

HACIA UNA FILOSOFÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA

OLE SKOVSMOSE

TRADUCIDO POR PAOLA VALERO



una empresa docente®

Universidad de los Andes

Bogotá, 1999

PRIMERA EDICIÓN: OCTUBRE DE 1999

HACIA UNA FILOSOFÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA
AUTOR: OLE SKOVSMOSE

TRADUCIDO POR PAOLA VALERO

Traducción al español del original en inglés titulado TOWARDS A
PHILOSOPHY OF CRITICAL MATHEMATICS EDUCATION.
COPYRIGHT © KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS B.V. 1994
ISBN: 0-7923-2932-5

D. R. © 1999 una empresa docente®

Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, archivada o transmitida en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico, de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro, sin el previo y expreso permiso por escrito de “una empresa docente” y del autor.

Diseño carátula: INTERLÍNEA EDITORES LTDA.

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976
Tel.: (57-1) 2849911 ext. 2717
Fax: (57-1) 3520466 ext. 2709
Servidor WWW: <http://ued.uniandes.edu.co>
Bogotá, Colombia

Primera edición: octubre de 1999

Impresión: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

ISBN 958-9216-24-2

Impreso en Colombia

TABLA DE CONTENIDO

Prefacio a la versión en español	vii
Agradecimientos	xxvii
Introducción	1
Capítulo 1: Crítica y educación	11
Crisis	12
Crítica	15
¿Emancipación?	20
Educación crítica	22
Alfabetización y alfabetización matemática	26
Capítulo 2: Democracia y educación	31
Relaciones entre democracia y educación	32
Ideas democráticas básicas	34
Competencia democrática	38
Un problema de la democracia en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico	42
Educación para la <i>Mündigkeit</i>	45
Capítulo 3: Matemáticas: ¿un poder formativo?	47
Tecnología y la paradoja de Vico	49
Matemáticas y tecnología	54
Abstracciones	57
Formalizaciones	59
El carácter crítico de las matemáticas	62
Capítulo 4: Un enfoque temático en la educación matemática	67
Algunas fuentes de inspiración	68
Planeación de un enfoque temático	71
Comentarios sobre el proyecto	77
El diario y los resultados	79
Ejemplaridad	82

Capítulo 5: “La Conejera” y “Construcciones”	89
Opiniones sobre las matemáticas	90
“La Conejera”	93
“Construcciones”	96
Comentarios sobre los proyectos	100
Capítulo 6: El conocer reflexivo	107
El conocer reflexivo: una primera aproximación	108
Reflexiones y modelaje	112
El conocer reflexivo en la práctica educativa	126
Seis puntos de entrada al conocer reflexivo	131
Una anotación sobre el conocer	136
Capítulo 7: “Subsidio familiar en una microsociedad”	139
La estructura del proyecto	139
Comentarios sobre el proyecto	143
El conocer reflexivo en el proyecto	148
Comprender la formatividad	150
Una anotación sobre las preguntas retadoras	154
Capítulo 8: “Nuestra comunidad”	157
La estructura del proyecto	158
Comentarios sobre el proyecto	164
Conocer reflexivo: un concepto abierto	168
Capítulo 9: “Energía”	171
Estructura del proyecto	172
Comentarios sobre el proyecto	179
Lenguaje formal versus lenguaje natural	183
Comentarios sobre la alfabetización matemática	188
Capítulo 10: Intencionalidad	193
Disposiciones, intenciones y acciones	194
Aprendizaje como acción	200
Diferentes formas de desarrollo epistémico	205
Fatalismo, servilismo y logro personales	210
Algunos comentarios sobre los proyectos	213

Capítulo 11: Conocer, un epílogo	217
Conocimiento, un concepto controlado	217
Conocer, un concepto abierto	220
Teorías epistémicas monológicas	224
Teorías epistémicas dialógicas	228
Conocer, un concepto explosivo	229
Bibliografía	233
Índice de autores	245
Índice analítico	249

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA EN CONTEXTO

Hacia principios de los años mil novecientos noventa no era muy frecuente encontrar obras en educación matemática que presentaran una visión de los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva más amplia que la psicológica. En especial, no era corriente encontrar escritos que hablaran sobre la dimensión política de estas prácticas sociales. Tal vez los numerosos escritos sobre etnomatemáticas de Ubiratán D'Ambrosio como son "Mathematics and society: some historical considerations and pedagogical implications" (Matemáticas y sociedad: algunas consideraciones históricas y pedagógicas, 1980) y "Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics" (Etnomatemáticas y su lugar en la historia y pedagogía de las matemáticas, 1985), junto con el libro de Stieg Mellin-Olsen, *The political dimension of mathematics education* (La dimensión política de la educación matemática, 1985) fueron unos de los precursores de este campo. *The philosophy of mathematics education* (La filosofía de la educación matemática) de Paul Ernest, publicado en 1991, también fue un intento por ofrecer una perspectiva de las matemáticas que, además de considerar su naturaleza, conectara tal conocimiento con un conjunto más complejo de visiones sobre la sociedad, la política y los diversos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Tal vez otras personas argüirán que lo anterior no es cierto. Para mí lo fue. Encontrar estas obras fue el inicio de un interés especial por realizar un trabajo interdisciplinario donde conceptos provenientes de la ciencia política y de la lingüística pudieran iluminar las diferentes prácticas sociales que componen lo que podríamos llamar la educación matemática. Al inicio de este camino, más sorprendente aún fue encontrar algunos artículos como "Mathematical education versus critical education" (Educación matemática versus educación crítica, 1985), "Mathematical education and democracy" (Educación matemática y democracia, 1990), o "Democratic competence and reflective knowing in mathematics" (Competencia democrática y conocer reflexivo en matemáticas, 1992). Todos eran de autoría de Ole Skovsmose, investigador danés. En 1994, apareció el libro titulado *Towards a philosophy of critical mathematics education*, donde se reunía el trabajo de más de una década de este mismo autor. Encontrar este libro fue para mí la

confirmación de que valía la pena dedicarse a explorar un campo, al parecer marginal —pero no por esto irrelevante— de la educación matemática: la dimensión política del conocimiento matemático y de la educación matemática.

La versión española de este libro, *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*, que he tenido el gusto de traducir y presentar a los lectores de habla hispana, es el resultado del encuentro de dos personas con intereses y preocupaciones muy similares, pero con dos experiencias de vida culturalmente distantes. En este prefacio deseo presentar algunas ideas que permitan al lector de habla hispana contextualizar y ubicar mejor esta obra. Por tal razón, presentaré al profesor Ole Skovsmose como persona; el ambiente social y político donde este libro surgió y las particularidades de la sociedad danesa que lo posibilitaron. También presentaré un resumen crítico del libro y algunos cuestionamientos que surgen al leer esta filosofía de la educación matemática crítica desde una perspectiva latinoamericana.

UN LIBREPENSADOR MULTIFACÉTICO

En 1996, durante el Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME 8) en Sevilla, España, conocí al Profesor Ole Skovsmose. Danés. En sus cincuentas. De barba canosa y cabello un poco alborotado. Vestido con camiseta y pantaloneta azul para soportar el calor del verano sevillano. Invitado a presentar una conferencia regular titulada “Critical mathematics education — Some philosophical remarks” (Educación matemática crítica — algunas anotaciones filosóficas, 1996). Un año después, en agosto de 1997, lo encontré de nuevo, esta vez en su oficina de la Escuela Real Danesa de Estudios Educativos en Copenhague, Dinamarca. Este fue el inicio del descubrimiento de una persona fascinante, tanto como su filosofía de la educación matemática crítica.

Si tuviera que decir una frase para describir a Ole Skovsmose, diría que, más que un investigador convencional en educación matemática, es un librepensador multifacético. Permítanme explicar lo que esto significa. Una connotación de librepensador es aquella persona “que no se sujeta a dogmas, particularmente religiosos, en el ejercicio de su razón” (Moliner, 1977, p. 252). La separación del dogmatismo en el caso de Ole no sólo tiene que ver con la no aceptación irreflexiva de dogmas religiosos, sino especialmente de cualquier dogma racional que no pueda pasar por el filtro de la crítica. Esta característica se puede ver claramente a lo largo de su libro cuando examina con detalle los “dogmas” del conocimiento, de las matemáticas y de la educación matemática. Pero además de ser librepensador, es también multifacético y esto quiere decir que su trabajo y su vida no sufren de las restricciones de la especialización, sino que se mueve dentro

de una perspectiva amplia, diversa e interdisciplinaria. Esto se refleja claramente en su historia académica y en sus intereses personales.

Ole nació en Hjørring, una población de 25.000 habitantes, al noroeste de Dinamarca. Después de haber realizado sus estudios primarios y básicos secundarios y haber trabajado como entrenador de balonmano, ingresó al Seminario de Profesores de Hjørring. Allí siguió tres años de estudios en las materias escolares y en pedagogía. Su área de concentración fue matemáticas, no porque tuviera un interés especial por ellas en ese momento sino porque, como él dice, “era claro, las matemáticas eran fáciles para mí; extremadamente fáciles”.

A mediados de su formación como maestro de escuela, Ole comenzó a sentir cierta necesidad por realizar estudios más teóricos. Fue así como decidió ingresar a la Universidad de Copenhague para cursar matemáticas. Una vez allí, combinó esta área con la filosofía. Desde ese momento, a inicios de la década de 1970, comenzó a juntar distintos intereses que más tarde lo conducirían formular sus primeras ideas sobre una educación matemática crítica. Esos intereses son la tradición alemana y escandinava de teoría crítica general y la educación crítica representada por autores como Jürgen Habermas y Theodor Adorno, la filosofía de las matemáticas representada por autores escandinavos como Paul Lorenzen y Oswald Schwemmer (1975), la filosofía de la ciencia y la tecnología y algunos trabajos en educación y matemáticas como los escritos del alemán Falk Riess (1977).

Simultáneamente con sus estudios universitarios, Ole trabajó como profesor de escuela y posteriormente de seminario de formación de maestros. De esta combinación de una experiencia teórica en la universidad y de una práctica en su ejercicio como maestro surgió la idea de dedicarse a investigar en educación matemática que, como él mismo anota, “no existía formalmente en Dinamarca en ese entonces, pero que empezaba a formarse en Alemania con, por ejemplo, el Instituto para la Didáctica de la Matemática en Bielefeld, dirigido por Michael Otte”. Como resultado de este interés nació su primera propuesta de doctorado llamada “Educación matemática crítica”, que presentó en una conferencia para profesores y estudiantes en el sitio donde trabajaba. Esta primera conferencia, dice Ole, “fue difícil. Me demoré meses enteros preparándola. Para mí tenía sentido, pero parece que no mucho para otros”.

Hacia el año de 1975, una vez obtenido su examen de candidatura — que comparado con el sistemas universitario estadounidense corresponde con la terminación de una maestría — se propuso realizar su Ph. D. en el Instituto Real Danés de Investigación Educativa. Allí encontró al profesor Bent Christiansen (ver Christiansen et al., 1986) quien en su primer encuentro dio un “no amistoso” a la propuesta de Ole, pero que dos años más tarde terminaría siendo su director de tesis. Desde 1977 hasta 1980, Ole trabajó en su tesis de doctorado. En ese entonces su motivación era la

misión por conciliar dos experiencias contradictorias. Por un lado, en su propia vivencia como estudiante había sentido como la existencia de la autoridad del profesor era capaz de controlar y apaciguar a los estudiantes. Esto era todavía más evidente en la educación matemática. Como Ole anota, “algo andaba mal en la manera como la educación matemática silenciaba y suprimía a las personas”. Y por otro lado, su experiencia como profesor de matemáticas le había mostrado que era posible hacer las cosas de otra manera para que tal autoridad no cayera en represión: “yo lo había logrado en mi clase”. Así que con la inspiración de las ideas críticas y con la imagen de las atrocidades de Auschwitz como una metáfora de represión tecnológica en mente, se metió en la labor de producir escritos que, en un lenguaje no muy complicado y de fácil acceso para los maestros daneses y escandinavos en general, pudieran llevar un mensaje de posibilidades de una práctica diferente. Estos escritos resultaron en una serie de tres libros: *Forandringer i matematik undervisning* (Cambios en la educación matemática, 1980), *Matematikundervisning og kritisk pædagogik* (Educación matemática y pedagogía crítica, 1981a) y *Alternativer i matematik undervisningen* (Alternativas en educación matemática, 1981b). Estos tres libros fueron la preparación para su tesis final de doctorado que su publicó en el libro *Kritik, undervisning og matematik* (Crítica, enseñanza y matemáticas, 1984).

Hasta ese entonces la idea de la educación matemática crítica no sólo no resonaba ampliamente en Dinamarca, sino que tampoco era reconocida por la comunidad internacional de educadores matemáticos. La primera participación de Ole Skovsmose en una conferencia internacional fue en la Quinta Conferencia Internacional de Educación Matemática (ICME 5) en Australia, donde su propuesta de presentación sobre educación matemática crítica no fue aceptada. Pero fue allí donde por primera vez escuchó a Ubiratán D’Ambrosio hablar de etnomatemática y donde nuevos interrogantes comenzaron a surgir. Más tarde con su participación en la Primera Conferencia Internacional sobre la Dimensión Política de la Educación Matemática (PDME 1), realizada en Londres en 1986, se abrieron nuevas posibilidades. Su encuentro con personas como John Volmink y Jill Adler (Suráfrica) y con Stieg Mellin-Olsen, quien en ese entonces ya tenía desarrolladas sus ideas sobre la dimensión política de la educación matemática, le mostró que había otras personas en el mundo con preocupaciones e intereses similares y cuya investigación también tenía una misión política de fondo. La escena internacional generaba nuevos retos teóricos. Como Ole anota: “¿Qué pueden significar la etnomatemática y la educación matemática crítica en países como Suráfrica donde es claro que lo ‘etno’ tiene una connotación negativa, politizada y problemática, y donde es evidente que las condiciones sociales sobrepasan la necesidad de una crítica sobre el papel de las matemáticas en la sociedad?”

Esto lo llevó a involucrarse en diferentes proyectos colaborativos con investigadores daneses como Helle Alrø del Departamento de Comunicación de la Universidad de Aalborg con quien ha desarrollado una teorización sobre la comunicación en el salón de clase de matemáticas (Alrø y Skovsmose, 1998). Pero sobre todo, se ha interesado por colaborar muy cerca con investigadores de diversos lugares del mundo. Entre estos proyectos se pueden mencionar especialmente la colaboración con investigadores brasileños (Borba y Skovsmose, 1998), colombianos (Skovsmose y Valero, en prensa), griegos (Nielsen, Patronis y Skovsmose, 1999), y surafricanos (Vithal y Skovsmose, 1997). Todos estos proyectos se han llevado a cabo porque su interacción con personas específicas le han dado la posibilidad de ver otras realidades: “Si no hubiera tenido un contacto serio con todas esas personas y no hubiera podido ver su mundo, nunca se me habría ocurrido salir de Dinamarca”.

Estos antecedentes académicos, junto con una juventud comprometida con las ideas de la Revolución del 68 y las ideas socialdemócratas dominantes en Dinamarca, resultaron en esta particular mezcla: un profesor universitario que viste de sudadera por comodidad, que fuma un cigarro caminando para refrescar las ideas y que realiza una investigación más teórica que empírica, claramente preocupada por el desarrollo de conceptos que permitan comprender de maneras alternativas las posibilidades de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así, el trabajo de Ole Skovsmose ha llegado a ocupar un lugar importante en la investigación en educación matemática en el mundo, siendo su mayor contribución la de proveer un “desafío a muchas de las posiciones teóricas y epistemológicas dominantes en el área” (Zevenbergen, 1999, p. 70).

UN CONTEXTO PROPICIO PARA LA REFLEXIÓN DEMOCRÁTICA

Además de las especiales características personales de Ole Skovsmose que conformaron su vida académica, no extraña que una obra como *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica* haya surgido en Dinamarca. Dinamarca es el más pequeño de los cuatro países escandinavos, situado entre el norte de Alemania y el sur de la gran península escandinava donde se encuentran Suecia y Noruega. Con sus cinco millones y medio de habitantes y su territorio de 43.000 Km², Dinamarca goza de uno de los niveles de vida más altos del mundo. Esto significa que, por ejemplo, el producto nacional bruto per cápita anual es de \$34.890 dólares estadounidenses¹ y las necesidades y derechos básicos de los ciudadanos están satisfechos. Esto último se asocia con la permanencia de un gobierno socialdemócrata que mantiene un Estado de bienestar que asegura la prestación de servicios

de salud, educación y diversos subsidios a todos sus ciudadanos, pero que así mismo se sustenta en un sistema de impuestos que exige a cada ciudadano contribuir con aproximadamente entre 40 y 70% de su ingreso anual.

Gracias a un tremendo progreso económico y social en la última mitad de siglo, Dinamarca ha construido una sociedad donde algunos principios básicos de una democracia se satisfacen. Si tomamos la definición misma ofrecida por Skovsmose en el Capítulo 2 (p. 34), veremos que Dinamarca cumple con las condiciones formales de la conformación de un gobierno nacional y local por medio de elecciones regulares y libres donde todos los ciudadanos mayores de edad ejercen su derecho al sufragio universal. Las condiciones materiales de distribución equitativa de los bienes y servicios también se satisface. Esto garantiza que todos los habitantes del país posean vivienda y tengan acceso gratuito a educación en todos los niveles del sistema educativo —primaria, secundaria, universitaria o técnica especializada—, a servicios de salud públicos y a subsidios como el subsidio infantil otorgado a cada familia por cada hijo desde su nacimiento hasta los 18 años de edad, subsidio de desempleo que garantiza un salario básico en caso de pérdida del trabajo, el subsidio de vivienda que asegura una reducción en impuestos cuando se ha adquirido un préstamo para la compra de vivienda, entre otros. Las condiciones éticas de igualdad y respeto de los individuos como seres humanos ante la ley y ante los demás miembros de la sociedad también están satisfechas.

En un país donde hay unas condiciones democráticas y donde conservarlas es una prioridad, existe una preocupación por la manera como la educación contribuye a enraizar aún más esos valores en las nuevas generaciones. No es sorprendente que en este ambiente surjan iniciativas como el proyecto “Educación matemática y democracia en sociedades con un alto desarrollo tecnológico” (p. 1) donde el gobierno danés invirtió una considerable suma de dinero para sustentar cooperación entre diversas instituciones educativas para generar tanto un conocimiento como unas experiencias prácticas donde la idea de democracia en la educación matemática se pusiera en práctica.

Mientras muchos países del mundo tienen una preocupación más básica por la relación entre democracia y educación, asociada con la erradicación del analfabetismo y el logro de niveles mínimos de educación básica obligatoria, la provisión de recursos mínimos para un funcionamiento educativo adecuado, la eliminación de desigualdades basadas en diferencias de clase, género o raza, Dinamarca ya ha superado estos problemas y más bien

1. A manera de comparación podemos ver el producto nacional bruto (PIB) per cápita anual en otros países (en dólares estadounidenses): en Argentina es de \$8.950; en Chile, \$4.820; en Colombia, \$2.180; en España, \$14.490; en México, \$3.700; y en los Estados Unidos de América, \$29.080. En América Latina y el caribe el promedio es de \$3.940; y en los países más ricos del mundo, \$25,890. Fuente: <http://www.worldbank.org/data/countrydata/countrydata.html>.

se enfrenta a las dificultades educativas de los países postindustrializados. Estos problemas tienen que ver con la provisión de una educación que pueda sustentar la participación de los ciudadanos en una sociedad donde las decisiones tomadas por los dirigentes se hacen cada vez más complejas. Las simples capacidades ofrecidas por una alfabetización y una *materación* (ver p. 31, noción tomada de D'Ambrosio, 1985) no son suficientes para que los ciudadanos puedan comprender los modelos económicos y tecnológicos que son la base de tales decisiones. El gran reto de la educación, en general, y de la educación matemática, en particular, es ofrecer posibilidades para ejercer una ciudadanía que pueda comprender y criticar el funcionamiento de una sociedad altamente tecnologizada. Este es la motivación de *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*.

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA: ALGUNOS PUNTOS CENTRALES

Presentar las ideas centrales de esta obra no es una tarea fácil dado que cada una de ellas ha sido cuidadosamente construida y presentada por Ole Skovsmose a lo largo de todo su libro. No obstante, permítanme resaltar algunos de los argumentos y nociones centrales desarrollados en los once capítulos que tratan tales conceptos y que los ilustran con seis ejemplos de proyectos educativos realizados en escuelas danesas.

Dentro de la tradición de Teoría Crítica desarrollada a partir del trabajo de la Escuela de Frankfurt hacia mediados del siglo veinte, hubo una preocupación central por la educación. Era claro que la educación no sólo podía verse como un mecanismo de reproducción de las estructuras económicas y sociales capitalistas, sino que podía también concebirse como un espacio de reacción y resistencia. Muchas de estas reflexiones se quedaron en formulaciones teóricas generales y muy pocas especifican la relación entre la educación crítica y las materias escolares, en especial las matemáticas. La intención central de *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica* es justamente considerar tal relación de manera teórica, pero con una relación permanente de sus posibilidades prácticas.

Una primera aclaración que encontramos en el libro tiene que ver con la conexión entre filosofía —o formulación teórica— y práctica. Skovsmose claramente dice que su objetivo al proponer una filosofía de la educación matemática crítica es proveer fundamentos para interpretar y aclarar prácticas educativas. En otras palabras, es abrir la posibilidad para crear un lenguaje que haga surgir nuevas visiones sobre lo que pueden ser las matemáticas escolares, si se tiene como preocupación educativa el desarrollo de una ciudadanía crítica. El papel de los ejemplos de realizaciones didácticas que se mencionan a lo largo del libro no pretenden ser un

modelo de práctica. Por eso este libro, al igual que cualquier escrito teórico y filosófico, no debe tomarse como un manual para la acción en el salón de clase. Más bien, es la apertura de posibilidades para generar un lenguaje de descripción de acciones actuales y potenciales en la educación matemática.

Comencemos por explorar la noción de *crítica*. Crítica puede definirse como una actividad de pensamiento y de reacción ante una situación de *crisis*. Esta actividad pone en relación un *sujeto crítico* y un *objeto de crítica*. Esta relación compleja entre sujeto y objeto de crítica² es explorada en el libro de la siguiente manera. En primer lugar, Skovsmose presenta una justificación a la necesidad de explorar esta relación en la educación matemática en sociedades con un alto desarrollo tecnológico. En segundo lugar, presta atención al objeto de crítica y lo define como el poder formativo de las matemáticas. Y en tercer lugar, se enfoca en los sujetos críticos que son los estudiantes y profesores ciudadanos que participan en la acción del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Dentro de la literatura de la educación crítica se han discutido las competencias que debe involucrar la *alfabetización*. Esta debe potenciar a los estudiantes ciudadanos para revelar la naturaleza crítica de la sociedad en la que viven y para convertirse en actores que comprenden, transforman su realidad social, política y económica, y contribuyen a la creación de condiciones más democráticas en la sociedad (ver Capítulo 2). La gran pregunta que surge al pensar en la educación matemática es: ¿Se puede pensar que existe una *alfabetización matemática* que tiene características similares a las de la alfabetización? Si es posible, ¿cuáles son las competencias que tal alfabetización matemática incluye?

Una de las competencias básicas de las personas en sociedades con un alto desarrollo tecnológico es la *competencia democrática*. Esta se refiere a la capacidad de los ciudadanos para ejercer un control sobre las acciones de sus gobernantes. Ella hace posible que la gente participe en las discusiones y evaluación de las acciones del gobierno. En sociedades complejas la democracia se puede obstruir no sólo por el incumplimiento de sus condiciones formales, materiales y éticas, sino también y sobre todo por la falta de participación de los ciudadanos, ya que la toma de decisiones se basa en supuestos, conocimientos y argumentos que van más allá del alcance del entendimiento de la mayoría de las personas. Es evidente que el desarrollo

2. Esta distinción que presento es una distinción más analítica que real. Como Skovsmose menciona “quizás podría ser imposible distinguir entre un sujeto crítico y un objeto crítico, si se pretendiera que una actividad fuera por completo crítica” porque “siempre que un sujeto emite una crítica, esta crítica también se relaciona con una comprensión previa del sujeto y tal precomprensión siempre tiene que incluirse en una crítica, tanto como parte de los fundamentos de la crítica, como parte del objeto de la crítica. Por lo tanto, el objeto de crítica siempre tiene que incluir a su sujeto, lo cual hace confusa la distinción.” (p. 232). No obstante, utilicemos la distinción como una estrategia para poder comprender la complejidad de la relación.

tecnológico y su influencia en la vida social, económica y política erosionan las condiciones no formales de la democracia. La educación matemática tiene un papel importante que jugar en evitar este riesgo pues las matemáticas se encuentran en la base de los modelos que sustentan tales decisiones. Por esto se justifica la necesidad de pensar en una educación matemática crítica.

Ahora podríamos analizar el objeto de la crítica en la educación matemática. Las matemáticas pueden verse como un lenguaje poderoso que permite producir nuevas invenciones de la realidad. Así, las matemáticas ofrecen nuevas percepciones de ella y también la colonizan y reorganizan. Por esto podríamos decir que las matemáticas le dan forma a nuestra sociedad. Tal idea se puede formular en *la tesis del poder formativo de las matemáticas*. Si bien las matemáticas no son el único agente del cambio social, sí cumplen una función central en la sociedad actual dada su asociación con la tecnología de la información. La tecnología, con las matemáticas como su base, contribuyen con la creación de la *Paradoja de Vico* que se refiere a la incapacidad de los hombres (y mujeres) de una sociedad con un alto desarrollo tecnológico para comprender sus mismas creaciones tecnológicas. Así las matemáticas, por medio de la tecnología de la información, ejercen un poder social avasallador pues crean nuevas estructuras sociales. Tales estructuras emergen del proceso de transformación de las *abstracciones mentales* propias de las matemáticas en *abstracciones materializadas*. Las abstracciones materializadas, que son abstracciones que se toman como un hecho y que se han cambiado de naturaleza a través de un proceso histórico y social, han nacido como el resultado de la formalización de lenguaje y de acciones que las matemáticas realizan en el modelaje matemático. Este modelaje y sus resultados poseen un *gran poder simbólico* porque a pesar de no ejercer un acto de poder directo y visible, tienen una legitimidad que emana de la creencia de la exactitud y confiabilidad de las aplicaciones de las matemáticas. Por esta razón es más que justificado hacer de las matemáticas y sus aplicaciones en la sociedad un objeto central de crítica.

Una educación matemática crítica debe facilitar el desarrollo de una alfabetización matemática que permita a los ciudadanos ejercer una competencia democrática. Podemos preguntarnos ahora: ¿y cuál es en particular la competencia de la educación matemática crítica que se conecta con la competencia democrática en general? Esta competencia particular es el *conocer reflexivo*. Este se refiere a la capacidad necesaria para “tomar una posición justificada en una discusión sobre asuntos tecnológicos” (p. 113). Esta competencia incluye al *conocimiento matemático* que son las habilidades matemáticas para reproducir pensamientos matemáticos, teoremas y demostraciones, para ejecutar algoritmos y realizar cálculos y para inventar y descubrir nuevas matemáticas; al *conocimiento tecnológico* que es la

habilidad de aplicar las matemáticas y los métodos formales para el logro de fines tecnológicos; y el *conocimiento reflexivo* en sí que tiene que ver con la evaluación y la discusión general de lo que se puede identificar como un fin tecnológico y con las consecuencias éticas y sociales de lograr tal fin con las herramientas seleccionadas. El conocer reflexivo permite identificar las nociones y comprensiones previas que se visten con un disfraz de neutralidad en su paso por las distintas *transiciones de lenguaje* que suceden en el modelaje matemático, entre los lenguajes natural, sistémico, matemático y algorítmico. También permite seguirle el rastro a los cambios en las estructuras de argumentación que cada tipo de lenguaje genera en ese proceso y así evita generar un cierre en las posibilidades de grupos no expertos para entender la resolución de un problema social con base en un modelo matemático. Y finalmente permite indagar la manera como el modelaje matemático puede afectar el contexto social que dio origen al problema abordado con el modelaje. Así, el conocer reflexivo se hace una parte importante e integrada de la competencia democrática.

No obstante, el conocer reflexivo en conexión con la crítica, no sólo debe relacionarse con un proceso mental de pensamiento, sino también con una acción y reacción. El hecho de que el conocer reflexivo permita considerar las posibilidades de influencia del poder formativo de las matemáticas en la sociedad también enfatiza la importancia de abordar los efectos de acciones potenciales. Así, la reflexión sobre el objeto de crítica permite a su vez mirar al sujeto de la crítica.

¿Qué sucede con el sujeto crítico en el ejercicio de la educación matemática crítica? La enseñanza–aprendizaje de las matemáticas en la escuela puede verse como una *acción*. Esta acción es un acto deliberado, consciente e intencionado donde la persona puede escoger y donde hay una claridad en el objetivo que se persigue. Esta acción se relaciona con las *intenciones* y las *disposiciones* de la persona. Las intenciones son guías para la acción que provienen de la habilidad de la persona para dirigirse hacia un objeto no presente. La acción tiene por objetivo satisfacer las intenciones de una persona. Por otro lado, las intenciones se relacionan con las disposiciones de la persona que son tanto los *antecedentes* o la red social e histórica en la que la persona se encuentra, y el *porvenir* o las posibilidades que la situación social le ofrece al individuo. Las disposiciones son una fuente de intenciones y, a su vez, un resultado de las acciones de la persona. Así, la triada *disposición–intención–acción* ofrece un marco para hablar del aprendizaje como acción dentro de la educación matemática crítica. Esta triada es importante porque resalta la idea de que un proceso educación crítico no se realiza si las personas involucradas en él no tienen la intención de actuar. La educación crítica no se impone sino que se negocia en los espacios que ella genera para que profesor y estudiantes investiguen las razones y las metas de los procesos educativos sugeridos. Así, la actividad crítica reflexiva no sólo involucra una reflexión sobre un objeto de crí-

tica sino también sobre la misma acción del sujeto en su proceso de aprendizaje–enseñanza.

Ahora podríamos preguntarnos por las características del proceso educativo que permite tal actividad reflexiva compleja. Hay varias nociones que pueden resaltarse como posibilidades de tender puentes entre toda la posición filosófica previamente expuesta y la práctica educativa. La manera como Skovsmose presenta estas nociones es a través de la exposición de seis experimentos educativos realizados en escuelas danesas, con el propósito de proveer una enseñanza de las matemáticas alternativa a la tradicional (ver Capítulos 4, 5, 7, 8 y 9). De nuevo hay que recordar que estas nociones y estos ejemplos no constituyen un manual para la planeación y puesta en marcha de buenas situaciones de aprendizaje, sino que son iluminaciones de aquellos gatillos de la práctica que pueden disparar el establecimiento de las conexiones entre las nociones teóricas antes expuestas.

En una situación educativa de las matemáticas escolares debería darse una negociación entre el profesor y los estudiantes sobre las intenciones y disposiciones de cada uno. Esta negociación, absolutamente necesaria para el conocer reflexivo, no puede darse sin el *montaje de un escenario*. Esto se refiere a la acción intencionada del profesor por construir una situación en la que “el proceso educativo pueda encarnarse para dar un significado a las actividades individuales que los niños deben realizar. El escenario debe posibilitar que los niños encuentren motivos para las diferentes actividades y que verbalicen los tipos de competencias que pueden desarrollarse” (p. 102). Este escenario permite generar un lenguaje para hablar del conocer tecnológico y matemático involucrado en las actividades y para conectarlo con su contexto y así fomentar las posibilidades para que los estudiantes se comprometan con el conocer reflexivo. Cada uno de los seis proyectos presentados en el libro ayudan a caracterizar el significado e importancia del montaje de un escenario. Por ejemplo, los proyectos “Relaciones económicas en el mundo de los niños”, “La Conejera” y “Construcciones” ilustran las distintas posibilidades para la construcción de tal situación: puede haber situaciones realistas, imaginarias o de trabajo colectivo (p. 102-104).

Esta base de lenguaje y, por lo tanto de significado y comprensión, permite revelar el poder formativo de las matemáticas en la sociedad a través de la realización de una *arqueología matemática*. Dentro de un escenario, tanto los profesores como los estudiantes deben ser capaces de excavar dentro de una situación tecnológica determinada para hacer explícitas y visibles las matemáticas escondidas detrás de ellas. La arqueología matemática se convierte en el intento, dentro de la situación educativa, de seguirle el rastro a la materialización de las abstracciones mentales en el modelaje matemático. Así permite “ver” e identificar el funcionamiento de las matemáticas en la sociedad. Por ejemplo, el proyecto “Subsidio familiar

en una microsociedad” permitió poner de manifiesto el funcionamiento del proceso de modelaje matemático y su influencia en las decisiones sociales. Aunque el proyecto no permitió hacer una arqueología matemática muy profunda en términos de la consciencia que los estudiantes pudieron adquirir sobre el papel de las matemáticas en la sociedad, fue posible evidenciar la importancia de hacer visibles las matemáticas, en oposición a la idea de que las matemáticas se esconden más entre más relevantes y complejas sean.

