oposición y otra confusión, que suelen acompañar los discursos en que se fundamentan tales afirmaciones: la oposición teoría/práctica y su identificación con la oposición investigación/docencia.

Sin más preámbulos: mi tesis es que la oposición investigación/docencia no es una forma de la clásica oposición teoría/práctica. La investigación no es la teoría de la docencia, que sería "la práctica". Hay una teoría y una práctica del oficio de investigar, como hay una teoría y una práctica del oficio de enseñar.

Ahora bien, si me niego a esta identificación confusa entre dos funciones distintas, entre dos dominios de experiencia distintos, no voy por ello a concluir que la investigación en didáctica de las matemáticas no tiene nada que ver con la docencia: la docencia de las matemáticas que nos interesa se realiza en el sistema escolar y la didáctica de las matemáticas estudia los fenómenos que se producen cuando se enseñan matemáticas en los sistemas escolares, y de ahí se derivan múltiples relaciones, pero relaciones que no han de ser pensadas con el par teoría/práctica, sino con el par objeto de conocimiento/conocimiento elaborado sobre el objeto. Pensadas las relaciones de esta manera, tampoco cabe ya pensar la "aplicación" o el uso del conjunto de productos de la práctica investigadora (teorías, preguntas, problemática, programas de investigación, metodologías, datos empíricos observados, resultados) en la práctica docente en términos de teoría/práctica: los productos de la investigación no deberán ser concebidos nunca como una guía para la acción en la práctica docente —y quien, desde la práctica docente, esté pidiendo esto, actúa sobre la base de un malenten-

4. Silver & Kilpatrick (1994) pág. 735.

dido o por desconocimiento; quien, desde la práctica de la investigación, lo esté prometiendo, lo hace por desconocimiento, o de mala fe (en este último caso, probablemente para obtener fondos con más facilidad).

LAS REGLAS DE LA PRÁCTICA DE LA INVESTIGACIÓN SON HISTÓRICAS

Freudenthal escribió un artículo en 1982 con el título *Fiabilité, validité et pertinence – critères de la recherche sur l'enseignement de la mathématique*. En él, arremetía contra los criterios al uso dentro de lo que en Estados Unidos se ha conocido tradicionalmente con el nombre de *Educational Research* —un tipo de investigación educativa, dominante en ese país durante décadas, que buscaba sus patrones de cientificidad en lo que a mi compañero Fernando Cerdán le gusta llamar el "paradigma agrícola".

Alan Schoenfeld, en un artículo reciente[5], describe este paradigma precisamente en términos "agrícolas":

> *Si, por ejemplo, dos campos de maíz se sometieran a tratamientos casi idénticos y hubiera una diferencia significativa en cosecha entre ellos, esa diferencia podría atribuirse presumiblemente a la diferencia de tratamiento.*

La operación es directa y sencilla: substitúyase los dos campos por dos aulas; el maíz, por los alumnos; los tratamientos, por dos modos de enseñar; la cosecha, por los resultados obtenidos en sendos tests, y las conclusiones están servidas.

Freudenthal puso de relieve, en el artículo que he mencionado, cómo bajo la égida del paradigma agrícola la *fiabilidad* de los tests se convirtió en el criterio dominante de la calidad de la investigación, con lo que sólo se ponía el énfasis en garantizar que lo que se medía estaba bien medido, pero no que se midiera realmente lo que se pretendía medir —es decir, la *validez* de la investigación—, ni, aún menos, que lo que se pretendía medir valiera la pena de ser medido por algún fin epistémico o práctico —es decir, la *pertinencia* de la investigación.

Un conjunto más amplio de criterios para juzgar la investigación, cuya procedencia de la época dominada por el paradigma agrícola aún se deja sentir en los propios nombres de los criterios, es el que trataron Kilpatrick y Sierpinska en sendas comunicaciones presentadas al simposio celebrado en la universidad de Roskilde *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*[6]. Esos criterios son pertinencia, validez,

5. *A Discourse on Methods* (Schoenfeld, 1994), escrito también para conmemorar el aniversario de *JRME*.

objetividad, originalidad, rigor y precisión, capacidad de predicción, reproductibilidad y relación con las matemáticas y su enseñanza. No voy a entrar en el examen de ellos, ni en la reinterpretación que hay que hacer del significado que tenían originalmente, ya que el propio Kilpatrick se ha encargado de ello en este seminario[7]; para el argumento que yo estoy desarrollando, es decir, el carácter histórico de las reglas de la práctica de la investigación, basta con observar que en esa lista ya no está la *fiabilidad* y que ha sido preciso dotar de un sentido nuevo a esos términos para usarlos. También Lester, al contestar a la pregunta "¿Qué es la investigación y cuáles son sus resultados?", lanzada por ICMI como tema de uno de sus estudios, desde su puesto de director del *Journal for Research in Mathematics Education*, subrayó los cambios producidos en las últimas décadas presentando datos del porcentaje de trabajos presentados y publicados en esa revista que usaban datos cuantitativos frente a los que usaban métodos cualitativos o una mezcla de unos y otros e introdujo, junto a criterios similares a los que he señalado, otros de carácter bastante distinto[8], como el reconocimiento de las asunciones personales del investigador, las consideraciones éticas (respecto de los alumnos, los profesores y de los colegas), la independencia del informe de la investigación de la elocuencia del investigador o la apertura de la investigación al escrutinio por parte de otros miembros de la comunidad investigadora[9].

La caída del paradigma agrícola que fue produciéndose a lo largo de la segunda mitad de la década de los años ochenta, para desplomarse en la década en la que estamos, ha dado paso a lo que Schoenfeld (1994) ha llamado *Breaking free*, y ha derivado, según él, en un cierto eclecticismo y una proliferación de métodos de investigación[10]. Por ello, concluye el artículo, cuyo título es precisamente *A Discourse on Methods*, con una lista de preguntas metodológicas, de las que entresaco tres, que reformulo a mi manera:

---

6. Este simposio es el sexto de una serie dentro del proyecto *Mathematics Teaching and Democracy*, desarrollado en Dinamarca, y el primero cuyas actas se publican en inglés [Nissen & Blomhøj, eds. 1993].
7. La contribución de Jeremy Kilpatrick a este seminario es de hecho una reelaboración castellana de la que hizo a ese simposio celebrado en Roskilde. Ver Kilpatrick (1995), en este volumen.
8. Cf. Lester (1994), cuyo título, *Evolving Criteria for Judging the Quality of Research Reports in Mathematics Education*, ya es de por sí significativo.
9. Un contrapunto necesario a la enumeración de una tal cantidad de criterios de calidad, para no perder de vista que las investigaciones y los artículos en que se pretende dar cuenta de ellas están hechos por humanos, lo constituye el párrafo final del artículo escrito por el director de la revista *Educational Studies in Mathematics*, Willibald Dörfler, para el simposio *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*: "¡Al ojear los requisitos tal y como los he planteado, me he dado cuenta de que este manuscrito mío no los cumpliría, así que prefiero parar en seco y prometer no enviarlo a ningún sitio para su publicación!" (Dörfler, 1993, pág. 87).

¿Qué se aporta como prueba de una afirmación – respecto a la teoría en particular con que se da cuenta de los datos empíricos?

Cuando el informe de la investigación concluye con una narración, un relato de lo que se aporta como prueba de las afirmaciones —en vez de con la presentación tersa de resultados estadísticos—, ¿cómo se falsan esas afirmaciones? ¿Son falsables esas afirmaciones?

Ahora bien, reformulada de esta manera[11], he deslizado la pregunta por la falsación hacia un terreno en que carece de sentido. Para explicar esto, es preciso que ponga en claro que la didáctica de las matemáticas forma parte de la serie de saberes que se ha dado en llamar "ciencias humanas".

LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS COMO CIENCIA HUMANA

En las conferencias que Hans Freudenthal dio en China, publicadas póstumamente con el título *Revisiting Mathematics Education*, afirmó que no hay criterio de verdad en la didáctica de las matemáticas, como en ninguna de las ciencias humanas, a diferencia de lo que sí sucede en las matemáticas[12]. Sin entrar a discutir el estatuto de la verdad en las matemáticas[13], Freudenthal, aun señalando una diferencia, obvia por demás, entre el asunto en cuestión para dos disciplinas de naturaleza tan distinta, parece recaer en las concepciones cientifistas cuyo modelo de verdad se restringe a las ciencias "duras". En todo caso, Freudenthal ignora o no parece prestar atención a que, si la didáctica de las matemáticas es una de las ciencias humanas, hay que medirla con respecto a ellas.

El régimen de la verdad en las ciencias humanas ha sido uno de los objetos de análisis de Michel Foucault, ya desde el libro que le hizo popu-

10. Schoenfeld resume la situación y traza el plan de trabajo futuro que se deriva de él con estas palabras: "Como dominio, estamos en el momento preciso de alcanzar el punto en que podemos reconocer productivamente la complejidad de algunos de los fenómenos que deseamos explicar. Pero no tenemos métodos estándar con los que realizar la explicación. De hecho, una gran parte de nuestro trabajo a lo largo del segundo cuarto de siglo de *JRME* será el trabajo de crear tales métodos estándar." (Schoenfeld, 1994, pág. 708).

11. Las preguntas de Schoenfeld a partir de las que he elaborado las mías son las siguientes: "[…] 2. In any given theoretical frame, what constitutes "evidence" for a claim? […] 5. Do claims need to be falsifiable? 6. What constitutes falsifiability in, say, interpretative research? […]" (Schoenfeld, 1994, pág. 709). Mi reformulación no sólo se toma libertades con el texto original, sino que lleva las preguntas a otro terreno: Schoenfeld, como está haciendo historia de la revista *JRME* en un número de conmemoración de su veinticinco aniversario, constata y prescribe, da cuenta del trabajo de una comunidad y pretende fijar de forma explícita las normas de conducta que han de regir su actividad futura; mi ambición no es ésta, sino la de iniciar la crítica de la disciplina, esto es, el establecimiento de los límites de la indagación en la didáctica de las matemáticas, y dar paso así a una perspectiva de trabajo que no repita pretensiones totalizadoras, omniexplicativas.

12. Cf. Freudenthal (1991), pág. 148.

lar, *Las palabras y las cosas*, cuyo subtítulo era *Una arqueología de las ciencias humanas*[14]. A mi entender, las discusiones que queramos plantear sobre qué pueda ser la investigación en didáctica de las matemáticas, cuáles puedan ser sus efectos o qué criterios puedan usarse para establecer su calidad o su pertinencia, no pueden eludir el fundamento que constituyen para ellas los resultados de los análisis de Foucault. Describiré de forma somera lo que me interesa de ellos para mi argumentación[15].

La atención de Foucault se centra en el análisis de cómo se constituyen históricamente las reglas de las ciencias humanas que hacen posible la división entre proposiciones verdaderas y proposiciones falsas, en el interior de sus discursos. Esas reglas, que no son verdaderas ni falsas, tienen voluntad de verdad, pretenden hacer que un discurso entre en un campo de conocimiento y de verdad. Para que un acto de conocimiento pueda darse, es preciso un sujeto sometido a las condiciones que lo legitiman como sujeto de conocimiento y un objeto que se determina como objeto de conocimiento: las reglas son precisamente las condiciones de posibilidad de un sujeto que puede decir proposiciones susceptibles de verdad o falsedad y de un objeto del que se pueden decir tales proposiciones. Foucault llama a esas reglas que constituyen el sujeto y el objeto de conocimiento un *juego de verdad* y cada juego de verdad es el producto de unas prácticas discursivas y no discursivas —lo que Foucault llama un *dispositivo*.

El sistema escolar, tomado en su conjunto, es un tal dispositivo[16] y las prácticas discursivas y no discursivas son las responsables de constituir a un niño o una niña en alumno o alumna, objetos del discurso de la escuela,

13. Quiero decir que en este texto sólo voy a discutir la negación de Freudenthal de la existencia de criterios de verdad en las ciencias humanas. Ahora bien, así como en lo que sigue voy a rechazar esa negación de Freudenthal afirmando que por supuesto que los hay e indicando que de lo que se trata es de caracterizar cómo se establece el régimen de verdad en las ciencias humanas, también rechazo, aunque no lo argumente aquí, la afirmación simétrica que Freudenthal hace de que no quepa la menor duda de que en las matemáticas hay criterios de verdad. Por supuesto que en las matemáticas *también* los hay, pero *también* en el caso de las matemáticas lo que interesa es caracterizar cómo se establece el régimen de la verdad. Esta pérdida de singularidad de las matemáticas ha sido posible, entre otras cosas, por la aparición de epistemologías que ven el conocimiento matemático como falible y casi-empírico, con la consecuencia, como ha escrito Paul Ernest, de "que las matemáticas no están selladas herméticamente y separadas de otras áreas del conocimiento y la actividad humanos" (Ernest, 1994, pág. 7). Brian Rotman, argumenta que lo que en su modelo semiótico de la actividad matemática llama el metaCódigo —es decir, la "colección de instrumentos discursivos y semióticos heterogénea y divergente" que dan cuenta de la "masa de actividades de significación y comunicación que en la práctica acompañan el primer modo [formal y riguroso] de presentar las matemáticas" (Rotman, 1993, pág. 69)— es ineludible, ya que no se puede prescindir de él si se quiere garantizar que los textos matemáticos tengan la capacidad de persuadir. Rotman va aún más lejos al afirmar que esto tiene como consecuencia el que los textos matemáticos se abran a todas las operaciones de significación y a la actividad crítica que ya es usual aceptar en los textos producidos en el dominio de las ciencias humanas (cf. Rotman, 1994, pág. 81). En mi texto *Semiótica y matemáticas*, señalo brevemente cuál es mi punto de vista al respecto (cf. Puig, 1994, pág. 10).

y a un adulto o una adulta en profesor o profesora, es decir, en sujetos que pueden decir proposiciones susceptibles de verdad o falsedad sobre los alumnos[17]. Las prácticas discursivas y no discursivas de la didáctica de las matemáticas —entendida como tarea investigadora— también constituyen sujetos y objetos de conocimiento.

Poner de relieve el carácter histórico del régimen de verdad, mostrar que es el producto de una voluntad de verdad, no supone negar que haya criterios de verdad como hace Freudenthal, sino hacer patente que son el resultado de un juego de verdad, un conjunto de prácticas como las que he expuesto para la didáctica de las matemáticas.

La verdad científica se ha presentado a sí misma como algo a lo que hay que someterse porque es verdadero, pero para ello ha tenido que ocultar la producción del mecanismo de sometimiento. Desvelar este ocultamiento hace que la resistencia a someterse no haya de adoptar la forma de la "pérdida de certidumbre"[18] de los enunciados producidos, sino de la pérdida de la necesidad de sometimiento. Los enunciados verdaderos sólo son falsables con respecto al mismo juego de verdad que los ha producido, pero nada impide que junto a los relatos que elaboramos en las ciencias humanas puedan competir otros relatos con pretensión de verdad.

---

14. En realidad, sólo cuando se recorre el conjunto de la obra de Foucault y se lee este texto de 1966 con la perspectiva que dan los que le siguieron, esto es, sólo cuando se entiende la arqueología como un momento del análisis foucaultiano al que se añaden la genealogía y la pragmática de sí —en un "emboîtement progressif", como dice Maite Larrauri (1992)—, puede decirse que en *Las palabras y las cosas* hay ya un análisis del régimen de verdad de las ciencias humanas.

15. Sigo la elaboración de Larrauri (1994).

16. En *Vigilar y Castigar. Nacimiento de la cárcel*, Foucault dedica buena parte de los capítulos titulados *Los cuerpos dóciles* y *Los medios del recto adiestramiento* a exponer y analizar el dispositivo escolar a lo largo del siglo XVIII —aunque no es ése su objeto de estudio— como otro ejemplo de constitución de una institución disciplinaria. Un análisis foucaultiano del sistema escolar está, sin embargo, por hacer. Algo de ello puede encontrarse en Ball, ed. (1990), en particular en el trabajo *Foucault bajo examen* (Hoskin, 1990). En España, Julia Valera y Fernando Álvarez Uría llevan ya años realizando trabajos cuya inspiración foucaultiana se muestra desde el propio título, *Arqueología de la escuela*, con que los han recopilado. Foucault volvió a traer a colación de nuevo la institución escolar como ejemplo al analizar, en trabajos posteriores, cómo toda relación de comunicación se da conjuntamente con una relación de poder, formando un bloque: "Sea, por ejemplo, una institución escolar: su distribución espacial, la meticulosa reglamentación que regula su vida interna, las diferentes actividades que se organizan en ella, los diversos personajes que viven en ella o que se encuentran en ella unos con otros, cada uno con su función, su lugar, su cara bien definidos; todo esto constituye un "bloque" de capacidad-comunicación-poder. [...] La actividad que asegura el aprendizaje y la adquisición de las aptitudes o de los tipos de comportamiento se desarrolla en ella a través de todo un conjunto de comunicaciones regladas (lecciones, preguntas y respuestas, órdenes, exhortaciones, signos codificados de obediencia, marcas diferenciales del "valor" de cada uno y de los niveles de saber) y a través de toda una serie de procedimientos de poder (encierro, vigilancia, recompensa y castigo, jerarquía piramidal)." [Foucault, 1994, págs. 234-235]

EFECTOS DE LA INVESTIGACIÓN

¿Qué puede esperarse entonces desde la docencia de los productos de la investigación? Sin un análisis como el que yo acabo de hacer, Jeremy Kilpatrick ya hablaba hace años de la razonable falta de eficacia de la investigación en educación matemática y escribió un artículo con ese título[19] en el que afirmaba que no había que alarmarse demasiado porque 1) gran parte de la falta de eficacia es más percibida que real y 2) la mayor parte de la ineficacia es razonable.

Ya he dicho que los productos de la investigación no son sólo los “resultados”, sino teorías, preguntas, problemática, programas de investigación, metodologías, datos empíricos observados y, también, resultados. De todo esto puede, a lo mejor, hacerse uso[20], pero lo que he querido poner de relieve es que la investigación genera además un discurso que tiene efectos sobre el conjunto del sistema escolar, y la eficacia de un discurso es su capacidad para ordenar nuevas prácticas en las que se insertan sujetos diferentes, se crean nuevas subjetividades[21]. Ésa es la eficacia que yo desearía que esperáramos de nuestro trabajo docente e investigador, práctico y teórico.

---

17. Como dice Valerie Walkerdine en *The Mastery of Reason,* las prácticas escolares “producen y leen a los niños como ‘el niño’. [...] Lo que afirmo es que ‘el niño’ es un objeto de los discursos pedagógico y psicológico. ‘El niño’ no existe y, sin embargo, se prueba su existencia real en las aulas y en los laboratorios todos los días y a todo lo largo del mundo.” (Walkerdine, 1988, págs. 204 y 202). Walkerdine reconoce la estirpe foucaultiana de sus análisis en la introducción de este mismo libro: “El trabajo postestructuralista de Foucault nos permite ocuparnos de la producción de sistemas de signos, pero no como sistemas universales, transhistóricos, sino como cuerpos de conocimiento específicos, generados históricamente. [...] Para mí, la importancia de su obra reside en la manera en que las prácticas sociales actuales pueden ser reguladas discursivamente por la producción de “verdades”, “conocimientos” sobre los niños, por ejemplo, que pretenden decir la verdad sobre el desarrollo de los niños. Estas verdades producen la posibilidad de ciertos comportamientos y, luego, los leen como “verdaderos”, creando una visión normalizada del “niño natural”.” (pág. 5)

18. Uso esta expresión para aludir al libro de Morris Kline *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. En él, Morris Kline desarrolla una crítica a esa idea de certeza absoluta atribuida comúnmente a las matemáticas, que se ha hecho popular. A mi entender, Morris Kline no ataca la raíz del asunto, ya que no deja de mantener que a la verdad hay que someterse, lo que nos salva, según él, es que, gracias a desarrollos recientes, pueden aducirse razones para que los enunciados matemáticos dejen de verse como “verdaderos” —de ahí que el acontecimiento se sienta como una “pérdida”. La crítica que se deriva de las posiciones foucaultianas es más radical porque lo que se pone en cuestión es la necesidad de someterse a la verdad; además, tiene consecuencias distintas, ya que no importa seguir calificando los enunciados matemáticos como “verdades” —son, de hecho, verdades, al ser los enunciados cuya aparición hace posible un juego de verdad—, pero ante una verdad cabe siempre levantar un nuevo juego de verdad que constituya el campo de posibilidad de otras verdades.

19. Kilpatrick (1981).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, S. J. (Ed.). (1990). *Foucault and Education. Disciplines and Knowledge*. London: Routledge.

Díaz, J. (1997). Relaciones entre la investigación en Didáctica de las Matemáticas y la práctica de la enseñanza. En este volumen.

Dörfler, W. (1993). Quality Criteria for Journals in the Field of Didactics of Mathematics. En G. Nissen & M. Blomhøj (Eds.), pp. 75-88.

Ernest, P. (1994). In response to Professor Zheng. *Philosophy of Mathematics Education Newsletter, 7,* 6-10.

Foucault, M. (1966). *Les mots et les choses. Une archéologie des sciences humaines*. Paris: Gallimard.

Foucault, M. (1975). *Surveiller et punir. Naissance de la prison*. Paris: Gallimard.

Foucault, M. (1994). Le sujet et le pouvoir, en *Dits et Écrits, 1954-1988*. Édition établie sous la direction de Daniel Defert et François Ewald. Tome IV. Paris: Éd. du Seuil, pp. 222-243. [Aparecido originalmente en inglés en Dreyfus, R. & Rabinow, P. *Michel Foucault: Beyond Structuralism and Hermeneutics*, Chicago: The University of Chicago Press, 1982, pp. 208-226.]

Freudenthal, H. (1982). Fiabilité, validité et pertinence – critères de la recherche sur l'enseignement de la mathématique. *Educational Studies in Mathematics, 13,* 395-408.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Hoskin, K. (1990). Foucault under examination: the crypto-educationalist unmasked. En S. J. Ball (Ed.), pp. 29-53.

Kilpatrick, J. (1981). The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 2,* 22–28.

Kilpatrick, J. (1993). Beyond Face Value: Assessing Research in Mathematics Education. En G. Nissen & M. Blomhøj (Eds.), pp. 15-34. [Traducción castellana, Valoración de la investigación en didáctica de la matemática: más allá del valor aparente. En este volumen.]

20. Con las debidas precauciones: tenemos demasiados ejemplos de los efectos devastadores de confundir lo que son buenos instrumentos para la investigación con situaciones didácticas (las "tareas piagetianas", por ejemplo) o de confundir lo que son buenos instrumentos para el análisis de la actuación de los alumnos con los elementos de un modelo de competencia de un dominio a partir del cual se fundamenta la decisión curricular sobre qué hay que enseñar en ese dominio (la clasificación de Kücheman de los usos de las letras, por ejemplo).

21. Sin afirmar clara y rotundamente esta posibilidad, la posición que, siguiendo a Foucault, he mantenido en este texto podría malinterpretarse tres veces: en el terreno de la epistemología y en el de la ética, creyendo que mantengo que "todo vale"; en el terreno de la política, creyendo que de lo que digo se sigue que "nada puede ser cambiado".

Kline, M. (1980). *Mathematics The Loss of Certainty.* New York: Oxford University Press.

Larrauri, M. (1992). La performativité linguistique au sein des expériences de la pensée. Talk given at the European University Institute in the context of a seminar on. *Theories of Power and Modernity*, Fiesole, 4 May 1992. Manuscrito.

Larrauri, M. (1994). Vérité et mensonge des jeux de vérité. *Rue Descartes, 11,* 32-49.

Lester, F. K., Jr. (1994). Evolving Criteria for Judging the Quality of Research Reports in Mathematics Education. Paper prepared for the ICMI conference "What Is Research in Mathematics Education and What Are Its Results". College Park, MD.

Nissen, G. & Blomhøj, M. (Eds.). (1993). *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde, Denmark: Roskilde University, IMFUFA.

Puig, L. (1987). The state of research on mathematical education in Spanish universities. *Symposium The need for research on mathematical education* (Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales). Madrid, 19-21 octubre, 1987. Manuscrito.

Puig, L. (1994). *Semiótica y matemáticas*. Valencia: Episteme/Eutopías.

Rico, L. (1997). Formación de Investigadores en Educación Matemática: el Programa de Doctorado de la Universidad de Granada. En este volumen.

Rotman, B. (1993). *Ad Infinitum… The Ghost in Turing's Machine*. Stanford, CA: Stanford University Press.

Rotman, B. (1994). Mathematical Writing, Thinking, and Virtual Reality. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*. London: The Falmer Press.

Schoenfeld, A. (1994). A Discourse on Methods. *Journal for Research in Mathematics Education, 25,* 697-710.

Sierpinska, A. (1993). Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics. En G. Nissen & M. Blomhøj, (Eds.), pp. 35-74.

Silver, E. A. & Kilpatrick, J. (1994). E Pluribus Unum: Challenges of Diversity in the Future of Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education, 25,* 734-754.

Valera, J. y Álvarez Uría, F. (1991). *Arqueología de la escuela.* Madrid: Las Ediciones de la Piqueta.

Walkerdine, V. (1988). *The Mastery of Reason*. London: Routledge.

RELACIONES ENTRE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA PRÁCTICA DE LA ENSEÑANZA[1]

JUAN D. GODINO
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

CONCEPCIONES SOBRE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y TIPOS DE INVESTIGACIONES

El carácter reciente del campo de investigación de la Didáctica de las Matemáticas, y el hecho de que los fenómenos que estudia sean también de interés para otras ciencias y tecnologías, hace que se puedan distinguir diversas concepciones sobre la naturaleza epistemológica de la misma. Estas concepciones cubren un espectro que va desde aquellas que la reducen a un mero apéndice técnico de las Ciencias de la Educación, hasta las que ven en la Didáctica una disciplina científica específica, pasando por la concepción pluridisciplinar (que es tradicional y dominante) que la considera como una "ciencia aplicada". Según esta última concepción, los principios teóricos generales del área vienen dados por otras ciencias básicas, especialmente la Psicología, Pedagogía, Sociología, Epistemología…, y la Didáctica especial de las Matemáticas debe aplicar estos principios al caso particular de las nociones y destrezas matemáticas.

Como analizamos más detenidamente en Godino (1991 y 1993), la concepción matemática o fundamental de la Didáctica, defendida por autores como Brousseau (1988), Chevallard (1992), etc., se revela contra el reduccionismo de la concepción pluridisciplinar, apoyándose en un punto esencial: las teorías psico-pedagógicas, como el conductismo, constructivismo, teorías del desarrollo, etc, aplicadas a la enseñanza-aprendizaje de contenidos específicos son insuficientes. El papel desempeñado por el saber que se quiere transmitir es fundamental. Por tanto, es preciso tratar de construir teorías de carácter fundamental específicas del contenido, que expliquen el funcionamiento del sistema desde la perspectiva del saber puesto en juego.

Nosotros compartimos en lo esencial la concepción de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica autónoma. Consideramos, también, que la conexión teoría-práctica, y el cambio social que en última instancia reclaman los conocimientos obtenidos por la investigación teórica,

1.Trabajo realizado en el marco del Proyecto PS93-0196 (DGICIYT, M.E.C., Madrid)

precisa, no sólo el desarrollo de una *tecnología* específica, sino también la creación de una “interface” que puede estar constituida por la *reflexión sobre la acción*, realizada por los propios profesores y por equipos mixtos entre investigadores y profesores.

En este trabajo vamos a estudiar esta problemática, reflexionando sobre nuestras propias investigaciones y propondremos una perspectiva integradora de las distintas concepciones sobre la Didáctica. Teniendo en cuenta la complejidad del sistema global de la enseñanza de las matemáticas, que, como afirma Steiner (1985), admite la descomposición en Teoría, Desarrollo y Práctica, pensamos que la optimización de su funcionamiento requiere el esfuerzo conjunto de las distintas perspectivas de investigación.

Como hipótesis de partida para nuestro análisis y reflexión consideramos que la Educación Matemática es un sistema social heterogéno y complejo en el que es necesario distinguir al menos tres componentes o campos:

a. La acción práctica reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, realizados principalmente en instituciones escolares.

b. La investigación científica, que trata de comprender el funcionamiento de los sistemas didácticos y, en cierta medida, predecir su comportamiento.

c. La tecnología didáctica que se propone poner a punto materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles, para mejorar la eficacia de la instrucción matemática.

Estos tres campos se interesan por un mismo objeto —el funcionamiento de los sistemas didácticos—, e incluso tienen una finalidad última común: la mejora de la Educación Matemática. Pero la perspectiva temporal, los objetivos, los recursos disponibles, sus reglas de funcionamiento y las restricciones a que están sometidos, son intrínsecamente distintos. El mundo de la acción práctica es el territorio propio del profesor (el enseñante), el cual tiene a su cargo uno o varios grupos de estudiantes a los cuales trata de enseñar matemáticas. Como se afirma en las conclusiones del Grupo temático 5 *The practice of teaching and research in didactics* del ICME 6, “el primer objetivo de un profesor es mejorar el aprendizaje de sus alumnos, de modo que estará principalmente interesado en la información que pueda producir un efecto inmediato sobre su enseñanza” (pág. 264).

El campo de la investigación científica (básica y descriptiva) se compromete de modo particular en la elaboración de teorías y suele estar a cargo de profesores universitarios, los cuales, aunque también pueden tener asignada la enseñanza de una materia (matemáticas, didáctica…), dedican un porcentaje importante de su tiempo a “investigar” sobre cuestiones relacionadas con la Educación Matemática, en alguno de sus niveles y aspectos.

Finalmente, el tercer componente, que hemos denominado tecnológico (o investigación aplicada) es prescriptivo, ya que está más comprometido con la elaboración de dispositivos para la acción y es el "territorio" propio de los diseñadores de currículos, los escritores de manuales escolares, materiales didácticos, etc.

Los componentes b) y c) —ciencia y tecnología didáctica— son los constituyentes de la disciplina Didáctica de las Matemáticas, mientras que la Educación Matemática abarcaría también la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, esto es, sería el sistema interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica. defendemos la posición en la cual la Didáctica de la Matemática se considera como una actividad tecno-científica en la que caben distinguir los siguientes contextos:

- invención-descubrimiento de nuevos conocimientos y formas de acción;
- justificación-validación de los mismos;
- aplicación a la mejora de una parcela de la realidad;
- formación de profesores de matemáticas.

La distinción que hacemos entre Didáctica de las Matemáticas y Educación Matemática no es habitual, ya que con frecuencia se consideran expresiones sinónimas. Pensamos, no obstante, que esta diferenciación facilita el análisis de las relaciones entre los tres componentes descritos. En nuestra opinión estos tres componentes no deben funcionar independientemente unos de otros, ni existe una distinción jerárquica entre los mismos. Por el contrario, debe haber cooperación y diálogo entre los tres ámbitos, como se pone de manifiesto en la existencia de un congreso específico *Systematic Cooperation between theory and practice in Mathematics Education*, del cual se han celebrado ya cinco reuniones. Del mismo modo, Kilpatrick (1981), analizando la distinción entre investigación básica y aplicada, afirma que "ambas se solapan sustancialmente, cada una contribuye a la otra, y las cuestiones de investigación significativas son tanto básicas como aplicadas" (pág. 22).

Consideramos que es necesario distinguir los rasgos característicos y las funciones de cada ámbito, para poder analizar el sistema del que forman parte. Si no se reconocen las diferencias existentes entre estos componentes, no se comprenderá el funcionamiento de todo el sistema de la Educación Matemática. El mundo de la práctica necesita soluciones inmediatas que, en el momento actual, difícilmente puede ofrecer la investigación científica. La complejidad de los problemas educativos podría equipararse, en general, a la de otros campos de la actividad humana con mayor tradición, para los cuales no existen aun soluciones a todos los problemas (por ejemplo, la economía o la medicina…). En consecuencia, la tecnología didáctica tiene que operar en muchas ocasiones basándose en el buen parecer, la experiencia, el sentido común de sus actores.