Para promover el conocer reflexivo es necesario prestar especial atención a las *preguntas retadoras* o cuestionamientos que enfocan la reflexión en los seis puntos de entrada al conocer reflexivo, representados en preguntas como:

- 1) “¿Usamos el algoritmo de la forma correcta?
- 2) ¿Usamos el algoritmo apropiado?
- 3) ¿Podemos confiar en los resultados de ese algoritmo?
- 4) ¿Podríamos hacer algo sin cálculos formales?
- 5) ¿Cómo afecta el uso de un algoritmo, apropiado o no, a un contexto específico?
- 6) ¿Podríamos haber hecho una evaluación de otra manera?” (p. 135)

Por otro lado, las preguntas retadoras permiten salir del *fenómeno de la absorción*, es decir, la situación donde la consideración de un problema tecnológico tiende a quedarse en un análisis interno del problema dentro del modelaje matemático, sin regresar al contexto general donde se generó el problema inicial. El papel de las preguntas retadoras fue claro en el proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad” donde hubo una serie de reflexiones sobre todos los momentos de la distribución de dinero que los estudiantes realizaron.

Otra característica esencial del montaje de un escenario es la posibilidad de introducir una situación ejemplar. La *ejemplaridad* se refiere a la idea de que el estudio en profundidad de un fenómeno particular puede llevar a explorar los rasgos esenciales de un fenómeno global. La ejemplaridad permite construir puentes entre objetos de crítica focalizados, contenidos en una situación particular de clase, y objetos de crítica más amplios. El proyecto “Energía” permitió ver las diferentes facetas de la ejemplaridad, al abrir un espacio para que los estudiantes, con base en sus comprensiones de la producción y gasto de energía en su propia actividad física, en una granja y en sus hogares, pudieran aproximarse a asuntos más globales como el gasto de energía en la producción mundial de alimentos y los efectos de ésta en el medio ambiente.

Finalmente, el montaje de un escenario debe generar *puntos estratégicos*, que son como “montañas semánticas” (p. 195) dentro del paisaje lin-

güístico del escenario que permite a los participantes de la reflexión tomar una distancia sobre la acción de aprendizaje que realizan y poder construir metareflexiones sobre su misma participación en ella. Estos puntos permiten conectar de manera explícita y fuerte la reflexión del sujeto sobre su propia acción con las competencias que involucra el conocer reflexivo. Estos puntos estratégicos también ofrecen la oportunidad de negociar las intenciones y metas del proceso educativo y así posibilitar el compromiso de los estudiantes con todo el proceso. El proyecto “Nuestra comunidad” montó un escenario que permitió a los estudiantes tomar un trabajo temporal dentro de su comunidad local y hacer de esta experiencia la base para una serie de actividades de clase donde las matemáticas sirvieron claramente de herramienta para resolver problemas concretos como la crisis financiera del conservatorio local. Este proceso permitió a los estudiantes no sólo reflexionar sobre las tareas formuladas por el profesor, sino también sobre sí mismos —sus disposiciones e intenciones— y sobre su propia acción en el desarrollo del proyecto —y en su vida laboral futura.

Toda esta red conceptual conduce finalmente a concebir el conocer reflexivo como un concepto explosivo. La visión clásica del conocimiento que lo asocia con la existencia de una verdad y de una crítica definitiva hace del conocimiento un concepto controlado. La exposición de las características conceptuales del conocer reflexivo y de sus nociones auxiliares en la práctica educativa muestra que la naturaleza del proceso de conocer es dialógica y que depende del diálogo y la negociación de significados e intenciones, en situaciones de conflicto de conocimiento. Tal naturaleza no es controlada ni abierta, sino explosiva en el sentido en que, dada la necesidad de realizar una crítica permanente tanto sobre el sujeto como sobre el objeto de crítica, se sale del control de las mismas personas que participan en el proceso. Así, el conocer reflexivo que se ha expuesto como central en esta aproximación a una filosofía de la educación matemática crítica puede expandirse mucho más si se realizan análisis de él dentro de estructuras de poder más amplias dentro de la sociedad. Esto significa que todavía hay mucho que decir y explorar para llegar a dar una visión más completa de la filosofía de la educación matemática crítica.

CUESTIONAMIENTOS DESDE Y PARA LOS PAÍSES HISPANOHABLANTES

Para mí es evidente que una obra como *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica* ofrece numerosas oportunidades para reflexionar sobre la educación matemática, tanto como un campo de conocimiento e investigación, como un campo de prácticas de enseñanza y aprendizaje, en los países de habla hispana. Más que tomar esta obra como una “Biblia” para

la investigación y la práctica en nuestros países, podríamos tomarla como una invitación seria para reflexionar críticamente sobre la relación entre educación matemática y democracia en nuestros países, y los retos que de tal ejercicio se desprenden desde y para nuestra actividad investigativa y práctica.

Skovsmose hace claro a lo largo de su libro que tiene en mente a las sociedades con un alto desarrollo tecnológico, es decir, a los países de un completo desarrollo industrial, económico, político y social. Ese es el mundo de la Europa Occidental, de Norte América y de algunos países Asiáticos y de Oceanía. Pero ¿qué significa la educación matemática crítica en los países hispanohablantes ubicados, la gran mayoría, dentro del grupo de países en vía de desarrollo? Por un lado no podemos desconocer que la alfabetización matemática con el conocer reflexivo como competencia central es necesaria como parte de la competencia democrática general que la educación debe ofrecer a los ciudadanos de nuestros países. Como parte de una sociedad mundial no nos podemos escapar a que el poder formativo de las matemáticas tenga una influencia en nuestro desarrollo y, por lo tanto, debemos prepararnos para evitar que esta “fuerza avasalladora” conquiste de maneras tan desastrosas nuestro mundo. La discusión misma del papel de las matemáticas y de la educación matemática en relación con el desarrollo se constituye entonces en todo un campo por explorar en nuestros países.

Hasta el momento las formulaciones de los ministerios de educación en muchos de los países latinoamericanos conectan de una manera directa el avance en la ciencia y la tecnología con el desarrollo, muchas veces entendido como el alcance de los patrones y estructuras sociales, políticas y económicas de los países desarrollados. Por ejemplo, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, en la Ley General de Educación de 1994, “resalta el propósito de formar ciudadanos competentes en el desarrollo y comprensión de los avances científicos y tecnológicos, para lo cual su formación matemática es indispensable” (MEN, 1995, citado en Perry et al., 1998, p. 4).

Parece haber en estos enunciados una creencia firme en las bondades de las matemáticas y en su capacidad para traer consigo desarrollo tecnológico. Al mismo tiempo parece haber cierta ingenuidad en esta relación entre matemáticas, tecnología y desarrollo. Como lo señalan Vithal y Skovsmose (1997, p. 132), la aplicación de las teorías de la modernización en los países del Tercer Mundo ha llevado a “trazar una relación ingenua y simple entre, por un lado, progreso, liberalización e industrialización y, de otro, desarrollo tecnológico (que incluye una actualización amplia de la educación matemática)”. Pero vista desde una perspectiva crítica esta relación pierde su ingenuidad política. Si somos conscientes de las posibilidades de la tecnología y las matemáticas tanto para crear realidades sociales “positivas”, como estructuras de riesgo altamente negativas, debemos

comenzar por cuestionar la función de las matemáticas en nuestras sociedades y, por lo tanto, de la educación matemática en la creación y reproducción de tales estructuras. Esta es una primera labor de una educación matemática crítica en un contexto hispanoamericano.

Es evidente también que el problema de la democracia en Hispanoamérica es bastante diferente a la de los países con un alto desarrollo tecnológico. En la gran mayoría de nuestras sociedades hay todavía bastante camino por recorrer en satisfacer las condiciones formales, materiales, éticas y de participación mencionadas por Skovsmose como las diversas dimensiones de la democracia. Una pregunta crítica que puede hacerse al análisis de Skovsmose proviene de la reflexión sobre el significado y las necesidades democráticas en nuestros países. Después del derrocamiento de regímenes militares que tenían bloqueadas las posibilidades democráticas, América Latina ha vivido un proceso de democratización que ha iniciado la restauración o instauración de las instituciones formales — elecciones populares, sistemas parlamentarios, instituciones de distribución económica y de justicia, entre otras— y la consolidación de relaciones sociales y culturales propicias para la democracia. Por otro lado, las nuevas tendencia de globalización e internacionalización de las economías ha traído consigo efectos devastadores en los frágiles sistemas económicos y políticos. Las diferencias económicas entre ricos y pobres se hacen más agudas gracias a la implantación de las ideas económicas neoliberales (Lechner, 1991). Entonces, existe una situación contradictoria entre fuerzas que buscan la democratización y fuerzas que dificultan el logro de tales objetivos. El resultado es la conformación de “democracias de fachada” o “limitadas” (Roitman, 1992, pp. 71-72). En esta situación es fundamental mirar la manera como las personas en su diario vivir constituyen relaciones sociales que puedan ser la base para desarrollar relaciones de solidaridad, respeto por la diferencia, tolerancia y compromiso con la transformación de la situación de vida individual y colectiva.

El análisis de Skovsmose sobre la democracia se enmarca dentro de una tradición liberal europea —a pesar de que muchas de las bases de la Teoría Crítica provienen del pensamiento marxista que se contraponen a tal tradición liberal. Esto quiere decir que, a pesar de que no lo afirme explícitamente, Skovsmose tiene al individuo como la unidad central de análisis democrático y crítico. Esta visión centrada en el individuo, pero en todo caso consciente de la sociedad, es justificable y entendible en sociedades con un alto desarrollo tecnológico donde las necesidades básicas individuales están satisfechas —como se anotó anteriormente en este prefacio Dinamarca, la sociedad que Skovsmose tiene en mente, es un caso extremo de tal grado de cubrimiento de las necesidades básicas y ¡las más que básicas! No obstante, esta visión centrada en el individuo propia del liberalismo ha mostrado ser ineficiente en proveer condiciones de vida adecuadas para

todos en los modelos recientes de neoliberalización. En cambio, la idea de colectividad parece ofrecer más posibilidades.

Así que hay un reto grande en pensar lo que puede significar la competencia democrática en sociedades en vía de desarrollo tecnológico. En el Capítulo 10 (p. 201) Skovsmose señala que ha “hablado de las acciones como una empresa individual, pero sería mejor ver las acciones de un grupo como la principal unidad conceptual.” Sin embargo, no se metió en esa discusión particular. Podríamos pensar que no podemos definir un individuo sino con relación al grupo social al que pertenece porque la condición de “ser humano es un asunto relacional, generada en la vida social, históricamente, en formaciones sociales cuyos participantes se comprometen entre sí como una condición y precondition de su existencia” (Lave, 1996, p. 149, citada en Valero, 1999, p. 22). Esto quiere decir que el ser humano no existe independientemente del grupo social que interactúa para producir y transformar colectivamente sus condiciones materiales y sociales de vida. Esta idea es central para la democracia en países en vía de desarrollo porque en las relaciones sociales es donde se encuentra la base para la vivencia y permanencia de una acción política conjunta que lleve al mejoramiento de las condiciones de vida del grupo y de la sociedad en general.

Así que podríamos añadirle una dimensión más a las competencias individuales del conocer reflexivo. Podríamos pensar que, además de la dimensión individual, el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva crítica debe ofrecer posibilidades para desarrollar una competencia de *crítica y de acción colectiva* caracterizada por (Valero, 1999, p. 22; Skovsmose y Valero, en prensa):

- 1) La *deliberación* como un proceso comunicativo colectivo que permite a un grupo considerar atenta y cuidadosamente, en primer lugar, las razones o falta de razones de sus opiniones y juicios preliminares antes de emitirlos; en segundo lugar, las ventajas y desventajas de posibles decisiones antes de tomarlas; y en tercer lugar, los beneficios y perjuicios de posibles alternativas de acción antes de emprenderlas.
- 2) La *coflexión* como proceso colectivo de conocer reflexivo en el que los miembros de un grupo de manera consciente hacen de su objeto de pensamiento y comprensión las reflexiones de los otros sobre sí mismos y, en especial, sobre sus acciones conjuntas.
- 3) La *transformación* como centro de una intencionalidad colectiva encaminada hacia el mejoramiento continuo de las condiciones sociales y materiales del grupo.

Pensar en las maneras como una alfabetización matemática que considere las dimensiones individuales y colectivas del conocer reflexivo, como componentes indispensables para una competencia democrática de los ciudada-

nos en los países hispanohablantes es un reto para el desarrollo de una educación matemática crítica en este contexto social, político y económico.

AGRADECIMIENTOS

La presentación de esta obra en español ha sido posible gracias al apoyo de la Rectoría y la Facultad de Matemáticas, Física, Química e Informática del Instituto Real Danés de Investigación Educativa, en Copenhague, Dinamarca. También debo mencionar el apoyo brindado por mis colegas de “una empresa docente”, centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia. Patricia Perry leyó cuidadosamente una primera versión de la traducción de esta obra y revisó algunos aspectos de su edición. Pedro Gómez comentó este prefacio y contribuyó a mejorarlo. Y Felipe Fernández —junto con Marivel Acosta— revisó y completó muchos de los detalles finales del proceso técnico de edición. Por último debo agradecer a Ole Skovsmose por su discusión de diversos aspectos de su obra y su autorización para recrear sus ideas y darle vida a la comunidad de educación matemática hispanohablante.

Copenhague, septiembre de 1999

Paola Valero

REFERENCIAS

- Alrø, H. y Skovsmose, O. (1996). On the right track. *For the Learning of Mathematics*, 16(1), 2-8, 22.
- Borba, M. y Skovsmose, O. (1997). The ideology of certainty in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 17(3), pp. 17-23.
- Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (1986). Perspectives on mathematics education. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- D'Ambrosio, U. (1980). Mathematics and society: Some historical considerations pedagogical implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11 (4), 479-488.
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5 (1), 44-48.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.
- Lave, J. (1996). Teaching, as learning, in practice. *Mind, Culture, and Activity*, 3 (3), 149-164.

- Lechner, N. (1991). El debate sobre Estado y mercado. *Revista Foro*, septiembre 1991.
- Lorenzen, P. y Schwemmer, O. (1975). *Konstruktive logik, ethik und wissenschaftstheorie*. Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Mellin-Olsen, S. (1985). *The politics of mathematics education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1995). *Ley General de Educación. El Salto Educativo. Serie Documentos Especiales*. Bogotá: Empresa Editorial Universidad Nacional.
- Moliner, M. (1977). *Diccionario del uso del español, vol. 2*. Madrid: Gredos.
- Nielsen, L., Patronis, T. y Skovsmose, O. (1999). *Connecting corners of Europe. A Greek-Danish project in mathematics education*. Aarhus: Systime.
- Perry, P., Valero, P., Castro, M., Gómez, P. y Agudelo, C. (1998). *La calidad de las matemáticas en secundaria. actores y procesos en la institución educativa*. Bogotá: “una empresa docente”.
- Riess, F. (Ed.) (1977). *Kritik des mathematisch naturwissenschaftlichen Unterrichts*. Frankfurt am Main: Päd. Extra Buchverlag.
- Roitman, M. (1992). Teoría y práctica de la democracia en América Latina. En P. González y M. Roitman (Eds.), *La democracia en América Latina: Actualidad y perspectivas* (pp. 59-89). Madrid: Universidad Complutense de Madrid – Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Humanidades de la U.N.A.M. México.
- Skovsmose, O. (1980). *Forandringer i matematikundervisningen*. Copenhagen: Gyldendal.
- Skovsmose, O. (1981a). *Matematikundervisning og kritisk pædagogik*. Copenhagen: Gyldendal.
- Skovsmose, O. (1981b). *Alternativer og matematikundervisning*. Copenhagen: Gyldendal.
- Skovsmose, O. (1984). *Kritik, undervisning og matematik*. Copenhagen: Lærereforeningernes materialeudvalg.
- Skovsmose, O. (1985). Mathematical education versus critical education. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 337-354.
- Skovsmose, O. (1990). Mathematical education and democracy. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 109-128.
- Skovsmose, O. (1992). Democratic competence and reflective knowing in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 2 (2), 2-11.
- Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Skovsmose, O. (1996). Critical mathematics education —some philosophical remarks. In C. Alsina, J. M. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, A. Pérez (Eds.), *8º Congreso Internacional de Educación Matemática. Selección de conferencias* (pp. 413-425). Sevilla: SAEM Thales.
- Skovsmose, O. y Valero, P. (En prensa). *Breaking political neutrality: The critical engagement of mathematics education and democracy*. En B. Atweh, H. Forgasz y B. Nebres (Eds.), *Socio-cultural aspects in mathematics education: An international perspective*. London: Routledge.
- Valero, P. (1999). Deliberative mathematics education for social democratization in Latin America. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 98(6), 20-26.
- Vithal, R. y Skovsmose, O. (1997). *The end of innocence: A critique of 'ethnomathematics'*. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 131-157.
- Zevenbergen, R. (1999). Becoming critical about mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, 11(1), 70-73.

AGRADECIMIENTOS

En 1988 el Consejo Danés de Investigación en Humanidades lanzó la iniciativa “Educación matemática y democracia en sociedades con un alto desarrollo tecnológico”. La intención general del proyecto fue discutir el papel de la educación matemática como parte del quehacer democrático en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico. La iniciativa se llevó a cabo durante cinco años. Sus líderes fueron Gunhild Nissen (director) de la Universidad de Roskilde, Jens Bjørneboe (secretario), Morten Blomhøj (secretario) de la Universidad de Roskilde, Peter Bollerslev del Ministerio de Educación, Vagn Lundsgaard Hansen de la Universidad Técnica de Copenhague, Mogens Niss de la Universidad de Roskilde y Ebbe Thue Poulsen de la Universidad de Aarhus. Mi trabajo hace parte de esta iniciativa general que fue financiada por el Consejo Danés de Investigación y la Universidad de Aalborg. Se recibió apoyo adicional del Fondo Familiar de Obelske.

Mi intento por desarrollar una filosofía de la educación matemática crítica ha recibido ayuda e inspiración del trabajo experimental realizado en el marco de esta iniciativa. Los profesores y escuelas que más contribuyeron a mi trabajo son Henning Bødtkjer de la Escuela de Klarup; Jens Jørgen Andersen, Ole Dyhr y Thue Ørberg de la Escuela Independiente de Aalborg; Ib Trankjær de la Escuela de Nyvang en Randers; y Jørgen Boll y Jørgen Vogensen de la Escuela de Rønbæk en Hinnerup. Igualmente, Andreas Reinholt del Seminario de Formación de Profesores de Aalborg coordinó la mayoría del trabajo experimental. Muchos investigadores han estado involucrados en el proyecto “Educación matemática y democracia en sociedades con un alto desarrollo tecnológico”. Las siguientes personas me han inspirado en particular: Morten Blomhøj y Lena Lindenskov de la Universidad de Roskilde; Dan Eriksen del Instituto Real Danés de Investigación Educativa; Kirsten Grønbæk Hansen de la Universidad de Copenhague; y Helle Alrø e Iben Maj Christiansen de la Universidad de Aalborg. Karin Beyer de la Universidad de Roskilde me ha dado sugerencias útiles para el mejoramiento del manuscrito. También he recibido críticas invaluable de todo el texto por parte de Marcelo Borba de la Universidad Estatal de San Pablo en Rio Claro, Brasil.

Quiero agradecer a los directores de la iniciativa, al igual que a los profesores e investigadores involucrados en ella, por su apoyo y comentarios tanto a mi trabajo como al manuscrito.

Entre 1990 y 1991 visité el Departamento de Educación de la Universidad de Cambridge, donde Alan Bishop me asesoró no sólo acerca de cómo comenzar y terminar mi investigación, sino también cómo llevar a cabo todo el trabajo intermedio. Alan Bishop posibilitó la publicación de mi trabajo en la Colección de Educación Matemática de la Editorial Kluwer. Marilyn Nickson leyó cuidadosamente el manuscrito entero y realizó las correcciones lingüísticas finales. Quiero expresar mis agradecimientos a estas dos personas por su ánimo y esfuerzos.

Aalborg, noviembre de 1993
Ole Skovsmose

INTRODUCCIÓN

En su obra *Nineteen eighty-four* [Mil novecientos ochenta y cuatro], George Orwell describió distintas formas de represión. Nos mostró las pantallas de televisión, localizadas por doquier, a través de las cuales el Gran Hermano podía vigilar a los habitantes de Oceanía. Dado que allí no sólo era importante vigilar las actividades de los habitantes, sino también controlar sus pensamientos, la Policía de Pensamiento siempre estaba de guardia. Esta era una forma muy directa de monitorear y vigilar. Además de esto, Orwell resaltó otra manera mucho más imperceptible y calculada de controlar el pensamiento.

En el apéndice de *Nineteen eighty-four*, Orwell explicó algunas estructuras de la “neolengua” que se convertiría en el idioma oficial de Oceanía. El Ministerio de la Verdad comenzó a desarrollar la neolengua para sustituir la “antigua lengua” (idioma similar al inglés estándar). La neolengua debía ajustarse a las políticas oficiales de Oceanía, dictadas por el Partido Ingsoc:

El propósito de la neolengua no sólo era proveer un medio de expresión de la visión de mundo y hábitos correctos de los devotos del Ingsoc, sino también imposibilitar cualquier otro modo de pensamiento. Se pretendía que cuando la neolengua hubiese sido adoptada definitivamente y la antigua lengua se olvidara, un pensamiento herético —es decir, un pensamiento que divergiera de los principios del Ingsoc— fuera literalmente impensable, en tanto el pensamiento depende de las palabras. El vocabulario se construyó de tal forma que cualquier miembro del Partido pudiese dar expresión exacta, y con frecuencia sutil, a cualquier significado. Igualmente se excluyeron todos los otros significados y también la posibilidad de llegar a ellos a través de métodos indirectos. Esto se logró en parte con la invención de nuevas palabras pero, principalmente, con la eliminación de las palabras indeseables y de los significados no ortodoxos y, en la medida de lo factible, de cualquier posible significado secundario de las palabras restantes. Para dar un ejemplo, la palabra “libre” seguía existiendo en la neolengua, pero sólo podía usarse en oraciones como “el perro está libre de pulgas” o “este campo está libre de rastrojo”. No podía usarse con el sentido de “políticamente libre” o de “intelectualmente libre”, ya que la libertad política e intelectual no

existían, ni siquiera como conceptos y, por lo tanto, no necesitaban ni siquiera ser nombrados.¹

No voy a considerar la vida en la Oceanía de Orwell, ni la actividad de la Policía de Pensamiento, ni el papel del Gran Hermano; mas sí quiero examinar de cerca el supuesto de que el lenguaje puede preestructurar la visión del mundo y excluir algunas formas de pensamiento. ¿Tiene sentido pensar en el lenguaje no sólo como un medio flexible para expresar ideas, sino también como un filtro para formular ideas? ¿Tiene sentido tratar de controlar los pensamientos a través de una reestructuración del lenguaje? ¿La estructura de una lengua específica la naturaleza de los pensamientos que se pueden formular con ese lenguaje?

En el *Tractatus logico-philosophicus* [Tratado lógico-filosófico] de Ludwig Wittgenstein encontramos otra tesis acerca de la influencia del lenguaje. Wittgenstein mostró que el lenguaje ordinario contiene nociones ambiguas y que este fenómeno es la causa principal de muchos problemas filosóficos. De hecho, tales problemas toman la forma de malentendidos lingüísticos. Para prevenir tales confusiones es útil introducir un lenguaje formal y Wittgenstein hace referencia a los simbolismos desarrollados por Gottlob Frege y Bertrand Russell². La introducción de tal formalismo excluye la posibilidad de malentendidos lingüísticos y, por lo tanto, también se excluyen los problemas filosóficos clásicos. De esta manera, un lenguaje formal excluye algunos modos de pensamiento. En el *Tractatus* Wittgenstein también formuló que los límites de nuestro lenguaje son los límites de nuestro mundo³.

El positivismo lógico desarrolló aun más la idea de que un lenguaje formalizado puede excluir algunas formulaciones y malentendidos supuestos. Si esta corriente pensamiento hubiese sido capaz de completar su programa, el lenguaje de la ciencia contendría exactamente aquellos enunciados que tuvieran sentido de acuerdo con el principio de la verificación, i.e., todos los enunciados que pudieran contrastarse con evidencia empírica⁴. De acuerdo con algunas tendencias del positivismo lógico (no todos los positivistas lógicos están de acuerdo con esto), los enunciados normativos no constituyen afirmaciones completamente limpias y, como consecuencia, la ética se debería excluir del lenguaje de las ciencias.

Estas consideraciones se relacionan con la idea del *relativismo lingüístico*: el lenguaje disponible determina el pensamiento que podemos expresar.

1. Ver Orwell (1987, pp. 312-313).

2. Ver *Tractatus*: 3.323, 3.324 y 3.325.

3. Ver *Tractatus*: 5.6.

4. Normalmente las matemáticas mantienen una posición específica en el positivismo lógico. Los enunciados matemáticos se interpretan como tautologías y no se excluyen por referencia al principio de verificación.

sar. Una interpretación clásica de este relativismo se encuentra en los trabajos de Edward Sapir y Benjamin Lee Whorf. Sapir dice:

Los seres humanos no viven sólo en el mundo objetivo ni en el mundo de la actividad social como se piensa comúnmente, sino que más bien se encuentran a la merced del lenguaje particular que se ha convertido en el medio de expresión de su sociedad. Es una ilusión imaginar que uno se ajusta a la realidad esencialmente sin el uso del lenguaje y que el lenguaje es tan sólo un medio incidental para resolver problemas específicos de comunicación o de reflexión. El hecho es que el “mundo real” se construye en gran medida inconscientemente sobre la base de los hábitos lingüísticos del grupo.⁵

Esta formulación destaca la fuerza de la introducción de la neolengua. Si el lenguaje es más que un medio de comunicación y el mundo real, en gran medida, se construye sobre los hábitos de lenguaje del grupo, entonces transformar el lenguaje se vuelve un acto enérgico. No sólo es cierto que lo que expresamos acerca del mundo depende de nuestro lenguaje, sino que el mundo en sí, también. Whorf enfatiza que el lenguaje no es simplemente un instrumento de reproducción para enunciar ideas, sino que más bien modela las ideas. Las formulaciones de las ideas no son procesos independientes sino que hacen parte de una gramática particular⁶. Por lo tanto, los usuarios de gramáticas sustancialmente diferentes son conducidos, por sus gramáticas, hacia tipos diferentes de observaciones y hacia evaluaciones diferentes de actos de observación que parecen similares en su exterior. Tales actos no son equivalentes para cada uno como observador porque cada cual comporta visiones diferentes del mundo⁷.

Es factible que algunas observaciones no puedan hacerse ya que el lenguaje disponible no permite al observador describir algunos fenómenos. Algunos conceptos pueden hacer falta. Por ejemplo, el lenguaje que se habla en Groenlandia tiene muchas más palabras para referirse al hielo que el inglés o el danés. Esto posibilita que la gente de esta región no sólo describa mucho más detalladamente, sino que también (y este es el punto esencial) observe con mayor precisión, en comparación con lo que podría hacerlo una persona perteneciente a una comunidad hablante del inglés o del danés. La posibilidad de expresar observaciones, al igual que las observaciones mismas, están determinadas por el lenguaje. Sin embargo, como lo afirman Sapir y Whorf, el relativismo lingüístico tiene que ver tanto con los conjuntos disponibles de palabras, como con la gramática. Esto abre espacio a un relativismo mucho más fundamental: una gramática influye en las posibilidades disponibles para lo que queremos expresar y en los propó-

5. Ver Sapir (1925, p. 209).

6. Ver Whorf (1956, p. 212).

7. Ver Whorf (1956, p. 221).

sitos para los cuales podemos usar nuestro lenguaje. En el ámbito más general, la tesis del relativismo se aproxima a la idea de Friedrich Nietzsche de que el lenguaje puede ser un terreno propicio para todo tipo de concepciones erróneas, ilusiones, falacias, mitos y errores. Tenemos que desconfiar del lenguaje como un todo. No sólo las concepciones erróneas de nuestra propia generación, sino también aquellas de generaciones anteriores se sedimentan en capas de prejuicio e ideología. Y dado que el lenguaje es el medio de pensamiento, nuestras posibilidades de captar la esencia de la vida y de la existencia son pobres. Estamos a merced de nuestro lenguaje engañoso —y la tesis del relativismo lingüístico, por lo tanto, se expande hacia la tesis del relativismo epistemológico.

Los enunciados del relativismo lingüístico pueden reformularse en términos kantianos al darle un “giro lingüístico” a Immanuel Kant. Kant intenta definir algunas condiciones uniformes a priori para experimentar y obtener conocimiento. En su obra *Critique of pure reason* [Crítica de la razón pura], Kant describe algunas formas básicas de intuición y algunas categorías dentro de las cuales todo nuestro pensamiento debe ubicarse. No se trata de un simple hecho empírico el que percibamos los objetos físicos en un espacio de tres dimensiones. El espacio no es un concepto generalizado de la suma de nuestras experiencias. Es una condición necesaria para la experiencia. Nuestras experiencias están moldeadas por formas a priori de intuición, de la misma manera que el agua toma la forma del recipiente donde se vierte. Esto significa que las estructuras a priori organizan lo que la humanidad puede observar. Las huellas de la humanidad, encarnadas en las estructuras a priori, ya se han impuesto en lo que observamos. Empero, la perspectiva kantiana puede alterarse: las estructuras del perfil kantiano ideal y eterno pueden sustituirse por las estructuras que provienen de nuestra realidad social. Los filtros a priori pueden reemplazarse por filtros a posteriori. Alguna construcción social puede interponerse entre nuestras observaciones y el mundo exterior, es decir, el lenguaje en el que nos encontramos inmersos. Por lo tanto, la estructura de nuestro lenguaje se convierte en un principio socialmente construido que preestructura nuestras observaciones.

Las matemáticas pueden caracterizarse de formas diferentes, entre ellas, como un lenguaje. Como tal, se convierten en un instrumento para el desarrollo del conocimiento y en un intérprete de la realidad social. Entonces, es razonable preguntarse si las matemáticas pueden verse como un lenguaje con un poder descriptivo universal, o si crean y expanden puntos ciegos. ¿Cómo miraría el mundo una persona cuya lengua nativa fueran las matemáticas? La formulación de Galileo Galilei de que Dios organizó el mundo de acuerdo con los principios de las matemáticas expresa una fuerte creencia en la omnipotencia de ellas. Si esto es cierto, las matemáticas deben poseer un poder descriptivo completo e ilimitado. Pero si Dios no organizó el mundo únicamente de acuerdo con las matemáticas, entonces tiene sentido preguntarse si el lenguaje de las matemáticas provee una

visión del mundo rica o restringida. ¿Las matemáticas acortan nuestra imaginación?

¿Las matemáticas nos hacen ver el mundo de una manera distorsionada? Si es así, ¿es distorsionada en relación con qué? ¿Tiene sentido, al igual que Sapir lo hizo, enunciar que el mundo real en gran medida y de manera inconsciente se construye a partir de los hábitos lingüísticos (matemáticos) del grupo? ¿Las matemáticas pueden interpretarse como un lenguaje por medio del cual se puede no sólo observar ciertas estructuras de la realidad e ignorar otras, sino también organizar la realidad? Y, ¿quién o quiénes llevan a cabo lo anterior? ¿Todos los matemáticos? O, ¿sólo aquellos cuyo trabajo es desarrollar la gramática del lenguaje matemático? O, ¿serán únicamente los usuarios de las matemáticas tales como los matemáticos aplicados, los tecnólogos y los ingenieros? O, ¿se le puede dar aun una interpretación más general al “quién”? La tesis del relativismo lingüístico se formuló en relación con grupos de personas definidos socialmente. Y si las matemáticas son el lenguaje de la ciencia, ¿cuál puede ser la interpretación del relativismo lingüístico para ellas? ¿Tiene sentido decir que una ciencia reestructura el mundo?

Si aceptamos que por lenguaje no sólo consideramos la lengua materna de un cierto grupo de personas, y si decidimos pensar en aquél desde la perspectiva del relativismo lingüístico, podríamos decir que las matemáticas poseen un poder social fuerte (potencialmente). Las matemáticas se conectan con nuestra cultura tecnológica y la investigación en matemáticas ha crecido de forma enorme y en paralelo con la revolución científica y tecnológica. Sin embargo, no es evidente cómo se puede establecer la conexión entre matemáticas y tecnología. No obstante, la importancia de las matemáticas, a pesar de que no se comprenda en todo su detalle, se acepta por lo general más allá de los límites de la comunidad científica y tecnológica. Los estudiantes⁸ se encuentran con las matemáticas en sus estudios y saben que las habilidades matemáticas son importantes para su carrera futura. Los políticos saben que las matemáticas son uno de los pilares que sustentan el desarrollo tecnológico, así que aceptan gastar grandes cantidades de dinero en esta ciencia, que a su vez se considera la más abstracta de todas las ciencias⁹. Las matemáticas por lo general se reconocen como importantes a pesar de la dificultad para señalar los elementos específicos de la sociedad tecnológica que esta ciencia sustenta.