META-ANÁLISIS CUALITATIVO DE TRES INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS

En este trabajo vamos a analizar esta problemática de las relaciones entre teoría, práctica y tecnología, utilizando como ejemplos tres investigaciones que hemos realizado en el contexto académico-universitario. Nuestra actuación como directores de tesis doctorales en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, como escritores de "ensayos didácticos" y propuestas curriculares para la formación de profesores y nuestra propia actividad docente en matemáticas y su didáctica nos ofrece una buena posición para intentar analizar las relaciones entre los tres campos descritos de la Educación Matemática.

Las investigaciones que describiremos se han centrado en los siguientes temas:

1) Uso de ordenadores en la enseñanza de la Estadística.
2) Enseñanza de la Combinatoria en Bachillerato.
3) Ontología y epistemología de las matemáticas.

Las dos primeras se refieren a áreas problemáticas particulares asumidas por dos estudiantes de doctorado que han alcanzado el grado de doctor en Matemáticas (programa de doctorado de Didáctica de las Matemáticas) como consecuencia de la investigación realizada.

La tercera ha sido realizada por nosotros mismos, como consecuencia de los estudios y reflexiones que hemos realizado al asumir una parte de la formación teórica de los doctorados en cursos sobre Teoría de la Educación Matemática y la dirección de tesis doctorales. Tiene un carácter esencialmente teórico y en ella se elabora una teoría pragmática y relativista del significado de los objetos matemáticos. El objetivo del estudio conjunto de estos ejemplos es poner de manifiesto la dialéctica existente entre teoría, práctica y tecnología en Educación Matemática.

Uso de ordenadores en la enseñanza de la Estadística

En el trabajo desarrollado en el área de la enseñanza de la Estadística podemos distinguir claramente los tres componentes o ámbitos descritos de la Educación Matemática: práctica reflexiva, innovación tecnológica e investigación científica.

Este proyecto se inició como consecuencia de mi condición de profesor de Didáctica de las Matemáticas para profesores de EGB, que propició un interés especial por los propios métodos de enseñanza de los contenidos matemáticos que debía impartir. Particularmente, en un curso cuatrimestral de Estadística Descriptiva parecía inevitable preguntarse por el tipo de problemas que debía proponer a mis estudiantes, que fueran de su interés y sirvieran para que comprendieran el sentido de los conceptos y métodos estadísticos. Este trabajo fue reflejado en una comunicación presentada en el "Primer Encuentro Nacional de Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB" (Godino, 1981), motivo por el cual le calificamos como práctica reflexiva, al traspasar el ámbito puramente individual.

Posteriormente, la posibilidad de utilizar algunos ordenadores me impulsó a realizar unos primeros cambios en los contenidos y en el método de enseñanza de esta materia. El tratamiento de colecciones de datos procedentes de problemas realistas y el uso de los ordenadores por los propios estudiantes parecía posible y necesario.

La constitución de un pequeño grupo con los profesores Batanero y Estepa y la consecución de una subvención en el denominado Concurso de Ideas para la realización de clases prácticas (convocado por la MEC) supuso una nueva etapa en el desarrollo de la investigación en el área problemática de la enseñanza de la estadística. En ella se puso a punto un "paquete de programas" estadísticos (PRODEST), caracterizado por un diseño que calificamos de didáctico, y complementado con dos tipos de materiales escritos: una guía descriptiva del paquete, junto con una colección de actividades prácticas para el laboratorio de estadística, y un texto-apuntes denominados *Curso de estadística basada en el uso de ordenadores*. (Batanero, Godino y Estepa, 1987; Batanero, Godino y Estepa, 1988a y 1988b).

Tanto el paquete de programas como el texto fueron experimentados "informalmente" en el curso 1986-87.

Fruto de estas experiencias fue la toma de conciencia de que la interacción de los estudiantes con el ordenador resolviendo problemas de análisis de datos plantea nuevas dificultades y cuestiones que era preciso estudiar. Algunas de estas dificultades se refieren al uso del propio entorno operativo, otras son de naturaleza cognitiva. ¿Cómo cambian los contenidos a enseñar, en función de las nuevas tecnologías? ¿Cuáles de estos conceptos y métodos estadísticos aprenden los estudiantes con la nueva metodología? ¿Qué dificultades y obstáculos persisten? ¿Cuál debe ser el papel del profesor y de la interacción social en las clases de Estadística?…

Estas nuevas cuestiones son abordadas a partir de 1988 bajo un proyecto de investigación titulado "Los ordenadores en el currículo de matemáticas", subvencionado por la DGICYT (MEC, Madrid) y en el contexto institucional académico de la realización de una tesis doctoral por A. Estepa. A continuación analizamos los resultados de esta tesis, que ha sido defendida en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Estepa, 1993), desde el punto de vista de sus aportaciones teóricas, tecnológicas y prácticas. También veremos cómo las nuevas circunstancias institucionales condicionaron la evolución de la problemática inicial, hasta llegar a la definición final del problema abordado en la tesis y al diseño metodologico.

Como se ha mencionado, el área problemática inicial de esta investigación fue la indagación de las consecuencias educativas del uso de ordenadores en la enseñanza-aprendizaje de nociones estadísticas elementales, y la determinación de los factores determinantes de las mismas. ¿Qué Estadística (descriptiva) se debería enseñar y cómo, cuando los estudiantes pueden usar un paquete de programas estadísticos? ¿Cómo evolucionan las concepciones de los estudiantes sobre los contenidos enseñados?

La investigación precisó el diseño y aplicación de un proyecto de enseñanza de los contenidos de estadística descriptiva. En dicho proyecto el manejo del paquete de programas estadísticos PRODEST (revisado para que los distintos programas pudieran grabar las interacciones de los estudiantes con los ordenadores), los diversos ficheros de datos y los problemas planteados al alumno sobre los mismos jugaban un papel esencial. La evaluación del cambio de concepciones se apoyaría en un diseño cuasiexperimental con pretest y postest, empleando dos instrumentos paralelos.

Sin embargo, la búsqueda bibliográfica dio como resultado la carencia de instrumentos de evaluación adecuados a los contenidos pretendidos y de estudios que caracterizasen las concepciones de los estudiantes sobre dichos contenidos, lo que nos llevó a la necesidad de construir nuestros propios instrumentos. La necesidad de basar las afirmaciones y propuestas de actuación, derivadas de la investigación, en datos recogidos con instrumentos válidos y fiables para los fines pretendidos nos obligó a restringir la amplitud de los contenidos estadísticos abarcados. Elegimos la noción de *asociación* por su papel relevante dentro de la Estadística.

Desde el inicio de esta nueva etapa de la investigación se vio la necesidad de profundizar en el estudio matemático-histórico sobre la noción de asociación estadística y sus relaciones con la idea filosófica de causa. Esto nos debería permitir identificar las principales variables de tarea del campo de problemas de los cuales emerge dicha noción, las cuales serían utilizadas en la selección de muestras representativas de los problemas para elaborar instrumentos válidos y fiables.

El experimento de enseñanza se realizó con un grupo de 20 estudiantes de Magisterio a los que fue posible realizar un seguimiento sistemático de los procesos de resolución de problemas de análisis de datos con ordenador. La prueba escrita construida para caracterizar los conocimientos y creencias iniciales sobre la noción de asociación estadistica de los estudiantes fue aplicada como pretest y postest al grupo experimental y también a una muestra de 213 estudiantes. El análisis detallado de las estrategias de estos estudiantes permitió caracterizar una serie de concepciones iniciales correctas e incorrectas sobre la asociación estadística. Esta información es útil, en sí misma, para cualquier profesor que trate de iniciar una instrucción sobre el tema. En nuestro caso sirvió como elemento de referencia de las concepciones de los estudiantes del grupo experimental.

Las principales conclusiones obtenidas en la investigación fueron las siguientes:

a. Se ha observado una notable mejoría en los juicios de asociación al finalizar la enseñanza, cuando los datos no contradicen las teorías previas de los estudiantes.

b. Se ha observado una evolución positiva en las estrategias de solución utilizadas después de la instrucción.

c. Casi la totalidad de los estudiantes han superado la concepción "localista" sobre la asociación (basar el juicio de asociación en una parte de los datos), y mejora en la concepción "unidireccional" (no considerar la correlación inversa), aunque persiste la concepción "causalista", por la cual los estudiantes confunden correlación y causalidad, al finalizar la enseñanza.

d. En general, los estudiantes no se limitan a emplear un sólo resumen numérico o gráfico de los datos, cuando disponen de un ordenador, sino que utilizan varios programas para integrar la información, como paso previo a la resolución de los problemas.

e. El resumen estadístico más empleado es la tabla de contingencia, construida mediante un proceso iterativo, seguida de la utilización de estadísticos de orden o de valor central.

f. Las estrategias utilizadas han tenido mayor grado de correción que cuando no se usa ordenador, apareciendo nuevas estrategias, en especial el empleo de estadísticos de orden.

Un nivel de análisis más profundo de los fenómenos de aprendizaje se realizó mediante el seguimiento del proceso de aprendizaje de una pareja de estudiantes, utilizando el análisis de sus interacciones con el ordenador. Esta última fase de la investigación ha permitido identificar diferentes actos en la comprensión del concepto de asociación. Esta información es un paso necesario para la elaboración de situaciones didácticas específicas encaminadas a facilitar el logro de tales actos de comprensión, y por tanto, la superación de concepciones inadecuadas.

Como vemos, la investigación ha permitido obtener una gran cantidad de información utilizable en la planificación de la enseñanza y en el diagnóstico de las dificultades de aprendizaje. En el plano tecnológico se ha aportado un material experimentado para la enseñanza de la Estadística Descriptiva y una prueba para la evaluación de las concepciones previas de los sujetos sobre la idea de asociación estadística.

Enseñanza de la Combinatoria en Bachillerato

La Combinatoria es considerada generalmente como un tema difícil de las Matemáticas de secundaria, reconociéndose, además, que su enseñanza es de interés en estos niveles por su carácter central dentro de la matemática discreta y por desempeñar un papel relevante en el desarrollo de las capacidades lógicas de los sujetos (Piaget e Inhelder, 1951; Fischbein, 1975).

Estas razones nos indujeron a proponer como tema de investigación a una estudiante de doctorado la "enseñanza de la combinatoria en bachillerato". Las cuestiones "ingenuas" que nos planteamos inicialmente fueron:

- ¿Qué contenidos proponen los programas oficiales y los manuales escolares como saber a enseñar?
- ¿Qué piensan los profesores sobre la enseñanza y las dificultades de aprendizaje del tema?
- ¿Por qué es difícil la combinatoria?
- ¿Cómo se debería enseñar la combinatoria?

Después de invertir un tiempo en aclarar las dos primeras cuestiones nos dimos cuenta que, como paso previo para proponer acciones prácticas sobre la instrucción, era necesario dilucidar la propia naturaleza de la Combinatoria elemental. Sólo después de conocer la estructura de los problemas combinatorios simples y la naturaleza de las herramientas conceptuales desarrolladas para resolverlos se pueden hacer propuestas de actuación racionales, esto es, basadas en conocimientos científicos.

El estudio sistemático del contenido y de la bibliografía nos permitió identificar la existencia de una variable de tarea de los problemas combinatorios, que hemos denominado "modelo combinatorio implícito en los enunciados" (MCI), que podría explicar, al menos una parte de las dificultades del tema y que no había sido considerada en las investigaciones anteriores. Esta variable responde a las tres modelizaciones básicas de los problemas combinatorios simples: el esquema de selección de muestras, colocación de objetos en urnas y como particiones de un conjunto. Otras variables que habían mostrado su efecto sobre las dificultades de las tareas combinatorias en investigaciones previas son la operación combinatoria (variaciones, permutaciones, combinaciones), el tamaño de los parámetros, tipo de operación y contexto.

Para probar los efectos de la variable MCI en los procesos de resolución de los problemas y su posible interacción con las restantes variables mencionadas fue preciso elaborar una prueba válida para los fines pretendidos y fiable. Después de sucesivos ensayos piloto la prueba fue aplicada a una muestra de 720 alumnos de 1er curso de bachillerato, la mitad con instrucción en Combinatoria y el resto sin instrucción previa.

El ámbito científico-teórico en que se desarrolló esta investigación y el planteamiento del problema implicaba un compromiso especial con la justificación de las afirmaciones pretendidas sobre los hechos observados. Para determinar si la variable MCI afecta o no y de qué manera al proceso de instrucción en Combinatoria, ha sido preciso aplicar un riguroso diseño experimental del cuestionario y un complejo proceso de análisis multivariante de datos. Para comprobar la significación estadística de las diferencias entre las medias de estas dos muestras de alumnos, y su dependencia de las diversas variables de tarea incluidas en el cuestionario, se realizó un Análisis de Varianza. Para estudiar las interrelaciones entre los diferentes items se efectuó un Análisis Cluster, un Análisis Factorial y un Análisis Implicativo. Y con el fin de estudiar las asociaciones entre los errores y la influencia sobre los mismos de las variables de tarea consideradas, se realizó un Análisis de Correspondencias. Las entrevistas clínicas realizadas a una muestra reducida de alumnos permitió profundizar en las estrategias de resolución de los problemas y en la comprensión de los conceptos combinatorios por parte de los alumnos. Todos los resultados corroboran el papel de variable didáctica de MCI, que, por tanto, debe recibir una atención particular en la planificación de la instrucción sobre el tema.

El proyecto de investigación sobre Combinatoria fue iniciado en 1989 y se ha terminado en 1994 con la defensa de la tesis doctoral de Navarro-Pelayo (1994). Han sido necesarios cinco años de dedicación casi plena de una persona (la doctoranda), asistida por el director de la investigación y otros colaboradores. Los conocimientos y recursos didácticos producidos han sido los siguientes:

- Elaboración de un *survey* o estado de la cuestión sobre las investigaciones realizadas en el campo de la psicología y de la didáctica sobre desarrollo cognitivo e instrucción en razonamiento combinatorio.
- Conocimiento del papel desempeñado en los procesos de instrucción en Combinatoria de la variable MCI (modelo combinatorio implícito en el enunciado de los problemas combinatorios).
- Elaboración de un instrumento de evaluación de dificultades y tipos de respuestas de los sujetos ante una muestra de problemas combinatorios simples.
- Elaboración de una propuesta de desarrollo del currículo de combinatoria para los niveles correspondientes a alumnos de 10 a 18 años.

Los conocimientos producidos en esta investigación nos parecen de interés evidente tanto para los diseñadores de currículo, autores de manuales escolares como para el propio profesor que deba enseñar Combinatoria en los niveles secundarios. La aportación teórica, objeto de la tesis doctoral correspondiente ha consistido en probar que la variable MCI, juega un papel relevante en los procesos de enseñanza y aprendizaje y, por tanto, el currículo en Combinatoria debe tenerla en cuenta. En Batanero y cols (1994) se desarrolla una propuesta curricular que utiliza sistemáticamente los conocimientos científicos "producidos" en esta tesis. Este libro, y el publicado sobre las nociones de azar y probabilidad (Godino y cols, 1987), dirigidos a profesores y diseñadores del currículo matemático, son contribuciones de carácter tecnológico que muestran formas posibles de cooperación entre teoría y práctica.

Ontología y epistemología de las matemáticas. Una teoría del objeto matemático y sus significados

Las dos investigaciones que hemos descritos son ejemplos del tipo de cuestiones que nuestros alumnos de doctorado se han planteado en la realización de su trabajo y podrían describirse como investigaciones de primer nivel dentro de nuestra área de conocimiento, ya que abordan directamente problemas didácticos. Un segundo nivel de reflexión sería el análisis de los fundamentos en que apoyamos estas investigaciones, tanto de tipo teórico como metodológico.

Dado que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son objeto de estudio de diversas ciencias, podríamos preguntarnos si son suficientes las aportaciones de estas disciplinas para fundamentar nuestra investigación. Entre estas ciencias, que podríamos llamar fundacionales de la Educación Matemática, podemos incluir la Psicología, Sociología, Matemáticas, Filosofía, Pedagogía, Historia de las Matemáticas, Lingüística, etc. Como justificamos en Godino (1991), dado que cada una de ellas atiende sólo a aspectos parciales de la Educación Matemática, consideramos que se precisa una disciplina autónoma que trate de integrar estos conocimientos y de indagar aquellos aspectos de la enseñanza de las Matemáticas cuya naturaleza es irreductiblemente matemática.

La complejidad de los problemas educativos, pone a la Didáctica de las Matemáticas ante el dilema de desarrollar un espacio de indagación propio de carácter básico o fundamental. No es posible explicar y predecir el funcionamiento de los sistemas didácticos si no se aclaran y explícitan los supuestos ontológicos y epistemológicos de las propias matemáticas y de los procesos psico-sociales que tienen lugar en la formación de los conocimientos matemáticos. La indagación didáctica realizada con criterios de rigor científico exige elaborar teorías sobre las cuestiones mencionadas, en las cuales basar agendas de investigación coherentes y productivas.

Una de las cuestiones fundamentales dentro de esta problemática es si el estudio de los problemas didácticos precisa una conceptualización explícita sobre los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones y teorías), los procesos por los que se desarrollan y evolucionan dichos objetos matemáticos —tanto en el sujeto individual, como en su génesis histórica— y el significado de los mismos.

El carácter dispar, con frecuencia contrapuesto, de las múltiples respuestas dadas a las cuestiones ontológico-epistemológicos sobre las Matemáticas, nos llevó a iniciar una indagación sistemática sobre la noción de objeto matemático y su significado, a sabiendas, no obstante, de que estas cuestiones son un tema central de todas las disciplinas interesadas por la cognición humana. La teoría del objeto matemático y sus significados institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994a y 1994b), que describimos brevemente a continuación, es una primera consecuencia de nuestra investigación sobre estas cuestiones. Con este ejemplo queremos mostrar un tipo de investigación didáctica de tipo esencialmente teórico, su motivación por la propia lógica de la investigación científica y su potencial utilidad.

Partiendo de las tendencias recientes en Filosofía de las Matemáticas hemos elaborado una teoría sobre las ideas de *objeto matemático* y su *significado*, en la cual postulamos una doble dimensión —epistemologica y psicológica— tanto para los propios objetos, como para sus significados. Reconocemos explícitamente una estrecha inspiración de esta teorización en las ideas de "objeto" y "relación con el objeto" desarrolladas por Chevallard y en la teoría de Wittgenstein del "significado como uso". La perspectiva educativa e intención integradora adoptada nos conduce a introducir, no obstante, elementos teóricos —como los de objeto personal o mental— que están en consonancia con los planteamientos de la epistemología psicologista de Kitcher y de la teoría de la cognición situada.

Las hipótesis epistemológicas y psicológicas que sirven de punto de partida para la teoría desarrollada son las siguientes:

a. Las matemáticas constituyen una actividad humana que se interesa por la solución de situaciones problemáticas, las cuales pueden referirse al mundo físico, social, o al propio dominio de las Matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos o internos, los objetos matemáticos emergen y evolucionan progresivamente. Por tanto, son los actos de las personas la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, de acuerdo con las teorías constructivistas piagetianas.

b. Las Matemáticas constituyen un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones-problemas y las soluciones encontradas. Los sistemas de símbolos, dados por la cultura, tienen una función comunicativa y un papel instrumental, ya que cambian a las propias personas que usan los símbolos como mediadores. Este supuesto asume los planteamientos psicológicos de Vygostskii y los semióticos de Rotman.

c. Las Matemáticas constituyen un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido. Los objetos matemáticos son entidades culturales cuya naturaleza sistémica y compleja no puede ser descrita meramente con definiciones formales cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos.

Las abstracciones o generalizaciones, tanto en su faceta psicológica como epistemológica (objetos personales e institucionales), son consideradas como emergentes de los sistemas de prácticas (personales, respec. institucionales) realizadas por una persona (o en el seno de una institución) ante cierta clase de situaciones-problemas o disposiciones del entorno.

Los sistemas de prácticas prototípicas significativas —esto es, eficaces para el fin pretendido— son consideradas como el origen genético de los distintos "objetos personales" (invariantes operatorios de índole psicomotriz, "conceptos y teoremas en acto", conceptos y proposiciones formalizadas, etc). La especificidad de tales sistemas de prácticas respecto a los contextos institucionales particulares determina, asimismo, la emergencia de objetos personales e institucionales específicos. Se postula, por tanto, una relatividad intrínseca de los objetos emergentes respecto de las distintas instituciones involucradas en los campos de problemas, y dependiente, asimismo, de las formas expresivas disponibles. Este planteamiento permitirá apreciar las adaptaciones (o transposiciones) e influencias mutuas que sufren los objetos matemáticos para ser transmitidos entre personas e instituciones.

Esta relatividad y multiplicidad de objetos es compatible, no obstante, con el papel "dominante" y de "control" (en términos ecológicos) de la organización lógica y formal adoptada por las matemáticas en la institución Matemática (productores de nuevos conocimientos matemáticos), principalmente debido a su efectividad en el planteamiento y resolución de nuevos problemas. No obstante, esta organización lógica, que sin duda es eficaz en los procesos de justificación e invención de los objetos, no está exenta de problemas para la comunicación y difusión de los mismos, al prescindir de los contextos, situaciones y actuaciones personales de los que emergen dichos objetos.

El constructo que hemos elaborado en nuestra teoría, que denominamos *significado personal e institucional* de un objeto matemático, es una entidad extensiva, que se contrapone al carácter intensivo del objeto, y permite reorientar las cuestiones de diseño y evaluación de situaciones de enseñanza y de evaluación de los conocimientos de los sujetos. Al postular el carácter sistémico de los significados, se pone en evidencia el carácter muestral de las mencionadas situaciones de enseñanza y evaluación y los problemas de inferencia asociados.

Como consecuencia de la teoría elaborada, en Godino y Batanero (1994a) proponemos una agenda de investigación para la Didáctica de las

Matemáticas centrada, como área prioritaria, en la caracterización de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos, su mutua interdependencia y desarrollo evolutivo.

El interés principal de esta investigación didáctica, que hemos analizado como ejemplo de estudio teórico, es que ofrece la posibilidad de presentar, bajo una perspectiva unificadora, la investigación en Didáctica de las Matemáticas, a partir de las nociones de *semiometría* (determinación de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos) y *ecología de significados* (estudio de las condiciones de desarrollo, adaptaciones y relaciones mutuas entre los significados institucionales y personales) (Godino y Batanero, 1994a). Esta investigación no ha surgido aisladamente, sino que se ha apoyado en trabajos previos y continúa la dirección iniciada por otros autores como Steiner, Brousseau o Chevallard, decididos defensores de la Didáctica como campo de investigación teórica autónoma, aunque no independiente de otras áreas del conocimiento, sino en diálogo con las mismas.

ALGUNAS CONCLUSIONES

El fin perseguido en el meta-análisis realizado de las tres investigaciones descritas ha sido, en primer lugar, poner de manifiesto algunos rasgos distintivos de la investigación científica dentro de la Didáctica de las Matemáticas, respecto de las de tipo tecnológico o práctico. Entre los fines principales de la investigación científica están la descripción, explicación y predicción del comportamiento de los sistemas didácticos. Como expresa Kilpatrick (1993): "Podemos buscar generalizaciones, no como leyes naturales que determinen cómo actuan los profesores o los alumnos, sino como tendencias o patrones en el flujo de sucesos de la clase" (pág. 28). El fin de la investigación tecnológica y la práctica reflexiva es resolver problemas específicos en situaciones y contextos dados.

La investigación científica está guiada por la teoría y pretende desarrollar teoría, debiendo asentarse en los trabajos precedentes sobre la misma problemática. Las cuestiones de investigación no se delimitan correctamente hasta tanto no se realiza la preceptiva revisión bibliográfica y se conocen las ideas de los autores que han investigado previamente sobre problemas similares. Las afirmaciones pretendidas deben integrarse en un cuerpo de conocimientos en continuo crecimiento. Pensamos que esta preocupación es, en gran medida, ajena a la práctica reflexiva e incluso a la tecnología, ya que su interés primario es la acción sobre contextos particulares, con frecuencia específicos e irrepetibles.

La investigación científica está sometida, en el seno de la institución en la que se desarrolla, a una serie de normas que afectan a las formas expresivas (rigor, reproductibilidad) y a las formas de justificación de las afirmaciones (validez, consistencia, objetividad). A estos criterios, podrían añadirse los deseables de *originalidad* y *pertinencia* (Sierpinska, 1993), más difíciles de alcanzar. En los ámbitos de la investigación tecnológica y la práctica reflexiva los criterios de carácter prioritario son otros, como los de utilidad, facilidad, coste, rapidez, eficacia, rentabilidad, etc.

A pesar de estas diferencias, en los ejemplos que hemos descrito, se pone también de manifiesto el carácter complementario e interdependiente de la investigación tecnológica y científica, lo que puede comprenderse mejor bajo el marco interpretativo de la epistemología ecológica (Godino, 1993). Estas tres actividades tienen lugar en ámbitos institucionales distintos, utilizan recursos diferentes y cumplen también funciones distintas. Como hemos indicado, estas formaciones epistemológicas se diferencian sustancialmente en los fines, formas expresivas y en los criterios de justificación, esto es, tienen *nichos ecológicos* propios. Pero la investigación o indagación disciplinada en cada uno de estos campos produce conocimientos útiles y necesarios para el funcionamiento y mejora progresiva del ecosistema global, que es la Educación Matemática.

Sin embargo, debido a su poder predictivo y explicativo, el conocimiento científico teórico condiciona el conocimiento tecnológico y el práctico, esto es, desempeña un papel “dominante y de control”.

En nuestros ejemplos, el punto de partida han sido cuestiones pertinentes para los profesores: cómo enseñar un contenido particular (la combinatoria elemental, la estadística descriptiva). Pero la lógica y las necesidades del proceso inicial de investigación (tecnológica) nos ha llevado a cuestiones progresivamente más teóricas: cómo afecta la variable “modelo combinatorio implícito en los enunciados de los problemas” al razonamiento de los estudiantes, cómo evaluar estos razonamientos de los alumnos, cómo podemos determinar si un alumno conoce la combinatoria, qué es conocer las matemáticas, que son los objetos matemáticos, etc.

Con ello hemos visto la necesidad de tener que afrontar delicados y complejos problemas teóricos, cuya naturaleza está bastante alejada de las cuestiones prácticas y tecnológicas planteadas inicialmente. La detección y explicación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes requieren el diseño de situaciones de evaluación. La superación de estas dificultades por parte de los alumnos precisa organizar secuencias adecuadas de situaciones didácticas. Todo ello debe estar basado en los resultados de la investigación, que, a su vez, se debe fundamentar en supuestos epistemológicos y cognitivos explícitos sobre las matemáticas y su aprendizaje. Pero, dado que las disciplinas de referencia no siempre proponen soluciones claras y definitivas para estos fundamentos, el didacta tiene que construirlos directamente desde su propia perspectiva y necesidades, o integrar propuestas diferentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1987). Un paquete didáctico de programas para el laboratorio de estadística. *Actas del Simposium Internacional de Educación e Informática (*pp. 380-386*)*. ICE de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1988a). *Curso de estadística aplicada basado en el uso de ordenadores*. Jaén: Los autores. D. L. J-260-1988.

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1988b). *Laboratorio de estadística. Uso del paquete de programas PRODEST.* Jaén: Los autores. D. L. J-401-1988.

Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. *Article occasionnel nº 2*. IREM de Bordeaux. Université de Bordeaux I.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (1981). La enseñanza de la estadística en las Escuelas Universitarias de Magisterio. *Actas del Primer Encuentro Nacional de Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB* (pp. 483-493). ICE de la Universidad de Málaga.

Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En A. Gutiérrez (Ed.), *Área de conocimiento, Didáctica de la Matemática* (pp. 105-148). Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías en Didáctica de la Matemática. *Quadrante, 2* (1), 9-22.

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante, 2* (2), 69-79.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. Background paper presented at The ICMI Study 94 *¿What is research in mathematics education and what are its results?* University of Maryland.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994b). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Kilpatrick, J. (1981). The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 2* (2), 22-29.

Kilpatrick, J. (1993). Beyond face value: assessing research in Mathematics Education. En: G. Nissen y Bomhoj (Eds.), *Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics* (pp. 15-34). Roskilde University, IMFUFA, Denmark.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idèe de hasard chez l'enfant*. Paris: Presse Universitaires de France.

Sierpinska, A. (1993). Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics. En G. Nissen y Bomhoj (Eds.), *Criteria for scientific quality and relevance in the Didactics of Mathematics* (pp. 35-74) Roskilde University, IMFUFA, Denmark.

Steiner, H. G. (1985). Theory of mathematics education (TME): An introduction. *For the Learning of Mathematics, 5* (2), 11-17.

CAPÍTULO 8

ALGUNAS CUESTIONES QUE PREOCUPAN A UN PROFESOR DE SECUNDARIA ACERCA DE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

FLORENCIO VILLARROYA BULLIDO
S. A. P. M. "P. S. CIRUELO"

Quiero empezar agradeciendo al CIDE, y a Juan Calderón la invitación a participar en este Seminario, y la libertad de elección de tema. Si bien me gustaría justificar, a priori, mi intervención. Cuando a primeros de enero de este año, se pidió mi participación, pensé que no debía hacerlo, puesto que, dada la lista de ponentes que anunciaron, no me correspondía un lugar en ella, pero como veis, accedí, pues además se me brindaba la oportunidad de hablar del tema que libremente eligiera, dentro del título general del Seminario.

Por otro lado, debí entender mal el modelo de Seminario, pues pensaba hasta hace unos días, que era un encuentro entre especialistas en investigación en Didáctica de las Matemáticas y profesores de diversos ámbitos (profesionales y geográficos) para intercambiar puntos de vista desde sus respectivas posiciones y visiones sobre el tema y que las intervenciones se harían en pequeños grupos de trabajo y debate. Como la comunicación entre el CIDE y los ponentes ha sido fluida en este tiempo, cuando me dijeron que había 250 inscritos como asistentes, y vi que el programa consistía en sucesivas ponencias, sin la existencia de actividades conjuntas de debate, mi posición y mi intervención tuvieron que modificarse un poco.

Antes de comenzar, me presentaré: Nací más o menos el mismo año que los ordenadores, Carlitos y Mafalda; soy profesor de instituto desde 1975 y empecé a preocuparme por cuestiones de enseñanza ¿hacia 1978? preparando la memoria de acceso a Cátedras de Bachillerato. Desde entonces, he participado, junto a otros amigos, en actividades como las JAEM, las reuniones de la CIEAEM, he obtenido un DEA de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Burdeos, he coordinado la presencia de la Exposición "Horizontes Matemáticos" en su itinerancia por este país, durante tres años, he participado en la creación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y en su revista SUMA,... y después de 20 cursos dando clases los problemas con los alumnos siempre existen, las dificultades en el aprendizaje están ahí, esperando cada mañana o cada tarde, y seguirán estando.

L. PUIG (ED.). *INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 93-108

Durante estos años han cambiado muchas cosas:

- ha cambiado el marco de referencia político, hemos pasado de una dictadura a un sistema democrático con esperanza, y luego a una democracia con desencanto.
- han cambiado las costumbres de las personas, la escala de valores.
- han cambiado los alumnos, sus intereses escolares, sus expectativas de futuro.
- pero el sistema escolar legal vigente aún no ha cambiado. En 1975 comenzaron el BUP y la FP en nuestro país y todavía siguen vigentes. Si ha cambiado radicalmente el número absoluto y relativo de alumnos escolarizados hasta los 16 años. Y la anunciada, desde 1982, reforma de este sistema escolar parece que llegará a ser universal (aquí Universo=España), allá por el año 2001.
- han cambiado nuestras relaciones con otros países, nuestro conocimiento de idiomas extranjeros.

¿Qué es lo que provoca en un profesor de matemáticas la necesidad de conocimientos añadidos, diferentes a los de la propia materia de estudio?

Puede parecer una obviedad pero en mí, y creo que en una mayoría de profesionales de la enseñanza, lo que provoca la búsqueda de otros conocimientos son dos razones principales:

- por un lado, el "llamado fracaso escolar": los resultados alcanzados por nuestros alumnos, no se corresponden con las expectativas; y
- por otro, desde las matemáticas, el "fracaso de la matemática moderna" en el sistema escolar.