8. A lo largo del libro, cuando me refiera específicamente a los alumnos de la escuela primaria, hablaré de “niños”. A los alumnos de la escuela secundaria y media los llamaré “estudiantes”. Y cuando hable de los alumnos en general también utilizaré el término “estudiantes”. Algunas veces, como de hecho ya lo hice en esta nota, usaré el término alumno en vez de estudiante.

9. Con respecto a este punto, comparar con Glimm (Ed.) (1991).

Por lo tanto, se torna importante mirar a la educación matemática ya que esta parte de la educación provee la introducción a un lenguaje que se considera omnipotente. ¿Quiere esto decir que la educación matemática se vuelve importante no sólo como una introducción para las generaciones futuras a algunos cúmulos básicos de conocimiento, sino también como una introducción a una cierta gramática que promueve algunas visiones específicas del mundo? ¿Acaso esto significa que la importancia de la educación matemática en nuestra sociedad tecnológica tiene que interpretarse bajo las mismas líneas que la enseñanza de la neolengua en Oceanía, es decir, como aquello que introduce a algún modo nuevo de pensamiento? Orwell describió la neolengua como un obstáculo para el pensamiento crítico y es posible que el aprendizaje de la gramática de las matemáticas se pueda concebir de la misma manera. ¿La enseñanza del poderoso lenguaje matemático impide una interpretación crítica de una sociedad con un alto desarrollo tecnológico?

Debo enfatizar que no sugiero ninguna comparación entre vivir en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico y vivir en Oceanía. Sería simplista transformar el antagonismo hacia Oceanía en una aversión hacia nuestra sociedad con un alto desarrollo tecnológico. No estoy analizando si nuestro desarrollo tecnológico nos llevará o no hacia una utopía o hacia la distopía de Orwell. No debemos buscar una utopía en el pasado como una unión romántica de la humanidad y la naturaleza libre de los daños causados por las invenciones tecnológicas, ni tampoco en el futuro como la solución técnica completa a los problemas de hoy en día. Ninguna de estas variantes de tal tipo de romanticismo hace parte de mi proyecto. Simplemente quiero enfatizar la importancia de hacer una interpretación lo más amplia posible de lo que puede estar sucediendo en la educación matemática, porque ella también introduce a un modo de discurso y pensamiento y provee una introducción a una cierta cultura. Para comprender el significado del aprendizaje–enseñanza de la neolengua en Oceanía, debemos discutir las funciones de ese lenguaje en la sociedad. No basta con sugerir cómo mejorar ese tipo particular de educación. Lo mismo sucede con la educación matemática en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico, aun si hiciéramos una interpretación optimista de las tendencias actuales de la tecnología. La educación matemática debe interpretarse como parte de un conflicto simbólico y es importante anotar que una condición para comprender qué sucede en este tipo de educación es no creerle a nuestros propios ojos. Lo que parece suceder en realidad no sucede, y lo que sucede es difícil de ver.

Todas las instituciones de la sociedad le prestan una atención enorme a la educación matemática. Se tiene en cuenta de manera global tanto en las sociedades altamente tecnologizadas, frente a la importancia de mantener el ritmo en el desarrollo social, como en los países en vías de desarrollo, frente a las demandas para realizar un progreso tecnológico. Hoy en día

nadie parece dudar de la importancia general de la educación matemática. Por lo tanto, es relevante mirarla desde su perspectiva más general y global.

En la vida universitaria se observa una demarcación entre las ciencias y las humanidades. Por ejemplo, Charles P. Snow, en su obra *The two cultures: and a second look* [Las dos culturas: y una segunda mirada], encuentra la línea divisoria que atraviesa incluso las altas mesas de los comedores de las encantadoras facultades de Cambridge. Los científicos y los humanistas no se hablan entre sí porque no pueden comunicarse. Pertenecen a dos culturas separadas y tan sólo sonrisas congeladas pueden cruzar la frontera. Me parece importante mirar esta línea divisoria que existe en nuestra sociedad altamente tecnificada y también romperla si queremos ser más que simples espectadores del crecimiento tecnológico. Un área en que esto puede hacerse es la educación matemática pues ésta debería ser de interés para ambos campos. Ella debe investigarse no sólo como una relación entre una cierta materia, las matemáticas y los estudiantes que deben tragarse los pedazos prefabricados de dicha materia. La perspectiva debe ampliarse y el contenido de la educación matemática debe interpretarse de forma tal que pueda comprenderse el papel global de las matemáticas; de ahí que tengamos que sobrepasar esta barrera.

Trataré de desarrollar los elementos de una filosofía de la educación matemática crítica. Esto merece una explicación. ¿Cuál puede ser el significado de la expresión “una filosofía de”? Una filosofía no se apoya en hechos de manera directa. Es simplemente un error tratar de mejorar una investigación filosófica por medio de la aplicación más precisa de instrumentos. Es imposible sustentar una tesis filosófica ampliando la evidencia empírica. ¿Es en realidad posible dar ese tipo de evidencia a las tesis filosóficas? Qué tal si se mira la relación al contrario. ¿Una filosofía podría proveer evidencia para generar enunciados con un contenido empírico? ¿Podría una filosofía sustentar un enunciado no filosófico, por ejemplo, un enunciado acerca de metodologías educativas? (¿Es posible refutar una filosofía por medios empíricos?)

Entonces, ¿qué podemos esperar que haga una filosofía? No la encuentro capaz de proveer mucho. Como lo expresó Baruch de Spinoza, por ejemplo, se asume que por medios racionales se puede incluso demostrar la existencia de Dios. Pero aun si ese tipo de reivindicaciones ambiciosas se modifica, a veces nos encontramos con el supuesto de que algunos principios generales (por ejemplo aquellos concernientes a las normas y valores éticos) pueden discutirse en una filosofía y de que es posible establecer algún grado de justificación filosófica de tal principio. No estoy seguro de esta posibilidad. En particular, no creo que una filosofía pueda identificar principios educativos ni alguna justificación para ellos. Incluso dudo de la existencia de tesis filosóficas genuinas (quizás con unas pocas excepciones). Sin embargo, una investigación filosófica puede proveer algunos fun-

damentos para hacer interpretaciones y aclaraciones (¿una tesis filosófica?). Concibo la filosofía como un medio para proveer nuevas perspectivas. Quizás haga surgir diferentes visiones al establecer nuevas bases en nuestro lenguaje.

Empero, y a pesar de la creencia poco pretenciosa en el potencial de la filosofía, no espero que ella sea independiente de las experiencias. Si aceptamos el relativismo del lenguaje —que por sí mismo es una interpretación (¿sustentada en observaciones o en argumentos filosóficos?)— podemos esperar que las interpretaciones afecten nuestras observaciones. Esto significa que las reflexiones sobre los hechos empíricos (siempre interpretados) pueden indicar una crítica de las interpretaciones usadas. Si aparecen algunas discrepancias entre los hechos (interpretados) y la teoría, ellas deben apuntar hacia nuevos esquemas de interpretación, lo cual significa un nuevo desarrollo filosófico. Veo que el papel real de una filosofía es doblar las rejas de la jaula en la que el lenguaje nos ha encerrado. Pero como nunca seremos capaces de escaparnos del lenguaje, la labor de la filosofía se torna tan difícil como el castigo de Sísifo.

En la educación matemática, vista como una empresa científica, parece haber un trancón en las calles que conectan la teoría con la práctica. A los muelles de carga de la filosofía llegan camiones con bases para algunas reformas educativas o con guías detalladas para el desarrollo del currículo. Desde la otra dirección encontramos vehículos que regresan llenos con experiencias que nos dicen que algunos principios filosóficos y educativos generales son cuestionables. Otros vienen con una variedad de observaciones que corresponden a algunas tesis generales acerca del aprendizaje y de la escolaridad. Parece no haber mucha regulación de este tráfico. No obstante, creo que la situación puede ser de alguna utilidad, a pesar de su apariencia caótica. Más bien, creo que gran parte del trancón surge porque se sobrestima la importancia de la filosofía como guía para la reforma. Una filosofía puede aclarar y brindar nuevas interpretaciones; sin embargo, los principios para las reformas educativas deben producirse en la práctica educativa, pero —y esto es importante— esa práctica debe ser una práctica educativa reflexiva. La filosofía puede ayudarnos a ver lo escondido detrás de lo inmediatamente visible. Lo que parece ocurrir no sucede: ¡no asuman que la educación matemática tiene que ver en primer lugar con enseñar matemáticas a los estudiantes! La filosofía puede ofrecer nuevas interpretaciones de una práctica y una práctica puede brindar un significado más rico a los términos filosóficos.

No encuentro posible construir ninguna teoría educativa jerárquica, coronada con una cierta filosofía que exprese algunos valores supremos. No es posible establecer algunas tesis y luego dejarlas a un lado y argüir, por medios puramente filosóficos, que esta misma tesis es razonable. No creo que una filosofía de la educación matemática pueda dar consejo sobre lo que se debe hacer en el salón de clase. De nuevo tengo que modificar mi

afirmación. Una filosofía de la educación matemática no puede existir de manera reclusiva. Si la filosofía tiene que ver con la interpretación y también con la interpretación de las observaciones, entonces la filosofía está “dentro” y se convierte en una parte de nuestras observaciones. Más bien, la razón de ser de una filosofía de la educación matemática no es ofrecer guías, sino crear nuevas posibilidades de interpretación, i.e., crear una comprensión mejorada de lo que sucede en la educación matemática. Dejemos que esto delinee el significado que pretendo dar a la expresión una filosofía de la educación matemática.

Trataré de establecer una “igualdad” entre los ejemplos educativos y el desarrollo del análisis filosófico. La relación analítica entre la aclaración filosófica y las formas de práctica asociadas con ella no es la misma que existe entre un maestro y su pupilo. Esto significa que el lector no debe intentar buscar argumentos del tipo “porque esto y lo otro se propone en la filosofía de la educación matemática, entonces es deseable tener tal forma de práctica educativa”. No pienso en términos de implicaciones sino en términos de iluminaciones. La filosofía puede iluminar una práctica y ésta puede hacernos ver nuevas cosas en una filosofía. Los ejemplos que se describen en este libro tienen que verse como maneras de dar significado (educativo) a los conceptos de las investigaciones filosóficas. Ellos pertenecen a la semántica del lenguaje de la filosofía. Las tendencias en la filosofía analítica algunas veces han ignorado este punto esencial: ¿de dónde provienen los significados de los conceptos usados en las investigaciones filosóficas?

El método para dar significado a las investigaciones filosóficas prestándole atención a los ejemplos ha sido desarrollado por Wittgenstein en su obra *Philosophical investigations* [Investigaciones filosóficas] y en las conferencias que dio en Cambridge después de su “segundo regreso”. El método de aclarar por medio de ejemplos se convirtió en un rasgo característico de sus análisis filosóficos. No sólo fue un estilo peculiar, sino también un medio importante para permitir que los análisis de los juegos de lenguaje se llenaran de significado. Estoy de acuerdo con esta estrategia, pero le encuentro una deficiencia. Se ha criticado a Wittgenstein por no ser capaz de hacer nada fuera de la filosofía con base en su filosofía. De hecho, es posible observar similitudes fundamentales entre su punto de vista en las obras *Tractatus* y *Philosophical investigations*, a pesar de que se ha enfatizado que existe una gran distancia entre las dos. Mientras que *Tractatus* versa sobre el lenguaje y hace un fetiche del lenguaje formal, *Philosophical investigations* habla de lenguajes y presenta una actitud relativista. Y mientras que *Tractatus* desarrolla una “teoría de la imagen” del lenguaje y relaciona el significado con la referencia, *Philosophical investigations* describe el significado de una oración en términos de su uso. Sin embargo, ambos trabajos sugieren que el papel de una filosofía es esclarecer los usos y abusos del lenguaje. Los problemas filosóficos surgen de los usos inapropiados

del lenguaje y la actividad filosófica consiste en identificarlos. Y —empleando la perspectiva de *Philosophical investigations*— una buena estrategia para identificar tipos de usos inapropiados es la intervención de ejemplos de diferentes juegos (simples y artificiales) de lenguaje.

No convengo en que la razón principal de que Wittgenstein se ubique en el campo conservador de la filosofía analítica, en vez de tratar de enfrentarse con el mundo (político), es que él se haya negado a producir ciertos dogmas sustentados filosóficamente, a pesar de que muchas críticas de la filosofía analítica lo han asumido. No pienso que la filosofía pueda radicalizarse al hacerla provocativa y dogmática. Mi hipótesis es que una razón para el conservatismo en la mayoría de la filosofía analítica no radica en su falta de dogmatismo, sino más bien en su carencia de ejemplos serios. Entonces la filosofía no sólo aborda los malentendidos lingüísticos sino también las limitaciones básicas producidas por nuestros esquemas de interpretación. (Y, ¿cómo sustento este punto filosófico sobre la filosofía?) El lenguaje es un medio en el que nos encontramos sumergidos; empero, no me adhiero al “mito del marco”. No estamos encasillados en nuestras preconcepciones. Incluso los esquemas más simples de interpretación se pueden desafiar.

Para este libro he tratado de seleccionar ejemplos que sean interesantes desde la perspectiva de la educación matemática crítica, no porque siempre tengan que ser ejemplares, sino en el sentido de que pueden ayudar a exponer el significado de tal tipo de educación. Wittgenstein afirma que sus ejemplos pequeños, a veces divertidos, tienen que analizarse con seriedad. Estoy de acuerdo, pero también creo que los ejemplos deben expresar los aspectos serios de la vida. Y si una filosofía se preocupa por la educación matemática, entonces los ejemplos deben ser relevantes para ese tipo de educación. Los ejemplos se convierten en ayudas para la aclaración, así, la filosofía está en los ejemplos y los ejemplos están en la filosofía. La intención entonces es dar significado a una interpretación y hacerlo de tal manera que no sólo sea obvio el significado, sino también la importancia de una educación matemática crítica.

En esta introducción ya he empleado tres veces la expresión *educación matemática crítica* sin haber aclarado el significado del término *crítica*. No obstante, no trataré de explicarlo en esta introducción, porque esto es propio del capítulo que viene. La tarea de este libro consiste en desarrollar un significado de la educación matemática crítica y, al hacer esto, sentar las bases para una filosofía de la educación matemática crítica. Tan sólo debo afirmar que una dimensión de mi enfoque crítico tiene que ver con encontrar una perspectiva desde la que pueda interpretarse la educación matemática como parte del lenguaje de nuestra cultura tecnológica y, en consecuencia, como parte de esta cultura. Más aun, es buscar posibilidades en las prácticas educativas desde las cuales se pueda poner tal perspectiva en consideración. Esta es una anotación introductoria con respecto a la idea de crítica.

CAPÍTULO 1

CRÍTICA Y EDUCACIÓN

En 1966, Theodor W. Adorno publicó el artículo “Erziehung nach Auschwitz” [La educación después de Auschwitz], considerado por muchos como el pilar de la educación crítica¹. A pesar de que contiene muchas formulaciones sueltas que, por ejemplo, revelan el sesgo de Adorno frente a las perspectivas rurales, el artículo ha iluminado de manera provocativa la importancia de la educación, no sólo como un esfuerzo por entregar información, sino también como parte de un conflicto cultural y político. Adorno coloca la educación en la posición de una fuerza social y política al sostener que la primera demanda a la que debe atender la educación es evitar que un Auschwitz suceda de nuevo. Incluso si hubo una ilusión al creer que la educación podía evitar las catástrofes políticas y sociales, la educación no puede dejar de lado la responsabilidad de tratar de luchar por los derechos humanos. De no ser así, la educación corre el riesgo de ser cómplice de tales catástrofes.

El artículo “Erziehung nach Auschwitz” aboga por una interpretación de la *crítica* como un concepto educativo. Mientras crítica y educación se mantengan separadas, la segunda fácilmente puede tomar la forma de una entrega de información, o la función de socializar a la juventud dentro de la cultura existente. Pero cuando se integran crítica y educación, entonces interpretaciones como las anteriores se convierten en algo problemático. Sugerir esta posibilidad significa dar un paso gigantesco ya que esos dos conceptos tienen orígenes diferentes y han estado separados en la tradición cultural y filosófica de Occidente.

Cuando se usa en conexión con la educación, el significado del término crítica necesita explicación. Algunos orígenes de dicho significado se encuentran en *Critique of pure reason*, obra en la que Kant trató de explicar las condiciones generales y trascendentales para obtener (cierto) conocimiento. Karl Marx hizo una interpretación materialista de la noción de crítica presente en la obra de Georg Wilhelm Hegel. La crítica debe tratar de aclarar las condiciones políticas y económicas del desarrollo de las ideas. El término adquirió una mayor elaboración en la Teoría Crítica, tal y como la han presentado Max Horkheimer, Theodor Adorno, Herbert Marcuse y otros pensadores pertenecientes a la Escuela de Frankfurt. La investigación en el Instituto de Investigación Social de Frankfurt debía, tal y como lo

1. Este artículo se encuentra en Adorno (1971). Ver también Paffrath (Ed.) (1987).

expresó Horkheimer en su discurso inaugural en 1931, llevarse a cabo de una manera interdisciplinaria que incluyera la filosofía, la sociología, la economía, la historia y la psicología, para interpretar la vida social con el fin de encontrar oportunidades de hacer una mejora radical más allá del baluarte de los hechos².

Jürgen Habermas desarrolló posteriormente la Teoría Crítica y en *Knowledge and human interests* [Conocimiento e intereses humanos] expuso una teoría acerca de la existencia de diferentes tipos de conocimiento que constituyen diferentes intereses. Lo más importante de ésta es la idea de que las ciencias sociales deben basarse en un interés emancipatorio, si quieren escapar de la trampa del positivismo lógico y, por lo tanto, no restringir la investigación a la sencilla actividad de señalar correlaciones entre fenómenos bien definidos. De ser así, de acuerdo con Habermas, la investigación técnica y manipulativa se apoderaría de las ciencias sociales. No es posible encontrar ninguna plataforma neutral; por el contrario, las ciencias sociales deben comprometerse. Pretender registrar los hechos de una manera neutral conllevaría a la aceptación del *statu quo* en la sociedad. Posteriormente, Habermas dio un gran paso más allá de las ideas originales de la Teoría Crítica al formular una teoría de la acción comunicativa³.

Con el fin de profundizar en la idea de la educación crítica comentaré los constructos *crisis*, *crítica* y *emancipación*. Luego introduciré algunas de las preguntas que surgen del mismo uso del término *educación crítica*. El objetivo de lo anterior es ante todo aclarar y darle significado a conceptos, más que demostrar que este o aquel es el significado que debe dárseles. Todos los conceptos que se utilizan en este libro tienen un carácter abierto. Esto no significa que no tengan carácter, sino que, más bien, el lector no debe esperar que encajen perfectamente como piezas de un mismo rompecabezas.

CRISIS

Ya pasamos 1984 y no encontramos en nuestra sociedad una Policía de Pensamiento como la descrita por Orwell. Pero, a pesar de que nos hayamos escapado de este horror, nos encontramos en una sociedad industrializada y mecanizada que tiene el sello de las crisis y los conflictos. Enfrentamos conflictos dada la distribución desigual de los bienes, tanto en las esferas locales como globales. Enfrentamos conflictos relacionados con las diferencias en las oportunidades sociales y económicas. Encontramos una represión social causada por algunas maneras de manejar las estructuras de poder en la sociedad. Somos testigos de las tensiones entre los cen-

2. Una traducción excelente al inglés de la Teoría Crítica se encuentra en Held (1980). Ver también Benhabib (1986), Connerton (1980), Jay (1973) y Kellner (1989).

3. Ver Habermas (1984, 1987).

tros de poder y la gente desposeída de poder; entre los negros y los blancos; y entre los ricos y los pobres. Existen conflictos entre los países occidentales y los llamados países del “Tercer Mundo”. Encaramos conflictos de clase, incluso después de que la creencia en la definición marxista de clases ha perdido adeptos. Es imposible describir estos conflictos en una forma sencilla, ya que ellos están hechos de ingredientes muy diferentes. Tan sólo en la teoría y en el papel (incluso en este) dichos conflictos existen como antagonismos bipolares⁴.

Un supuesto básico de aquí en adelante es que la sociedad está llena de tensiones y crisis. No trataré de especificar el tipo de sociedad que tengo en mente. Tan sólo sostendré que la discusión se ejemplifica en la sociedad tecnológica occidental en la que vivo y a la que conozco. Me niego a interpretar la sociedad como una estructura bien balanceada. La sociedad y las relaciones entre sociedades conforman patrones heterogéneos. Una imagen de la sociedad en equilibrio no puede ser realista; esas fueron las imágenes que pintaron los economistas liberales como Adam Smith quienes suponían que la permanencia de la libre empresa aseguraría alcanzar la armonía. Mi tesis es que, sin importar si miramos a la economía o a las otras características de la sociedad, no hay posibilidades de equilibrio a la vista. No es posible imaginar una sociedad en equilibrio como la que describió Platón en *La república*, donde se maximizaría la buena forma de gobierno por el hecho de que los “gobernantes sabios”, i.e., los filósofos, estarían en el poder y, por lo tanto, no habría nada que mejorar. La sociedad alcanzaría una estabilidad, pero sólo en el modelo de *La república*. La naturaleza crítica de la sociedad es un aspecto que de por sí la define y no sólo una circunstancia que imaginamos pueda desaparecer por medio de un desarrollo adecuado.

¿Cómo sabemos que existen conflictos? Este es un supuesto al que no dedicaré una argumentación extensiva; empero, no es un supuesto fortuito como para comenzar con él. Pero si alguien desea encontrar una prueba, podría seguir el tipo de demostración de la existencia del mundo exterior que presentó George Moore⁵. Una pregunta filosófica clásica ha sido la de, si nuestros sentidos registrasen todo lo que somos capaces de percibir y conocer, ¿cómo llegaríamos a saber algo acerca de la existencia de la realidad detrás de esta información sensorial? ¿Cómo podríamos saber si la

4. Podríamos intentar dividir los conflictos en diferentes categorías, como son la explotación de clases, el racismo, el sexismo, el elitismo, la explotación de la naturaleza, la competencia por los recursos, etc. Desde una perspectiva diferente podríamos enumerar las crisis personales, los conflictos matrimoniales, las crisis familiares, los problemas en el lugar de trabajo, etc. Tales categorizaciones pueden ser herramientas útiles para dirigir nuestra atención hacia alguna dirección, a pesar de que puedan causar una simplificación injustificada. No se puede establecer al respecto ninguna categorización sobre bases firmes. Sin embargo, ese no es el punto esencial de mi argumento.

5. Ver “Proof of an external world” [La prueba de un mundo exterior] en Moore (1959).

existencia del mundo exterior es la causa de lo que percibimos? Moore afirmó haber resuelto ese problema ofreciendo una demostración que, según él, resolvía la confusión. Primero levantó su mano derecha y luego la izquierda y preguntó si alguno de los presentes podía verlas; y como la respuesta fue sí, entonces afirmó haber completado su demostración. ¿Qué otro significado acerca del mundo exterior podría esperarse? Moore deseaba restablecer el sentido común en medio de la filosofía teórica e impedir que se degradara hasta ser una inutilidad discreta. Negar la validez del argumento y continuar la ponderación filosófica de la pregunta sería, según Moore, una diversión excitante en grado sumo, que se sale del sentido común, una diversión dentro de un lenguaje alterado que dista del lenguaje en que el problema filosófico en sí se desarrolla. Además, la demostración de Moore tiene la característica importante, fundamental en toda prueba matemática y formal, de poder repetirse tantas veces como sea necesario por todo aquel que desee verificarla.

¿Existen los conflictos y las crisis en nuestra sociedad? Esta pregunta se puede responder de la misma manera sencilla y directa si queremos evitar embarcarnos en argumentaciones poco exitosas. La prueba se encuentra en todos lados: mire a su alrededor y verá el significado del conflicto y la miseria. Negar que esta situación horrorosa existe va en contra del sentido común y del uso normal del lenguaje. En este sentido, la evidencia acerca de la naturaleza crítica de la sociedad sigue, según mi concepción, la misma naturaleza lógica de la prueba de Moore. Si de pronto nos da un nuevo antojo filosófico y llegamos a dudar de la existencia de hecho del mundo exterior, tan sólo necesitaremos levantar nuestra mano derecha y preguntarle a una persona que se encuentre cerca si es capaz de verla. De manera similar, si llegamos a poner en duda la existencia de la infamia, necesitaremos repetir la prueba al mirar de nuevo a nuestro alrededor. Y esta prueba también puede repetirse tanto como sea necesario. El mundo exterior existe y en condiciones miserables.

Puedo usar términos como represión, conflicto, contradicción, miseria, desigualdad, devastación ecológica y explotación. Es imposible negar la relevancia de esos términos. Usaré el término crisis para referirme a todos estos fenómenos, a pesar de que también siga usando otros conceptos⁶ ya que pertenecen a un marco semántico del que es imposible escaparse⁷. Crisis se interpreta como un término que se refiere tanto a las crisis de hecho como a las potenciales. Como veremos, la noción de crisis resulta útil para exponer las raíces semánticas de crítica. Sin embargo, encuentro que el tér-

6. El término crisis se interpreta de una manera sociológica amplia; sin embargo, no incluye cualquier uso de la palabra. No incluyo, por ejemplo, la interpretación que se le dio, a principios de este siglo, cuando se habló de la crisis en los fundamentos de las matemáticas.

7. Esta formulación significa una modificación de la tesis del relativismo lingüístico mencionado en la Introducción de este libro. No pienso que sea posible excluir el término crisis de nuestra perspectiva lingüística.

mino conflicto es más útil para tratar de expresar algunas de las ideas de la educación crítica de manera más directa.

CRÍTICA

¿Cómo reacciona uno frente a una situación crítica? Trataré de considerar este asunto de forma filosófica y acudiré a los orígenes semánticos en griego de crisis y crítica, ya que desde allí podemos trazar una conexión entre los dos. Ambas nociones se relacionan con las palabras griegas *krisis* y *kritikos*, cuyos significados son diferentes. Ellas hacen referencia a la actividad de tomar una decisión y hacer un juicio —tenemos que encontrar algunos criterios que nos guíen para salir de este dilema. También se refieren a una interpretación médica o clínica: el paciente se encuentra en una situación crítica cuando su enfermedad ha alcanzado un punto de no retorno. Por último, en tiempos antiguos, hubo una referencia a la idea de interpretar un texto; así, un *kritikos* era un filólogo.

Hemos heredado estas interpretaciones desde la antigüedad. *La Biblia* o cualquier otro texto sagrado fueron textos interpretados por un crítico. El trabajo del crítico fue importante por el hecho de relacionar un texto con sus fuentes originales. Los textos, en especial los religiosos, se degeneraron, por así decirlo, con la tradición de copiarlos y volverlos a copiar. Un estudio cuidadoso de sus fuentes originales podía remediar tal distorsión textual. Esta se convirtió en una actividad crítica que revelaba algunas interpretaciones incorrectas muy difundidas. Un crítico debía confrontar a las autoridades con los errores básicos, errores que quizás eran esenciales para el mito de la autoridad. En este momento el término crítica adquirió una nueva connotación.

La crítica como reacción a malentendidos se enfatizó durante el Siglo de las Luces. También se enfatizó la creencia fuerte en la habilidad de la mente humana. El iluminismo se convirtió en una empresa poderosa y con ella entramos en la era del *Dictionnaire historique et critique* [Diccionario histórico y crítico] (1695-1697) y de *L'encyclopédie* [La enciclopedia] (1751-1765), la época de Pierre Bayle, Jean Le Rond D'Alembert, François de Voltaire y Denis Diderot. Ellos realizaron críticas de la idea de que los malentendidos, supersticiones y mitos podían eliminarse si dejábamos de creer en las autoridades y comenzábamos a confiar en la razón. Deshacerse de los malentendidos se convirtió en una actividad crítica. El iluminismo era peligroso para las autoridades; sin embargo, en su primera fase no se desarrolló como un movimiento político. Sólo posteriormente adquirió una dimensión política.

En el espíritu de la Iluminación, la crítica en forma de razón, se convirtió en un arma de batalla contra la superstición. Crítica y uso de la razón se

volvieron sinónimos. A través del trabajo de Kant esta arma también se convirtió en objeto de crítica, a pesar de que fuera todavía el sujeto quien tuviera que llevarla a cabo. Esta idea se expresó de manera atractiva en la ambigüedad del título *Critique of pure reason* [Crítica de (a) la razón pura]. La tarea analítica tomó la forma de una autocrítica. Kant, provocado por el escepticismo de David Hume, enunció las condiciones para obtener conocimiento. No podía basar su investigación en hechos empíricos porque su preocupación era especificar las condiciones para captar tales hechos. Por lo tanto, tenía que enunciar las condiciones generales y trascendentales para obtener (algún) conocimiento, por medio de un análisis anterior a cualquier investigación con base empírica. Así, la crítica se convirtió en un concepto epistémico que tiene que ver con el señalamiento de las condiciones para el conocimiento. Este aspecto de la crítica fue un punto esencial de la teoría del conocimiento.

Como ya se mencionó, la noción de crítica de Hegel adquirió una interpretación materialista al llegar a manos de Marx. Además de identificar la crítica con una estructura teórica como, por ejemplo, una teoría económica, la crítica también adquirió el significado de objeto mismo de una teoría. La crítica, entonces, obtuvo una doble orientación: hacia algunas opiniones y también hacia algunas situaciones reales. Marx delineó una interpretación precisa de aquellos aspectos de la vida que es importante criticar. No trataré de repetir su interpretación de la educación crítica, pero debemos tener en cuenta la idea de la crítica como algo orientado tanto hacia la opinión como hacia la realidad. Esto nos hace regresar al concepto de crisis. Una crisis es una metáfora para una situación frente a la cual se reacciona por medio de una crítica. Sin embargo, si no queremos que la crítica degenera en activismo puro, tenemos que proteger la doble orientación presente en ella. Crítica se refiere tanto a la actividad de juzgar y de salir de un dilema, como a las connotaciones del término que provienen de la acepción de análisis, evaluación, juicio y valoración, y como a los significados derivados de la idea de *acción*.

Una crisis puede desembocar en una situación crítica. Tenemos que reaccionar. Y aquí encontramos las raíces de la *actividad crítica* en el sentido en que quiero interpretar el término. Ser crítico significa prestarle atención a una situación crítica, identificarla, tratar de captarla, comprenderla y reaccionar frente a ella. Estos son los aspectos que trataré de conservar cuando el concepto se vuelva parte de la noción de educación crítica.

Existen diferentes posibilidades para distinguir una crisis. Algunos sistemas de creencias cumplen la función de explicar que una desigualdad de hecho es una necesidad. Entonces, explican las desigualdades como parte del orden natural. Un sistema de creencias que trate de eliminar la crisis de la consciencia colectiva, estableciendo una ceguera conceptual⁸, se llama *ideología*. Para darle significado a lo que quiero decir con la palabra ideología, podríamos pensar en cómo se han considerado apropiadas las expli-

caciones que justifican un trato diferencial a las personas de acuerdo con su color de piel. Algunas de estas estructuras ideológicas se condensan en expresiones como “la responsabilidad del hombre blanco”. Tales ideologías han sido fundamentales en la transformación del fenómeno de la colonización en un acto humanitario. Colonizar se ha interpretado como un acto piadoso de la civilización y, por lo tanto, se puede ver como una expresión de benevolencia.

Las ideologías esconden o disfrazan conflictos y, por lo tanto, tienden a reforzar las estructuras de poder establecidas en la sociedad. Nunca ha sido urgente para los centros de poder minar las ideologías que explican cómo el orden social establecido de hecho reproduce el orden intrínseco de las cosas. Las ideologías pueden servir el mismo propósito que la Policía de Pensamiento de *Nineteen eighty-four*. De acuerdo con Orwell, es necesario controlar el pensamiento de la gente si se quiere mantener la represión y si se desea preservar una sociedad basada en la desigualdad. Puede ser cierto que sea necesario controlar la imaginación de la gente, pero no es correcto asumir que esto tenga que hacerse a través de una “policía de pensamiento”, es decir, a través de un acto de poder bruto. El control puede ejercerse de manera mucho más sofisticada y “humanitaria”. Se puede ejercer a través de las estructuras ideológicas que generan una gramática para lo que es y no es posible pensar. Así, la gente “conserva su libertad” para pensar lo que quiera, pero dentro de límites que es difícil identificar y, por lo tanto, reconocer como restrictivos⁹. Un tipo de “neolengua” puede hacer las veces de una policía de pensamiento muy efectiva.

Una crítica a la ideología se dirige a algunos sistemas de creencias. Lo que caracteriza a la Teoría Crítica es el deseo de hacer esto de una manera más teórica y organizada. La Escuela de Frankfurt muestra una posibilidad para hacerlo. De acuerdo con el paradigma de la investigación positivista, la investigación sólo puede ocuparse de hechos y su objetivo es identificar correlaciones entre conjuntos diferentes de hechos. La investigación únicamente se ocupa de lo que en realidad sucede. Pero este no es el único

-
8. Munir Fasheh (1993) expresó la idea de la ceguera conceptual de la siguiente manera: “la hegemonía no sólo se caracteriza por lo que incluye, sino también por lo que excluye; por lo que ubica como marginal, inferioriza y hace invisible”.
 9. Este uso del término ideología no es el único posible. Ideología también puede referirse a un sistema de creencias de cualquier tipo. Esta interpretación tiene la ventaja inmediata de que no se refiere a nada más que a un sistema de creencias. El problema con este uso más restringido del término está en que parece imposible señalar cualquier criterio general para identificar las estructuras ideológicas. Si es imposible dar cualquier definición estricta de una crisis, ¿cómo puede mantenerse una distinción entre un sistema de creencias que es capaz de esconder una crisis y un sistema de creencias en general? El problema es si es posible o no encontrar una distinción entre ideología, sistema de creencias y conocimiento de la misma manera obvia como se distingue la naturaleza de los estados sólido, líquido y gaseoso. O acaso, ¿todo terminará mezclándose?

aspecto involucrado en una teoría crítica. Ser crítico significa enfocarse en una situación crítica y buscar alternativas, tal vez reveladas por la situación misma. Significa tratar de identificar alternativas posibles. La investigación positivista indaga acerca de lo que se da de hecho; una teoría crítica busca lo que es posible a la luz de lo que de hecho sucede y que es crítico. No es posible identificar crisis por medio de ningún método objetivo. Esto significa que tenemos que abandonar cualquier intento de encontrar una técnica universal de la crítica (lo cual no significa dejar de ser críticos). Una teoría crítica necesita de la interdisciplinariedad y quizás puede ser importante mirar por fuera de la ciencia y de los enfoques científicos. Como se mencionó anteriormente, Horkheimer enfatizó la condición de involucrar la interdisciplinariedad en todos los estudios críticos y, en especial, en una crítica a la ideología.

Asumimos que las situaciones críticas existen aun si no poseemos métodos generales para identificarlas. El supuesto es que las crisis no pueden reducirse a fenómenos mentales. Esto significa que la actividad crítica no es tan sólo una empresa deliberada, sino que tiene sus razones por fuera de las modas fluctuantes de pensamiento. Las crisis hacen parte de la realidad. No son simples construcciones conceptuales, es decir, que si adoptamos una visión diferente de la realidad entonces creamos lo que queremos ver. Podemos hacer que la sociedad parezca homogénea si introducimos un sistema de creencias que la haga ver como tal; sin embargo, la realidad en sí seguirá siendo crítica¹⁰. Por lo tanto, no acepto el enfoque relativista que sugiere que la existencia de conflictos es tan sólo un asunto de interpretación. Pero, ¿cómo sabemos que la identificación de las crisis no es una simple cuestión de escogencia de unos sistemas de valores determinados? De nuevo, mi sugerencia es recurrir a la prueba del sentido común para la existencia de las crisis.

Cuando las crisis tienen un *status* objetivo pueden interactuar entre sí: un conflicto puede influenciar a otro. Las relaciones causales entre las crisis pueden existir. De acuerdo con (una versión simplificada de) el marxismo, podemos asumir que existe una estructura jerárquica de crisis, donde la crisis de la explotación capitalista de la clase trabajadora es la fundamental. De ésta se desprenden, y a partir de ella se explican, todos los otros tipos de miseria social. Después de resolver el conflicto de clases se nos pide seguir a Marx hacia una sociedad armoniosa, donde la utopía se hace realidad. Por lo tanto, toda la empresa del desarrollo social debe concentrarse en resolver esta crisis fundamental. Ser crítico y radical, entonces, significa apoyar a la clase obrera en su lucha de clase. Tratar de hacer algo diferente podría incluso condenarse como una divergencia reaccionaria al “camino verdadero”.

10. Esta parece una modificación de la tesis del relativismo lingüístico. Tenemos, sin embargo, que pensar que la realidad incluye las estructuras ideológicas.

Para mí esta interpretación de crítica se basa en un supuesto fuerte pero incorrecto acerca de la existencia del orden jerárquico de las crisis. Encuentro la situación mucho más complicada, ya que las crisis pueden comportarse de una manera caótica. Podríamos hablar entonces de la “vida salvaje de las crisis”. Las crisis pueden interactuar entre sí, pero es imposible señalar las características generales de la manera como dicha interacción se lleva a cabo. No es posible suponer que una solución a la explotación de clases implique una solución a otros de los rasgos críticos de la sociedad. No podemos presuponer que una sociedad sin clases sea una sociedad sin crisis¹¹. Siempre pueden aparecer nuevas catástrofes en el horizonte, que no necesitan ser consecuencia de algunos de los problemas fundamentales que ya conocemos. Las nuevas crisis pueden interactuar con problemas que ya nos rodean. Por lo tanto, veo que la interacción de las crisis es propia de la estructura dinámica de las sociedades. El cambio social puede ser una reacción a los problemas existentes o potenciales.

Cuando negamos el postulado del orden estructural de las crisis, también negamos la idea, implícita en la discusión de Marx acerca del desarrollo social, del determinismo que existe entre los fenómenos sociales. Un supuesto teórico básico que subyace a los análisis económicos de Marx es que es posible identificar teóricamente la tendencia del desarrollo social, dado que es posible identificar los mecanismos del desarrollo económico. En este punto Marx se inspiró en el paradigma científico de Isaac Newton. Marx esperaba ser capaz de formular algunas leyes fundamentales de la transformación del capital, del mismo nivel de generalidad que las leyes naturales, que pudieran explicar la transformación de una estructura social en otra, en términos de la lógica del capital. Marx asumió que estas leyes de evolución tenían una naturaleza determinista, ya que no contienen elementos estocásticos, sino que se circunscriben al ámbito de la necesidad. Marx, entonces, desarrolló su teoría dentro del marco del determinismo.

Este marco, empero, es problemático para el desarrollo del concepto de crítica ya que crea unas restricciones fuertes a lo que significa ser crítico, al asumir un orden determinista de las situaciones críticas. También produce el bien conocido optimismo tecnológico del marxismo porque el desarrollo de la tecnología establece las condiciones básicas del orden económico y el desarrollo social: el futuro ya se encuentra incluido en el presente y la revolución socioeconómica debe darse tarde o temprano. No asumo ninguna relación jerárquica entre las crisis y no confío en ningún tipo ni de optimismo ni de pesimismo acerca del desarrollo tecnológico: la situación es abierta. Las crisis pueden interactuar porque pertenecen a la realidad. Pero dado que su interacción es estocástica, entonces resulta imposible predecir

11. La disolución de la Unión Soviética no es una prueba de este punto, ya que no creo que ella tenga que ver con la concepción marxista de una sociedad sin clases.

las consecuencias de estas interacciones, y, por lo tanto, de cualquier manejo de las crisis. Cuando nos salimos del paradigma determinista, se vuelve imposible delinear las tendencias principales del desarrollo económico. Expresiones marxistas como “la necesidad histórica” pierden todo sentido.

Cuando negamos la posibilidad de una relación determinista entre las crisis y su estructura jerárquica general, también negamos la posibilidad de describir en qué consiste una crítica genuina. Entonces se hace imposible confiar en cualquier ética materialista unidireccional que determine el valor de una acción dependiendo de si apoya o no el conflicto de clases. Cuando se rompe la estructura jerárquica, una ética de este estilo se vuelve dogmática. Y como somos incapaces de predecir, entonces la situación se torna estocástica. Emprender una acción significa correr un riesgo. Esta es la condición para el compromiso ético de cualquier tipo de crítica. La crítica, por lo tanto, es una actividad abierta.

¿EMANCIPACIÓN?

El objetivo de una actividad crítica algunas veces se ha descrito como una *emancipación*. Pero este constructo (confuso) tiene diferentes significados. La emancipación puede ser el resultado de una crítica a la ideología y esto significa adquirir libertad frente a estereotipos de pensamiento. La libertad es similar al escape de un estado de mente neurótico, que se obtiene cuando una persona abandona el diván del psicoanalista después de un tratamiento exitoso. Allí la emancipación crea una condición de resistencia hacia las amenazas del mundo¹². El otro aspecto de la emancipación es la verdadera liberación de restricciones materiales, como la libertad que los esclavos obtuvieron cuando se separaron de sus amos en condición de seres humanos libres, cuando se abolió la esclavitud.

El uso amplio del término resalta los aspectos “ingenuos” de la crítica. La noción de emancipación indica la existencia de un posible resultado de la crítica. Creo que esto es problemático y trataré en gran medida de abstenerme de usar el término emancipación, a pesar de que haya adquirido una posición central en el vocabulario de la educación crítica. Cuando reaccionamos ante una crisis, nuestra acción también influye sobre otras crisis. Algunas pueden desaparecer, otras pueden surgir, y nuevos esquemas para la interacción entre las crisis también pueden emerger. Por lo tanto, la emancipación no puede tener ningún tipo de referencias absolutas. Empero, el uso de la palabra “emancipación” puede fácilmente implicar que algunas ideas se interpreten como erróneas por completo —y entonces la persona

12. Habermas (1971) señaló el paralelismo entre el interés emancipatorio constitutivo del conocimiento y la terapia psicoanalítica.

emancipada las puede descartar. Sin embargo, un absolutismo de este tipo no hace parte de mi epistemología.

Una solución a una situación crítica puede consistir en una transformación hacia una nueva crisis futura y, por lo tanto, potencial —que con frecuencia encarna una estructura de riesgo aun más dramática. Por ejemplo, podemos solucionar los conflictos causados por la falta de energía si ponemos en funcionamiento plantas de energía nuclear. En ese momento una crisis que siempre tendremos latente en el futuro es una falla nuclear: un segundo Chernobyl siempre es una posibilidad. Algunos problemas económicos en la industria se pueden solucionar acelerando la producción, pero esto, a su vez, puede significar sobrepasar más rápidamente los límites de la naturaleza. Los problemas ecológicos con frecuencia se crean cuando se corren más riesgos en la producción. Estos conllevan algunas ventajas (económicas) en el corto plazo, por eso el argumento implícito a favor de correr el riesgo es que la situación catastrófica no necesariamente sucederá sino que sólo es una posibilidad. Y esto es verdad, de ahí que se subraye la dificultad de analizar las consecuencias de la manera de manejar crisis específicas. No nos encontramos frente a consecuencias calculables, sino frente a estructuras de riesgo que pueden interactuar de formas impredecibles en un futuro. Esto no significa que sea imposible analizar algo o que no podamos hablar acerca de las maneras buenas o malas de reaccionar frente a un conflicto. El punto es que es imposible delinear un cuadro perfecto de la situación. Nuestras discusiones siempre se basarán en nociones simplificadas y parciales de algunos escenarios —y no podemos saber si lo que es relevante para el análisis sí se ha tomado en consideración. Estamos, por lo tanto, condenados a vivir en una *sociedad de riesgo*.

Podríamos hablar de la dialéctica de las crisis en términos de blanco y negro, pero siempre tendremos que tener en cuenta que el color normal de la situación es el gris¹³. En la dialéctica del negro cualquier forma de manejar una crisis resulta en una situación más caótica y terrible. Cualquier intento de solucionar el problema lleva a transformarlo en una situación más compleja y peligrosa de lo que era originalmente. En la dialéctica del negro nos encontramos en un laberinto sin salida, donde cada paso que damos nos sumerge aun más en él. La dialéctica del blanco describe la situación opuesta. Tenemos que recordar que no poseemos medios para determinar si estamos situados en el lado de la dialéctica del gris claro o del gris oscuro. De hecho, debemos cambiar un poco la metáfora del laberinto. Nos hallamos en un laberinto cuyos pasadizos cambian y se reorganizan de acuerdo con cada paso que damos. La estructura del laberinto cambia dependiendo de nuestros intentos por tratar de salir de la situación problemática. Por lo tanto, la noción de emancipación se vuelve engañosa.

13. Jens Højgaard Jensen me ha hecho caer en cuenta de la noción de la dialéctica del negro.

Desde la perspectiva de la existencia de una forma de dialéctica del negro no absoluta podemos desarrollar el “principio de esperanza”¹⁴. Si las crisis se organizan en una estructura jerárquica y la explotación capitalista es la causa principal de la miseria social, no tiene mucho sentido tratar de solucionar los “problemas de bajo nivel”. El acto racional consiste en esperar hasta que el conflicto de clases haya conducido a la victoria, y hasta entonces cualquier actividad crítica debe tratar de seguir dicho objetivo. El revisionismo se torna ridículo ya que deja sin solución los problemas fundamentales. Pero como el problema principal es tan fundamental y su solución tan difícil de imaginar, entonces la consecuencia con facilidad se torna fatalista. Las luchas de clase no van a darse en nuestro tiempo —esa era la perspectiva de la mayoría de los marxistas. Este fatalismo no es la consecuencia de los supuestos de la dialéctica del gris. En este caso cualquier tipo de acción que aborde situaciones críticas puede ser útil. Nuestra situación de laberinto puede mejorar aun si no tenemos ninguna certeza. La utopía se perdió, pero ahora incluso los cambios menores tienen sentido. Con dialécticas pintadas de gris se vuelve difícil establecer directrices para la práctica crítica —y esta libertad (confusión) surgió de negar la tesis del orden jerárquico. Se me hace difícil ver cualquier punto de referencia para la emancipación, que se ubique fuera de la perspectiva del soñador diario. Sin embargo, el principio de esperanza puede en teoría mantenerse, incluso en la educación.

EDUCACIÓN CRÍTICA

¿Qué instituciones sociales deberían reaccionar frente a la naturaleza crítica de la sociedad? ¿Qué instituciones son capaces de hacerlo? Adorno sugiere que las instituciones educativas tienen este papel, y esto significa que debemos hallar un lugar de encuentro entre la crítica y la educación. Desde los años 60 una de las principales preocupaciones de la educación crítica ha sido constituir una educación de acuerdo con los lineamientos de la Teoría Crítica. Sin embargo, no se ha llegado a delinear tal programa unificador. El rótulo *educación crítica* se ha usado de manera amplia y no comprometida para referirse a una cantidad de ideas educativas como ¡tratemos de establecer las condiciones para la emancipación! o ¡construyamos sobre la base de los intereses de la emancipación! No obstante, dichas máximas pueden interpretarse de manera fácil de formas diversas. ¿Qué significa relacionar una práctica educativa con el interés de la emancipación? Y, ¿qué significa desarrollar investigación educativa que siga los análisis de Habermas con respecto a los intereses del conocimiento?¹⁵

14. De hecho el libro de Ernst Block tiene por título *The principle of hope* [El principio de esperanza]. En él, Block argue en contra del pesimismo (cortoplacista) implícito en la teoría marxista tradicional.

La educación crítica se ha manifestado en una variedad de palabras claves: orientación por problemas, organización por proyectos, *Fachkritik*¹⁶, relevancia subjetiva, emancipación, etc. Los elementos de una educación crítica se encuentran en los trabajos de Oskar Negt, quien profundizó en el principio de ejemplaridad según el cual es posible obtener una comprensión general de un tema al enfocar la investigación en un tema específico; de Klaus Mollenhauer, quien discutió la educación con respecto a los asuntos concernientes a la democracia; de Wolfgang Lempert, quien concibió la educación como una crítica a la ideología; y de Knud Illeris, quien elaboró una teoría educativa cuyo objetivo es lograr la orientación por problemas y la organización por proyectos¹⁷. El concepto de educación asociado a un interés emancipatorio tiene diversas fuentes dentro de la Teoría Crítica¹⁸. Paulo Freire, por ejemplo, desarrolla sus ideas de manera algo independiente de este marco¹⁹. Otra fuente de inspiración se encuentra en la *Geisteswissenschaftliche Pädagogik*²⁰ que se basó en las ideas de hermenéutica desarrolladas por Wilhelm Dilthey. Martin Wagenschein es también otro teórico de la educación que merece mencionarse²¹. El discutió el principio de ejemplaridad que se ha constituido en una de las ideas principales de la educación organizada alrededor de proyectos²².

Si tentativamente tratamos de resumir en qué consiste la educación crítica, una idea simple podría ser: si las prácticas y la investigación educativas son críticas, deben abordar los conflictos y las crisis en la sociedad. La

15. Una presentación general de la educación crítica se encuentra en Hoffmann (1978). También se puede consultar Anzinger y Rauch (Eds.) (1972), Raith (Ed.) (1973) y Tybl y Walter (Eds.) (1973). Para una introducción en inglés se puede ver Young (1989).

16. La palabra alemana *Fachkritik* designa la actividad de mirar “detrás” del currículo y preguntarse por los supuestos lógicos, políticos y sociológicos que constituyen el contenido en sí.

17. Ver Negt (1964), Mollenhauer (1973), Lempert (1971) e Illeris (1974).

18. Ver, por ejemplo, la discusión sobre el movimiento de reconstrucción social, estrechamente vinculado con el trabajo de John Dewey, como lo presenta Giroux (1989).

19. Ver Freire (1972, 1974).

20. Este concepto se refiere a la tradición en la educación alemana que enfatiza la importancia de socializar a los estudiantes en los valores que se consideran como únicos de la humanidad.

21. Ver Wagenschein (1965, 1970).

22. La educación crítica fue una fuente principal de inspiración para el desarrollo educativo en Alemania y Escandinavia en la década de los 70. Como ejemplo de esto vale la pena mencionar que en Dinamarca se crearon dos universidades —la Universidad de Roskilde en 1972 y la de Aalborg en 1974— que ofrecen programas basados en trabajo por proyectos en todas las áreas (incluyendo matemáticas). Sin embargo, la influencia más amplia de la educación crítica ha diluido la empresa educativa original. En muchos casos una tendencia pragmática ha difuminado las ideas originales de la organización por proyectos y la orientación por problemas. Lo que una vez se consideró una renovación radical de las prácticas educativas se ha, en gran medida, autoajustado para encuadrarse dentro de los patrones convencionales de la educación y la sociedad.

educación crítica debe revelar las desigualdades y la represión de cualquier tipo. Una educación crítica no debe contribuir simplemente a la prolongación de las relaciones sociales existentes; no puede ser el medio para perpetuar las desigualdades existentes en la sociedad. Si desea ser crítica, una educación debe reaccionar a la naturaleza crítica de la sociedad. (Hablando en términos lógicos, si alguien pudiera imaginar una sociedad sin conflictos actuales o potenciales, una sociedad con un orden perfecto, la educación crítica sería algo superfluo. Si la sociedad absolutamente perfecta de Platón existiese y en realidad fuese así, no sería necesario inventar una educación crítica. No esperaríamos una sección acerca de la educación crítica en *La república*. En este caso la educación comprendería una introducción simple a la vida e instituciones de la sociedad ideal). La educación crítica surgió como resultado de la naturaleza crítica de la sociedad —y algo de la perplejidad de la educación crítica proviene de los análisis fragmentarios (por necesidad) de las crisis y los conflictos.

No hay una respuesta sencilla para la pregunta de por qué la educación debe reaccionar ante las situaciones críticas de la sociedad. Además, la naturaleza de tal cuestionamiento no es la misma que la de la pregunta de si existen las crisis sociales. En el caso de la primera no podemos encontrar ninguna prueba trivial como la de Moore de levantar la mano derecha. Podríamos tratar de encontrar varias razones, pero no trataré de hallar un argumento persuasivo. La pregunta de por qué la educación debería reaccionar frente a la estructura crítica de la sociedad no es una pregunta retórica. Por ejemplo, bien se podría argüir que es importante proteger a los estudiantes de la miseria de la sociedad. Me voy a concentrar más en dar un significado preciso a la expresión educación crítica, que en argüir que debería ser una actividad global. Espero mostrar que la educación crítica es un concepto significativo en la sociedad de hoy en día.

¿Qué significa para la educación relacionarse con las situaciones críticas de la sociedad? Si junto con Marx asumimos la existencia de un orden jerárquico de las crisis, la respuesta simple es que la educación debe tratar de constituir una fuerza en la lucha de clases. La teoría educativa tradicional marxista ha seguido este paradigma: en una sociedad socialista no existe la necesidad de una educación crítica. Al igual que en el Estado platónico, educar significa introducir a los estudiantes al Estado armonioso, idea que resultó desastrosa para la educación en el Bloque Este. Una situación diferente emerge cuando se adopta una interpretación no dogmática de las crisis y los conflictos. Según mi interpretación, la educación crítica debe ser una reacción a todo tipo de característica crítica de la sociedad. Tiene que tomar en cuenta no sólo las desigualdades de clase sino otras también. La educación crítica puede tomar la forma de una educación antiracista, o dirigirse hacia el tratamiento diferencial de los varones y las niñas en la escuela, o también podría atacar el elitismo, etc. La existencia de una infinidad de crisis y zonas grises de dialécticas es el presupuesto de este enfo-

que. La educación es libre de interpretar su contribución a la reconstrucción de nuestro mundo de vida²³.

La educación es capaz de reaccionar a la naturaleza crítica de la sociedad de varias maneras. El sistema escolar está imbricado en una sociedad llena de crisis, algunas de las cuales en sí se manifiestan en la escuela. La desigualdad en la sociedad crea diferencias de oportunidades en la escuela. La sociedad es el contexto de estructuración de la escuela, la cual, por lo tanto, no puede regirse únicamente por principios educativos bien sustentados; más bien, la escuela en sí hace parte del campo de batalla político. En sociedades con un alto desarrollo tecnológico, con una estructura económica y social como la de mi país, se necesita una fuerza de trabajo con diversas cualificaciones. Una distribución igualitaria de las cualificaciones no es viable; por el contrario, la sociedad necesita de la polarización en las cualificaciones. Una proporción de la fuerza de trabajo debe poseer unas cualificaciones altas y, al mismo tiempo, cierta proporción también tiene que aceptar los trabajos pesados con menor remuneración. Parece ser una condición para el mantenimiento del sistema económico en países capitalistas, que una parte de la fuerza de trabajo se mantenga por debajo del nivel, pero que esté lista para llenar los espacios que se abren como resultado de nuevas necesidades sociales; en este sentido, el desempleo es “útil”. Nuestra sociedad “necesita” una distribución desigual de las cualificaciones y esto impone una presión en la escuela para que produzca tal estado de cosas. La desigualdad fuera de la escuela se refleja, por lo tanto, al interior de ella. El elitismo, concebido como la idea de que tan sólo una cierta porción de los estudiantes debe tener una educación superior basada en su mayor disposición para aprender, está de acuerdo con esta demanda estructural de la sociedad. Pero el elitismo le da una vuelta al argumento al asociar las condiciones para seguir una educación superior, con el potencial intelectual de los estudiantes. Esto puede resumirse en la tesis de que la escuela reproduce las estructuras sociales. Esta reproducción incluye la reproducción de la división del trabajo, la reproducción de la distribución del poder entre el individuo y el estado y entre el estado y los grupos sociales y, por último, la reproducción de los valores culturales tradicionales. En breve, los aspectos críticos de la sociedad hacen parte de la vida de la escuela. Una educación crítica debe buscar responder a esta situación.

La escuela reproduce el conocimiento, las rutinas y competencias, al igual que sustenta las creencias ideológicas. Si la educación pretende ser crítica, tiene que tener en cuenta el contexto crítico de la escolaridad y tratar de desarrollar posibilidades para crear una consciencia acerca de los conflictos, al igual que proporcionar las competencias que sean importantes

23. Habermas (1987) utilizó el término *Lebenswelt* [mundo de vida] en su discusión acerca del punto en que las demandas tecnológicas de los sistemas y estructuras nos expropian de nuestra situación de vida cotidiana.

para manejar tales situaciones críticas²⁴. Además, tenemos que discutir hasta qué punto es posible limitar las prácticas educativas a tales fines. Quizás pueda ser el caso que, para un funcionamiento adecuado de la educación crítica, toda la empresa educativa también tenga que relacionarse con las características que difieren de las estructuras críticas de la sociedad. Entonces, una pregunta central tiene que ver con la relación con las áreas de conocimiento tradicionalmente establecidas: ¿cuál es el *status* de las materias tradicionales del sistema escolar dentro de una educación crítica?

ALFABETIZACIÓN Y ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA

En *Schooling for democracy* [La escuela para la democracia] Henry Giroux formula de la siguiente manera la idea de una educación crítica:

Es necesario defender la escuela como un servicio público importante que eduque a los estudiantes para ser ciudadanos críticos que puedan pensar, desafiar, correr riesgos y creer que sus acciones pueden marcar una diferencia en la sociedad en general. Esto significa que las escuelas públicas deberían volverse lugares que ofrezcan la oportunidad de una alfabetización, es decir, que ofrezcan oportunidades para que los estudiantes compartan sus experiencias, trabajen en un ambiente de relaciones sociales que enfatizan el cuidado y la preocupación por los demás, y se familiaricen con las formas de conocimiento que les den la convicción y la oportunidad para luchar por una calidad de vida de la que todos los seres humanos se benefician.²⁵

Aquí se enfatiza que la escuela debe educar a los estudiantes para ser *ciudadanos críticos*, preparados para correr riesgos, desafiar y creer que sus acciones pueden marcar una diferencia en la sociedad en general.

En la educación crítica, la discusión sobre la *alfabetización* ha jugado un papel central, en especial como resultado del trabajo de Paulo Freire, quien desarrolló la dimensión política de la educación a partir de este término. El trabajo de Freire es importante porque parte del supuesto básico de que la educación tiene que relacionarse con las estructuras críticas de la sociedad y porque muestra cómo interpretar dicho supuesto con respecto a una práctica educativa que también le enseña a la gente cómo leer y escribir.

24. ¿Cómo llegué a esto? ¿Cómo sé que una educación crítica tiene que considerar el contexto crítico de la escolaridad? Mi mejor respuesta podría ser que no veo estos enunciados como consecuencia de otros más generales; ellos no pertenecen a ninguna teoría de la educación crítica. No tengo un compromiso con proveer tal base. Sólo trato de generar interpretaciones y mis enunciados tienen sentido dentro de la manera como estoy interpretando el término educación crítica.

25. Giroux (1989, p. 214).

La alfabetización se ha descrito como una espada de doble filo. Ella es necesaria en la sociedad de hoy en día para informar a la gente acerca de sus obligaciones y para que la gente, a su vez, pueda conseguir empleo en los procesos productivos básicos. Sin embargo, la alfabetización también puede utilizarse con el propósito de potenciar, porque puede ser un medio para organizar y reorganizar interpretaciones de las instituciones, tradiciones y propuestas sociales para la reforma política²⁶. La alfabetización no es tan sólo una competencia que tiene que ver con la habilidad para leer y escribir, habilidad que puede medirse y controlarse, sino que también posee una dimensión crítica. Dado su potencial para reorganizar las interpretaciones humanas de la realidad, la alfabetización puede verse como parte de una crítica a la ideología (de acuerdo con la sugerencia de Lempert) y puede convertirse en un medio para evidenciar la desigualdad y la represión y, por lo tanto, ser una herramienta para identificar los rasgos críticos de la sociedad. Giroux la formula así:

La alfabetización como un constructo radical tendría que enraizarse en un espíritu de crítica y de proyecto de posibilidad que le permitiera a la gente participar en la comprensión y transformación de su sociedad. La alfabetización, entendida tanto como el manejo diestro de habilidades específicas, como de formas particulares de conocimiento, tendría que convertirse en una condición previa para la emancipación social y cultural.²⁷

Esta formulación conecta la alfabetización con el *espíritu de crítica*. El objetivo no sólo es una mejor comprensión de la sociedad sino también su transformación.

Parte del propósito de la educación crítica es asegurar una igualdad en la distribución de las oportunidades para leer y escribir. Pero esto no es lo único que se relaciona con la alfabetización en la perspectiva de la educación crítica. Giroux subraya el hecho de que:

La alfabetización no sólo se relaciona con la pobreza o incapacidad de los grupos subordinados para leer y escribir de forma adecuada; también, y de manera fundamental, se relaciona con formas de ignorancia política e ideológica como son el rechazo a conocer los límites y consecuencias políticas de la visión que uno tiene del mundo. (...) Lo que es importante reconocer aquí es la necesidad de reconstituir una visión radical de la alfabetización que gire en torno a la importancia de nombrar y transformar esas condiciones ideológicas y sociales que van en detrimento de la posibilidad de crear formas de

26. Ver Giroux (1989, p. 147).

27. Ver Giroux (1989, p. 148).

comunidad y de vida pública organizada con base en los imperativos de una democracia radical.²⁸

Aquí se introduce un nuevo término, *democracia*. Esto debería generar una discusión importante acerca de la educación basada en este concepto. Además, se enfatiza que la educación crítica es mucho más que únicamente enseñar a la gente iletrada las habilidades básicas. Naturalmente este es uno de los trabajos importantes de la educación, pero no puede identificarse como la (principal) característica de la educación crítica. La educación crítica debe luchar contra las restricciones ideológicas, debe reaccionar a los conflictos y a la diferenciación de oportunidades que la sociedad encarga a las escuelas y debe otorgar competencias que capaciten a la gente para confrontar la naturaleza crítica de la sociedad.

Giroux también relaciona la alfabetización con la emancipación:

Una teoría emancipatoria de la alfabetización señala la necesidad de desarrollar un discurso alternativo y una lectura crítica de cómo la ideología, la cultura y el poder funcionan en una sociedad capitalista para limitar, desorganizar y marginar las experiencias cotidianas más críticas y radicales y las percepciones del sentido común de los individuos.²⁹

Esta es una variación en la formulación de la tesis de que una ideología esconde las crisis y los conflictos. Las ideologías se construyen a partir de nuestras gramáticas básicas y por lo tanto la alfabetización puede perpetrar un ataque a tal sistema de creencias. La alfabetización es parte del proyecto de desarrollar un discurso alternativo que es importante ya que la ideología, la cultura y el poder pueden ser capaces de “limitar, desorganizar y marginar” las experiencias cotidianas críticas y radicales.

En este punto Giroux alcanza una conclusión más general:

La alfabetización desde esta perspectiva más amplia puede servir para potenciar a las personas a través de la combinación de habilidades pedagógicas y análisis críticos. También cumple la función de ser un vehículo para examinar cómo las definiciones culturales de género, raza, clase y subjetividad se constituyen como constructos tanto históricos como sociales.³⁰

La alfabetización ahora significa potenciación. Puede desarrollar condiciones para que los seres humanos se ubiquen en la historia y reconozcan su posición en la sociedad y, al hacer esto, les puede permitir funcionar en ella. Las personas dejan de ser observadores para convertirse en actores. A través

28. Ver Giroux (1989, p. 151).

29. Ver Giroux (1989, p. 152).

30. Ver Giroux (1989, p. 152).

de la alfabetización llegamos a saber algo acerca de nuestra posición en el mundo, lo cual se ejemplifica de manera más directa en la práctica de Freire. Los oprimidos se vuelven capaces de participar en la lucha para mejorar sus oportunidades³¹.

¿Se puede sustituir el término *alfabetización* por el de *alfabetización matemática* en las consideraciones anteriores?³² En un primer momento, el término alfabetización matemática denomina la habilidad para calcular y usar técnicas formales y matemáticas, aunque más adelante espero dar al concepto un contenido más diferenciado. ¿Se puede concebir la alfabetización matemática como una espada de doble filo? ¿Acaso se puede usar la alfabetización matemática con el propósito de potenciar? ¿La alfabetización matemática podría ayudar a la gente a reorganizar sus visiones de las instituciones, tradiciones y posibilidades sociales de acción política? Si es posible sustituir alfabetización por alfabetización matemática, entonces tiene sentido hablar acerca de una educación matemática crítica, al menos hasta el mismo punto en que se puede hablar de una educación crítica que tiene la alfabetización como eje central. Sin embargo, no es obvio que las competencias de la alfabetización y la alfabetización matemática jueguen papeles paralelos en la sociedad. Si el lenguaje constituye una parte de nuestra visión del mundo, parece desprenderse de ahí que una educación crítica debería acentuar la alfabetización. Pero, ¿qué es lo que las matemáticas constituyen?³³

Al reformular otra de las proposiciones de Giroux acerca de la alfabetización podríamos decir que la alfabetización matemática, como un constructo radical, tendría que enraizarse en un espíritu de crítica y de proyecto de posibilidad que le permitiera a la gente participar en la comprensión y transformación de su sociedad. Por lo tanto, la alfabetización matemática se convertiría en una condición previa para la emancipación social y cultural. ¿Esta afirmación puede ser más que una afirmación medio vacía? ¿Cuál

31. Giroux hace otra modificación importante. No ser analfabeta no significa ser libre, en todos los sentidos del término. La alfabetización, como parte de una crítica a la ideología, puede crear un grado de libertad para pensar y percibir de manera independiente de algunas (pero definitivamente no de todas) restricciones ideológicas; sin embargo, la libertad en este sentido ideológico no es equivalente a la libertad en el sentido material. La libertad para pensar puede incluso significar libertad para pensar lo que se desee pero dentro de una cárcel. Como Giroux lo expresa: el analfabetismo no explica las causas del desempleo de las masas, de la burocracia o del racismo creciente en países como los E.U.A. La alfabetización no revela de manera automática, ni tampoco garantiza, la libertad política, social y económica. Empero, sí puede significar un paso hacia la potenciación de las personas. Ver Giroux (1989, p. 155).

32. Ubiratán D'Ambrosio ha desarrollado la noción de *materación* que tiene un significado similar al de alfabetización matemática.