Fracasos ambos ligados, aquí y en otros países a la extensión de la escolaridad obligatoria, deseada por las sociedades y llevada a cabo por la mayoría de los gobiernos. En pocos años se ha pasado del límite de edad 10-12 al 14-16, para el final de la escuela obligatoria.

Y aquí entra en juego la tradición: Disponemos de una cultura matemática "primaria" heredada, existente desde el siglo XVI hasta el XIX, enseñable al 60-70% de la población en 4-5 años. La cultura matemática "secundaria" fue concebida en el siglo XVIII para a lo más el 20% de la población. Esa educación secundaria, se intenta generalizar a lo largo del sigo XX (al menos, en Europa). Pero, actualmente debemos destacar que "la enseñanza se revela completamente incapaz de conciliar estos dos proyectos en la escolaridad obligatoria de diez años de duración. Peor aún, aunque no sean técnicamente incompatibles, tienden a destruirse la una a la otra". Por lo que respecta a las matemáticas, la última tentativa para poner un saber unificado al servicio de una sociedad abierta y democrática data de los años 70; estaba basada en la idea de que la unificación de las matemáticas permitía la de su enseñanza "desde la maternal hasta la universidad". El proyecto fracasó.

No hay en la actualidad proyecto de cultura de las matemáticas de "secundaria" socialmente aceptado, ni en el seno de la sociedad en general, ni en el seno de la sociedad más pequeña de los matemáticos, ni de los profesores de matemáticas. Esto será fuente de continuas paradojas y contradicciones en los próximos años, y posiblemente hará sentir de manera generalizada, confío, la necesidad de un debate en el seno de esas sociedades sobre la naturaleza de las matemáticas, sobre el sentido de los conceptos matemáticos y el papel que las matemáticas juegan en la formación general y específica de las personas. Debate que podría generar el fortalecimiento de estudios y resultados en didáctica de las matemáticas o educación matemática.

Volviendo al punto de partida:

¿Qué es la Didáctica de las Matemáticas?

En Francia, la didáctica de las matemáticas no es sólo el arte o ciencia de enseñar, sino que cubre el estudio de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje en los aspectos específicos de las matemáticas. También incluye la escuela como sistema, etc. La investigación en este dominio requiere una dialéctica entre las cuestiones de investigación y las teorías. El cuadro teórico se funda en la hipótesis de que los alumnos construyen su propia comprehensión de las matemáticas y que sus producciones intelectuales no se vuelven en conocimientos portadores de sentido más que si son resultados de la resolución de problemas prácticos o teóricos importantes.

En otros países, especialmente Estados Unidos de América e Inglaterra, el mismo tipo de estudios sobre enseñanza aprendizaje de las matemáticas se engloba bajo el epígrafe Educación Matemática.

¿Por qué esas diferencias entre Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas? Las dos se benefician del aporte de otras disciplinas como las matemáticas, la epistemología, la historia de las matemáticas, la psicología, la sociología, la lingüística y la antropología, como fuentes no solo de conceptos sino también de metodologías. Ambas reconocen el papel central de la dualidad teoría/práctica. Pero reflejan concepciones culturales fuertemente marcadas.

En anglo-americano hay dos términos con connotación negativa: didáctica y pedagogía. Calificar a alguien de didacta significa no solo que enseña, sino que probablemente deduce principios morales. Un pedagogo no es exactamente un enseñante, el término implica que es verbalista, aburrido, es decir pedante. Los americanos utilizan educación y educador para evitar connotaciones desagradables y consideran que el campo de estudio de la enseñanza, aunque poco prestigioso y de status menor, comienza a afirmarse institucionalmente.

En Francia se ha sentido la necesidad de un término como Didáctica de las Matemáticas para expresar un acceso científico específico a ese campo de investigación. En Alemania también existe; los norteamericanos se resisten a él y utilizan educación matemática para referirse a la vez a la actividad de enseñar y al campo de investigación.

Los franceses se han esforzado en llenar esta separación cultural, entre ellos y los anglófonos; los americanos no tanto y tienden a ignorar, por problemas de lengua, las investigaciones francesas hasta que se traducen.

Fuera de estos dos grandes bloques, hay otros países, por ejemplo Italia, donde las ideas en este terreno estaban ligadas, esencialmente, a la idea de renovación de la enseñanza y a la experimentación de proyectos innovadores. Sus problemas de lengua para aproximarse a cualquiera de los bloques anteriores es semejante al nuestro.

En España, unas veces por problemas de lengua, otras por proximidad geográfica y espero que alguna otra por "interés previo" en la materia, podemos ver la influencia de las dos culturas en este terreno de la Didáctica/Educación de las Matemáticas. Personalmente me siento más influido, por razones de lengua, de proximidad geográfica, y de interés previo, por la Didáctica de las Matemáticas, tal como se entiende en Francia. Pienso que en ella, se intenta abordar una problemática global, muy extensa, desde un punto de vista racional y científico con el objetivo de crear situaciones de enseñanza reproducibles, con matices, en distintos lugares y tiempos. Para ello han construido un edificio teórico imponente.

Por tanto, estoy de acuerdo con la afirmación de J. Kilpatrick:

> *se observa en la investigación americana sobre el aprendizaje de las matemáticas y su conceptualización una falta de teorización. Hay tantos investigadores americanos tan enfrascados en un constructivismo radical que estiman imposible comprender las preocupaciones francesas de transmisión de los saberes y de reproductibilidad de las situaciones de enseñanza. Transmisión, a los americanos, nos parece un término horrible, una supervivencia de los antiguos tiempos en que suponíamos que los niños eran recipientes vacíos que había que llenar de información (si bien no encuentro confirmaciones tangibles de que los americanos lo hayan creído alguna vez). Reproductibilidad sugiere que el enseñante podría querer dirigir la enseñanza en una dirección determinada mientras que todo investigador americano actual os dirá que el papel del enseñante consiste simplemente en facilitar el aprendizaje por el niño de las propias matemáticas del niño. Muchos investigadores americanos creen imposibles*

las regularidades que señala Vergnaud: "Cuando secuenciamos y observamos la misma serie de lecciones en diferentes aulas, con el mismo o diferentes profesores, en diferentes niveles o en el mismo, podemos observar que algunos hechos suceden siempre y los mismos comportamientos organizados coherente y jerárquicamente aparecen una y otra vez".

Sigue diciendo Kilpatrick:

Los investigadores americanos evitan la ingeniería como metáfora de la investigación; consideran la noción de variable como un residuo de un positivismo desacreditado; han abandonado no sólo toda puesta a prueba de las hipótesis, sino también toda generación de hipótesis, es decir incluso de cualquier hipótesis. Vagan en una especie de desierto en el que el constructivismo radical, las matemáticas del niño y los métodos cualitativos tienen un poder encantador y las cuestiones de validez son obsoletas.

Junto a estas referencias a "escuelas" debemos considerar el papel de la innovación: "Es indispensable que, cada día, todo enseñante comience su clase como si los conocimientos que propone a sus alumnos fueran descubiertos por primera vez en el mundo y como si este hallazgo fuera decisivo para…, el porvenir de la humanidad." Sería la máxima, el ideal radical de los innovadores. ¿Por qué? Porque sabemos que el contrato didáctico tiende, legítimamente, a estereotipar la acción de enseñar, a codificar los métodos, a definir el saber escolar, a convertir en obsoletas para el profesor las situaciones que utiliza y obsoletos para el alumno los conocimientos tratados. Todo envejece. Para luchar contra ello se proponen las renovaciones en las diferentes ramas del contrato: en las relaciones con el alumno, en las relaciones con el saber, en las relaciones con la comunidad de matemáticos, en las relaciones con las situaciones de enseñanza.

Una ilusión peligrosa es sostener que para evitar este envejecimiento se debería de evitar todo mecanismo, toda reproducción, en el límite, todo aprendizaje. Para que la clase sea viva, el profesor hará las matemáticas con sus alumnos sin referencia al pasado, completamente justificadas por las circunstancias y la vida de los alumnos. Posición empirista radical que conduce a lo peor: en su principio muestra la negación misma del fin de la enseñanza que es comunicar un saber cultural costosamente adquirido y las referencias requeridas por un contrato social.

Además, la innovación conduce a resultados diferentes de los pretendidos. Una innovación debe ser comunicada, por tanto debe proponer cosas que funcionen en forma comunicable a los demás. Su difusión se justifica por una observación previa del fracaso de los métodos antiguos: las innovaciones que le precedieron. Hay que insistir en que es nueva y presenta al menos una diferencia esencial.

La innovación permite a una parte de los enseñantes sentirse como innovadores: personas que desarrollan sus competencias, que actúan para mejorar las condiciones de la enseñanza, que enuncian conclusiones operatorias. Su fin es generoso: propagar la innovación, extenderla y generalizarla. La innovación necesita oyentes, su progresión es muy fuerte al principio, pero disminuye rápidamente, hasta alcanzar más o menos al 20% de los profesores, momento en que se hace impropio sostenerla como innovación. Entonces hay que buscar innovaciones nuevas. Es el mismo sistema que el de la "moda". Los enseñantes tienen necesidad de la moda (mecanismo de incitación al consumo).

Por otro lado, la innovación necesita un ritmo rápido y por ello no afecta en nada esencial a las prácticas profundas de la enseñanza: Como la moda. Finalmente, hay que señalar que el mecanismo de difusión de la innovación es bastante complejo, así como las razones de su éxito o fracaso.

¿Qué querría (un profesor de secundaria) que se investigase en la Didáctica de las Matemáticas?

Espera, al menos, que la didáctica de las matemáticas le suministre lo esencial de las técnicas específicas de las nociones a enseñar, compatibles con sus concepciones educativas y pedagógicas generales. Técnicas:

- locales: preparación de lecciones, material de enseñanza, métodos clave puestos a punto, instrumentos de gestión, de evaluación, más aquellos necesarios para alumnos que presentan dificultades particulares.
- globales: currículos para todo un sector de matemáticas, programas para varios años.

También puede esperar saber como y por qué se encadenan unos conocimientos con otros, luego qué conocimientos son previos a otros, si debe ligarse el estudio de la geometría al mundo físico… Cómo se construyen y reconstruyen las nociones, cómo se reorganizan…, y también, cómo se crean condiciones para que el aprendizaje se produzca…

Estas expectativas son legítimas, pero los estudios son largos y difíciles.

¿Qué responde a ello la Didáctica de las Matemáticas?

En algunos campos hay tentativas, pero casi todo está por hacer, por ejemplo en álgebra podríamos citar a Dieudonné: "Mientras que apenas fue necesario un siglo para que la geometría elemental lograra una forma casi definitiva, han sido necesarios trece siglos, desde Diofanto para que el álgebra llegue a ser lo que ahora conocemos". ¡El paso no debe ser evidente!

Para ser razonablemente comunicable a los enseñantes, la didáctica de las matemáticas debe producir conceptos unificadores, reagrupar los saberes y problemas, las situaciones, los comportamientos de los alumnos, con objeto de permitir formas genéricas de intervención, según los tipos obtenidos. La didáctica de las matemáticas, respetando la parte técnica del oficio de profesor, debe hacer posible la negociación social de su trabajo, siendo así el fundamento de la profesionalización de su actividad.

Pero, el hecho de catalogar las situaciones de enseñanza no les da ninguna virtud para la propia enseñanza. Los ejemplos muestran que las buenas situaciones, no son verdaderamente comunicables si no son bien estudiadas. Recordamos el ejemplo clásico del puzzle, problema para una situación de acción (incluso, situación fundamental): Agrandar las piezas de un determinado puzzle, de modo que la que mide 4 en el original, mida 7 en el nuevo, y que éste funcione como verdadero. La astucia (la consigna) es pedir a los alumnos que construyan, materialmente, las piezas para que encajen en el nuevo tamaño. Una estrategia de base existe en los alumnos: Las imágenes se calculan con operaciones aritméticas. Pero ¿cuáles? y ¿con qué números? Se suceden, en el tiempo, en el grupo de alumnos tres tipos de estrategias:

- la primera, puramente aditiva: sumar +3 a todas las longitudes, al acoplar las piezas es evidente que no funciona.
- la siguiente es multiplicar por 2 el número y restar uno, funciona bastante bien en las piezas fabricadas y también para casi todos los números.
- por fin, la búsqueda de una solución intelectualmente satisfactoria va a ser la fuente de comprensión, después de la explicitación de la propiedad fundamental de la proporcionalidad (o linealidad, si se prefiere).

Esta situación ha tenido éxito en la experimentación, llevada a cabo en la escuela Michelet de Burdeos, pero su generalización a todas las clases sería difícil. Su puesta en práctica generalizada no debería de exigir ni otras condiciones ni otros conocimientos que los que actualmente poseen los profesores, alumnos y padres, y además su utilidad y su eficacia se deberían revelar inmediatamente a los ojos de todos, mostrando sus ventajas sobre las prácticas actuales. Pero no ocurre así.

¿Qué se puede esperar de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas ajenas al sistema educativo al que se refieren (aportaciones de otros países)?

Como hemos señalado, el desarrollo de la didáctica de las matemáticas y su investigación ha seguido diferentes líneas en diferentes países. En unos, estaba ligada esencialmente a la idea de renovación de la enseñanza y a la experimentación de los proyectos innovadores; en otros, era una profundización de las investigaciones de base sobre los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; en unos terceros, estaba ligada a la psicología del aprendizaje. Entonces, buscar modos de aprovechamientos mutuos plantea problemas difíciles:

- ¿es posible, es legítimo "extraer" de una experiencia de investigación métodos, instrumentos y resultados para trasplantarlos en un contexto diferente, fuera de las condiciones históricas y culturales del cuadro teórico de origen?
- ¿es posible, es legítimo aplicar un principio de "complementaridad" en la investigación en didáctica trabajando con instrumentos de origen diferente en función de los temas que se quieren tratar, según el punto de vista o los objetivos que se quieren lograr?

Como hipótesis de trabajo, la respuesta debería de ser sí. Pues, en caso contrario hay poco o nada que hacer.

Las investigaciones actuales a nivel internacional hacen referencia a tres escuelas psicológicas o cognitivas:

- constructivismo piagetiano,
- escuela rusa (Vygotski),
- cognitivismo norteamericano.

Estas escuelas presentan importantes diferencias interiores y suscitan interrogantes:

¿Es posible aplicar el principio de complementaridad (supuesto por Steiner) entre Piaget y Vygotski en el dominio específico de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas? Parece posible a nivel del papel del lenguaje verbal, pero es más delicado si consideramos el papel de iniciación social de la clase y los problemas de la acción del enseñante en la zona de desarrollo proximal de los alumnos. Hay premisas de carácter filosófico diferentes: relativas al carácter individual/social de la construcción histórica y personal del saber, educación como formación del individuo libre o como construcción del nexo entre el grupo en formación y la historia cultural de las generaciones precedentes, etc. Premisas que afectan profundamente incluso al papel del enseñante en el aula: facilitador del aprendizaje individual, hacia la convergencia con el saber oficial, o mediador selectivo de un saber históricamente acumulado.

La modelización de situaciones didácticas y de procesos de enseñanza/aprendizaje a largo plazo no puede ignorar estos diferentes marcos de referencia, pues la importancia de ciertas acciones de la enseñanza y de buen número de sus opciones a largo plazo no son neutras al respecto. Por otro lado, varios instrumentos de interpretación y de análisis se pueden copiar del cognitivismo americano, lo que complica los problemas de compatibilidad con los marcos teóricos de referencia.

La terminología

Ya está citado el problema de la utilización de una terminología fuera del marco teórico que le da consistencia y coherencia. Existe una necesidad de un lenguaje común, que donde está expuesto de un modo más científico, por tanto supuesto a revisión, desde mi punto de vista, es en la Didáctica de las Matemáticas en Francia. Pero si las definiciones propuestas por los franceses son utilizadas para construir un lenguaje "vehículo" útil en las relaciones entre los investigadores, entonces hay que discutir la legitimidad de esta extrapolación de términos. Algunos, podrían no tener demasiados problemas: "contrato didáctico", "ingeniería didáctica", pero otros sí: devolución[1] del problema, validación, dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos, etc. No sólo en su interpretación, sino incluso en su traducción. El riesgo es el empleo metafórico de los términos, que les hace perder su significado y su precisión.