33. Más adelante exploraremos el papel de las matemáticas en la sociedad con el fin de encontrar una base más sólida para la interpretación de la alfabetización matemática. Ver el Capítulo 3.

sería el significado de alfabetización matemática si se quisiera que encajara en esta formulación? Freire desarrolló el concepto de alfabetización de tal manera que incluyera más que las habilidades básicas de lectura y escritura; pero, ¿qué tipo de extensión de la alfabetización matemática se necesita? Se enfatizó que la alfabetización se relaciona no sólo con la habilidad de los grupos subordinados para leer y escribir de manera adecuada. ¿Lo mismo aplica en el caso de la alfabetización matemática? ¿Qué tipo de extensión de la alfabetización matemática se necesita? ¿Acaso la alfabetización matemática también se relaciona con formas de ignorancia política e ideológica como son el rechazo a conocer los límites y consecuencias políticas de la visión que uno tiene del mundo? ¿Se podría involucrar la alfabetización matemática en un proyecto para nombrar y transformar esas condiciones ideológicas y sociales que van en detrimento de la posibilidad de crear formas de comunidad y de vida pública organizada con base en los imperativos de una democracia radical?

Naturalmente, sería muy simple asumir como un axioma que la alfabetización matemática tiene un papel similar en la sociedad al de la alfabetización; este puede ser el caso. Empero, las diferencias y similitudes deben analizarse y discutirse antes de que podamos intentar dar más significado al término educación matemática crítica. El problema es, de hecho, que algunos de los términos básicos que se han empleado para delinear la actividad crítica y para especificar los supuestos generales de la educación crítica pueden no ser operacionales en un intento por identificar un significado posible de la educación matemática crítica. Un término básico es crisis, pero, ¿cuál es su significado con respecto a las matemáticas? ¿Qué significa crítica a la ideología en este contexto? Estos conceptos han sido operacionales para ubicar la alfabetización como parte de la educación crítica, pero pueden no cumplir la misma función con respecto a la educación matemática crítica. Mi intención es, por lo tanto, no extrapolar del marco conceptual establecido en este capítulo, sino más bien usarlo como se ha venido haciendo: para proveer inspiración para desarrollos posteriores de la educación crítica.

En su conclusión, Giroux habla de la democracia radical y conecta esta idea con la de educación crítica. Muchos educadores han reflexionado acerca de la democracia. Este ha sido el caso desde que surgió la idea de que la educación debería dirigirse a las masas y no sólo a la élite. Creo que una mirada más detallada a las ideas relacionadas con la democracia podría revelar algo más acerca de la naturaleza de la educación matemática crítica. Un paso en esa dirección será mirar de manera cuidadosa la naturaleza del papel de las matemáticas en la sociedad. ¿Tienen las matemáticas algo que ver con las estructuras críticas de la sociedad?

CAPÍTULO 2

DEMOCRACIA Y EDUCACIÓN

Cuando la educación se convierte no sólo en una empresa para la élite sino una educación para las masas, en ese momento se relaciona con los ideales democráticos. A principios de este siglo, John Dewey señaló:

Ya que una sociedad democrática repudia el principio de la autoridad externa, debe encontrarse un sustituto en la disposición e interés voluntarios; éstos sólo pueden crearse a través de la educación. Pero hay una explicación más profunda. Una democracia es más que una forma de gobierno; es en primera medida un modo de vida en comunidad donde hay una experiencia comunicativa conjunta.¹

Dewey, más que cualquier otro, ha unificado la discusión acerca de educación y democracia. Su contribución es vital para la ramificación de la discusión educativa —tan vital como es la contribución de Adorno en la integración de la dimensión crítica.

A pesar de que el concepto de *democracia* es más amplio que el de crítica, es lo suficientemente definido como para iluminar aspectos de la educación que la crítica no hace visibles. Por lo tanto, encuentro que tanto las contribuciones de Dewey como las de Adorno son importantes para la educación y, al final de este capítulo, trataré de describir un término que sea capaz de juntar aspectos de ambas perspectivas de tal manera que se pueda lograr una mejor comprensión de la educación crítica. Como ya se ha anotado, las dos perspectivas se relacionan: Giroux usó el término *democracia* en su discusión de la educación crítica.

Hay un acuerdo general en que la democracia es uno de los rasgos más atractivos de la sociedad, pero al mismo tiempo existe un amplio desacuerdo acerca de lo que significa². El concepto de *democracia* se refiere a una gama de ideas, esperanzas y utopías diferentes. Por lo tanto, aunque es

1. Dewey (1966, p. 87).

2. En *Models of democracy* [Modelos de democracia], David Held escribe: “(...) casi cualquier persona hoy en día afirma que es demócrata, sin importar si sus visiones son de izquierda, centro o derecha. Los regímenes políticos de todo tipo en, por ejemplo, Europa Occidental, el bloque Oriental y América Latina, se anuncian como democracias. Empero, lo que cada uno de estos regímenes dice y hace es radicalmente diferente. La democracia parece otorgarle un ‘aura de legitimidad’ a la vida política moderna: las normas, leyes, políticas y decisiones parecen justificarse y ser apropiadas cuando son ‘democráticas’.” (Held, 1987, p. 1)

imposible señalar cualquier definición sencilla de democracia, podemos tratar de extraer el concepto a través de delinear algunas ideas que se relacionan con ella³.

RELACIONES ENTRE DEMOCRACIA Y EDUCACIÓN

La democracia se refiere a por lo menos cuatro de los siguientes aspectos. Primero, la democracia tiene que ver con los procedimientos formales para elegir un gobierno. Sin embargo, los procedimientos formales tienen que especificarse, no sólo en lo concerniente a las elecciones, sino también en lo que respecta al gobierno, la distribución del poder y la justicia —en otras palabras, en lo que tiene que ver con las diferentes instituciones de una democracia. Segundo, la democracia presupone una distribución justa de los servicios y bienes sociales, tales como la seguridad, la educación, la salud, etc. Como consecuencia, una parte sustancial del análisis teórico de las ideas democráticas se relaciona con los tipos de bienes y facilidades que tienen que distribuirse de manera justa. No podemos calificar un régimen como democrático, sólo con base en el sistema de elecciones populares a través del voto, si siempre resulta que la mayoría decide que la minoría no debería beneficiarse de alguno de los servicios sociales. Una democracia tiene que ser justa; pero ¿cuál es la interpretación de “lo justo”? Tercero, la democracia asume que existe una igualdad de oportunidades y obligaciones para cada miembro de la sociedad. No deberían existir diferencias en las oportunidades, que se basen en diferencias de condición social, género, color de la piel, etc. La ley debería tratar a todos de la misma manera e, igualmente, todos deberían cumplir la ley por igual. Pero, ¿qué significa “igualdad de oportunidad”? De acuerdo con la tradición liberal idealista, significa la posibilidad no restringida de que cualquier persona pueda hacer lo que quiera (desde que esté permitido legalmente); mientras que la tradición materialista ha subrayado que no basta con disminuir el número de restricciones porque de hecho la sociedad debe proveer las condiciones para que cualquiera sea capaz de perseguir sus propios intereses. Así, cualquier discusión sobre la democracia se vuelve una discusión acerca de la libertad. Y cuarto, la democracia debe permitir la posibilidad de que los ciudadanos participen en la discusión y evaluación de las condiciones y consecuencias del gobierno de turno. Una vida democrática es indispensable. ¿Acaso nos podríamos imaginar una democracia donde nadie de hecho sepa sobre qué versan las decisiones (democráticas)?

3. Una discusión clásica en la filosofía analítica del término democracia se encuentra en Benn y Peters (1959).

En otras palabras, la democracia se refiere a las condiciones *formales* relacionadas con la interacción entre las instituciones democráticas, las condiciones *materiales* asociadas con la distribución, las condiciones *éticas* vinculadas con la igualdad y por último las condiciones relacionadas con la *posibilidad de participación* y reacción.

Aunque muy general, esta descripción de lo que es democracia también destaca diversas relaciones entre democracia y educación. En primer lugar, la educación puede incluir una introducción a la vida democrática de la sociedad. Esto podría, por ejemplo, interpretarse como que la escuela tiene que enseñar a los estudiantes a apreciar los valores democráticos básicos tales como la igualdad, fraternidad y tolerancia —la educación en este sentido podría ser una preparación para la vida democrática⁴. En segundo lugar, enfocarse en la democracia puede implicar una preocupación por la distribución del conocimiento y de las posibilidades educativas en la sociedad. Si el sistema educativo supuestamente representa la democracia, debería proveer oportunidades iguales para los miembros de esa sociedad, incluyendo a los estudiantes. En tercer lugar, la democracia en la educación puede referirse a la vida de la escuela y el salón de clase, lo cual implicaría que éstos deben encarnar los valores democráticos. Esta idea se relaciona con el primer aspecto mencionado antes (la educación como preparación para la vida democrática), en cuanto al supuesto de que una forma básica de aprender los valores democráticos es de hecho la participación en una vida democrática. Y en cuarto lugar, democracia y educación pueden tener algo que ver con asuntos relacionados con los contenidos y las áreas en sí de la educación.

A continuación me permito expandir un poco más algunas de estas anotaciones. Una distribución justa de los servicios sociales implica que en una sociedad democrática cada niño y adolescente debería tener igualdad de acceso a la escolaridad y al aprendizaje. Esto por supuesto conduce a una discusión acerca de la igualdad. ¿Qué significa la igualdad en la educación? Es claro que los estudiantes recibe una educación muy diferente, al interior de una misma sociedad, e incluso en sociedades que supuestamente son democráticas. ¿Cómo puede ser esto posible? Algunos sostienen que sólo los estudiantes con las mismas habilidades pueden tratarse igual. Esto puede ser conveniente para algunos propósitos prácticos puesto que parece más fácil enseñar a grupos de estudiantes que tienen el mismo nivel. ¿Pero en qué sentido esto está de acuerdo con los ideales democráticos? Muchos investigadores han indicado que en algunos países los niños de la clase trabajadora reciben menos formación escolar que otros niños⁵. También se ha documentado ampliamente que las diferencias en logros se correlacionan con el gé-

4. Tal interpretación se encuentra, por ejemplo, en el Capítulo 11, “Democracy and education” [Democracia y educación], en Peters (1966).

5. Por ejemplo, ver Bowles (1983).

nero de los estudiantes, al menos en algunas materias (en algunos países). La escuela parece estar al servicio de la reproducción de las estructuras sociales como la división del trabajo, la distribución del poder entre el individuo y el Estado y entre los grupos sociales y, por último, los valores culturales tradicionales. ¿Qué significa lo anterior en nuestra interpretación de la educación desde la perspectiva democrática? Para estar de acuerdo con los ideales de la democracia, las escuelas necesitan reaccionar a las diferentes formas como la sociedad se reproduce a sí misma y deben crear un contrapeso a algunas de estas fuerzas reproductoras para ofrecer una distribución equitativa de lo que la escolaridad puede dar, incluso las oportunidades para la educación posterior o para la vida vocacional. La educación matemática juega un papel importante como una puerta de entrada para acceder a la educación superior; por lo tanto, es importante discutir cualquier desigualdad en las oportunidades que pueda ser producida por esta materia.

La educación tiene que ver tanto con el contenido como con la distribución de las competencias adquiridas. Que aquí no se preste atención a la distribución de las competencias no significa que esto tenga menor importancia. Empero, me concentraré en el aspecto de la democracia que considera la posibilidad de que los ciudadanos participen en la vida democrática. La educación puede ayudar a desarrollar una actitud democrática entre los estudiantes, aunque esto no sea lo único que se desarrolle en la escuela. La democracia no es tan sólo una cuestión de adoptar las actitudes apropiadas, sino que también tiene que ver con competencias para la participación en los procesos democráticos. La educación debe intentar ofrecer a los estudiantes las competencias que les permitan identificar y reaccionar frente a la represión social. Este aspecto también se resalta en algunas de las formulaciones de Giroux y se expresa en su preocupación por una democracia crítica.

Las preguntas que trataré de responder son: ¿Qué tipo de competencias, relevantes para la democracia, puede sustentar la educación? ¿Cuál es la naturaleza de tales competencias en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico? ¿La educación matemática puede ser valiosa para ofrecer una base para la participación de los estudiantes, cuando sean adultos, en una vida democrática? Además me permito añadir de inmediato que mi intención no es brindar respuestas específicas sino más bien examinar las preguntas. Trataremos de seguir la conexión entre democracia y educación — mas no estamos asumiendo que otras relaciones tengan menor importancia.

IDEAS DEMOCRÁTICAS BÁSICAS

El término democracia tiene su origen en la palabra griega *demokratia* cuyo significado es gobierno del pueblo. *Demos* significa pueblo y *kratos*,

gobierno. En un discurso de Pericles (reescrito por Tucídides) se describe la democracia ateniense antigua y se expresan algunas de las ideas básicas de una democracia:

Nuestra constitución se llama democracia porque el poder está en manos no de una minoría, sino del pueblo entero. Todos son iguales ante la ley cuando se trata de resolver disputas privadas; cuando se trata de seleccionar a una persona frente a otra para ocupar cargos de responsabilidades públicas, lo que cuenta no es la pertenencia a una clase en particular sino las habilidades que de hecho la persona posee. Nadie, en tanto le sea propio prestar un servicio al Estado, se mantiene en la oscuridad política por razón de su pobreza (...) Ofrecemos nuestra obediencia a aquellos a quienes colocamos en posiciones de autoridad y obedecemos las leyes, en especial aquellas que protegen a los oprimidos y aquellas que no están escritas pero que es vergonzoso violar.⁶

La democracia caracteriza una forma de control social. Es una manera de manejar el poder y, como Pericles lo señala, en una democracia el poder se encuentra en manos de todo el pueblo. El pueblo debe gobernar. Sin embargo, ya en los tiempos de la Grecia Antigua, el concepto necesitaba más interpretación. ¿Quiénes constituyen el pueblo? No sólo los ricos, como señala Pericles porque la riqueza no importa, ni tampoco la clase a la que una persona pertenece. Pero, ¿qué sucedía con las mujeres y con los esclavos? Entonces, ¿cuál era el significado que se le daba al término gobierno? Casi desde el principio la idea de democracia se ha discutido desde un punto de vista filosófico. Y la idea ha tenido enemigos y críticos, uno de los primeros y más sobresalientes fue Platón.

En *El contrato social* publicado en 1762, Jean-Jacques Rousseau presentó una clasificación de los diferentes tipos de gobierno y escribió: “El soberano puede depositar el gobierno en manos del pueblo, o de su mayoría, de tal manera que haya más ciudadanos gobernantes que ciudadanos privados ordinarios. Esta forma de gobierno se conoce como democracia.”⁷ Esta definición se ciñe a la de Pericles. Sin embargo, Rousseau dio un paso más al hacer explícita la idea de *democracia directa*. Según Rousseau, todos, quienes quiera que “el pueblo” incluya, deben de hecho ser capaces de participar en el gobierno. Si concebimos esta como una definición genuina de democracia, es obvio que la democracia se hace imposible en la mayoría de las sociedades modernas. Este concepto tiene un campo limitado de aplicaciones y tan sólo sociedades muy pequeñas y homogéneas podrían ser democráticas.

6. Tucídides (1972, p. 145).

7. Rousseau (1968, p. 110).

Si abandonamos la idea de democracia directa y tratamos de encontrar una interpretación más adecuada, aplicable a un rango más amplio de sociedades, nos encontramos con el problema de la delegación de la soberanía: ¿de qué manera es posible combinar democracia con la necesidad de seleccionar un grupo reducido de personas para que ejerzan el gobierno? Esta es la pregunta clave de la *democracia representativa*. Pericles enfatizó que tenemos que obedecer a las personas que han sido colocadas en puestos de autoridad. Esta es una parte importante de la democracia. La necesidad de delegar la soberanía también está implicada en el hecho de que gobernar presupone cualificaciones especiales que no tienen una naturaleza común, en especial si tenemos en mente una sociedad u organización moderna compleja. Los dirigentes deben tener un conocimiento específico acerca del ámbito de gobierno que ejercen. Quizás se necesita una educación especializada. Aceptaré, en lo que sigue, que la delegación de la soberanía es necesaria. Pero, ¿cómo es posible controlar a los dirigentes? Este problema acompaña cualquier intento por expandir la democracia más allá de la democracia directa exclusiva descrita por Rousseau⁸.

Cualquier definición de democracia incluye las condiciones acerca de la naturaleza y organización de la sociedad en cuestión. La democracia directa, tal y como la describió Rousseau, no puede realizarse en todas las sociedades. Una democracia directa, que funcione de manera adecuada, se debe ejercer en un contexto que cumpla con algunas condiciones. Rousseau especificó las siguientes:

En primer lugar, un Estado muy pequeño donde la gente esté organizada de manera fácil y donde sea sencillo que todos se conozcan. Segundo, una gran simplicidad en las costumbres y moral, para evitar las discusiones excesivas acerca de negocios y temas espinosos. Tercero, un gran sentido de la igualdad en la clasificación y riqueza de la sociedad, sin el cual la igualdad en los derechos y la autoridad no puede durar por mucho tiempo. Y por último, poco o casi ningún lujo; ya que el lujo o bien proviene de la riqueza o crea la necesidad de ella, corrompe tanto al rico como al pobre, hace rendir al país frente a la indolencia y la vanidad, y priva al Estado de todos sus ciudadanos al convertir a unos en esclavos de los otros y a todos en esclavos de la opinión.⁹

Rousseau consideró importantes algunas condiciones de naturaleza sociológica. La comunidad debe ser pequeña y en ella debe existir un gran sentido

8. La democracia no tiene que restringirse exclusivamente el gobierno de un país o una comunidad. En las reflexiones que siguen tendremos en mente un enfoque más general que ve la democracia como una forma de gobernar algún tipo de organización, bien sea una comunidad grande o pequeña, o una organización pública o privada. Sin embargo, nos referiremos a éstas como "sociedades".

9. Rousseau (1968, p. 113).

de la igualdad. Empero, incluso si abandonamos la idea de la democracia directa, esperamos que, para que la democracia sea posible, se satisfagan algunos supuestos acerca de la estructura social. Si tanto condiciones materiales como formales son necesarias, la democracia también debe progresar con el desarrollo económico de la sociedad. Pero si las condiciones formales tienen prioridad, lo importante es encontrar una estructura adecuada para las elecciones y el gobierno. Cualquier sociedad puede acercarse a la vida democrática cuando tales procedimientos democráticos se hayan establecido.

A pesar de que este aspecto formal sea importante, y a pesar de que se pisotea en sociedades que reclaman ser democráticas, me concentraré por entero en otros aspectos de la democracia. Un asunto importante con respecto a las democracias representativas es cómo las condiciones materiales y éticas, y las condiciones para la participación, se desarrollan en paralelo con las dimensiones económicas y sociales. ¿Se hace cada vez más difícil satisfacer las condiciones materiales de la democracia en la medida en que la complejidad organizacional aumenta? O, ¿se trata de lo contrario? ¿Hay alguna diferencia si se trata de una sociedad con un alto desarrollo tecnológico? ¿Esta dimensión social genera nuevos obstáculos para la democracia? ¿Cuál es de hecho el contenido de las condiciones de participación en la vida democrática en este caso?¹⁰ Una sociedad organizada de manera democrática puede acercarse a una cuya estructura no es democrática, aun si los miembros de la sociedad aprecian y apoyan los valores democráticos. Los valores y las actitudes no son suficientes para asegurar el funcionamiento de la democracia. Las estructuras sociales tienen que poseer una importancia definitoria y, por lo tanto, el desarrollo de tales estructuras se vuelve crucial para las posibilidades de una vida democrática. Las tendencias de este desarrollo están determinadas por el desarrollo tecnológico.

Desde la perspectiva marxista puede hacerse un análisis específico de las condiciones materiales para la democracia: no puede establecerse una democracia en una sociedad regida por una economía capitalista. El capitalismo impide la distribución equitativa de los bienes, las oportunidades y el poder y, por lo tanto, cualquier discusión acerca de la democracia en una sociedad capitalista carece (casi) de sentido. Las estructuras capitalistas por lo tanto deben destruirse antes de que pueda establecerse cualquier tipo de democracia. No puede esperarse que los medios para vencer una economía capitalista sean de naturaleza democrática. La tesis de Marx es que el capitalismo no da espacio para que surja ninguna desviación real. El capitalismo puede parecer democrático, pero tan sólo en la superficie. No puede esperarse que la clase en el poder ceda algo de él. Esto conduce, como lo

10. Es interesante tener en mente los peligros mencionados por Rousseau: ¿la existencia de la riqueza corrompe tanto a los ricos como a los pobres?, ¿unos ciudadanos se convierten en esclavos de otros o en esclavos de la opinión?

sabemos, a los supuestos acerca de un periodo transitorio de dictadura del proletariado. Esta línea de pensamiento ejemplifica un análisis de las condiciones para la democracia en las que ciertas estructuras económicas se convierten en un verdadero obstáculo para la democracia.

No trataré de añadir nada más analíticamente a las condiciones económicas para la democracia, puesto que se podría alcanzar un punto en que la democracia en las sociedades capitalistas es imposible. Sin embargo, la discusión acerca de las condiciones no formales es necesaria, y encuentro esencial considerar los desarrollos tecnológicos. No creo en la esperanza idealista de una democracia sin casi ninguna condición¹¹. Como se ha dicho, mi preocupación se concentra en las condiciones no formales y en especial en el aspecto de la democracia que tiene que ver con las posibilidades de participación en la vida democrática. Esto significa que mantendré mi interés en la idea de Rousseau de que la democracia tiene que ver con la participación.

COMPETENCIA DEMOCRÁTICA

Tenemos que distinguir entre la competencia que los gobernantes deben poseer para tomar decisiones bien fundamentadas y actuar de forma apropiada, y la competencia que se supone deben tener los ciudadanos para juzgar los resultados y consecuencias del acto de gobernar. Entonces debemos diferenciar la competencia para gobernar de la *competencia democrática*. La competencia democrática es propia de la mayoría y debe existir para que la democracia representativa funcione. Es la base de conocimiento y comprensión necesaria para que haya algún tipo de control sobre la delegación de la soberanía. Es una condición para la participación y la reacción. Las interpretaciones de esta competencia varían entre dos extremos: uno ve la competencia democrática como una habilidad natural del ser humano y, otro, como una habilidad adquirida.

En lo que podríamos llamar la interpretación clásica e idealista de la democracia, la idea básica es que, mientras la competencia de los dirigentes para gobernar es de naturaleza especial, la competencia para juzgar es universal¹². Una manera clásica de argumentar acerca de la naturaleza común de la competencia democrática es la siguiente: el juicio acerca de un acto de un gobernante es de carácter moral o ético, y la ética no es un asunto de

11. John Stuart Mill enfatizó algunas condiciones acerca de la organización de la sociedad, pero no las exageró. Mill pertenece a la tradición liberal. Ver el Capítulo 4, "Considerations on representative democracy" [Consideraciones sobre la democracia representativa], en Mill (1975).

12. Sin embargo, la competencia para juzgar quizás exista apenas como una capacidad potencial, porque sólo una cierta actitud enfatizará la importancia de una forma democrática de control social, y una actitud democrática como tal no es común.

hechos, información o alto nivel educativo. La conjunción de enunciados no implica en sí un enunciado ético. Las normas no se basan en datos empíricos ni en resultados de pruebas empíricas. La comprensión de las normas tampoco se restringe a ningún grupo pequeño de personas que posean ciertas cualificaciones. Para argüir en favor de un enunciado normativo sólo se necesita la razón (o el sentido común) y la razón es de naturaleza común. No necesitamos creer en cualquier enunciado a menos que nos demos cuenta de que tiene que ser así. Ninguna norma necesita considerarse verdadera por el simple hecho de que la autoridad así lo dicte. No existe ninguna autoridad eclesiástica de la moral. La única autoridad en la que debemos creer es en nuestra capacidad para pensar. El dogmatismo se rechaza. Esto plantea un problema acerca del contenido de la competencia democrática.

En su obra *Considerations on representative government* [Consideraciones sobre el gobierno representativo], publicada en 1861, John Stuart Mill enfatizó que tiene que hacerse una distinción radical entre el control del gobierno y el ejercicio del gobierno en sí¹³. Al hacer esta distinción él introdujo la discusión acerca de la naturaleza de la competencia democrática. Subrayó el punto de que cierto cuerpo de personas puede ser capaz de controlar “todo”, pero que probablemente no pueden hacer todo. Incluso, Mill señaló que en muchos casos, de hecho, el control puede ser más eficiente entre menos trate el cuerpo dirigente de gobernar personalmente. Mill tenía en mente la distinción entre el gobierno y el Servicio Civil, y su preocupación se volcó hacia el control ejercido por el gobierno sobre el acto mismo de gobernar. Esto ejemplifica una parte del problema del control democrático: ¿cómo es posible para los representantes controlar el gobierno?¹⁴. Sin embargo, una pregunta aun más fundamental es ¿cómo puede la gente, en general, controlar a los representantes y al gobierno? En otras palabras, ¿cómo es posible participar, no en el acto de gobernar, pero sí en la vida democrática que incluye las discusiones y evaluaciones del gobierno? La naturaleza de la competencia democrática parece ser un problema; pero básicamente Mill es optimista sobre el comportamiento racional de los seres humanos, incluso si su capacidad se halla limitada. En este sentido confía en la racionalidad.

13. Ver Mill (1975, p. 214).

14. Mill discutió problemas conectados con la elección de representantes y formuló preguntas acerca de la naturaleza de la competencia democrática: ¿cómo puede alguien representar a otros en una democracia? “Si es importante que los electores elijan un representante con un nivel de instrucción mayor que el de sí mismos, no es menos necesario que ese hombre más instruido sea responsable por ellos; en otras palabras, ellos son los jueces de la manera como él satisface su confianza: y, ¿cómo pueden ellos juzgar con otra base excepto la de sus opiniones? y, ¿con base en qué más lo van a seleccionar en primera instancia, si no es con base en sus opiniones?” (Mill, 1975, p. 326).

Al considerar los postulados de Mill nos hemos acercado a la idea de que la existencia y naturaleza de la competencia democrática es problemática. No podemos suponer que ella existe de por sí, más bien tiene que desarrollarse. Pero, ¿a través de qué instituciones sociales? ¿Acaso esto implica que asumimos la existencia de algún tipo de autoridad evaluadora? ¿Tiene sentido aceptar la delegación de la soberanía pero no aceptar que la gente es soberana en la evaluación que hace sobre esta delegación? No creer en la coherencia de la competencia democrática nos puede hacer caer en un dogmatismo: ¡tenemos que educarte antes de que puedas tomar apropiadamente una decisión!

Como una extensión del paréntesis que hago para terminar esta sección, debo mencionar una manera particular de “resolver” el problema de la existencia y naturaleza de la competencia democrática. La interpretación clásica de la democracia presta mayor atención a la cuestión de cómo manejar el gobierno. La elección de los dirigentes no ha sido en realidad la problemática más importante. Es natural que para que las elecciones sean democráticas, las reglas de elección tienen que especificarse y obedecerse. Pero la idea de la elección se ha visto subordinada a la verdadera preocupación de la democracia que es la manera apropiada de gobernar. Sin embargo, es posible darle la vuelta a esto y centrar la preocupación principal de la vida democrática en la elección y no en el gobierno. Lo que debe ser democrático, entonces, es la elección del gobierno. Esto hace de las condiciones formales un elemento importante en la discusión sobre la democracia. Las otras condiciones, entonces, se vuelven insignificantes y no se le presta atención al establecimiento de una competencia democrática. Esta es una posible “solución” a nuestro problema.

Esta interpretación formal de la democracia es la que sugiere Joseph A. Schumpeter en *Capitalism, socialism and democracy* [Capitalismo, socialismo y democracia], cuya primera publicación apareció en 1943. El discute interpretaciones anteriores y critica lo que para él es el supuesto básico subyacente a tales interpretaciones: el comportamiento racional de la gente en general. Para Schumpeter el supuesto es que la gente tiene una opinión definida y racional acerca de cada cuestión individual y que expresa esta opinión al escoger representantes que traten de defender dichas opiniones¹⁵. Este supuesto posibilita asumir que la democracia se preocupa en primer lugar por el gobierno y no por la labor de la elección, pero él encuentra que este supuesto básico es falso.

Schumpeter concibe la elección del gobierno como la preocupación primera de la democracia. Asume la posición de que el papel del pueblo es producir un gobierno (o un cuerpo intermedio que pueda producir un gobierno), y define que “el método democrático es el mecanismo institucional para alcanzar decisiones políticas en las que unos individuos adquieren

15. Ver Schumpeter (1987, p. 269).

el poder de decidir por medio de una lucha competitiva por el voto del pueblo.”¹⁶ La democracia entonces se convierte en una característica formal; no tiene que ver con los asuntos de los que el gobierno se ocupa. El subraya el hecho de que en una democracia la función primaria del voto de los electores es producir un gobierno. De hecho, Schumpeter sostiene que producir un gobierno prácticamente equivale en esencia a decidir “quiénes deberían ser los gobernantes.”¹⁷

La interpretación de Schumpeter es provocadoramente sencilla, pero me permitiré señalar una de sus “ventajas”: tiene un gran valor descriptivo y explica cómo el concepto de democracia se usa normalmente cuando los países se describen a sí mismos como democráticos. El señala que su interpretación es muy cercana a la realidad en el caso de los Estados Unidos. Además, si aceptamos su definición, se vuelve superfluo pensar en la democracia como una preocupación educativa. La ciudadanía crítica entonces se vuelve una construcción híbrida y las formulaciones de Dewey se convierten en una retórica vacía.

Esta interpretación quiebra cualquier sueño idealista sobre la democracia directa, al igual que las expectativas (ingenuas) sobre el comportamiento racional de la humanidad. Además, niega cualquier preocupación por las condiciones no formales de la democracia, tales como la distribución justa de los bienes y la igualdad de oportunidades. Incluso se elimina la idea básica de que la democracia debería ser una manera de mantener el poder en manos del pueblo. También es obvio que si tomamos literalmente la interpretación de Schumpeter, no necesitamos preocuparnos más por la existencia y naturaleza de la competencia democrática. La democracia no presupone participación y no tiene nada que ver con la toma de decisiones, o con la crítica y evaluación de las decisiones y propuestas formuladas por el gobierno. La democracia tan sólo tiene que ver con la producción de un gobierno y con los procedimientos y algoritmos de elección. Esta es la solución más radical y sencilla al problema de la delegación de la soberanía. Lo único que aporta la gente a la vida democrática es su voto. El pueblo entonces sólo tiene que esperar para recibir.

El concepto de democracia al que me suscribo no tiene gran valor descriptivo en comparación con el de Schumpeter. Es mucho más cercano a la interpretación clásica que concibe la democracia como una característica del gobierno, y no ignora la producción que de hecho se hace de un gobierno. No regresaré a la utopía de la democracia directa ya que tengo presente la problemática de la delegación de la soberanía. Por lo tanto, la democracia también caracteriza las formas de participación en discusiones y críticas sobre el gobierno. Una democracia debe abrir el espacio para una ciudadanía

16. Ver Schumpeter (1987, p. 269).

17. Ver Schumpeter (1987, p. 273).

crítica que resulta de la puesta en práctica de una competencia crítica. Así que el problema de la competencia democrática está de nuevo presente en la agenda. Si todo el mundo se comporta de manera racional y si la racionalidad es suficiente, la manifestación de una competencia democrática no debe causar problemas. Sin embargo, no confío en el optimismo racionalista de que lo único que se necesita para producir juicios normativos es la razón. Creo que Schumpeter tiene razón en su crítica al supuesto de la racionalidad de la humanidad. Pero la respuesta no es diluir la democracia en procedimientos para producir un gobierno. Debemos abordar de manera directa el problema de las condiciones para desarrollar una competencia democrática. Esta competencia no nace de forma natural ni crece a partir de la racionalidad, sino que tiene que establecerse y desarrollarse. Para mí esta es una de las condiciones fundamentales para la vida democrática. Por lo tanto, tenemos que discutir el contenido posible de la competencia democrática. Esta debe caracterizarse en relación con las problemáticas principales que preocupan a la sociedad en cuestión. El contenido de la competencia democrática depende de la naturaleza de los problemas que enfrenta la sociedad. ¿Cuáles son las condiciones para el establecimiento de una ciudadanía crítica en sociedades con un alto desarrollo tecnológico?

UN PROBLEMA DE LA DEMOCRACIA EN UNA SOCIEDAD CON UN ALTO DESARROLLO TECNOLÓGICO

Una dictadura que obstruya los procedimientos democráticos formales puede destruir la democracia. Esto se ha visto con frecuencia y se ha considerado como *el* problema de la democracia. Unos países acusan a otros por ignorar esto. Pero, a menos que aceptemos la interpretación de Schumpeter, el algoritmo para la elección de dirigentes tan sólo es un aspecto de la democracia. La democracia puede verse atacada de otras formas y no exclusivamente por la negación de las reglas de elección. La democracia se refiere tanto a las condiciones formales como a las éticas y materiales, y a las posibilidades de participar y reaccionar. En particular, una democracia se puede destruir si no se puede dar vida a una ciudadanía crítica. Una dictadura no es el único peligro; la “distancia” también tiene un papel que jugar. Si la distancia entre los dirigentes y la gente es muy grande, entonces se vuelve imposible establecer una relación que tenga que ver con el contenido de la democracia.