Por otra parte, la elección de términos es delicada. La didáctica utiliza dos tipos de términos: aquellos cuyo sentido está fijado por el uso, en particular por el medio profesional del enseñante, y aquellos cuyo sentido está fijado —quizá provisionalmente— por el investigador, en función de su estudio y de la teoría que utiliza. Es indispensable conservar esta distinción. No hay razón para imponer desconsideradamente ni a los unos ni a los otros un repertorio impropio para su trabajo. Ciertos conceptos, los más pertinentes y los más consistentes, existen en los dos dominios, pero no coinciden nunca y tienen funciones diferentes. Pero es muy fuerte la tendencia a querer borrar la distinción, por la necesidad de comunicarse entre enseñantes e investigadores y para beneficiarse de sus aportes mutuos.

¿Qué influencias tienen las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas en las reformas de su enseñanza?

La cultura matemática, si bien indispensable para el desarrollo de la sociedad, está relativamente alejada de las preocupaciones corrientes y parece austera, árida, para la mayoría. Los matemáticos, conscientes de las dificultades de su difusión, han estado, o deberían estar, siempre atentos a los medios para mantenerla al nivel necesario. En Francia la Didáctica de las Matemáticas nació de los IREM, del deseo de hacer compartir la cultura matemática y sus ventajas al conjunto de la población. En España, los primeros preocupados por mejorar la enseñanza de las matemáticas aparecieron en los años 70 también como necesidad del sistema educativo de renovarse. En estos más de veinte años, la influencia de innovadores sobre

1.Ver el comentario a la traducción de este término en la página 41, pie de página nº 2.

el sistema de enseñanza (el modelo LOGSE), puede considerarse, importante: Intento de generalización del método constructivista en todas las materias de la enseñanza obligatoria. Pero quizá prematura dadas las condiciones reales del sistema.

Pero esta renovación llevada a cabo por las administraciones educativas, al querer ser general, tratando por igual a todas las disciplinas, ignora las diferencias epistemológicas, históricas, técnicas y didácticas entre ellas y ha impuesto medidas homogéneas. Estas medidas pueden malgastar los medios disponibles y además aplastar los problemas específicos que la didáctica de las matemáticas hubiera podido resolver en favor de las problemáticas y de concepciones generales (sin embargo, pretendidamente didácticas), y a menudo pueden resultar inoperantes.

Por tanto, hoy la didáctica de las matemáticas puede presentarse como un instrumento de una parte (minoritaria en nuestro país, no así en otros) de la comunidad de los matemáticos y no como el de un proyecto educativo demasiado general. Provocando que la difusión de las investigaciones se restrinja al ámbito universitario que las origina y no incida para nada en el sistema educativo.

Los temas matemáticos de los que hay que revisar su enseñanza son numerosos. Tanto respecto a cuales enseñar, (en este sentido sería revisable la propuesta ministerial actual) cómo a que sentido darles en cada nivel de enseñanza. Podemos señalar algunos hechos de carácter general, que merecen un profundo análisis: la desmatematización de las actividades matemáticas, la algoritmización, la algebraización del análisis, la aritmetización del álgebra…, que tienden a reemplazar la comprehensión por el cálculo automático como medio de establecer y controlar las actividades matemáticas. Muy útil para la producción, esta tendencia modifica profundamente las condiciones de la enseñanza. Por ejemplo el uso de calculadoras gráficas aporta ciertos medios y temas nuevos interesantes, pero da directamente lo que hasta aquí servía de motivación, el empleo repetido de nociones y de cálculos de derivadas y de límites entre otros.

¿Puede un profesor de instituto hacer investigación en Didáctica de las Matemáticas?

La investigación en didáctica de las matemáticas, como en otras ramas, tendría que ser un esfuerzo colectivo y coordinado, financiado con dinero público de manera estable.

Un profesor aislado en un centro puede hacer observaciones de situaciones didácticas, preparadas por él mismo o por otro, puede mejorarlas, incluso comunicarlas en alguna revista especializada, pero sus resultados, en general, serán puntuales, parciales. Su utilidad e influencia en el sistema, apenas se notarán. Si se trabaja en equipo, es necesario un soporte institucional.

¿Exige la Investigación en Didáctica de las Matemáticas necesariamente equipos amplios, por no decir enormes, de personas para que se puedan abordar distintos aspectos del problema que hay que investigar?

Ya se ha dicho que se necesitan equipos estables de investigación. Estos equipos, integrados por profesores a tiempo parcial e investigadores, deberían ser multidisciplinares, con proyectos a largo plazo. Pero la realidad de cada día nos muestra que, al menos en nuestro país, apenas existen grupos estables de investigación en didáctica de las matemáticas, que sus investigaciones vienen determinadas, la mayor parte de las veces, por la imperiosa necesidad de leer una tesis doctoral, para poder optar unos años más tarde a una plaza en la universidad que, posiblemente, no sea de didáctica. Con ello el esfuerzo personal dedicado y el dinero institucional invertido en esos años, no tiene la continuidad necesaria.

Las ayudas a la investigación, por medio de convocatorias públicas de diversos organismos: Ministerio, Consejerías de Educación, CIDE, u otras instituciones públicas y privadas, permiten desarrollar un trabajo "temporal", por tanto local y puntual; pero su incidencia en el sistema educativo en general es nula, debido a su falta de difusión, por un lado, y por otro a su falta de integración en una estructura global de investigación.

¿Qué otros factores influyen en el alejamiento de la mayoría de los profesores de las investigaciones actuales de la didáctica y enseñanza de las matemáticas?

Durante años, los innovadores anteriores a las reformas de los años 70, sostenían que los conceptos matemáticos, además de presentarse unificados, podían presentarse desde la estructura más general a los casos particulares y problemas concretos. Ya en esos años, se alzaban voces, en contra, como las de H. Freudenthal, que hablaba de la inversión didáctica, y de las actividades que hay que desarrollar en un nivel para tener acceso al siguiente.

Estas voces, que algunos hemos escuchado y seguido, y que podemos decir que, en general, son las que están vigentes en la investigación en didáctica, no son vistas favorablemente por la mayoría de los profesores, que sienten, o dicen sentir que si podían hasta ahora "explicar determinados temas"; que no ven por qué, hay que explicar en un nivel "más bajo", por qué construir los conocimientos, por qué buscar el sentido de las nociones y conceptos y no dejarse llevar como han hecho en los últimos años por el peso de los algoritmos, por la eficacia de los instrumentos de cálculo: derivadas, calculadoras, ordenadores; aunque los rendimientos globales obtenidos por los alumnos no sean los esperados. Hay un sentir mayoritario de querer "preparar mejor" a los alumnos para luchar en la sociedad competitiva que nos toca y les tocará vivir, y en ella se piensa que los valores que triunfan son: eficacia, rapidez, destacar de los demás. Valores que se "desarrollan" mejor desde las matemáticas, proponiendo algoritmos, en lugar de comprender el sentido.

Volviendo al ejemplo de las derivadas, ¿por qué sentimos los profesores mayor satisfacción cuando utilizan los algoritmos de derivación con eficacia para resolver problemas de optimización o para representar funciones, que si le dan sentido a la noción de derivada, pero a la hora de representar gráficamente la función, cometen graves errores? ¿Modificaremos, en el futuro inmediato, esta práctica de enseñar los algoritmos de derivación, en favor de la adquisición del sentido, o en favor de una mayor mecanización con el empleo de calculadoras gráficas y ordenadores?

A este tipo de cuestiones, también debería dar respuesta la Didáctica. Si la Didáctica dice que el problema es largo, difícil, que hay que darle tiempo, el profesor, cada profesor, cada día de cada año, que tiene que abordar situaciones de enseñanza reales, adoptará la solución personal o colectiva, si trabaja en colaboración con su departamento (situación que rara vez se da), que estime mejor.

Por otra parte, los problemas con los que se encuentra el profesor de matemáticas hoy en el aula, no son sólo de tipo "didáctico" para los que hay soluciones "didácticas", sino que los principales problemas son de ruptura del contrato didáctico, pero no matemático sino escolar. Los alumnos, modelizados en la teoría de situaciones, son alumnos "modelo" que aceptan el trabajo matemático propuesto por el profesor. ¿Qué ocurre si el trabajo propuesto no es aceptado por el alumno? No hay que caer más en la ideología de "con este tipo de actividades, todos mis alumnos aprenderán, todos serán felices e incluso les gustarán las matemáticas"; hay que decir, si es posible desde resultados de la investigación en didáctica, que las situaciones que se proponen garantizan el éxito en un porcentaje de escolares, pero que no va a ser el 100%, pues influyen diferentes tipos de fenómenos en el éxito escolar matemático. Ello contribuiría a eliminar el sentido de culpabilidad creado en algunos profesores por no alcanzar los éxitos proclamados por los innovadores (muchos de ellos hoy, instalados en la administración).

Hay que aceptar que, con la generalización de la enseñanza, el rechazo por parte de algunos alumnos de cualquier tipo de actividad matemática, va a constituirse en un obstáculo, a veces insuperable, para cualquier situación de aprendizaje propuesta. Los resultados conocidos sobre consecución de los objetivos en la secundaria obligatoria, así lo corroboran.

A lo que hay que añadir que, como factor de la calidad de la enseñanza dada por un profesor, su formación didáctica y profesional viene bastante después de sus cualidades personales, de su formación matemática inicial y de su experiencia. Más en general, el público tiende a pensar que la suerte social y económica de la mayoría de los alumnos depende poco de la calidad y cada vez menos, de la cantidad de enseñanza que han recibido. Los padres no consideran la enseñanza como importante para sus hijos, más que en la medida en que crea diferencias con los otros niños. Concluyen por tanto que su porvenir depende poco de lo que se investiga en didáctica: una mejora general de la enseñanza.

La Didáctica de las Matemáticas debería dedicar una parte importante de sus investigaciones al estudio de las condiciones de aprendizaje de niños desfavorecidos socialmente, faltos de afecto, o con discapacidades físicas o psíquicas, para que en un futuro, los profesores tuviéramos unos resultados teóricos en los que justificar nuestros resultados.

¿Qué se investiga en Didáctica de las Matemáticas en mi entorno más próximo: mi Comunidad Autónoma, con Universidad propia, o mi país?

La situación actual, brevemente, podría describirse así:

— La Escuela de Magisterio existe desde hace más de cien años. En la actualidad, los profesores de matemáticas están adscritos al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, al que corresponde tanto la enseñanza de las matemáticas como de la didáctica de la enseñanza de las matemáticas a los futuros profesores de primaria. En ese grupo de profesores hay personas que, desde hace algunos años, se interesan por la Didáctica de las Matemáticas, en particular desde la perspectiva "broussoniana": una invitación a G. Brousseau de mediados de los 80, seguida de sucesivas visitas a la Universidad de Zaragoza, del propio G. Brousseau y de otros colegas franceses a impartir cursos de Doctorado; la presencia en Logroño de Julia Centeno, recientemente fallecida, que también había trabajado en Burdeos. Me atrevería a decir que este grupo está en una fase de iniciación al estudio de la teoría de la Didáctica de las Matemáticas, del que poco a poco van saliendo algunos trabajos interesantes, sobre la Geometría para niños deficientes visuales, o sobre el paso de la aritmética al álgebra.

— En la sección de Matemáticas de la Universidad no se contempla, en los planes de estudio actuales de Licenciatura, la presencia de una materia o asignatura troncal que se refiera a la Educación Matemática o a la Didáctica de la Matemáticas. Por tanto la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas de secundaria sigue siendo, al menos en esta región autónoma, fundamentalmente matemática, y las posibles materias sobre enseñanza de las matemáticas quedan reducidas a una parte del C. A. P. (en el futuro, Curso de Capacitación Pedagógica) que imparte el ICE de la Universidad.

— Finalmente, existen la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas, pero prácticamente sin actividad en este terreno, y algunos grupos de profesores que trabajan en sus centros o en los Centros de los Profesores, pero no desde una perspectiva de investigación, sino más bien de innovación, ligada en general a la nueva estructura educativa.

¿Qué medios materiales (tiempo incluido) existen a disposición de los potenciales o reales investigadores?

Falta en todo el país la implantación de una estructura que permita que la investigación, bien en Didáctica de las Matemáticas, bien en Educación Matemática, se desarrolle de manera institucional y profesional. Si bien se ha avanzado algo en los últimos años, es escaso el nº de profesores universitarios que se dedican a la investigación en didáctica de las matemáticas. A ello hay que añadir que falta una tradición matemática, por no decir científica, en la que los profesionales de la matemática, digamos los profesores universitarios de la materia, se hayan implicado o se impliquen en acciones positivas sobre la enseñanza de las matemáticas, a diferencia con nuestros países vecinos: Francia, Italia, Alemania, donde en uno u otro sentido, un numeroso grupo de matemáticos, a todo lo largo de este siglo XX, y no sólo en los últimos años, se han pronunciado sobre cuestiones de enseñanza: Choquet, Lichnerowitz, Dieudonné, Kuntzmann, Kahane…, Enriques, Castelnuovo, Peano, Betti, De Finetti…, F. Klein.

¿Sienten los profesores de matemáticas la necesidad de un aporte universitario de la investigación de Didáctica de las Matemáticas?

Una buena formación matemática de los profesores exige conocimientos matemáticos particulares, presentaciones específicas de las matemáticas que tendrán que enseñar y también conocimientos de las condiciones didácticas de estas enseñanzas.

A este respecto, se impone una constatación bastante desagradable: la profunda comprensión de las condiciones de existencia y de difusión de un conocimiento parece siempre mucho más complejo que este conocimiento mismo. Además dado el número de nociones matemáticas a revisitar y comentar, el proyecto toma rápidamente un tamaño considerable, sobre todo si se quiere yuxtaponer a un tratamiento puramente matemático (es decir, clásico), uno “didáctico”. De hecho ambos tratamientos debieran confundirse en un curso único de Matemáticas Didácticas, o Matemáticas para la Enseñanza.

La enseñanza de la didáctica de las matemáticas puede ayudar a los enseñantes, al explicarles ciertos fenómenos inevitables de los que, equivocadamente, se les atribuye toda la responsabilidad. Sin embargo, la ingeniería que se propone, las condiciones que presiden el aprendizaje de un saber matemático, no se pueden comunicar y utilizar sin un discurso que justifique su organización apoyándose en saberes “sabios”. Este discurso parece a veces a los enseñantes desproporcionado con la banalidad de las preocupaciones a que se dirige. La complejidad estructural de la didáctica de las matemáticas hace difícil su introducción en la formación de los profesores, tanto más cuanto el número de buenos candidatos para enseñar matemáticas es ya insuficiente en algunos países.

La participación en la formación continua, no basta para establecer y mantener el papel de la didáctica de las matemáticas. A menudo sirve al didacta para ampliar su campo de experiencias, pero tiende a favorecer una pérdida de rigor, un borrado de las referencias y un desmigajamiento de los saberes y de la comunidad. Los intervinientes evitan a su auditorio el trabajo de aprendizaje, de confrontación, de referencias, y prefieren seguir las modas para parecer útiles e innovadores.

El porvenir de la didáctica de las matemáticas, en tanto que medio sociocultural de mejora de la enseñanza, está ligado a la emergencia de una concepción más profesional del oficio de enseñante. Hay que decidir en el interior de la comunidad de los matemáticos, en que momento la formación matemática debe reordenarse en función de esta preparación profesional.

¿Cómo se difunden las investigaciones? Una vez difundidas ¿qué efecto causan, qué modifican?

La razón principal por la que los resultados de las investigaciones en didáctica de las matemáticas se difunden con dificultad es que la mayor parte de los agentes difusores se ven inducidos por el sistema a realizar un uso ilegítimo y distorsionado de ellos, debiendo ceder a presiones múltiples y convergentes: la noosfera, la prensa, los padres, los profesores. Toda una cadena, en la que todos están sometidos a las reglas de su contrato didáctico. Todos cedemos más o menos, para economizar tiempo, espacio, por conformismo, por proselitismo, por ideología…

Para combatir esta tendencia es preciso que los investigadores produzcan, cada vez más deprisa, respuestas más claras. Ahora bien, la investigación es lenta, los estudios no se escriben, si se quieren mostrar todos los detalles serían de gran tamaño, los textos no se publican, el público (especialista) que los podría leer no es lo bastante numeroso para justificar la publicación. Pero además, la sociedad pide, naturalmente, al didacta bien la formación de los maestros, bien la producción de ayudas para la enseñanza, bien el alineamiento de sus textos científicos con los cánones de los dominios establecidos, lo cual mata el objeto de la investigación.

Entonces, el enseñante, el formador, el ideólogo se precipitan sobre las producciones del investigador, propagando sus concepciones antes de ser problematizadas, se conocen sus experiencias antes de ser analizadas, sus resultados se leerán por encima, por las necesidades de la acción, y sus conclusiones seleccionadas en función de su forma (estadísticas) o de su receptibilidad; y cuando el investigador quiera presentar su trabajo, el terreno ya está pisoteado, y su tarea es más difícil y aparentemente vana.

Podemos ver cómo la investigación en didáctica de las matemáticas actualmente es explotada y vuelta contra los profesores, en función de la ley del mercado de las ideologías y de la venta de libros. Pero la vocación de la didáctica de las matemáticas está en oposición a estas intervenciones tremendistas: en medicina el descubrimiento del microbio de la tuberculosis no permitió vencer inmediatamente la enfermedad, pero sí disculpar a los enfermos por haber ofendido a la naturaleza; de modo accesorio una cierta higiene se consideró como buena prevención al contagio.

¿Se tienen vías de acceso sencillas a los textos de investigación en didáctica?

Este es otro de los problemas graves para que la mayoría de los profesores acceda a los resultados: Si se quiere acceder a una "bibliografía universal", es extensísima por lo que se puede referir a un solo tema, por tanto se presenta como inabordable.

En la actualidad, no existen textos fundamentales sobre Didáctica de la Matemática de fácil acceso, en los que se exponga la teoría de modo sistemático y con suficientes ejemplos de diferentes niveles. Tendremos que esperar que el futuro nos sirva estos trabajos.

¿Se puede considerar que un profesor que lleva veinte años dando clases, preocupándose de "mejorar sus clases", de leer algunos artículos de didáctica (teóricos y prácticos), todavía no "hace bien sus clases"?

CAPÍTULO 9

INVESTIGADORES Y PROFESORES: DOS CULTURAS

JUAN ANTONIO GARCÍA CRUZ
(SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS)
I.B. DOMINGO PÉREZ MINIK
LA LAGUNA. TENERIFE ISLAS CANARIAS

De los objetivos de este seminario abordaré aquellos que, a mi juicio, pueden interesar a la mayoría de la comunidad educativa.

Lo que sigue son mis reflexiones a las preguntas:

¿Qué aporta la investigación a la práctica docente?

y ¿Qué aporta la práctica docente a la investigación?

Empezaremos por la primera con otra formulación:

¿Cómo juzgar la influencia de la investigación en educación matemática sobre la práctica docente?

Hay varios ámbitos a los que uno puede mirar. Por un lado están los documentos curriculares de todo tipo, sean diseños curriculares o decretos del currículum. Por otro lado están los libros de texto, los programas educativos en entornos informáticos, los materiales de apoyo a la práctica. Finalmente queda la propia actividad del docente.

Sigamos con otras preguntas, más concretas, y en uno de los ámbitos señalados:

¿Influye la investigación en los documentos curriculares?

¿Influye ahora mismo?

¿Ha influido siempre?

Por espacio, tiempo y conocimiento, haré un breve recorrido por las dos últimas reformas acaecidas en este país: La Ley General de Educación y la Ley de Ordenación General de Sistema Educativo.

La reforma de la Ley General de Educación(1970) es, en principio, la más clara influencia en nuestro país de la revolución conocida como “matemática moderna”. Esta propuesta, arranca con el ya conocido Seminario de Royaumont (1959) y sigue con otros seminarios tanto en América como en Europa. Por todos es conocida la posición predominante del famoso matemático francés Jean Diudonné, y su propuesta sintetizada en ofrecer a todos los estudiantes una enseñanza basada en el carácter deductivo de la matemática y que, por lo tanto, partiera de unos axiomas básicos en contraposición a la enseñanza, falsamente axiomática, de la geometría imperante en las escuelas en aquel momento.

L. PUIG (ED.). *INVESTIGAR Y ENSEÑAR. VARIEDADES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 109-121

También, durante el transcurso del seminario, se produjo la intervención de otro matemático francés, G. Choquet[1] que, apoyando la propuesta de Diudonné, y en el mismo sentido afirmó:

> *[…] disponemos de un excelente ejemplo, el conjunto de los números enteros, donde estudiar los principales conceptos del álgebra, como son la relación de orden, la estructura de grupo, la de anillo […]*

Estas dos intervenciones dibuja el panorama general con el que debería arrancar la reforma. La primera, el objetivo principal que iba a caracterizar la enseñanza de la matemática; la segunda, cuál era el contenido más apropiado. Y ambas daban respuesta a qué conocimiento era el adecuado a impartir por los profesores de enseñanza básica y media.

La idea en principio parecía bastante lógica y coherente. Por un lado se pretendía transmitir a los alumnos el carácter lógico-deductivo de la matemática y al mismo tiempo unificar los contenidos por medio de las estructuras algebraicas y los conceptos de la matemática superior, como son los concepto de relación, correspondencia y función.

Además se tenía un valor añadido. El fracaso que los alumnos experimentaban en las operaciones básicas, para el cuál no parecía haber remedio, se podría subsanar con una adecuada comprensión de las propiedades de las estructuras algebraicas. Así, la ley distributiva del producto sobre la suma en un anillo resolvería el problema de quitar paréntesis o de sacar factor común.

Esta reforma tiene, en nuestro país, su punto culminante en los programas de matemáticas del B.U.P. (1975). Es cierto que ya hubo reforma en el mismo sentido en la década de los sesenta en nuestro país, pero, la que la mayoría de nosotros hemos vivido como alumnos, profesores o como alumnos y profesores es la de 1975 en lo que respecta a enseñanzas medias.

Así un alumno al acabar la enseñanza básica y acceder al bachillerato se volvería a encontrar con la estructura de anillo y cuerpo. Este es uno de los papeles asignados a los polinomios y las fracciones algebraicas, entre otros, y fundamentalmente a los números reales y complejos: servir como materialización de estructuras abstractas y guiar hacia las mismas por el paralelismo y analogías con los conjunto numéricos de los enteros y los racionales ya introducidos en la segunda etapa de enseñanza general básica. En segundo, se abordaría el concepto de espacio vectorial circunscrito al plano, para generalizarlo en tercero y COU. Y desde primero hasta COU el alumno realizaría un adiestramiento en el estudio del análisis vía el estudio de las funciones continuas, derivables e integrables.

¿Le podemos reconocer a estas recomendaciones el carácter de derivar de la investigación en didáctica?

1.Fehr, H.F. *New thinking in school mathematics*. O.E.E.C. París, 1961.

No, o por lo menos, no lo parece.

Lo que sí parece claro es que esta propuesta proviene de la propia matemática. Sus ideólogos y sus constructores son matemáticos profesionales en su mayoría.

He traído aquí este ejemplo porque es, a mi juicio, un modelo de una reforma que no se planteó inicialmente como derivada de la investigación, sino que su reconocido fracaso animó a muchos estudiosos a iniciarse en un campo hasta entonces casi inexplorado.

¿Qué ocurre con la reforma actual, la L.O.G.S.E.? Sin entrar en un análisis detallado, podemos señalar una característica diferencial respecto de la anterior reforma. La filosofía que sustenta la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no proviene del ámbito de la Matemática sino de otro ámbito externo. Y esta es una cualidad que importa.

> *Hace diez o 15 años hubiera sido inconcebible someter a investigadores y educadores a un debate con el propósito de tratar una teoría del conocimiento. El interés de los educadores era conseguir que el conocimiento entrara en las cabezas de sus alumnos, el de los investigadores encontrar la mejor forma de lograrlo.*
>
> *Había entonces poca incertidumbre, si alguna, sobre qué conocimiento era el que los estudiantes deberían adquirir, y no existía ninguna duda de que, de una u otra forma, el conocimiento podía transferirse desde el profesor al estudiante.*
>
> *La única cuestión era, cuál debería ser la mejor manera de realizar la transferencia. Los investigadores armados con sus test y sus sofisticados métodos estadísticos iban a suministrar la respuesta definitiva (Ernst von Glasersfeld[2]).*

Desde el punto de vista de von Glasersfeld, al comienzo de la ya lejana década de los setenta, existía un valor compartido por la comunidad de investigadores y de profesores: el conocimiento a transmitir que era, además, el conocimiento que deberían de adquirir los alumnos durante sus años de enseñanza no universitaria, enseñanza básica y media por no volver a utilizar un término negativo.

En octubre de 1975, el que escribe, inició su andadura como profesor de bachillerato. No recuerdo que existiera ninguna crítica al programa de matemáticas de primero. Muy al contrario, en aquellos días, y en la comunidad de donde procedo, existía una gran esperanza en que por fin, los pro-

2.Von Glasersfeld, E (1987). "Learning as a constructive activity" en *Problems of Representation in the Teaching and Learnig of Mathematics* (Ed. Claude Janvier). Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, pág. 3.

fesores de matemáticas, íbamos a poder explicar matemáticas modernas en los institutos y sustituiríamos con gran rapidez los programas obsoletos del 5º y 6º del bachillerato del plan 67. Tampoco existían dudas sobre el conocimiento a transmitir y buscábamos la mejor o mejores maneras de lograrlo. En ese sentido de participación del sentimiento general que dibuja la cita de von Glasersfeld.

Recuerdo que en EGB la situación era más o menos la misma. El profesor Aizpun nos visito aquel curso académico e impartió un seminario de materiales estructurados para explicar las nociones básicas de la Teoría de Conjuntos, de los sistemas de numeración y de las estructuras algebraicas a los alumnos de enseñanza general básica. La reunión fue multitudinaria. El acuerdo parecía casi total. No existían dudas. O no se manifestaban. Pero...

Al año siguiente en el III I.C.M.E, celebrado en Karlsruhe, la intervención de P. Hilton[3] en su conferencia plenaria dirigida a los asistentes es, a mi juicio, el mejor epitafio que he encontrado como colofón a aquella experiencia:

> *El análisis se construye de forma que parezca un conjunto de trucos que tiene que memorizar el estudiante y una vez que esta entrenado en ellos se considera que ha alcanzado el nivel de madurez requerido. Para que el análisis parezca relevante al alumno, se le ofrecen ejemplos acabados, es decir, ejemplos diseñados simplemente para ilustrar las habilidades particulares que el alumno se esfuerza en adquirir.*

Hilton hace recapitulación de casi década y media de estructuralismo y su conclusión es desmoralizante: el estructuralismo ha degenerado en el más puro mecanicismo. Las estructuras matemáticas ricas están muy lejos de los alumnos, las ideas unificadoras tampoco se aprenden, ya ni siquiera se enseñan, al final todo ha quedado en un juego de reglas, carentes de sentido para la gran mayoría de los alumnos.

Pero…, ¿qué pasó con el profesorado? Y me refiero sólo a los de enseñanza media, que serán la mayoría del profesorado encargado de llevar a cabo la reforma L.O.G.S.E. en sus últimos tramos.

La mayoría fueron entrenados, educados como licenciados en Matemáticas en el estructuralismo, más o menos puro. Ejercieron sus primeras artes como profesores dentro de la misma tendencia y pusieron en ella toda su esperanza. Incluso la valoración actual de tal enfoque hace que cualquier cosa que venga en su sustitución no se considera auténticas matemáticas. Y esto último no es un sentimiento compartido sólo por los profesores de enseñanza media.

3.Hilton, P. (1976). Education in Mathematics and Science Today: The Spread of False Dichotomies, en: *Proceedings of ICME III*. Karlsruhe, pp. 75-97.

Me atrevería a afirmas que esta valoración sobre cuál es el conocimiento a transmitir, es una componente esencial de la cultura de los profesores de matemáticas en la enseñanza media. Además casi se concreta en una sobrevaloración de los contenidos propios del análisis matemático, hasta el extremo de que todo contenido no directamente relacionado con él, se somete al mismo mediante una proyección hacia los cursos superiores.

Lo que verdaderamente importa es la lógica interna de los matemáticas, y esta se materializa de forma importante en el estudio analítico de las funciones reales completado con la derivación e integración.

Quizás sea este el legado más genuino de la "matemática moderna" que aún pervive en el fondo de la cultura de los profesores de enseñanzas medias.

Esta es la primera, y a mi juicio, más importante cualidad que diferencia a las dos culturas. Cuál es el conocimiento que ha de ser el componente importante del proceso de enseñanza y de aprendizaje. Este conocimiento es importante en sí mismo, lo que importa es la matemática, y se considera como un medio para desarrollar o permitir a los alumnos el desarrollo general de su educación.

A los diseñadores y redactores de los currículum se les ha dado siempre el poder y el deber de influir en los cambios que a nivel político se proponen desde las administraciones educativas. No son los únicos que disponen de tal poder. Los diseñadores y redactores de los libros de texto también influyen, incluso me atrevería a afirmar que su influencia es mayor, pues se supone que interpretan y facilitan la interpretación de los documentos curriculares.

Una simple ojeada, por ejemplo, a los documentos curriculares de la reforma educativa en este país, en concreto al Diseño Curricular Base para la Secundaria Obligatoria[4], le produce a uno en primer lugar una sensación de desasosiego. Que a continuación se transforma en ansiedad, y termina sugiriendo unas cuántas preguntas.

La introducción al área de Matemáticas es demasiado larga, ocho páginas, y densa. Su terminología y lenguaje empleado es ajeno a la mayoría del profesorado.

¿Por qué no se hacen documentos más legibles y cortos?

En el capítulo dedicado a los bloques de contenidos.

¿Cuál es la razón de la nueva clasifican los mismos? ¿Por qué es pertinente? No se explica pues se abordan los bloques sin más preámbulo, ni queda claro de la introducción para la mayoría de los profesores que hayan tenido la suficiente paciencia de leerla.

¿Por qué no se ilustró la presentación de los contenidos con ejemplos aclaratorios? Creo que para muchos profesores la publicación de los Están-

4. Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria II. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid 1989.

dares Curriculares y de Evaluación[5] (USA) vino a arrojar bastante luz y sirvió, en muchos casos, como aclaración del diseño curricular base.

Por otro lado, la introducción a cada bloque de contenidos servía de ilustración a las intenciones del diseñador respecto del panorama metodológico que se proponía. Está introducción se ha suprimido en el decreto del currículum, quedando este último aún más sintético y carente de ilustración que el diseño original.

Me he extendido un poco en este ejemplo para ilustrar dos características propias de la cultura de los investigadores.

La primera es el lenguaje, incluso en un ámbito que pretende mediar entre la investigación y la práctica, como es el de los documentos curriculares.

La segunda, aunque más difusa, tiene que ver con la actitud propia del que esta situado en una posición prominente, y que genera en los profesores una actitud de distanciamiento y cautela nada desdeñable hacia el propio discurso que se le transmite.

Pasemos ahora a los otros dos ámbitos de los que hablaba al principio: los materiales de uso en la práctica directa y la propia práctica.

Me es difícil diferenciar los dos ámbitos por razones obvias. Los propios materiales están diseñados para ser utilizados y de su uso se derivaran importantes consideraciones. Ya sea respecto a su idoneidad o a su extensibilidad en la práctica misma.

Para ilustrarlo, veamos como han circulado en nuestro país dos materiales didácticos basados en la investigación.

EL *LENGUAJE DE FUNCIONES Y GRÁFICAS* (SHELL CENTRE)

Este material fue desarrollado en el Shell Centre de la Universidad de Nottingham (Inglaterra) bajo la coordinación de Malcolm Swan.