Cuando una sociedad ha alcanzado cierto nivel de complejidad, los principios más importantes que subyacen a los mecanismos de desarrollo de la sociedad se esconden y se vuelven difíciles de identificar. ¿Cómo es posible evaluar las decisiones de los dirigentes si ni las condiciones ni las implicaciones de sus decisiones son detectables? ¿Cómo puede una persona no experta controlar a los expertos? ¿Acaso el desarrollo tecnológico

y social en sí mismo corroerá las condiciones para la existencia de una ciudadanía crítica y, como consecuencia, tendremos una expertocracia?

Este problema puede discutirse en relación con las observaciones que Daniel Bell hizo en el artículo “The social framework of the information society” [El marco social de la sociedad de la información], que se ha convertido en un clásico. De acuerdo con Bell, la sociedad de la información se caracteriza por la “codificación del conocimiento teórico” como uno de sus principios axiales. Esto se resalta con una nueva teoría del valor. Bell encuentra que el conocimiento, no sólo el capital y el trabajo (como se especifica en la función de la producción, en la teoría económica) es la fuente básica del valor, porque el conocimiento se involucra de manera sistemática en la transformación de los recursos. En la sociedad de la información, la habilidad para recoger, sistematizar y usar la información parece ser el vehículo para el desarrollo social y, simultáneamente, se convierte en una fuente de poder.

Esto evidencia el problema de las estructuras de poder en la sociedad de la información (o en las sociedades con un alto desarrollo tecnológico o sociedades postindustriales). Puede surgir una nueva categoría de dictadura. La cuestión es si la “expertocracia” se convierte o no en un riesgo para la democracia en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico. Es interesante considerar algunos de los comentarios de Bell:

En la sociedad postindustrial la élite técnica es una élite de conocimiento. Tal élite tiene poder dentro de las instituciones intelectuales —organizaciones de investigación, complejos hospitalarios, universidades y similares— pero sólo en el campo más amplio donde se hacen las políticas. En la medida en que los asuntos políticos se mezclan más y más de manera intrincada con los asuntos técnicos (que van desde la tecnología militar hasta la política económica), las élites de conocimiento pueden definir los problemas, iniciar nuevas preguntas y proveer las bases técnicas para las respuestas; sin embargo, no tienen el poder para decir sí o no. Ese es un poder político que le pertenece, inevitablemente, a los políticos más que a los científicos o economistas. En este sentido, la idea de que la élite del conocimiento se puede convertir en una nueva élite de poder me parece exagerada.¹⁸

Más adelante Bell concluye:

El miedo de que una élite de conocimiento pueda convertirse en el grupo de dirigentes tecnócratas de la sociedad se descarta y expresa más una confianza ideológica de los grupos radicales en contra de la influencia creciente del personal técnico en la toma de decisiones.¹⁹

18. Bell (1980, p. 542).

Bell no percibe ningún peligro en que surja una expertocracia.

Debo aceptar las indicaciones de Bell en cierta medida. No consideraré que la expertocracia sea un peligro verdadero, siempre y cuando esto se interprete de una manera personal. Sin embargo, esto no resuelve nuestro problema de la existencia de una vida democrática. Asumamos que Bell tiene razón: la élite de expertos tal vez tiene poder en las instituciones intelectuales pero sólo tiene influencia en el diseño de políticas, mas no en el poder político en sí. Empero, el problema de la democracia que surge en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico no es únicamente aquel de la influencia o el poder de una élite del conocimiento que se ubica fuera del escenario de las decisiones políticas. El problema no es simplemente el de si el desarrollo tecnológico reduce o no el papel de los políticos al de marionetas que dan voz a las consecuencias de cálculos tecnológicos prefabricados. El problema más bien tiene que ver con la relación entre, por un lado, los dirigentes (los políticos electos) y la élite tecnológica y, por el otro, la gente que se ve afectada por un gobierno. Así que si incluso la élite del conocimiento es sólo capaz de ejercer una influencia en tanto que los políticos mantienen el poder, las condiciones y la argumentación para las decisiones que se tienen que tomar deben ir más allá del alcance de la gente común y corriente²⁰.

De acuerdo con Schumpeter, no enfrentamos ningún problema en la democracia, aun si una élite de conocimiento desarrolla las condiciones y los argumentos para las decisiones que los políticos tienen que tomar. Cuando la democracia se restringe a la producción de un gobierno, el problema de la existencia de una vida democrática desaparece por completo. No obstante, me niego a confiar en esta “solución”. Por lo tanto, tenemos que retomar el problema de que la base para las decisiones que toman las autoridades pueda ser inaccesible a la gente que no pertenece al grupo de los técnicos ni de los dirigentes. El desarrollo tecnológico puede *erosionar* parte de las condiciones no formales de la democracia y convertirla en sólo un algoritmo para la elección de representantes. Esta erosión es una amenaza real para la democracia en una sociedad con alto desarrollo tecnológico. Pero, ¿es posible asegurar la existencia de una ciudadanía crítica en una sociedad con alto desarrollo tecnológico? Encontrar una respuesta afirmativa a esta pregunta equivale a concebir la vida democrática como posible, tanto en el futuro como en el presente. No deberíamos intentar echar marcha atrás, ni podemos proponer abandonar el ambiente tecnológico. Entonces no podemos esperar que las condiciones para una ciudadanía crítica declinen. El problema es desarrollar una competencia crítica que esté

19. Bell (1980, p. 543).

20. Esta formulación también puede ser engañosa porque este asunto no sólo concierne a las relaciones entre grupos de gente, sino que también tiene que ver con la estructura de aquellas relaciones en el sentido de que una tendencia antidemocrática puede desarrollarse incluso si nadie la apoya.

acorde con el desarrollo tecnológico y social actual. Este es uno de los *problemas esenciales de la democracia en una sociedad con alto desarrollo tecnológico*²¹.

EDUCACIÓN PARA LA *MÜNDIGKEIT*

¿Qué instituciones de la sociedad pueden asumir el trabajo de desarrollar una competencia democrática? No puede asumirse que esto se realiza de una manera directa porque el contenido de tal competencia cambia de acuerdo con el desarrollo de la sociedad. Esta es una competencia definida socialmente. Una respuesta es que la educación debe hacerse cargo²². Tradicionalmente una de las mayores preocupaciones de la educación ha sido preparar a los estudiantes para su participación posterior en los procesos económicos de la sociedad, en tanto la educación debe distribuir las habilidades necesarias para el funcionamiento de la sociedad. Pero, como ya lo hemos visto, diferentes tendencias en educación han enfatizado que también debe preparar a los individuos para enfrentar los aspectos de la vida social que se salen de la esfera del trabajo. Perseguir tales propósitos ha sido una tendencia fuerte en la educación alemana, en especial después de la Segunda Guerra Mundial. Dicha tendencia se manifiesta en el uso del término *Allgemeinbildung* (educación general o educación liberal²³) que significa que la educación debe enfocarse fuera de las condiciones que generan posibilidades de trabajo. En la tradición escandinava, la idea de una educación general también ha jugado un papel importante. La educación debe preparar a los estudiantes para la vida (política) de la sociedad. Esto es lo que tanto Dewey como Adorno han enfatizado, y la preocupación educativa por la democracia y la educación crítica comparten la tarea de potenciar con miras al desarrollo de una ciudadanía crítica.

En la educación crítica el término *Allgemeinbildung* se categoriza en operaciones diferentes, más “activas”: la educación debe asumir un papel activo en la identificación de las desigualdades en la sociedad, en el señalamiento de las causas del surgimiento de crisis sociológicas y ecológicas, y

21. Por supuesto es posible describir muchos otros problemas de la democracia en sociedades altamente tecnologizadas.

22. En “Considerations on representative democracy” Mill aclara: “Pero cualquier educación que apunte a hacer de los seres humanos algo diferente de las máquinas, en el largo plazo los conduce a reclamar la posesión del control de sus propias acciones.” (Mill, 1975, p. 185)

23. La expresión “educación liberal” puede llevar a confusiones. En *Liberal education and the nature of knowledge* [La educación liberal y la naturaleza del conocimiento], P. H. Hirst analizó la educación liberal. Su uso del término se relaciona en primera instancia con algunas estructuras de conocimiento analíticamente definidas, mientras que el término *Allgemeinbildung* tiene una definición más amplia.

en la explicación y el esbozo de maneras para abordar dichos problemas. Lo que quizás se ha enfatizado hasta el momento, empero, es la parte reactiva de una competencia democrática que principalmente tiene que ver con la crítica y evaluación de las sugerencias o decisiones que toman los dirigentes. La parte activa de ser un ciudadano no se ha enfatizado en particular. Pero desde la perspectiva de la educación crítica esta dimensión también es importante. El fin utópico es encontrarse en igualdad de condiciones con las autoridades. Esto conduce a las formulaciones de Giroux previamente citadas, acerca de que la educación debe defenderse como un servicio público que educa a los estudiantes para ser ciudadanos críticos que puedan pensar, cuestionar, tomar riesgos y creer que sus acciones pueden transformar la sociedad en general.

Puede ser de ayuda echar una mirada más de cerca a uno de los conceptos empleados por Adorno (al igual que por otros educadores alemanes). El artículo *Erziehung nach Auschwitz* se publicó en el libro *Erziehung zur Mündigkeit* [Reflexiones sobre la Mündigkeit]. Aquí el término *Mündigkeit* necesita explicación. El concepto tiene un doble significado y reúne perspectivas relacionadas tanto con el concepto de crítica, como con el de democracia. El término se asocia con la teoría legal que se refiere a la mayoría de edad de una persona y, por lo tanto, con la adquisición de derechos y responsabilidades de adulto en la sociedad. La mayoría de edad confiere el derecho legal de que la persona hable por sí misma y, por ejemplo, vote. Pero el término también tiene un significado informal que es el de tener la capacidad de hablar por uno mismo. De esta manera *Mündigkeit* se convierte en un constituyente esencial de la ciudadanía crítica porque une características de la competencia democrática con la capacidad crítica. Una persona con *Mündigkeit* muestra la capacidad de tomar decisiones equilibradas. Por lo tanto, tiene sentido educar para la *Mündigkeit* y no educar “seguidores”. La principal tarea de la educación es evitar que un Auschwitz suceda de nuevo.

El concepto de *Mündigkeit* está imbricado en la discusión de la alfabetización, como la expone Giroux, y formula de nuevo la pregunta: ¿cómo la fragmentación del currículo en distintas disciplinas afecta las condiciones de desarrollo de una ciudadanía crítica? La posición de una materia escolar específica, por ejemplo las matemáticas, puede jugar un papel importante en este contexto. ¿La alfabetización y la alfabetización matemática tienen papeles similares en la educación para la *Mündigkeit* dentro de una sociedad con un alto desarrollo tecnológico?

MATEMÁTICAS: ¿UN PODER FORMATIVO?

Nicolaus Copernicus creó un nuevo mundo pues cambió la interpretación fundamental de la posición de la humanidad en el universo. Darwin también cambió el status de la humanidad al conectarla estrechamente con los (otros) animales. Estos puntos demuestran que el conocimiento científico puede cambiar nuestra comprensión básica del mundo. La ciencia tiene un poder interpretativo fuerte. Sin embargo, el desarrollo científico puede cambiar no sólo las interpretaciones de la realidad, sino también la realidad en sí misma. Tanto la física como la química han cambiado nuestra comprensión de la naturaleza y, además, el objeto de nuestra comprensión, es decir, la naturaleza en sí.

Quizás no es sorprendente que las ciencias empíricas puedan causar tales cambios ya que su objeto de estudio es la realidad. Pero, ¿qué decir de las matemáticas? Normalmente las matemáticas se conciben no como una disciplina empírica sino como una formal o abstracta. Por lo tanto, una demostración matemática no puede dar cuenta de ningún fenómeno real, sino tan sólo de enunciados matemáticos abstractos. De acuerdo con el platonismo, el mundo de las matemáticas existe completamente por fuera del mundo empírico y las proposiciones matemáticas sólo tratan las “formas” puras. El formalismo se abstiene de crear una realidad platónica, pero separa por completo las matemáticas del mundo empírico al interpretar la disciplina como la ciencia de los sistemas formales. La interpretación neoempírica de las matemáticas no admite que esta separación sea fundamental. Empero, la discusión acerca de si el neoempirismo presenta o no una filosofía más adecuada de las matemáticas no es esencial en este contexto, porque únicamente quiero resaltar la pregunta de si puede una ciencia (formal o no) como las matemáticas adquirir un carácter no sólo interpretativo sino también formativo. Quiero discutir este asunto independientemente de la controversia entre, por un lado, el platonismo, formalismo y otras variaciones de “apriorismos” y, por el otro, la interpretación neoempírica de las matemáticas.

La tesis que quisiera explorar es que las matemáticas producen nuevas invenciones en la realidad, no sólo en el sentido en que nuevas percepciones cambian las interpretaciones, sino también en el sentido en que las matemáticas colonizan parte de la realidad y la reorganizan —de la misma manera como la sociedad indígena cambió después de que los ingleses colo-

nizaron América del Norte y tomaron el poder. Esta idea contradice, por ejemplo, los postulados de G. H. Hardy cuando, en *A mathematician's apology* [La apología de un matemático], enfatiza que las matemáticas reales son inútiles y poseen una pureza sublime. Si las matemáticas son capaces de colonizar es porque han perdido por completo su inocencia. ¿Cómo puede ser esto posible? La tesis es que las *matemáticas dan forma a nuestra sociedad*. Sin embargo, no quiero sustentar esta tesis sino más bien darle más significado¹. La idea de que las matemáticas tienen un poder formativo es una especificación de la tesis del relativismo lingüístico y al mismo tiempo una generalización de esta idea, porque la distorsión de una perspectiva, causada por su ubicación dentro de una realidad de lenguaje determinada, puede de hecho más fácilmente “objetivarse” cuando se sitúa en una realidad matemática.

Puede ser útil mencionar lo que la tesis no significa. En primer lugar, no dice que las matemáticas sean el único agente que da forma a la sociedad. La tesis versa sobre la interacción entre agentes del desarrollo social y sugiere que las matemáticas son uno de esos agentes. En segundo lugar, la tesis no formula que las matemáticas en sí sean inmunes a la determinación social. Incluso si las matemáticas se conciben como una fuerza social, pueden aun verse como un constructo social. Y tercero, es natural que una disciplina abstracta no pueda hacer nada por su cuenta. De ahí que la tesis necesite una interpretación sociológica, que no es, por ejemplo, que los matemáticos como un grupo social tengan asignada una importancia especial. La tesis tiene una preocupación por el resultado de un paradigma

1. Philip J. Davis y Reuben Hersh se refieren a este fenómeno del carácter formativo en *Descartes' dream* [El sueño de Descartes]. Ellos distinguen las matemáticas que se usan en las descripciones, en las predicciones y en las prescripciones. El uso prescriptivo se refiere a situaciones donde el uso de las matemáticas conduce a algún tipo de acción tecnológica o humana: “Nacimos en un mundo con tantas instancias de matemáticas prescriptivas que casi no somos conscientes de ellas, y una vez éstas se evidencian, es muy difícil imaginar el funcionamiento del mundo sin ellas. Nuestras medidas del espacio y la masa, nuestros relojes y almanaques, nuestros planes de construcción y máquinas, nuestros sistemas monetarios son matematizaciones prescriptivas muy antiguas. Para mencionar algo más reciente (...) pensemos en los impuestos sobre el ingreso. Esta es una estructura matemática enorme superpuesta en una estructura financiera enorme (...) En la sociedad de los Estados Unidos hay numerosos ejemplos de matematizaciones prescriptivas recientes y recién restablecidas: las calificaciones en los exámenes, los coeficientes intelectuales, los seguros de vida, los turnos de atención en la panadería, las loterías, los semáforos... los sistemas telefónicos, las tarjetas de crédito, los códigos postales, la votación por representación proporcional (...) Habíamos prescrito estos sistemas, con frecuencia por razones que sólo unos pocos conocían; ellos regulan y alteran nuestras vidas y caracterizan nuestra civilización. Crean una descripción antes de que el patrón en sí exista” (Davis y Hersh, 1988, pp. 120-121). Muchos otros autores han discutido las matemáticas como parte de un contexto social. Me permito referenciar los trabajos de Bloor (1976), Keitel (1989), Keitel et al. (Eds.) (1989), Otte (Ed.) (1974), Restivo et al. (Eds.) (1993), Tymoczko (Ed.) (1986) y Wilder (1981).

matemático de investigación. Así que quizás Dios no organizó el mundo de acuerdo con las matemáticas, pero la tesis sugiere que la humanidad ahora sí se ha embarcado en tal proyecto.

TECNOLOGÍA Y LA PARADOJA DE VICO

Las aplicaciones de las matemáticas han mostrado un crecimiento de proporciones epidémicas. Anteriormente, disciplinas como la física, la astronomía y la química eran las áreas principales de aplicación de las matemáticas, pero ahora ningún área del conocimiento parece ser inmune a los análisis cuantitativos. El ascenso de las aplicaciones de las matemáticas se conecta con el desarrollo de la tecnología de la información que hace posible manejar modelos matemáticos complejos y cantidades alarmantes de datos. La tecnología de la información puede verse como la matematización de las matemáticas. O, también podemos concebir las matemáticas como la entidad escondida o “congelada” en el computador. Sin embargo, antes de volver a esta idea, debo hacer unos comentarios acerca de la tecnología en general.

La tecnología se interpreta con frecuencia como una condición básica para el desarrollo social. Este enunciado puede convertirse en una actitud determinista: la tecnología se ve como el factor dominante y por lo tanto el progreso social produce una organización social. Si la actitud determinista se asocia con una visión pesimista de la tecnología, tendremos por consecuencia el fatalismo. No se percibe que la tendencia principal de la tecnología se acerque a la solución de problemas (tecnológicos) sino, en primera medida, a la creación de problemas en sí —problemas que no se pueden solucionar por medio de ninguna innovación tecnológica. El determinismo se puede asociar también con una visión optimista: siempre seremos capaces de solucionar nuestros problemas a través de nuevas mejoras tecnológicas, en la medida en que el desarrollo tecnológico en sí se oriente hacia el logro de un futuro atractivo. Es posible, no obstante, alejarse de la visión determinista y mantener la existencia de un espacio de libertad en el desarrollo tecnológico. Por ejemplo, es posible sostener que, a pesar de que la tecnología no tiene una dirección inmanente, las acciones humanas pueden dirigirse de tal manera que, por el rico potencial de la tecnología, el progreso social pueda tomar los rumbos más atractivos. La tecnología como tal no tiene una tendencia hacia lo “bueno” o lo “malo”, sino que potencialmente contiene una solución a los problemas humanos. En términos generales, la tecnología llega a reflejar las características “buenas” o “malas” de las estructuras sociales o económicas.

En la filosofía de la tecnología, las ideas de la liberación van de la mano con los temores de opresión, control y disciplina. Podemos ver la liberación

desde la camisa de fuerza de la tecnología, como una liberación del poder y mando por medio de los cuales la “necesidad tecnológica” nos confronta, y como una liberación de las trampas que el desarrollo tecnológico tiende constantemente. No obstante, la tecnología también se ha asociado con un interés en la libertad y, desde este punto de vista, el desarrollo tecnológico ofrece las condiciones fundamentales para realizar algunos de los potenciales atractivos de la vida humana. Originalmente una interpretación optimista dominó la filosofía de la tecnología, mientras que las tendencias pesimistas surgieron posteriormente. Esto significa que presenciamos un cambio de ver la tecnología en esencia como medio para la crítica, en el sentido de que la tecnología nos puede ayudar a abordar una situación crítica, hacia percibir la tecnología como un posible objeto de crítica ya que en sí es la causa de situaciones críticas.

La liberación puede entenderse de dos maneras diferentes. Es posible hablar de *libertad de* —y entonces mencionar la pobreza, la privación, el hambre, etc.— pero también podríamos hablar de la *libertad para* —y entonces mencionar la libertad para pensar, discutir, actuar, etc. cualquier cosa que el individuo prefiera. Las diferentes contribuciones a la discusión de la libertad no han enfatizado en la misma cantidad estas dos variantes. Desde una perspectiva materialista, la *libertad de* tiene prioridad porque esta forma de libertad supuestamente provee las condiciones para liberaciones posteriores. En contraposición, el liberalismo (y el anarquismo) ve la libertad personal como la condición básica de la vida humana y, por lo tanto, como la condición necesaria para la emancipación futura. En la filosofía de la tecnología ambas interpretaciones de la liberación se han mencionado, por ejemplo, cuando Friedrich Dessauer, en su libro *Streit um die Technik* [Controversias sobre la tecnología], enfatiza que la tecnología significa libertad en un doble sentido².

La concepción de la tecnología como un medio para ampliar la libertad humana normalmente ha decodificado la tecnología como una herramienta que la humanidad inserta entre sí y la naturaleza. La tecnología se ve como una relación hombre–naturaleza y otorga a los seres humanos poder para enfrentarse a la naturaleza (la cual se concibe como una condición hostil para la vida). En *Grundlinien einer Philosophie der Technik* [Fundamentos de una filosofía de la tecnología], Ernst Kapp explica la tecnología como una extensión o amplificación de los órganos humanos. El martillo es una extensión del puño y el brazo, etc. De esta manera la tecnología se convierte en una herramienta que los seres humanos pueden usar en su lucha por la supervivencia. Esta interpretación es bastante común; como ejemplo me referiré a *Einführung in die Philosophie der Technik* [Introducción a la filosofía de la tecnología] donde Heinrich Stork, como definición inicial, describe la noción de técnica como una acción por medio de la cual la

2. Ver Dessauer (1958, p. 184).

humanidad cambia de manera consciente las estructuras y energía naturales de tal manera que puedan estar al servicio de las necesidades y usos de la humanidad³. Muchos filósofos de la tecnología continúan viéndola como un “instrumento” mediante el cual la humanidad se enfrenta a la naturaleza y, como consecuencia, ella se vuelve un medio de liberación al superar las limitaciones que la naturaleza le impone a la vida humana⁴.

En *The technological society* [La sociedad tecnológica], Jacques Ellul extiende la perspectiva sobre la tecnología al igual como lo hace Herbert Marcuse en *One-dimensional man* [El hombre unidimensional]. Para ambos autores un punto central es que la tecnología tiene una influencia profunda en la sociedad. Por lo tanto, sólo se puede discutir la función de la tecnología usando una interpretación amplia basada en perspectivas desde las ciencias sociales y una variedad de disciplinas de las humanidades. La razón es que estos autores ven la tecnología como un principio estructurador fundamental. La tecnología involucra todos los aspectos de la vida social y se vuelve indispensable para la organización social. No sólo la forma de producción sino en general la “civilización” entera sufre una reconstrucción tecnológica. La naturaleza en su sentido original desaparece y nos convertimos en habitantes de una reconstrucción tecnológica de nuestra realidad social⁵.

Tanto Ellul como Marcuse encuentran una tendencia decisiva en la sumisión de la humanidad a la tecnología. Esto significa que la tecnología se ubica en la dirección opuesta a la libertad. Se relaciona con la opresión, dominación y disciplinamiento. El ser humano unidimensional está vigilado y bajo constante tutela. En este punto, sin embargo, existe una diferencia entre Ellul y Marcuse. Mientras que Ellul presenta una posición pesimista —ve la sociedad y el desarrollo social como algo completamente determinado por el desarrollo tecnológico en sí— Marcuse mantiene la posibilidad de una tecnología alternativa y esto le permite, en medio del pesimismo, establecer una creencia en la posibilidad de influir en el desarrollo tecnológico. Por lo tanto, no es necesaria la conexión entre tecnología y subordinación; es posible, al menos en una utopía, relacionar la tecnología con la idea de libertad.

Con base en estos dos autores percibimos un cambio, no sólo en la ampliación de la discusión sobre la tecnología, sino también en el concepto mismo de tecnología. Inicialmente se concibió la tecnología como una relación entre humanidad y naturaleza; pero en manos de Marcuse y Ellul se ha vuelto también una relación entre seres humanos. El objeto de la tecnología

3. Ver Stork (1977, p. 1).

4. Por ejemplo ver Gehlen (1980).

5. Estamos presenciando una conquista despersonalizada y deshumanizada de nuestro *Lebenswelt* [mundo de vida]. Para una discusión sobre este fenómeno ver Habermas (1987).

no necesariamente es la naturaleza, sino que también puede ser la humanidad y las estructuras sociales. (Aunque la tecnología puede usarse en la lucha contra la naturaleza, parece siempre ser el caso que las mismas tecnologías pueden usarse en la guerra. Esto saca a relucir la observación de que “no existe ningún documento de la civilización que al mismo tiempo no sea un documento de la barbarie.”⁶) Esta observación puede extenderse enfatizando la existencia de diferentes tipos de tecnologías: las herramientas, la tecnología de la energía, la tecnología de la sociedad y la tecnología de la información. Tenemos aquí una división por tipos y no por categorías. No quiero decir que los tipos anteriores sean exhaustivos, por ejemplo, se podría alegar que la biotecnología constituye un tipo por sí misma (y también se podría argumentar que esta tecnología en primera medida se relaciona con la tecnología de la información); no obstante, esto no es relevante para lo que quiero decir⁷. La división por tipos posibilita elaborar un poco más acerca de las matemáticas y la tecnología.

Las herramientas pueden verse como una tecnología genérica. Como se dijo anteriormente, Kapp sostuvo que las herramientas son paradigmáticas para la tecnología y, por lo tanto, su filosofía de la tecnología tomó la forma de generalizaciones que surgieron de interpretaciones de las herramientas como elementos definitorios de una relación entre los seres humanos y la naturaleza. Por contraste con otros tipos de tecnología, una herramienta puede caracterizarse por su “integridad”. El usuario de la herramienta tiene que proporcionar su propia energía o añadir energía que proviene de otras fuentes naturales como el viento, el agua, animales de tracción, etc. Cuando consideramos las herramientas, el elemento de energía tanto como el de información permanecen implícitos en la situación de trabajo.

El objeto de la tecnología de la energía es también la naturaleza, pero interpretada como un sistema físico. La energía natural y la fuerza muscular se sustituyen por la energía mecánica y la nueva fuente de energía nos habilita para producir herramientas enormes. Con esto dimos el gran paso hacia la industrialización. La tecnología de la energía no reemplazó a las herramientas sino que sustituyó la fuerza natural y así posibilitó la construcción de nueva maquinaria. Marx concibió esta tecnología como el elemento constitutivo de una filosofía de la tecnología y, por esta razón, el análisis de la posesión de los medios de producción fue un factor esencial de su teoría económica. Gracias a la tecnología de la energía, la maquinaria de la industrialización se hizo tan maciza que se volvió inmóvil y, por lo tanto, se posibilitó poseer la tecnología en el mismo sentido en que se posee la tierra. Cuando los medios de producción son “fijos” y se poseen,

6. Ver Benjamin (1973, p. 248).

7. Una discusión de los distintos tipos de tecnología se encuentra en Jensen y Skovsmose (1986).

se establecen nuevas condiciones para la producción como, por ejemplo, que los trabajadores tengan que desplazarse hasta la fábrica.

La tecnología de la sociedad no tiene como objeto la naturaleza, mas apunta hacia las relaciones entre los seres humanos. Un ejemplo paradigmático de este tipo de tecnología es la administración científica tal y como la desarrolló Frederick Winslow Taylor. La idea básica de la empresa científica es que los procesos de trabajo complejos tienen que fragmentarse en sus componentes atómicos. Después, cada componente se debe investigar para encontrar la mejor manera de llevar a cabo las operaciones y se debe medir el tiempo apropiado para su ejecución. A continuación, los componentes atómicos se secuencian para definir el proceso de trabajo para cada trabajador, y el total del comportamiento algorítmico de los trabajadores conformará una nueva “megamáquina”. Taylor describió cómo investigó procesos de trabajo específicos y, como ejemplo, narró la historia del compromiso del trabajador perfecto, llamado Schmidt, quien nunca hacía preguntas sino que seguía los algoritmos prescritos. Schmidt entonces se convirtió en el primer hombre taylorizado.

El último tipo de tecnología mencionado es la tecnología de la información. Esta también puede verse como una cierta forma de sustitución —no de la fuerza muscular, ni tampoco de los ritmos de trabajo, sino de la “fuerza cerebral”. No voy a considerar una variedad de formas tradicionales de tecnología de la información como la imprenta, la telegrafía, la radio, etc., sino que me centraré en la tecnología de la información basada en los computadores. Esto no impone ninguna limitación vital en lo que voy a decir acerca de las matemáticas y la tecnología.

Podemos intentar resumir mencionando una pieza ejemplar de “maquinaria” propia de cada tipo de tecnología. Pero debo enfatizar que no identifico la tecnología exclusivamente con sus componentes físicos. En mi concepción, la tecnología se refiere tanto a la maquinaria como a la competencia para construirla y utilizarla. No obstante, el martillo puede verse como un ejemplar de las herramientas, la máquina de vapor como un ejemplar de la tecnología de la energía y, como hemos limitado la interpretación de la tecnología de la información, el computador es el ejemplar de esta última. Para terminar, tenemos la tecnología de la sociedad y creo que el reloj es su ejemplar.

Esta corta incursión en las interpretaciones de la tecnología —bien sea optimista o pesimista, determinista o abierta— muestra la incertidumbre acerca de cómo podemos mirar el fenómeno. Lo que despliega las dificultades para llegar a asir las características básicas de una sociedad tecnolozada es especialmente el cambio de enfoque de percibir la tecnología como una relación entre seres humanos y naturaleza, a percibirla como una relación entre seres humanos en sí. Tal relación se especifica en los diferentes tipos de tecnología. Esta dificultad puede resumirse como la *Paradoja de*

*Vico*⁸. Giambattista Vico fue el filósofo italiano que formuló la idea de que las únicas cosas que los seres humanos pueden comprender son las que ellos mismos han creado. Esto representa un ataque al cartesianismo que hace de la naturaleza el objeto del conocimiento infalible. Vico expresó sus reservas acerca de la habilidad de los seres humanos para aprehender la naturaleza. Dudó de que fuéramos alguna vez capaces de comprender cualquiera de las creaciones de Dios ya que sólo somos capaces de comprender nuestras propias creaciones.

Si seguimos esta línea de pensamiento deberíamos ser capaces de comprender la tecnología que es en sí una construcción humana. “Comprender haciendo” parece ser una tesis epistemológica más confiable. Empero, parece que somos completamente incapaces de establecer tal comprensión en el caso de la tecnología. Parece que no tenemos la capacidad de aprehender en pleno los límites y las consecuencias de nuestra empresa tecnológica. Esta afirmación reitera lo que la tesis del relativismo lingüístico ha indicado: al estar inmersos en el lenguaje, se nos dificulta comprender la función de la estructura lingüística en sí misma. Y al estar inmersos en la tecnología, parece que no poseemos la capacidad de comprender lo que acabamos de construir. Esto es lo que yo llamo la paradoja de Vico. De hecho esta paradoja es sólo una manera diferente de enunciar el problema de la democracia en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico.

MATEMÁTICAS Y TECNOLOGÍA

Las diferencias entre los tipos de tecnologías también se hacen visibles cuando nos concentramos en sus relaciones con las disciplinas científicas madres. Con respecto a las herramientas, esta relación es accidental. Como ilustración de este hecho tenemos que en los tiempos antiguos no encontramos ninguna relación estrecha entre el desarrollo de las herramientas y las ciencias naturales. El conocimiento científico no jugó un papel esencial en el desarrollo de las herramientas. De acuerdo con el enfoque etnomatemático, podemos afirmar que las matemáticas se encuentran implícitas en las construcciones y aplicaciones de las herramientas, pero las matemáticas permanecen como una competencia tácita que no es necesario explicar para mejorar las aplicaciones pretendidas de la herramienta. Como es natural, es posible encontrar excepciones, por ejemplo, los gráficos matemáticos como una condición esencial para la construcción de los mapas (que interpreto como una especie de herramienta).

La situación es diferente en relación con la tecnología de la energía. A pesar de que muchas innovaciones tecnológicas no se basen de forma directa ni en las matemáticas ni en las ciencias naturales, sino más bien en

8. La Paradoja de Vico se menciona en Jensen y Skovsmose (1986).

experiencias tecnológicas anteriores (tan sólo pensemos en el desarrollo de la máquina de vapor), también encontramos un cierto tipo de “paralelismo” ya que la comprensión principal de las posibilidades y limitaciones de la tecnología de la energía provienen únicamente de las ciencias naturales. Cuando nos acercamos a las fronteras de este tipo de tecnología, encontramos que las ciencias naturales se convierten en la base sustancial de las innovaciones tecnológicas.