Sus objetivos principales eran disponer, por una parte, de una secuencia didáctica de situaciones de aprendizaje que rompiera y ayudara a superar determinadas concepciones erróneas que se detectan en los alumnos sobre la relación funcional de variables y su gráfica asociada; y, por otro lado, lograr una mayor comprensión de esa relación abstracta. Entre otras, cabe destacar, la concepción no correcta de que la gráfica de una función no es, en general, un dibujo de la situación que describe y la habilidad para coordinar la información relativa a dos variables y a los dos ejes.

En nuestro país el documento circuló inicialmente (1988) en forma de fotocopias de los cuadernos de clase A (estudio cualitativo) y B (estudio

5. *Estándares Curriculares y de evaluación para la Educación Matemática* (NCTM). Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”. Sevilla 1991.

cuantitativo), sin estar acompañados de ninguna orientación respecto de su uso ni justificación de su secuencia. Es posible que esta sea una de las razones de la utilización, principalmente, como banco de actividades por los profesores que inicialmente tuvieron acceso al mismo.

Se ha dado el caso de profesores que han llevado la secuencia al aula al revés. En primer lugar las actividades cuantitativas y después las cualitativas. Al ser preguntados del porqué de tal ordenación adujeron que las actividades de tipo cualitativo son más difíciles que las cuantitativas y respondieron, además, con otra pregunta: ¿cómo se puede abordar un estudio cualitativo sin concretarlo al mismo tiempo con un estudio cuantitativo?

Acompañando a este material se publicó en Inglaterra y en la revista Mathematics Teaching, tres artículos firmados por componentes del equipo investigador del Shell Centre, donde se informaba de la investigación y se dibujaban pautas para el desarrollo de los cuadernos en el aula referentes al trabajo individual o en grupo de los alumnos, el papel del profesor, incluso la mejor disposición posible de las mesas de trabajo y la organización de los alumnos en grupos.

Posteriormente, se publicó en el País Vasco una edición en castellano (COP-PAT de Txurdinaga. Bilbao 1989) que con el tiempo y debido a la colaboración entre el M.E.C. y la Universidad del País Vasco [6] se ha hecho una mejor difusión al editarse por el Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación el documento completo.

Que este relato haya sido un poco largo, es debido a que me parece una situación característica de como circula un material que proviene de la investigación. Lo primero que llega a manos del profesorado, o lo que se hace circular, es el cuaderno de actividades. Es decir, la información que circula es aquella de uso directo para el aula. Y aunque, ello es importante, ya que el profesor prefiere algo que tenga inmediata aplicación, esta información por la forma sesgada en que aparece tiene como consecuencia inmediata un uso que no se corresponde con la intención del investigador. Y el profesor la utiliza como fuente para resolver los problemas concretos que le surgen en su práctica.

Otra cuestión que surge entre los profesores que la estudian, es que, en principio no está muy claro lo que se pretende ni por qué. Incluso después de haber sometido el material a un análisis crítico y a varios contrastes entre profesores que lo han usado, es muy probable que no se llegue, con certeza, a descubrir las intenciones completas del investigador.

Otro ejemplo más sobre aquel material. Estando de asesor en un Centro de Profesores, un centro de la reforma me solicitó algo novedoso para trabajar las funciones. A raíz de esta solicitud tuve una entrevista con un profesor, y comentamos el sentido de las dos unidades y cómo se podrían

6. *El lenguaje de Funciones y gráficas*. Shell Centre for Mathematical Education. M.E.C y Servicio Editorial Universidad del País Vasco. Bilbao 1990.

encajar en su programación de aula. Al cabo de un mes, recibí otra visita del mismo profesor y me contó que no había quedado muy satisfecho de las actividades pues requerían de mucho tiempo para su desarrollo; se había saltado algunas de las del cuaderno A, las cualitativas, para avanzar más rápido, y no había podido concluir el cuaderno B por completo. Al final y antes de despedirse me lanzó la siguiente pregunta ¿Tienes algo del mismo estilo para explicar los polinomios?.

En más de un seminario de profesores de medias y de enseñanza básica hemos hecho un análisis del documento. Por lo general, los profesores de enseñanza básica consideran que la primera parte, "la globalizada y cualitativa" es más apropiada para su nivel, aunque manifiestan que muchas de las situaciones les parecen muy complicadas para sus alumnos, incluso para ellos mismos. Por el contrario, los profesores de medias, empezaron a valorar el documento cuando llegaron a las últimas actividades del cuaderno B, en particular la última, donde se describe una situación en la que la función a estudiar consta de varias variables.

La mayoría de los profesores consideraron el documento como una buena colección de actividades para aplicar y para abordar algunas después de haber impartido el tema de funciones.

Hay, en todo lo anterior, una cierta apreciación y juicio de valor sobre lo que los alumnos pueden hacer y sobre lo que, desde el punto de vista del profesor, se considera importante.

La relevancia de los contenidos y su presentación juegan un papel crucial en su posterior aplicación, sea adecuada o no. Por otro lado, el profesor evitará utilizar todo aquello de lo que no se sienta seguro y seguirá con sus métodos y materiales tradicionales. Además las situaciones, que adquieren toda su riqueza dentro de la unidad a la que pertenecen, al aislarlas y presentarlas combinadas con materiales tradicionales, pierden todo su carácter innovador y cubren otros objetivos distintos de aquellos para los que fueron diseñadas.

Pero pienso que no importa mucho, pues un profesor ha de dar respuesta casi inmediata a los problemas que surgen en la práctica del aula. Y el profesor, en la mayoría de los casos, hace un uso propio y saludable de esos materiales.

Cambiemos ahora a un entorno informático para ver el segundo ejemplo: un programa de ordenador para el estudio de las funciones.

A GRAPHIC APPROACH TO CALCULUS (D. TALL, P. VAN BLOKLAND Y D. KOK)

Este programa es un ejemplo muy claro de una aplicación didáctica basada en un trabajo de investigación importante: la tesis de David Tall presentada en 1986 en la Universidad de Warwick para optar al grado de doctor en Educación Matemática[7].

Este programa se introdujo en la Comunidad Autónoma Canaria a través del fenecido Programa Ábaco de nuevas tecnologías.

Se utilizó una versión en español, realizada en Holanda, y se acompaña de un documento, en inglés, para su uso, que es mucho más que un simple manual.

Consta de cuatro capítulos. El primero y segundo consisten en una visión breve y general, función de algunas teclas, menú principal y algunas posibilidades de las distintas opciones del menú del programa. El tercero nos adentra en el uso del mismo y por último el cuarto trata de aspectos didácticos.

Veamos con un poco más de detalle el contenido de este último capítulo:

4. Aspectos didácticos.
4.1. Dificultades conceptuales.
4.2. Ventajas y desventajas del ordenador.
4.3. Relaciones entre el estudiante, el profesor y el ordenador.
4.4. Organización de la clase.
4.5 Un nuevo enfoque para el análisis.
4.6. Bibliografía.

En él se exponen de forma breve, pero muy clara, las orientaciones para el uso del programa basadas en las investigaciones de los autores, principalmente las realizadas por David Tall y otros, respecto a las dificultades cognitivas que encuentran los alumnos al profundizar en el estudio de conceptos de análisis tan importantes como son los de límite, derivada, tangente, diferencial e integral.

Así comienza el apartado 4.1. sobre las dificultades conceptuales:

> *Generalmente los estudiantes disfrutan con el análisis debido al éxito que tienen en el manejo de los reglas simples de derivación e integración. Sin embargo, bajo la superficie de tal éxito puede haber, a menudo, una falta seria de comprensión del significado de los conceptos.*

Es todo un aviso al mecanicismo en el que ha caído la enseñanza del análisis, y, por lo que parece ser, no sólo en nuestro país sino también en el exterior. El documento invita a los posibles usuarios, sean profesores o alumnos, al uso del mismo para luchar contra ideas conceptuales incorrectas que han adquirido a lo largo de muchos años de estudio mecanicista del análisis, y para

7.Tall, D. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using interactive Computer Graphics*. Ph.D. Thesis, University of Warwick.

ello ofrecen un entorno gráfico informático que libera al profesor y sobre todo al alumno de tediosos y necesarios cálculos y representaciones; y permite al profesor centrar el estudio en un ámbito en el que priman los aspectos conceptuales frente a los tradicionalmente mecánicos. Pero como elemento de apoyo didáctico su gran ayuda se puede resaltar en un hecho de valor incalculable: permitir el estudio globalizado de los aspectos simbólicos, numéricos y gráficos del análisis.

¿Cómo se ha utilizado y se utiliza este programa?

El nivel educativo donde mejor se han desarrollado las aplicaciones didácticas de este programa ha sido en 3º de bachillerato y en COU; también se ha hecho uso del mismo en 1º y 2º de bachillerato, incluso en los últimos cursos de la enseñanza básica.

El programa se acompaña de un documento en inglés, lo que en sí mismo es otra dificultad añadida para facilitar, a la generalidad del profesorado, el acceso completo al programa.

Las posibilidades gráficas de este programa han facilitado grandemente el desarrollo de la práctica docente, sobre todo el estudio intuitivo de los conceptos y teoremas del análisis y la posible relación entre una función y su derivada, así como el concepto de función definida a través de una integral y el significado de la constante de integración. Y, sobre todo, el desarrollo de intuiciones ricas a través de la idea generativa fundamental: el comportamiento localmente recto de las funciones derivables, que conduce entre otros, a una mejor comprensión de la regla de L'Hopital.

Su difusión se realizó a través de cursos y encuentros de profesores tanto de enseñanzas medias (Bachillerato y COU) como de enseñanza básica (7º y 8º), donde se adiestró a los profesores en su uso, se intercambiaron ideas y se sugirieron líneas de exploración.

Debido a un cambio en la política educativa de la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias a finales del curso 92, y que afectó gravemente al programa Ábaco de nuevas tecnologías, hoy día no se dispone como antaño de los cursos introductorios ni de los seminarios de seguimiento sobre el uso del programa que hicieron del mismo un elemento didáctico muy valorado en los centro de bachillerato.

Entre las razones detectadas que dificultan su puesta en práctica y su generalización como medio didáctico importante, encontramos la no familiaridad ni seguridad del profesor en el uso de los ordenadores, la no disponibilidad en el aula de matemáticas de los mismos; pero, sobre todo y muy pocas veces confesado, la inseguridad del profesorado a conducir una clase en la que priman las discusiones.

En general los contenido prescritos en algunos documentos oficiales añaden una nueva y no desdeñable dificultad para aplicar los materiales provenientes de la investigación. Como ejemplo, centrémonos en los contenidos prescritos en la prueba de selectividad del COU, que viene impuesta desde un ámbito externo. Pone el énfasis, principalmente, en aspectos mecánicos y no en los conceptuales. La cantidad de tiempo que conlleva trabajar los conceptos y no sólo los algoritmos con el alumnado, obliga, en la mayoría de los casos, a un retraso serio en el programa oficial o a dejar de lado determinados aspectos fundamentales del conocimiento matemático.

Pero hay más. Los alumnos ya no se conforman con aprobar. Aspiran, por la experiencia de otros, a una calificación alta en la prueba para poder acceder a determinados estudios superiores. Esto hace que el profesorado abandone muchas de los materiales a los que nos estamos refiriendo o por lo menos no le dedique el tiempo que hubiera deseado, para satisfacer las demandas del alumnado.

He traído aquí estos ejemplos para ilustrar lo que considero comportamientos y valoraciones características de las dos culturas.

El éxito que han podido tener los materiales descritos anteriormente, sobre todo entre los profesores de medias, creo que se debe a que tratan problemas didácticos que les afectan directamente y sobre contenidos a los que dan un gran valor.

Este valor puede ser debido a muchos factores, incluso el hecho de que estén sobrevalorados puede tener su causa en una instancia externa como es la prueba de selectividad del COU. Pero, y con todo lo importante que puede ser esta prueba de selectividad, hay algo mucho más profundo y que va hasta el núcleo mismo de la formación inicial matemática de los profesores. Todos los licenciados en matemáticas somos hijos del estructuralismo y para una gran mayoría la formación inicial se centro más en el análisis que en otras ramas de la matemática. Aunque reconozcamos que dicha formación, incluso actualmente, estuviera y esté impregnada de demasiado mecanicismo, es un campo de contenidos dónde el profesor se encuentra seguro y que es, además, valorado por distintos agentes como muy importante para la formación matemática de los alumnos que accederán a la universidad.

Los materiales anteriores comparten la exigen un cambio profundo en los hábitos metodológicos del profesorado, el replanteamiento del espacio de trabajo en los centros, y el ritmo de trabajo en la clase.

Por otro lado, me he limitado a exponer únicamente dos ejemplos de materiales derivados de la investigación y de los que una de sus ventajas es que se pueden utilizar directamente por los profesores para su práctica docente.

No podemos decir lo mismo de la gran mayoría de informes sobre la investigación. Hay varias razones:

La primera, el lenguaje empleado característico de la cultura de los investigadores.

En segundo lugar, y debido al contenido específico que tratan por lo general las investigaciones, su campo de aplicación está limitado. Un investigador se centra básicamente en un contenido concreto y muy reducido para, entre otras razones, controlar las variables que concurren y poder realizar su investigación. De esta forma la investigación puede aumentar en calidad pero evidentemente pierde aplicabilidad en la mayoría de los casos. Además, el ámbito natural donde se desarrolla este trabajo suele ser el laboratorio. Si comparamos este ámbito con el del aula lo primero que resalta es su carácter artificial.

En tercer lugar, el carácter eminentemente descriptivo de la mayoría de los informes. Y aunque son útiles por la luz que arrojan sobre los problemas del aprendizaje, no son suficientes para un profesor en su labor diaria dentro del aula.

Debido a estas tres razones pienso que la mayor parte de la investigación que se realizan tienen muy poca aplicación para la práctica educativa. De ella suelen derivar recomendaciones para la práctica que, la mayoría de las veces, son percibidas por los profesores como consignas. Y un profesor en su práctica necesita algo más que consignas o buenas recomendaciones. Necesita recursos de todo tipo, pero fundamentalmente aplicables.

En este sentido creo necesaria la presencia de un agente que medie entre los que realizan investigación básica y los que pueden aplicar sus resultados, los profesores.

Por último, una cuestión que me preocupa: ¿Para quién es útil la investigación?

Creo que en primer lugar para el investigador. Y pienso además, que la mayoría de la investigación no se realiza pensando en su aplicación o que, de ella, se deriven aplicaciones para el aula. El conocimiento en sí, que se deriva de cualquier investigación, es importante. Y la búsqueda de la aplicabilidad podría estas a cargo de otros agentes.

En este sentido se tendría algo parecido a lo que ocurre con la investigación en matemáticas puras. El matemático no se preocupa, por lo general, de la posible aplicabilidad de sus investigaciones. Aún más, de todos es conocido que muchos descubrimientos de la investigación teórica han encontrado aplicación décadas, incluso siglos después de que se lograron, y en algunos casos por pura casualidad.

Y también podría ser útil en la práctica docente si esta se realiza atendiendo a problemas planteados conjuntamente entre profesores e investigadores.

De forma metafórica, imagino dos islas. En una están los investigadores, en la otra los profesores. El mar que las separa y, al mismo tiempo, las une es la valoración del conocimiento que ambas culturas poseen. El conocimiento entendido como aquello que abarca tanto los objetivos generales de la educación cómo los contenidos específicos de matemáticas y la metodología a emplear.

Sobre ese mar se pueden establecer puentes que unan, más que separen. Un puente importante es el lenguaje. Otro, el mutuo conocimiento del trabajo que ambas comunidades realizan. Para alcanzar puntos de encuentro, es necesaria una aproximación de los investigadores a los problemas reales y a las demandas y necesidades de los profesores, si es que se quiere que la investigación en didáctica alcance realmente a la práctica educativa y la influya.

La información debe estar disponible de forma económica y de fácil acceso en el lugar de trabajo para todo el mundo. En este sentido habría que aprovechar las posibilidades que ofrecen hoy día el desarrollo de las comunicaciones.

Creo que el agente mediador no pueden ser sólo los redactores del currículum ni de los libros de texto. Es necesario crear grupos entre las dos culturas que sean capaces de hilvanar todos esos resultados desperdigados de la investigación y ofrecerlos como algo coherente para la práctica. Así como, llegar a puntos de encuentro sobre los problemas a investigar y que estos problemas partan de un consenso entre las dos culturas.