La tecnología de la sociedad, en contraste, no se apoya firmemente en ninguna disciplina científica, sino que más bien se asocia con la economía, sociología y psicología de una forma *ad hoc*. Debe tenerse presente que esta tecnología se construye de manera implícita sobre un paradigma prestado de las ciencias naturales —por lo tanto, ella con frecuencia interpreta sus sujetos, los seres humanos y las relaciones sociales, desde la perspectiva de la actitud estratégica de cómo pueden manipularse. Las matemáticas tienen una posición sólida en las tecnologías de la sociedad, pero en este caso la posición de las matemáticas con frecuencia es diferente de su integración en las ciencias naturales. Es frecuente que las matemáticas simplemente faciliten las técnicas *ad hoc*.

La tecnología de la información tiene una relación estrecha pero un poco diferente con la ciencia, porque la construcción de los computadores se relaciona de manera cercana con las matemáticas y la lógica. Las matemáticas y las materias relacionadas aportan las condiciones para el desarrollo de esta tecnología. Es distintivo que la naturaleza del computador y de las posibles limitaciones de los procedimientos algorítmicos se haya discutido con antelación a la construcción del primer computador. De hecho, cada ejecución de computador puede verse como la aplicación de un modelo matemático simple o complejo. Como la tecnología de la información parece ser omnívora, las matemáticas avanzan hacia la adquisición de una nueva posición social. Por lo tanto, desde un punto de vista lógico, esta tecnología no necesita interpretarse como una nueva manera de manipulación formal. Un efecto de la computación es que las aplicaciones de los métodos formales colonizan todas las áreas de la vida. Simultáneamente, la tecnología de la información tiene una posición especial en la familia de las tecnologías en cuanto otros tipos de tecnologías dependen de ella, eso sí no las ha absorbido.

Se afirma que un tipo dominante de tecnología determina los principios fundamentales de estructuración en la sociedad y, de acuerdo con esta idea, se ha enfatizado que la tecnología de la información ofrece una nueva condición para la vida social. En el artículo mencionado con anterioridad, “The social framework of the information society”, Bell expuso una tesis poderosa:

En el siglo venidero, el surgimiento de un nuevo marco social basado en las telecomunicaciones puede ser decisivo para la manera como se lleven a cabo los intercambios económicos y sociales, la manera como el conocimiento se cree y se haga accesible, y el carácter de las ocupaciones y del trabajo en que los hombres se involucren. Esta revolución en la organización y procesamiento de la información y el conocimiento, en la que el computador juega un papel central, tiene como contexto el desarrollo de lo que llamo la sociedad postindustrial.⁹

En esta formulación general encontramos los supuestos, primero, de que el desarrollo tecnológico tal vez ofrece nuevas estructuras sociales y, segundo, que una sociedad con un alto desarrollo tecnológico se caracteriza por el dominio de la tecnología de la información basada en el computador. Por lo tanto, la conclusión parece ser que las matemáticas contienen un poder social avasallador ya que es la ciencia predominante en la tecnología. Esto coloca en un papel central la tesis de que las matemáticas dan forma a nuestra sociedad. Pero no obstante esto parece contradecir el hecho de que las matemáticas son abstractas y, por lo tanto, aparentemente incapaces de “tocar” la realidad.

Si adoptamos una visión pesimista de la tecnología, podemos apreciar algunos de los problemas estructurales de la sociedad como algo crítico creado por el desarrollo tecnológico. Simplemente seremos incapaces de comprender las contradicciones básicas de la sociedad si no comprendemos cómo se crearon y cómo la tecnología en sí influye en ellas. En especial, no podremos comprender las estructuras de riesgo hacia las cuales nos conduce la tecnología, si no comprendemos la naturaleza de ella. Realizar un análisis crítico de nuestra situación social, por lo tanto, presupone un marco conceptual por medio del cual seamos capaces de aprehender los poderes formativos de nuestra sociedad. Aun más, los conflictos y las crisis se relacionan con la distribución del poder y control y esto también se convierte en una manera de llamar nuestra atención acerca del problema de la democracia en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico. ¿Estamos lejos de solucionar la paradoja de Vico? Esto se debe a que las matemáticas han adquirido un papel central en el desarrollo de la tecnología y a que la transparencia de las matemáticas no ha producido una transparencia en las funciones que de hecho cumplen las formaciones matemáticas —que son el resultado del ejercicio del poder formativo de las matemáticas en la sociedad.

9. Bell (1980, p. 500).

ABSTRACCIONES

¿De qué manera puede una ciencia que se ocupa de objetos abstractos tener un poder formativo? Podemos distinguir dos tipos diferentes de abstracciones, a saber, las *abstracciones mentales* y las *abstracciones materializadas*¹⁰. Las abstracciones mentales se usan para facilitar el razonamiento. Los conceptos matemáticos y el modelaje matemático son ejemplos de este tipo de abstracciones. Aquí nos preocupan las matemáticas explícitas. Al tratar de lanzar un satélite, podemos usar un modelo de la tierra que hace una abstracción de la fragosidad de su superficie y podemos calcular la órbita posible del satélite. En vez de hacer un experimento real somos capaces de simular la situación de forma hipotética. Las abstracciones mentales pueden facilitar los experimentos de pensamiento. El razonamiento económico puede servirse de un concepto como el Producto Interno Bruto (PIB), definido en términos de una función matemática, cuyo valor está determinado por los valores de parámetros diferentes¹¹. Una variedad de supuestos y también malentendidos pueden incorporarse en una abstracción mental. Ellas sólo existen como modelos mentales o imágenes, y su existencia es similar a la de un personaje de una novela.

Esto también se puede expresar en los términos desarrollados por Karl Popper, que dan significado a la idea de interrelacionar tres “mundos” diferentes. De acuerdo con este autor, el primer mundo está formado por las entidades físicas, i.e., el mundo de los hechos y el estado de cosas; el segundo, por el estado mental del sujeto individual; mientras que el tercero, por las ideas científicas, cuyos habitantes más importantes son los conceptos y teorías científicas. Un asunto esencial tiene que ver con la relación entre los tres mundos y Popper sostiene que —a pesar de que él le otorga al tercero una objetividad y existencia independientes— es posible argumentar de manera consistente que sus entidades son un producto humano. El tercer mundo es una construcción humana objetiva y la lógica del descubrimiento científico, que Popper especifica como una alternación entre las conjeturas y las refutaciones (explicadas por Imre Lakatos como la dialéctica entre las demostraciones y las refutaciones en el caso de las matemáticas), se convierten en la forma de cambio en ese mundo.

Vamos a considerar si es posible o no encontrar un vínculo entre el tercer mundo (de las abstracciones mentales) y el primer mundo, incluso en el

10. Estos dos conceptos los utiliza Alfred Sohn-Rehtel (1970) en su intento por discutir los orígenes sociales de algunas formas básicas de pensamiento. No trataré de profundizar en su intento por “socializar” la epistemología. Tan sólo encuentro útil aplicar estos conceptos. Las ideas que se describen en esta sección las hemos desarrollado cooperativamente con Christine Keitel y Ernst Kotzmann como parte del proyecto BACOMET III. Ver Keitel, Kotzmann y Skovsmose (1993) y también Keitel (1989).

11. En el Capítulo 6 retomaremos la discusión del PIB como un término matemático.

caso de una ciencia como las matemáticas. Permítanme, sin embargo, hacer una adición sustancial al tercer mundo. Mientras Popper lo concibe como el mundo formado por los conceptos y teorías científicas, yo incluiré tanto las ideas como los supuestos generalmente aceptados que, aunque no constituyen conocimiento bien establecido, pueden funcionar como modos de pensamiento. Esta adición es importante en nuestro contexto porque si bien un concepto matemático como tal puede concebirse como científico, la parte de las matemáticas que se ha interpretado y usado como un modelo no necesita basarse en la ciencia y puede, de hecho, expresar una opinión sesgada al igual que numerosas comprensiones erróneas. En resumen, la parte interpretada de las matemáticas aparece como una abstracción mental. Para dar un pequeño ejemplo: la interpretación de Ptolomeo de las posiciones del sol y los planetas es un modelo matemático interpretado que pertenece a nuestro pensamiento y que crea formas de mirar la realidad.

Las abstracciones materializadas tienen un *status* ontológico diferente al de las anteriores. Las abstracciones mentales son “imágenes” (aunque un poco imprecisas) de la realidad. Pero también podemos ser testigos del fenómeno inverso que consiste en que las estructuras reales sean “imágenes” de las abstracciones mentales. A éstas las llamamos abstracciones materializadas. Son abstracciones que se toman como un hecho y se convierten en reificaciones de modos de pensamiento. Por lo general no nos cuestionamos sobre si lo que estamos manejando es una abstracción materializada o no, sino que es algo real que pertenece a nuestro primer mundo, en términos popperianos. Quizás ni siquiera tenemos la posibilidad de identificarlas, sino que vivimos junto con ellas. Las formas de calcular los impuestos no son simples modelos mentales, sino que tienen una influencia real en nuestras vidas. El valor de intercambio de las mercancías en forma de dinero es real y no únicamente un modelo que expresa el grado de utilidad de algún bien o el tiempo necesario para su producción. Los sistemas monetarios se han convertido en el estado real de los negocios; e incluso el PIB se ha vuelto real ya que ha alcanzado un *status* diferente al de ser tan sólo el resumen de una serie de cálculos basados en los valores de algunos parámetros. El PIB está presente en las discusiones sociales y económicas como un objeto independiente y como una figura real.

Cada sociedad y cada cultura ha desarrollado un campo de abstracciones materializadas. Pero, ¿de dónde provienen? Ellas deben haber surgido de un acto creativo. Si miramos la historia podremos seguirle el rastro a algunas abstracciones materializadas en las estructuras ideológicas y en los sistemas metafísicos. No obstante, en tanto abstracciones materializadas, han obtenido el *status* de leyes y principios para la formación de algunas entidades sociales. Tienen que considerarse como parte de nuestra realidad y no sólo como simples modelos para nuestro pensamiento. Así, mientras un personaje de una novela permanece en la novela, algunas abstracciones mentales cambian su *status* ontológico y se materializan; es decir, los con-

ceptos adquieren vida. Como ya se mencionó, puede ser posible seguirle el rastro en el tiempo al origen de abstracciones materializadas de manera diversa, pero lo que es importante en este contexto es que algunas abstracciones materializadas, en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico, pueden emerger del modelaje matemático. El supuesto entonces es que esta materia se convierte en una nueva fuente en ebullición para la invención de reglas y estructuras, i.e., las matemáticas no sólo crean maneras de describir y manejar problemas, sino que también se convierten en una fuente principal de reconstrucción de la realidad¹².

FORMALIZACIONES

Trataremos de comprender mejor cómo las abstracciones mentales se pueden volver abstracciones materializadas, analizando varios tipos de formalizaciones. David Hilbert dio un ejemplo distintivo de axiomatización, el primer paso importante de una formalización. El describió la geometría euclidiana estableciendo axiomas que conectan los conceptos de punto, recta y plano. No dio definiciones explícitas de estos conceptos sino que tan sólo estableció las relaciones entre ellos. En este sentido, Hilbert utilizó definiciones implícitas como punto de partida de su sistema axiomático. Pero, ¿acaso existen de verdad los puntos, rectas y planos? Euclides ya había intentado responder esta pregunta al sugerir las definiciones explícitas de estos conceptos, pero no tuvo éxito. El criterio de Hilbert para la existencia matemática es sorprendentemente simple: los objetos, a los que se refieren los términos fundamentales en una teoría axiomática, existen si y sólo si la teoría es consistente. Esta interpretación hace abstracta la existencia matemática, lo cual también se enfatiza con el hecho de que Hilbert encontró que objetos “ideales” pueden añadirse a la teoría para ponerle un toque final —claro, siempre y cuando esa teoría continúe siendo consistente. Cuando una teoría matemática se axiomatiza, se recurre a la filosofía para dar cuenta de la ontología de sus objetos. La existencia se convierte en una propiedad formal y el contenido de las matemáticas desaparece de

12. Aquí no voy a considerar el origen de las abstracciones mentales, aunque esta es una discusión tan importante como la de la manera en que las abstracciones mentales se materializan. Esta restricción en mi análisis tan sólo tiene que ver con mi preocupación por la tesis del poder formativo de las matemáticas. La tesis que requeriría la exploración de los orígenes de las abstracciones mentales se relaciona con las raíces sociales de las matemáticas. Un punto principal de tal análisis debería considerar la manera como las abstracciones mentales pueden destilarse de las abstracciones materializadas, i.e., la manera como el pensamiento abstracto se vuelve una expresión de algunas convenciones sociales o de estereotipos sociales. Este se convierte en un análisis de la vida mundanal de las almas dentro del tercer mundo de Popper, y también estaría más de acuerdo con el proyecto de Sohn-Rehtel.

nuestro mundo. Cuando una teoría se axiomatiza, puede formalizarse y, al hacer esto, *formalizamos un lenguaje* o una parte de un lenguaje. En este sentido, la formalización es un acto por medio del cual se crea un nuevo juego de lenguaje.

Cuando formalizamos una parte de un lenguaje, creamos una abstracción mental. Y sobra aclarar que existen otras formas de producir este tipo de abstracciones. Un lenguaje ofrece no sólo una descripción de la realidad, sino también una interpretación. Dependiendo de nuestros medios de descripción, somos capaces de identificar diferentes aspectos de la realidad. De hecho, si el lenguaje provee las estructuras de una interpretación de las cuales no podemos escapar, no tiene sentido hablar de la realidad de forma aislada de cualquier interpretación. No somos capaces de dejar el lenguaje fuera de nuestra consideración. En cambio, nuestro lenguaje nos absorbe y nos sumerge en sí mismo. Podemos intentar cambiar el lenguaje que usamos o elaborar nuevos medios de expresión, pero no podemos hacer esto fuera del lenguaje. Algunos de los posibles lenguajes disponibles ya están formalizados. Formalizar un lenguaje y luego aplicarlo, por lo tanto, crea una nueva interpretación.

El formalismo da una descripción más precisa de un lenguaje formal y establece un ideal para la formulación de una teoría matemática¹³. Debemos restringirnos a dar un vistazo a la definición formalista de un lenguaje formal. Un lenguaje formal se basa en una gramática sin ambigüedades. Tiene que estar muy bien definido si un símbolo pertenece al vocabulario del lenguaje o no y, también, si una secuencia de símbolos constituye una combinación válida o no. La gramática tiene que generar exactamente la clase de oraciones con significado dentro del lenguaje. Cuando se estipula un número de oraciones bien formadas como axiomas y se especifica un sistema de deducción, podemos desarrollar una teoría formal (y también tratar de investigar si el sistema es consistente y completo o no). Una vez formalizada una parte del lenguaje, hemos llegado a un abstracto mental cuyo *status* ontológico se indica en las interpretaciones de Hilbert sobre la existencia matemática. Tal abstracción sólo pertenece a nuestro pensamiento.

Tenemos que mirar otro tipo de formalización. No sólo es posible formalizar un lenguaje, sino formalizar acciones y rutinas, como por ejemplo una forma de comportamiento. En este caso, el resultado de un proceso de formalización no es un nuevo juego de lenguaje sino una nueva forma de comportamiento, como por ejemplo un manual, i.e., descripción de cómo comportarse en una forma algorítmica prescrita. Este fenómeno se puede ejemplificar con la administración científica. De hecho considero la taylorización como un ejemplo paradigmático de la formalización de acciones y rutinas. Cuando se establecen las estructuras, se crean simultáneamente

13. Ver Curry (1951).

normas de comportamiento. Podemos pensar en planear una producción determinada: los trabajadores tienen que comportarse de una manera específica, y en uno de los extremos del espectro encontramos la fábrica automatizada por completo.

La formalización del lenguaje y la formalización de las acciones están estrechamente conectadas, de ahí que sea posible pasar de una formalización de lenguaje a una de rutinas. La aplicación de un lenguaje formalizado para describir fenómenos facilita “ver” las estructuras formales y, al hacer esto, se da un primer paso en la adaptación de la realidad a nuestra imagen de ella. Una descripción resalta algunos aspectos e ignora otros. Como ya se ha dicho, una descripción proporciona una interpretación. Si, por ejemplo, el objeto de nuestra descripción son los procesos productivos o las transformaciones económicas y nuestra intención es sistematizar un poco más y taylorizar, entonces una descripción formal facilitará nuestros pasos. Tal descripción hace más fácil identificar nuevos algoritmos de comportamiento. Esto ejemplifica el punto de que nuestra realidad siempre será nuestra interpretación de la realidad y que el lenguaje, incluso los lenguajes formalizados, se proyectan en la realidad.

Presenciamos la transmutación de una abstracción mental en una abstracción materializada, que se ha provocado por la transformación de una formalización de lenguaje en una formalización de rutinas. Las abstracciones se materializan y, por lo tanto, también podríamos hablar de *abstracciones reales*. Creamos una semántica para nuestras descripciones formales al inventar procedimientos, algoritmos, rutinas, i.e., tipos de comportamiento a los que se refiere el lenguaje formal. Las matemáticas intervienen en la realidad creando una segunda naturaleza a nuestro alrededor, y dando no sólo descripciones de los fenómenos, sino también modelos de comportamiento modificado. No sólo vemos las cosas de acuerdo con las matemáticas, sino que también las hacemos de acuerdo con ellas. En este sentido los habitantes del tercer mundo de Popper se materializan en el primero.

Si bien las matemáticas pueden interpretarse como una materia formal y la existencia matemática como algo separado de la existencia real y empírica, también es posible ver una transformación ontológica de las estructuras formales en realidades empíricas y sociales. Los modelos matemáticos se vuelven guías para el diseño de nuestro mundo y, por lo tanto, no sólo tienen un carácter descriptivo sino también prescriptivo. Dado que basamos el diseño de nuestro entorno social en las matemáticas, terminamos viviendo en un mundo de segunda naturaleza, donde viven nuevas extrañas criaturas formales que hacen parte integral de nuestra sociedad. Estas no pueden sustituirse por ningunas otras abstracciones que cumplan una función similar. Es imposible imaginarse el desarrollo de una sociedad como la que conocemos y en la que vivimos sin que haya abstracciones materializadas que se manifiesten a través de la tecnología de la información.

Las matemáticas *constituyen* las abstracciones materializadas, de la misma manera como constituyen el aparataje de guerra moderno. ¿Qué significa esto? No significa que la empresa de la guerra no existiría sin las matemáticas, sino que sustraer las matemáticas del aparataje de guerra moderno disolvería por completo este tipo de empresa. De manera similar, no podemos imaginar cómo el sistema de impuestos moderno podría existir si las matemáticas se sustraieran. Naturalmente, estas formulaciones pueden también conducir a equívocos porque la metáfora de la sustracción, por así decirlo, presupone un tipo de platonismo: que las matemáticas existen, pueden aplicarse y, por lo tanto, pueden sustraerse. El punto es que las matemáticas están integradas en las estructuras tecnológicas.

Una de las formas principales de materializar abstracciones es el desarrollo de sistemas, que actúa como la partera que ayuda a que las criaturas formales nazcan a la vida¹⁴. Estas se multiplican y nuevas generaciones crecen a la velocidad de los gérmenes. Un mundo tecnológico se ha creado a nuestro alrededor de una manera que le da sentido a las ideas de Ellul, que ven la tecnología no sólo como una estructura de la sociedad, sino como una categoría fundamental que abarca la sociedad como un todo. Vivimos *en* la tecnología, *para* la tecnología y *por medio de* la tecnología. Schmidt ya no es el único hombre taylorizado.

EL CARÁCTER CRÍTICO DE LAS MATEMÁTICAS

Tanto las abstracciones mentales como las materializadas se constituyen en objetos de crítica. Referirse a las abstracciones mentales significa criticar formas de interpretaciones, i.e., objetos mentales; y referirse a las abstracciones materializadas significa criticar algo “material”. En particular esto significa una crítica a lo que las matemáticas hacen. El paso de las abstracciones mentales a las materializadas se ha descrito como una formalización y, por lo tanto, el proceso de formalización como un todo se vuelve un objeto de crítica. Dirigir esta crítica es importante si se pretende analizar la formalización de la misma manera que la tecnología en general, i.e., como una actividad que simultáneamente resuelve y crea los rasgos críticos de la sociedad. En particular, supongo que las estructuras de riesgo fundamentales que hacen parte de una sociedad con un alto desarrollo tecnológico tienen que entenderse como el producto de una formalización¹⁵.

Hablar de las abstracciones materializadas es una manera diferente de enunciar el punto de que las estructuras lingüísticas se manifiestan en sí mismas como parte de la realidad. El relativismo lingüístico, empero, no

14. El desarrollo de sistemas hace parte de la práctica de la ingeniería de sistemas.

15. Beck (1986) usa el concepto *sociedad de riesgo*. Booss-Bavnbeek (1991) ha sugerido la relación entre este riesgo y el modelaje matemático. Consultar también Booss-Bavnbeek y Pate (1989a, 1989b).

especifica mucho acerca del concepto de poder. Puede resultar útil mirar la transición de las abstracciones mentales a las materializadas y la naturaleza de las formalizaciones, e incluso el paso de las formalizaciones de lenguaje a las de rutinas, como expresiones de un *poder simbólico*. No necesitamos buscar el poder en la forma de algún arreglo físico evidente, sino que el poder puede expresarse y ejercerse de manera simbólica. El poder simbólico requiere que aquellos a quienes se domina crean en la legitimidad del poder. Este es un aspecto importante de las aplicaciones de las matemáticas. Tiene que creerse en los resultados de los cálculos matemáticos con el fin de que se puedan “materializar” en rutinas de trabajo. El poder simbólico de las matemáticas está enraizado en una metafísica bastante difundida sobre la confiabilidad de las matemáticas. Y esta metafísica puede ser parte del currículo escondido de la educación matemática.

Pierre Bourdieu discutió ejemplos de poder simbólico, incluido el poder simbólico en relación con la educación¹⁶. El enfatizó cómo la gente que habla dialectos locales es inducida a colaborar en la destrucción de sus propios medios de expresión. En este caso, la educación adopta el objetivo de imponer un nuevo lenguaje, el dialecto oficial, como la lengua estándar de la educación. Esto puede generalizarse y podemos ver la preocupación de la etnomatemática por ejercer una resistencia al poder simbólico del lenguaje oficial de las matemáticas. Bourdieu describe el poder simbólico como

[...] el poder de constituir lo dado a través de palabras, de hacer que la gente vea y crea, de confirmar o transformar la visión del mundo y, de ese modo, la acción sobre el mundo y así el mundo mismo; un poder casi mágico que permite a unos obtener el equivalente de lo que obtendrían por medio de la fuerza (física o económica).¹⁷

Es posible interpretar esto como una descripción del poder que ejerce la formalización.

El potencial del poder simbólico hace necesario relacionar también esta discusión con la democracia. Si una sociedad se basa en el uso de herramientas manuales, una interpretación idealista de la competencia democrática es plausible; no parece necesitarse ningún tipo de conocimiento tecnológico para evaluar los actos y las decisiones de los gobernantes. Pero lo contrario parece suceder en el caso de las sociedades con un alto desarrollo tecnológico. El contenido de la competencia democrática parece rápidamente adquirir una complejidad tremenda. Frente a tal sociedad, tan sólo un grupo limitado de personas parece ser capaz de manejar tal complejidad. De hecho, esta competencia parece presuponer una cierta cantidad de cono-

16. Ver Bourdieu (1991).

17. Bourdieu (1991, p. 170).

cimiento tecnológico. ¿Cómo podría cualquiera evaluar las decisiones que tienen que ver con las consecuencias de las empresas tecnológicas sin poseer una cantidad considerable de conocimiento tecnológico? Y en la sociedad de la información, tal y como la describe Bell, este conocimiento tecnológico se basa en las matemáticas. Nuestro análisis del problema de la democracia parece implicar que el conocimiento tecnológico tiene que desarrollarse en todos los niveles de los sistemas educativos, y aun más, que tenemos que aumentar la educación matemática como una parte integrada de la tecnología. Parece tentador asumir que en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico la competencia matemática se constituye en una gran parte de la competencia democrática. Sin embargo, esta conclusión *no* es el punto, si bien debe prestársele atención especial a las matemáticas¹⁸. Mogens Niss ha señalado lo anterior en esta manera:

Es de importancia democrática tanto para el individuo como para la sociedad como un todo, que a cualquier ciudadano se le suministren los instrumentos para comprender el papel de las matemáticas. Cualquiera que no posea tales instrumentos se vuelve una “víctima” de los procesos sociales en los que las matemáticas es una componente. Así, el propósito de la educación matemática debe ser capacitar a los estudiantes para darse cuenta, comprender, juzgar, utilizar y también ejecutar las aplicaciones de las matemáticas en la sociedad, en particular en situaciones significativas para su vida privada, social y profesional.¹⁹

Esto pone a la educación matemática en el foco de la educación crítica de una manera dramática. Una mirada breve a los libros de texto tradicionales indica que es improbable que la inmersión laboriosa en el currículo capacite a los estudiantes para darse cuenta, comprender y juzgar las aplicaciones de las matemáticas en la sociedad. No obstante Niss está en la búsqueda de instrumentos para comprender el papel de las matemáticas en la sociedad y estos instrumentos no tienen que ser matemáticos en sí mismos. Potenciar a las “víctimas” del poder simbólico no necesariamente implica un estudio forzoso y extensivo de la gramática del lenguaje del poder, i.e., una expansión del currículo de matemáticas. Un cambio más radical tiene que suceder. Si bien las matemáticas juegan un papel importante en las tecnologías que determinan el desarrollo social, una comprensión del papel de las matemáticas y de los métodos formales en la sociedad no necesita encontrarse en sí dentro de las matemáticas. La competencia faltante no necesita ser idéntica a la competencia matemática. Las competencias democráticas se ocupan de la evaluación y crítica de acciones y propuestas, y no es obvio que una acumulación de conocimiento matemático aporte alguna competencia ética.

18. Ver Skovsmose (1988).

19. Niss (1983, p. 248).

Muchos autores han identificado la cultura como un punto importante de orientación para la educación matemática²⁰. En una sociedad con un alto desarrollo tecnológico, la cultura también se halla determinada por esa segunda naturaleza que crean las formalizaciones materializadas. Comprender la cultura, por lo tanto, también significa comprender cómo tales materializaciones se vuelven parte de la cotidianidad. Es optimista hacer de esto un objetivo educativo —y también ingenuo, si se tiene en mente la naturaleza de la paradoja de Vico. Empero, veo que el papel de la educación matemática crítica es establecer tal comprensión; y esto reúne las nociones de crítica y democracia con el concepto de *Mündigkeit*.

20. Ver, por ejemplo, Bishop (1988a), Bishop (Ed.) (1988) y Høines y Mellin-Olsen (Eds.) (1986).

CAPÍTULO 4

UN ENFOQUE TEMÁTICO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Los tres capítulos anteriores pueden resumirse así: es importante hacer crítica a la educación si se quiere que ésta no degenere en una manera de socializar efectivamente a los estudiantes en una sociedad tecnológica y, al mismo tiempo, aniquilar la posibilidad de que desarrollen una actitud crítica hacia, justamente, esa misma sociedad. La tesis acerca del poder formativo de las matemáticas sugiere que una ciencia formal puede convertir una invención en una realidad, y esto es lo que pone en la mira a la educación matemática. Un asunto importante es si esta educación es capaz de proporcionar a los estudiantes una competencia fundamental para el ejercicio de una ciudadanía crítica. ¿Podemos ofrecer una interpretación educativa a la *alfabetización matemática* que sea paralela a la de *alfabetización*? Si se ignora este asunto, la educación matemática puede fácilmente convertirse en un medio para aumentar el poder simbólico y, por lo tanto, tener consecuencias sociales importantes. (Todavía tenemos que recordarnos a nosotros mismos que no podemos pretender haber “demostrado” ninguna afirmación acerca de la necesidad de instituir en una educación matemática crítica.)

Hasta ahora he enfocado la discusión en las conexiones semánticas entre conceptos como crítica y democracia. Pero podemos iniciar de nuevo buscando las perspectivas que comprende la planeación de actividades para el salón de clase. En mi intento por aproximarme a una filosofía de la educación matemática crítica, debo incluir diferentes ejemplos de prácticas educativas. La función de estos ejemplos no es ofrecer una base más amplia para una investigación empírica. En particular, los proyectos que se describirán en los capítulos siguientes no se han puesto en marcha con el fin de confirmar algunas tesis educativas específicas, ni tampoco son casos que se muestran como ejemplificación de una teoría educativa. Los profesores que llevaron a cabo los proyectos no siguieron principios formulados de manera explícita. En cambio, los ejemplos sirven como ilustraciones diversas, en el mismo sentido en que una fotografía de Pieter Breugel muestra la riqueza y variedad de la vida en una situación particular. Los ejemplos elucidan la complejidad de las prácticas educativas y, en esta complejidad, trataré de buscar los aspectos de la educación matemática crítica. Tal aproximación no sólo nos informa sobre la práctica, sino que tam-

bién es un medio para resaltar los conceptos que uso. Tengo la esperanza de que esto sirva como una clarificación filosófica y como una manera de buscar un significado a la educación matemática crítica. (Las situaciones del salón de clase en sí no son el objeto de mis interpretaciones, sino las concepciones integradas en su planeación. Esto no implica que no considere importante la observación del salón de clase, incluso en el desarrollo de una filosofía, sino que simplemente tales situaciones no han sido mi preocupación.)

Las “fotografías” de prácticas educativas no se han seleccionado de manera aleatoria —no todas las fotografías de Breugel narran actividades de niños (sin embargo, las que lo hacen dicen mucho más). Los ejemplos de trabajo por proyectos en matemáticas han sido desarrollados por profesores muy competentes, interesados en la interdisciplinariedad y en involucrar a los estudiantes como verdaderos partícipes del proceso educativo. Al mismo tiempo, los profesores están comprometidos con una visión personal de la práctica educativa y con la organización de su propia práctica docente en una manera que sea apropiada para la experiencia en su conjunto. Mi trabajo ha sido interpretar descripciones de su práctica (las descripciones se basan todas en los reportes de los profesores y no en mis observaciones). En capítulos posteriores describiré los proyectos “La Conejera”, “Construcciones”, “Subsidios familiares en una microsociedad”, “Nuestra comunidad” y “Energía”. En este capítulo describiré un ejemplo de una aproximación temática a la enseñanza de las matemáticas para niños de 10 a 11 años¹. La planeación de este proyecto, “Relaciones económicas en el mundo de los niños”, fue un esfuerzo cooperativo entre los dos profesores involucrados y yo, mientras estos profesores mismos llevaban a cabo la enseñanza experimental en sus respectivas clases. Los profesores fueron Marianne Klöcker e Inge Lise Kristoffersen de la Escuela de Egelund en Albertslund. El proyecto se llevó a cabo en 1979.

ALGUNAS FUENTES DE INSPIRACIÓN

En la línea central de la educación crítica, que aborda las cuestiones generales de la educación, las matemáticas normalmente se han concebido como una materia rígida y formal, con una resistencia bastante grande hacia la interdisciplinariedad y la cooperación. También se ha visto como una materia no esencial para el establecimiento de una educación crítica. En el trabajo de Negt, Mollenhauer, Lempert, Freire e Illeris las matemáticas escasamente se mencionan². Estos enfoques no formulan la pregunta de si la alfabetización matemática y la alfabetización juegan papeles similares.

1. Este proyecto ya se analizó en Skovsmose (1984).

El enfoque temático que describiré no pretende ejemplificar una educación matemática crítica. La estructura conceptual que subyace al proceso de planeación fue más bien vaga y no tomó de manera explícita en consideración aquellos conceptos que se han mencionado en los primeros tres capítulos de este libro. El concepto de educación crítica, sin embargo, era bien conocido en esa época, al igual que una variedad de ideas relacionadas con esa noción. En los años 70, en los países escandinavos al igual que en Alemania, es posible ubicar numerosos trabajos experimentales en educación que incluyen la educación matemática, que podrían catalogarse como verdaderamente críticos³. Ninguna de estas iniciativas, empero, identificó la educación crítica como su idea unificadora. El desarrollo de un marco teórico y el desarrollo de ejemplos tienen una naturaleza *ad hoc*. Sin embargo, encuentro razonable llamar a este movimiento como la primera ola de la educación matemática crítica⁴.

En tres libros cortos⁵ discutí la noción de educación matemática crítica, y en *Kritik, undervisning og matematik* [Crítica, enseñanza y matemáticas] ofrecí una exposición más sistemática al señalar tres términos claves de la educación matemática crítica. No sólo se le atribuye a los profesores sino también a los niños y estudiantes una *competencia crítica*, que se considera como una fuente que se debe desarrollar a través de su participación en los procesos educativos. El contenido de las materias escolares no puede suponerse con base en la tradición establecida, sino que tiene que someterse a un proceso continuo de revisión. Debe adoptarse una *distancia crítica*

2. Durante los años 70 se publicaron muchas introducciones al trabajo por proyectos. Una de ellas es Berthelsen, Illeris y Poulsen (1977), que resume algunas de las experiencias danesas de esa época y que también se convirtió en una de las principales fuentes de inspiración para trabajos experimentales posteriores. Sin embargo, el hecho de que sólo se mencione una vez las matemáticas (con referencia al cálculo de la longitud de un tubo de bombeo) en esta amplia introducción al trabajo por proyectos refleja la actitud característica de los educadores progresistas de la época hacia la educación matemática.
3. Ver, por ejemplo, Damerow et al. (1974), Münzinger (Ed.) (1977), Niss (1977), Riess (Ed.) (1977), Volk (1975) y Volk (Ed.) (1979); este último contiene un gran número de referencias.
4. No encuentro que el marco conceptual del proyecto IOWO —Intituit voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs, Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática, liderado por Hans Freudenthal, en Holanda —como se encuentra descrito en *Five years IOWO* [Cinco años de IOWO], por ejemplo, se relacione estrechamente con la noción de educación matemática crítica. No obstante, IOWO ha sido importante en la redefinición del concepto de educación matemática como un todo y también en hacer posible una práctica educativa que expresa muchas características de una educación crítica (ver Freudenthal, 1976). Lo mismo se puede decir acerca del trabajo de Hans Freudenthal quien, de una manera más fuerte, expresó sus críticas a los movimientos estructuralistas de los años 60 e identificó las matemáticas como una actividad humana, mas nunca mostró ningún interés por la Teoría Crítica en sí.
5. Ver Skovsmose (1980, 1981a, 1981b). En Skovsmose (1985) presento un resumen de mis trabajos anteriores.

frente al currículo. El proceso de enseñanza–aprendizaje debe orientarse hacia el objetivo de ofrecer a los estudiantes oportunidades para desarrollar su competencia crítica bajo la forma de cualificaciones necesarias para su participación en los procesos de democratización de la sociedad. En la medida en que tanto estudiantes como profesores adopten una orientación crítica frente al contenido tradicional y a las materias de la enseñanza, con miras a desarrollar su competencia crítica al enfocarse en problemas fuera del universo educativo, debería darse una base de apoyo para su *compromiso crítico* con los esfuerzos educativos y sociales comunes. Este resumen un poco esquemático de los términos claves es, por supuesto, muy superficial y no puede tomarse como una base para la educación matemática crítica⁶.

La segunda ola de la educación matemática crítica es lo que denomino como las diferentes tendencias⁷. Por ejemplo, hacen parte de esta ola la noción de etnomatemáticas acuñada por Ubiratán D’Ambrosio y desarrollada, entre otros, por Paulus Gerdes, Marcelo Borba y Geraldo Pompeu Junior, y la noción de educación criticomatemática tal y como la describen Marilyn Frankenstein, Arthur Powell y John Volmink. El trabajo de Marilyn Frankenstein es un ejemplo de los intentos persistentes que se han hecho para dar a la educación una forma que pueda ayudar a la gente a reaprender las matemáticas de una manera no opresiva, sino que le pueda servir para interpretar sus experiencias cotidianas. El trabajo de Frankenstein se basa en el de Freire. Las nociones de antirracismo, antisexismo y antiimperialismo tienen un lugar especial en esta segunda ola; en contraste con la expresión diferente y más implícita que, de la dimensión política de la educación matemática, se había hecho en la primera ola. La segunda ola ha sido muy rica y variada y algunas de las nociones se han desarrollado hasta sus límites. Por ejemplo, el trabajo de Renuka Vithal muestra que el

6. Mencionaré algunas de mis principales fuentes de inspiración durante los años 70. De Stieg Mellin–Olsen aprendí que las consideraciones acerca de la educación matemática deben relacionarse con la complejidad de la interpretación educativa y que el discurso educativo puede encontrarse imbuido en un marco sociológico más amplio; ver en especial Mellin–Olsen (1977). Mogens Niss siempre ha enfatizado la importancia social de las matemáticas y, con base en ese supuesto, ha desarrollado la discusión, no sólo de las aplicaciones de las matemáticas, sino también de las posibilidades de evaluar dichas aplicaciones. Me he interesado bastante por el trabajo de Dieter Volk quien ha integrado una interpretación crítica de la emancipación a través de la educación matemática y, al mismo tiempo, ha señalado el potencial del constructivismo para la comprensión de las matemáticas. De muchas discusiones con Bent Christiansen, aprendí la necesidad de una crítica cuidadosa a las tesis educativas como una precondition para desarrollarlas. Gracias a Tage Werner, llegué a comprender la extensión de los puntos ciegos de cualquier teoría educativa: sin importar la manera como se lleve a cabo una sistematización teórica, siempre se ignorarán algunos aspectos esenciales de una situación educativa. Esta idea es uno de los “axiomas” de este libro. Naturalmente he aprendido de muchos otros educadores matemáticos, pero también he recibido inspiración para la educación matemática crítica de otros educadores no involucrados con las matemáticas.

concepto de etnomatemática tiene que desarrollarse en nuevas direcciones que sirvan como una fuerza progresiva en la educación matemática si, por ejemplo, tenemos en mente una situación como la de Sur Africa después del Apartheid. Sin embargo, el enfoque temático que voy a describir a continuación corresponde a la primera ola.

PLANEACIÓN DE UN ENFOQUE TEMÁTICO

Las dos profesoras, Marianne Klöcker e Inge Lise Kristoffersen, y yo pretendíamos que el proyecto se ejecutara en un mes y medio, pero de hecho duró dos meses (seis sesiones de clase por semana). Buscábamos una contextualización o tematización de algunas partes de las matemáticas elementales, que cumpliera con condiciones como las siguientes. Primero, el tema tenía que ser o bien bastante conocido para los niños, o posible de describir en términos no matemáticos. Debía ser un tema que perteneciera a las situaciones cotidianas de los niños, pero podía no serlo en caso de que la situación que se escogiese se pudiera formular y discutir con el lenguaje natural. Era importante evitar temas cuyo significado de la materia de estudio sólo se pudiera explicar con el desarrollo de todo el contenido temático. Segundo, los niños debían poder acceder al contenido desde diferentes niveles y debían poder desarrollar el tema aun si sus habilidades fuesen bastante diferentes. El tema no debería tener ningún nivel específico de dificultad. Ningún tipo de clasificación o agrupamiento de acuerdo con las “habilidades” de los niños podía aceptarse como condición para el trabajo temático. Tercero, el tema debía poseer un valor por sí mismo. No debería convertirse en una mera introducción a una parte nueva de la teoría mate-

7. La riqueza de la segunda ola se documenta en una bibliografía comentada (Volmink et al., 1994) que hace evidente la imposibilidad de hacer justicia a la complejidad de dicha ola. Sin embargo debo mencionar a Abraham y Bibby (1988), Borba (1990), D'Ambrosio (1980, 1981, 1985a, 1985b), Frankenstein (1987, 1989, 1990), Frankenstein y Powell (1989), Gerdes (1985, 1986, 1988), Hoffman y Powell (1989, 1990), Shan y Bailey (1991), Vithal (1992), y Volmink (1989, 1990). Ver también Noss et al. (Eds.) (1990) y Julie et al. (Eds.) (1993). La bibliografía comentada también demuestra que la segunda ola en la educación matemática crítica casi no ha sido consciente de la existencia de la primera.

Una posición interesante es la que se ha adoptado en las discusiones de moda sobre el constructivismo. Como la percibo, esta discusión ha cumplido dos funciones principales. Por un lado, ha situado la actividad de quien aprende en el centro de la discusión epistémica, lo cual es esencial en la educación matemática crítica. Y por el otro lado, la discusión tiene un enfoque algo cerrado en el desarrollo de las competencias matemáticas y, como consecuencia, se han negado muchos aspectos de la dimensión política del conocimiento. Por lo tanto, creo que la orientación de la discusión general del constructivismo diverge de las perspectivas principales de la educación matemática crítica.

Muchos otros autores han producido ideas relevantes para el desarrollo de la educación matemática crítica. De especial importancia para mí son los trabajos de Bishop (1990), Dowling (1991), Ernest (1991), Evans (1990), Lerman (1989) y Nickson (1992).

mática. Y cuarto, el trabajo con el tema debía crear conceptos matemáticos, ideas acerca de la sistematización o ideas sobre dónde y cómo usar las matemáticas. Además, debería poder desarrollar las habilidades matemáticas.

Es claro que requisitos como los anteriores son insuficientes para una investigación adecuada de la esencia de la educación matemática crítica y son únicamente guías para el proceso de planeación. Pero esto no excluye la posibilidad de que el trabajo experimental pueda incluir cualidades que no se hayan considerado en las fuentes de su inspiración.

En el trabajo temático consideramos la diferencia entre lo concreto en un sentido físico y lo concreto en un sentido social. En la educación matemática elemental se enfatiza a menudo que el aprendizaje tiene que situarse en lo que es concreto y la interpretación, basada en la epistemología genética de Jean Piaget, que se le ha dado es la de lo concreto físicamente⁸. La comprensión matemática se concibe entonces como algo enraizado en nuestra manipulación de los objetos físicos y, si se desea que la educación matemática sea concreta, el ambiente de enseñanza debe ofrecer la posibilidad de que los niños⁹ manipulen, operen y experimenten con objetos de tal forma que, en el proceso, su comprensión matemática crezca. Sin embargo, me opongo a la idea de la concretización si ésta se entiende simplemente como hacer los conceptos matemáticos abstractos algo tangible y visible en un sentido físico. Prefiero la idea de la matematización, que entiendo como la actividad de encontrar sistemas y regularidades en una situación cotidiana caótica.

Existe una asimetría importante entre la concretización y la matematización. Concretizar significa dar a los términos matemáticos abstractos una interpretación física más simple y así hacerlos más comprensibles para los niños. Esta actividad de concretización se restringe a los planificadores del currículo y, como tal, se aísla de los procesos del salón de clase. Matematizar significa formular, sistematizar y elaborar juicios acerca de las formas de comprender la realidad y, en consecuencia, esta actividad debe llevarse a cabo como una parte integral del proceso de aprendizaje. Tanto los niños como el profesor deben involucrarse en el control de este proceso. Por lo tanto, en un enfoque temático tenemos que buscar “lo concreto de la sociedad”. De hecho, considero que la mayoría de los materiales concretos desarrollados para la educación matemática es abstracta desde un punto de vista social, a pesar de que sea concreta en un sentido físico.

8. En el Capítulo 11 se discute con más profundidad la epistemología genética de Piaget.

9. Nota de traducción. Si bien aquí se emplea el término niños en su forma masculina, para designar a un grupo de infantes mujeres y hombres, tal uso no significa una ignorancia de las diferencias de género, ni por parte del autor ni de la traductora. Para simplificar el lenguaje se seleccionó este término, pero el lector debe ser consciente de que se refiere tanto a varones como a niñas. Lo mismo sucede con términos como “profesor”, “estudiantes”, etc.

Las profesoras y yo seleccionamos un tema que ya se había tocado: las relaciones económicas. Pero esta vez tratamos de darle un cariz nuevo y más provocativo. Tratamos de colocar a los niños en el centro al definir tres “círculos concéntricos”: el primero relacionado con los niños en sí, el segundo con ellos y sus familias, y el tercero con ellos como parte de la sociedad. Exploramos el dinero de bolsillo, el subsidio infantil que se le da a cada familia por el nacimiento de un niño y el dinero que se necesita para dotar un club juvenil.

El proyecto “Relaciones económicas en el mundo de los niños” se resume en doce unidades que no corresponden a doce sesiones de clase ya que cada unidad incluyó una o más sesiones.

Unidad 1

Los niños “recibían” 10 DKr. (coronas danesas; esta cantidad equivale a casi dos dólares estadounidenses) por semana como dinero de bolsillo. Escogimos la cantidad de 10 DKr. porque en ese momento había un gran programa de asistencia liderado por una iglesia, para recolectar dinero para los países en vías de desarrollo. La campaña tenía como lema “Una moneda de 10 sirve de mucho”. Los niños habían visto cantidades de afiches con el lema y en todos los periódicos se habían publicado avisos al respecto. También en los dos salones de clase se habían colgado afiches de estos.

La introducción al primer subtema se basó en una discusión sobre el dinero de bolsillo: ¿qué cantidad de dinero normalmente recibes?, ¿tienes que hacer algo en casa para “ganarlo”?, ¿es razonable hacer algún trabajo a cambio de este dinero?, ¿qué tanto trabajo es razonable?, ¿qué compras con tu dinero?, etc. Queríamos llevar la discusión hacia la vida privada de los niños. Esto era posible ya que las profesoras tenían una comprensión profunda de los diferentes antecedentes de los niños y ya que los padres simpatizaban con lo que estaba sucediendo en el colegio; ellos confiaban mucho en las dos profesoras. También fue importante el desafío a cualquier conjunto implícito de valores que sugirieran que más dinero de bolsillo, ganado de manera fácil, es preferible a tener que trabajar para ganarlo. También se debe resaltar que explorar el tema del dinero de bolsillo no significa hurgar un tema desconocido para los niños porque, de hecho, suelen hablar bastante de ello. Pero si bien el dinero de bolsillo es un tema de discusión sólo en los patios o en los campos de juego, la manera como se trata puede ser algo inapropiada: por ejemplo, los niños pueden alardear con la cantidad que ganan. En cambio, nosotros queríamos cuestionar sus opiniones implícitas.

A esta discusión siguió una guía de trabajo que pedía a los niños escribir qué querían hacer con las 10 DKr. Se les pedía dibujar lo que querían para facilitar una comparación. Y naturalmente tenían que explorar si de

hecho podían comprar lo que querían con esa cantidad de dinero. Aquí tuvimos un pequeño problema con nuestra planeación. Si el cálculo era realista, era necesario usar cifras decimales, cosa que el libro de texto todavía no había presentado a los estudiantes. Pero decidimos no tener en cuenta este problema.

Unidad 2

Esta unidad tuvo que ver con los ahorros. Los niños debían escoger un artículo más caro que los que de hecho eran capaces de comprar. Se les pidió primero que pensarán en lo que deseaban, luego que dieran el precio del artículo y finalmente que establecieran qué tanto tiempo les tomaría ahorrar la cantidad de dinero necesaria para comprar el artículo. Como tarea, se le pidió a los niños hallar el precio real del artículo que querían y elaborar un plan de ahorro razonable.

Unidad 3

Si se encontraba que artículos más o menos similares tenían precios diferentes en tiendas diferentes, resultaba útil hacer una discusión acerca de la calidad, la moda, la oferta y la demanda. En esta unidad tenían que comparar los resultados de sus ahorros y volver a cuestionarse sobre la cantidad de su dinero de bolsillo. Esto se relacionaba con asuntos como el salario y el ingreso. ¿Qué es un salario razonable? ¿Está bien que alguna gente gane más dinero que otra? ¿Cuáles son las razones para las diferencias de salarios? Queríamos acercarnos a los asuntos políticos como una introducción al trabajo acerca de los subsidios infantiles¹⁰.

Unidad 4

Los subsidios infantiles en Dinamarca han sufrido varios cambios. En el momento en que el proyecto tuvo lugar, este subsidio dependía de una variedad de factores; pero en el proyecto simplificamos la situación de tal manera que cada niño recibiera la misma cantidad de dinero, 450 DKr. cada tres meses. Esta unidad se presentó con preguntas como ¿sabes si tus padres reciben este subsidio?, ¿cuánto dinero crees que reciben?, ¿cada uno de tus padres recibe el subsidio?, ¿cuál es la razón para que haya este subsidio?, ¿es posible para tí discutir con tus padres en qué se utiliza ese dinero?

El monto del subsidio se le pagó a los niños de una manera “real” (en el colegio había dinero de juguete) con el objetivo de que ellos sintieran el dinero entre sus manos y también para que tuvieran la sensación de que tal suma era una gran cantidad de dinero. Después se impuso una restricción: el dinero tenía que usarse para comprar ropa. ¿Sería posible comprar lo que un niño necesita para la primavera y el verano con 450 DKr.? La primera actividad era determinar qué tipo de ropa quería cada cual y, por supuesto,

10. En cierto sentido no tratar asuntos delicados no se considera como una posición más neutral. No desafiar la desigualdad también es una acción política poderosa.

tenía que considerarse el precio. Queríamos que la actividad fuese lo más realista posible. Como tarea, los niños tenían que determinar qué ropa ya tenían, qué necesitaban, qué podrían obtener de hermanos o hermanas mayores y qué cosas nuevas querían.

Unidad 5

Los niños tenían que elaborar una lista con lo que necesitaban y con lo que querían y luego asignar un precio a los diferentes artículos. Después tenían que hallar los precios reales. Se recolectó una gran cantidad de catálogos de tiendas con la ayuda de los niños y sus padres. Esperábamos que lo más difícil fuera mantener la restricción de las 450 DKr.

Unidad 6

Fue necesario visitar un centro comercial.

Unidad 7

Se elaboró la lista final de compras y se ilustró con dibujos o recortes de los catálogos para hacer una exposición con carteleras de lo que debía comprarse.

Unidad 8

Se llevó a cabo una pequeña investigación estadística basada en la exposición. Esta investigación suponía que se hubiera realizado un acuerdo sobre diferentes categorías de ropa como pantalones cortos, suéteres, jeans, etc. El resultado de la investigación estadística, presentado en un diagrama, se convirtió en el punto de partida para una discusión sobre la moda y la calidad.

Unidad 9

En esta unidad se amplió la perspectiva económica al considerar a los niños como miembros de una sociedad. Escogimos la idea de equipar un club juvenil porque se iba a iniciar la construcción de un nuevo centro juvenil cerca a la escuela. Este subtema se introdujo con preguntas como ¿alguien nos puede contar cómo es estar en un club juvenil?, ¿qué se hace normalmente allí?, ¿a qué hora se llega en la mañana?, ¿por qué es necesario que algunos niños permanezcan en un club juvenil?, ¿es voluntario ir a ese lugar?, ¿quién decide?, ¿que pasaría si no existiera?, ¿por qué se está construyendo uno nuevo justo a la vuelta de la esquina? Todas estas preguntas se encaminaban a explorar la posición de los niños en la sociedad. Si los dos padres de familia trabajan, podría ser necesario que los niños asistieran a un club juvenil después de la escuela y quizás una o dos horas antes de que se inicien las clases en la mañana. Esta situación debía relacionarse con la vida de las familias en general. Con frecuencia los dos padres tienen que trabajar. ¿Por qué se presenta esta situación?

Entonces el trabajo se concentró en la dotación del club juvenil: si tuvieras la posibilidad de decidir, ¿cómo debería dotarse un nuevo club juvenil?, ¿quién decide de hecho al respecto? Para simplificar, nos concentramos en la compra de juguetes. Al establecer contactos con las autoridades pertinentes dentro del Consejo Municipal encontramos la cantidad de dinero real destinada para este rubro. Pero necesitábamos simplificar para concentrarnos en lo que los niños consideran juguetes. Por ejemplo, la pintura y el papel de colgadura no son vistos como juguetes en el mismo sentido en que lo es una pelota de fútbol. Nos imaginamos que sería más difícil para los niños imaginar cuánta pintura y papel se necesitaría. En cambio sí era más relevante discutir sobre la calidad y la cantidad de balones necesarios. Así que calculamos la cantidad de dinero que se podría usar en juguetes, teniendo en cuenta la interpretación de los niños acerca del mundo. La suma total para la compra de tales artículos era 8.000 DKr.

Esta parte del trabajo temático se convirtió en verdad en un trabajo por proyectos. En el primer tema concerniente al dinero de bolsillo, los niños trabajaron por su cuenta. En el subtema siguiente, sobre los subsidios infantiles, trabajaron cerca a los otros al sentarse juntos para mirar un catálogo o al elaborar las carteleras. Sin embargo, estaban por lo general ocupados con sus propios problemas como ¿qué vestido en realidad quiero? Pero desde este momento en adelante, el trabajo en grupo se hizo esencial. Cada grupo debía determinar lo que quería comprar para el club juvenil y llegar a un acuerdo general sobre su sugerencia.

Unidad 10

Se recolectó una gran variedad de catálogos. Un problema difícil de solucionar fue su uso, en especial el de aquellos que estaban dirigidos a los planificadores o directores de centros recreativos, ya que estaban organizados de una manera complicada. Había un catálogo general que describía todos los artículos que una compañía específica podía ofrecer: los diferentes colores, tamaños, calidades, versiones del mismo artículo, etc. En el catálogo general se le asignaba un número de siete dígitos a cada ítem y el precio se encontraba, según este código, en una lista de precios independiente (¡y es que los precios varían con mayor frecuencia que los artículos en sí!).

¿Sería posible para los niños manejar este conjunto complejo de información? ¿Se produciría un caos? ¿Se enredaría la enseñanza en medio de las preguntas acerca de cómo y dónde encontrar los precios? Consideramos elaborar una lista de artículos y precios más sencilla, pero desistimos de la idea por ser un trabajo bastante pesado. Decidimos ver lo que sucedía.

Unidad 11

Esta se convirtió en una unidad bastante larga en términos de tiempo. Los grupos tenían que realizar la lista final de sus prioridades. Los diferentes

miembros de cada grupo tenían que ponerse de acuerdo y la suma de dinero no podía exceder las 8.000 DKr.

Unidad 12

Se compararon las sugerencias de los grupos y se elaboró la versión final de toda la clase. Nuestra intención era que las sugerencias de los niños se enviaran a las autoridades. Sin embargo, los resultados del trabajo de grupos terminaron siendo bien diferentes.

El contenido matemático del trabajo temático a lo largo de las unidades es bastante obvio, aunque no se trató de manera explícita en la descripción de las doce unidades: adición de números (incluidos los decimales) hasta cierta cantidad, resta y estimación. El trabajo también consistió en el manejo de una gran cantidad de datos. Se necesitaron algunas representaciones gráficas no sólo en la comparación de lo que los niños deseaban comprar, sino también, por ejemplo, en el hallazgo de los resultados de las diferentes maneras de ahorrar. Desde un punto de vista formal, se involucró una gran cantidad de matemáticas.

COMENTARIOS SOBRE EL PROYECTO

Las dos profesoras y yo tomamos la decisión general de que nuestro enfoque temático se relacionaría con la economía y que los tres subtemas deberían ser el dinero de bolsillo, el subsidio infantil y la dotación de un club juvenil. ¿Significa esto que se eliminaban las posibilidades de que los niños tomaran sus propias decisiones? Hasta cierto punto la respuesta es “sí”. Pero el hecho de que hubiéramos tomado la decisión general aclaró a los niños que teníamos algunos objetivos e ideas. Y esta es una situación nueva comparada con la enseñanza que se rige por el libro de texto. Con frecuencia los libros de texto tan sólo presentan lo que tiene que aprenderse en forma de una serie de instrucciones que el profesor hace audibles, mas no comprensibles. Las preguntas de los niños acerca del por qué o bien se ignoran (y después de un tiempo hasta los niños mismos las olvidan) o se consideran como interrupciones en la enseñanza. La introducción de nuestro tema debía hacer obvio para los niños que tenía sentido preguntar el por qué. Esto no significaba que los niños de inmediato aceptaran las ideas presentadas, sino que se había generado una nueva situación de enseñanza–aprendizaje, ya que la discusión del por qué podía tener lugar dentro del horizonte de los niños. Normalmente, cuando un profesor que sigue un texto trata de manera seria de dar razones sobre lo que los niños tienen que hacer, se mete en problemas. Una consecuencia del enfoque estructuralista en la educación matemática es que las razones subyacentes a lo que sucede en la clase sólo salen a la luz más adelante en el proceso educativo, después

de que los conceptos desarrollados obtienen una complejidad que los hace aplicables y que les da un significado fuera de su estructura lógica pura.

Creo que cualquier tipo de clasificación pública de los niños destruye su proceso de aprendizaje. Quizás este no es el caso de todos los niños, pero sí lo es para aquellos incapaces de adoptar esa actitud instrumentalista que encaja dentro de la lógica de la escuela. A los niños se les debe enseñar e involucrar en el mismo trabajo temático de una manera significativa. Tienen que actuar e interactuar con respecto al contenido mismo. No se puede tratar a algunos niños como “tontos” al darles ejercicios sencillos y, por lo tanto, insultantes. Estos requisitos implican condiciones fuertes para un enfoque temático. Debe ser posible involucrarse en el trabajo temático en diferentes niveles, pero incluso de una manera que tenga sentido en relación con el objetivo general del trabajo temático. Los niños perciben inmediatamente cuando esto sucede. En este proyecto se mostró un compromiso verdadero, aun por parte de niños que normalmente se consideraban “menos capaces”. La clasificación pública es una fuente, aunque no la única, de fatalismo personal. Tal situación hace necesario para muchos niños tratar de explicarse a sí mismos por qué no son capaces de aprender esto o aquello. Tratamos de eliminar todo tipo de clasificación pública en el trabajo temático. Esto no significa que los niños no hagan comparaciones, pero comparar sugerencias para dotar un club juvenil es bastante diferente a comparar habilidades para calcular números.

Un fenómeno que nos sorprendió fue el aumento general de las habilidades de los niños. En el tema del dinero de bolsillo tenían que sumar decimales, determinar cuántas cosas podían comprar con 10 DKr. y calcular sus ahorros. Como se mencionó, ellos no habían estudiado todavía el tema en sus libros de texto. Esta situación usualmente implicaría que el tema tendría que haberse explicado y ejercitado primero, antes de que comenzara a aplicarse. Queríamos ver qué iba a suceder. Y, ¿qué sucedió? ¡Nada! Los niños determinaron qué querían comprar, sumaron las cantidades y encontraron el monto total. Esto contrasta con las lecciones de matemáticas usuales que siguen libros de texto. Cada paso nuevo tiene que explicarse, cada nueva página. Y los niños esperan que el profesor les explique porque se supone que ellos no deberían saber qué hacer. Las matemáticas tienen que aprenderse de manera “correcta”. Pero esta idea se dejó a un lado durante el trabajo temático y las habilidades de los niños aumentaron de manera notable.

Observamos el mismo fenómeno en el caso del club juvenil. Como se dijo, usamos catálogos bastante complicados de artículos para guarderías y clubes juveniles. Temíamos una crisis de confusión de preguntas, pero, de nuevo, nada sucedió. Primero, cuando un niño ya sabe algo sobre un tema es más fácil mejorar el conocimiento y usar la intuición adecuadamente. Cuando, por ejemplo, encontraban que el precio de un balón de fútbol era 2.500 DKr., se daban cuenta de que algo andaba mal. Eran capaces de

corregir su pensamiento y, además, también querían hacerlo. En segundo lugar, la habilidad de un niño aumenta bastante cuando trata de hacer algo que en realidad desea hacer. Hay una enorme diferencia entre tener que hacer y querer hacer. Una gran energía epistémica se libera cuando el niño decide la orientación. Hubo un aumento en las habilidades de cálculo, dado que era importante llegar a determinar el costo de la dotación escogida para el club¹¹. Una condición crucial para que los niños se involucraran fue la relevancia que de hecho tenía el tema de discusión. Las introducciones a los tres subtemas se acercaron a sus intereses privados y se tomaron seriamente. Como es natural, la seriedad no siempre significa lo mismo, sino que puede haber una “seriedad divertida”. Pero la seriedad era una condición para que los niños se comprometieran con las diferentes tareas. También fue importante que las profesoras expresaran indignación frente a la desigualdad económica, por ejemplo, en el tema de la desigualdad del ingreso. No era nuestra intención hacer parecer el contenido como neutral, sino hacer visible algunos de sus aspectos políticos sensibles. Este era un intento de dar a los niños la oportunidad de situarse en el proceso de matematización.

Por lo general es idealista esperar que un proceso educativo lleve a la acción (colectiva) fuera del salón de clase, pero tratamos de desarrollar esta posibilidad al desafiar las actitudes de los niños hacia el gasto de su dinero de bolsillo y hacia la ropa de moda y, también, al posibilitar que presentaran sus sugerencias a las autoridades competentes con respecto a lo que un club juvenil debía comprar.

EL DIARIO Y LOS RESULTADOS

Una de las dos profesoras escribió un diario que plasma sus impresiones acerca de la vida del salón de clase. A continuación me permito citar fragmentos del diario.

20/3

Hablamos sobre los afiches y les “informé” que iban a recibir 10 DKr. semanales como dinero de bolsillo. Trabajaron con interés y seguridad. Sus dibujos fueron buenos. Incluso los niños con menos habilidades estaban interesados. Sentían que podían manejar la situación...

21/3

Sus sugerencias acerca de qué comprar con los ahorros fueron apabullantes: un equipo de sonido, un Ferrari... Jens-Erik quería comprar un Ferrari.

11. Este fenómeno se discute con mayor profundidad en el Capítulo 10.

- Pero, Jens-Erik, ¿no vas a poder conducirlo tu mismo!
- Cuando haya ahorrado el dinero para comprarlo, seré lo suficientemente grande para tener mi licencia de conducción.

Lars ahorró 10 DKr. cada semana y en un año un total de 499 DKr.:

- ¿Cómo llegaste a ahorrar esta cantidad?
- Lo siento, pero es que gasté 21 DKr. en dulces.

Teníamos que usar catálogos para averiguar los precios. Nadie fue al Centro Comercial ni llamó a las tiendas, excepto Kaj.

22/3

Hablamos sobre lo que querían comprar. Todavía algunos fueron poco realistas. Les pedí buscar otras opciones. Kaj no pudo conseguir la información de la tienda de radios porque no quisieron dársela. Hablamos sobre las diferencias en las calidades, sobre las razones de por qué siempre se inventan nuevas cosas. Se interesaron en escuchar las diferentes propuestas. Estuvieron callados y prestaron atención.

27/3

Comenzamos a hablar sobre los subsidios infantiles y la compra de ropa. Jens preguntó varias veces: “¿Cuándo vamos a comenzar?” Jens-Erik sabía que la intención del subsidio infantil era ayudar a los niños. Jens estaba seguro de que la razón para que hubiera subsidios de diferente valor eran las diferencias en salario.

Comenzaron a escribir lo que querían. Creo que esto puede resultar muy abstracto: “No necesito nada”. Así que les pedí que llenaran las guías de trabajo en sus casas. Tengo mucha curiosidad de saber qué van a hacer.

28/3

Lo que me temía desde ayer continuó sucediendo: “No necesito nada”... Cuando vieron los catálogos (de los diferentes centros comerciales) las cosas comenzaron a funcionar. Disfrutaron mirando los catálogos y buscando los precios. Algunos utilizaron bastante la tabla de contenidos del catálogo de la tienda por departamentos “Daells”.

29/3

Hicieron un balance de costos para no gastar más de 450 DKr. Esto no les causó ningún problema. Comenzaron a trabajar en las carteleras. Se concentraron bastante. Hicieron recortes de manera entusiasta.

30/3

Algunos tuvieron que asistir a un ensayo. Los otros continuaron cortando y pegando.

3/4

Hicimos la investigación estadística. Ellos enumeraron y yo escribí en el tablero la lista de los diferentes artículos de interés... Encontraron la forma de hacer diagramas de barras. Tuvimos problemas de espacio. Veinte niños no se pueden mover en cuatro metros cuadrados (donde estaban colocadas las carteleras) sin rozarse unos contra otros. Más tarde compararon y hablaron de manera calmada entre ellos. Me estoy cansando un poco de la organización. Esa corredera de siempre por seguir lo que hablan y mi afán por encontrar las repuestas correctas. Tal vez son muy pequeños, están muy ocupados y son muy ruidosos.

24/4

El club juvenil. Sólo empleamos diez minutos en la discusión introductoria. Estaban un poco atolondrados y necios (después de unas cortas vacaciones). La finalización de las guías de trabajo fue buena. Trabajaron de forma más concentrada y entusiasta. Fueron muy objetivos y discutieron fervientemente si tenían que comprar doce o veinte cuerdas para saltar...

Ponerse de acuerdo antes de escribir no fue fácil. Para un grupo fue imposible. No querían enfrentarse a ese problema. Pero más tarde se dieron cuenta de las ventajas de colaborar...

25/4

El trabajo con los catálogos marcha bien. Algunos niños trabajan seriamente, otros no tanto. Existe una gran diversidad. Controlar es imposible.

26/4

Comenzó la realización del balance. Todos trabajan de maneras muy diferentes, así que la introducción para cada lección es problemática. Tienen problemas en su trabajo en grupo. Usamos una calculadora —fue muy motivante.

El diario no continuó. Como se dijo antes, pretendíamos que el trabajo de los niños llevara a sugerencias más específicas para la dotación del nuevo club juvenil. La clase a la que se refería el diario no terminó escribiendo una carta a las autoridades donde se presentara la propuesta de los niños. La otra clase, por el contrario, escribió cartas a la rectora de una institución cercana a la escuela, que reúne un jardín infantil y un club juvenil. Ella nos colaboró bastante con información y apoyo en la planeación del proyecto. Las cartas fueron bastante cortas y no todos los niños escribieron una. Tales cartas no trataron el trabajo realizado; ellas adquirieron un tono personal:

Querida Vibeke:

Mirar los catálogos fue un trabajo chévere y divertido. Fue difícil ponernos de acuerdo. Alguien tuvo problemas para usar la calcula-

dora. Pero estuvo bien. Ahora tenemos que despedirnos.
Cordialmente,

Christian y Henrik

Querida Vibeke:

Creo que la pasamos bien, porque trabajamos así. Aprendimos mucho. Me parece más divertido usar la calculadora. También fue divertido mirar los catálogos para encontrar los precios.

Saludos,

Karina

Querida Vibeke:

Me parece interesante la oportunidad de usar mi cabeza. También me parece interesante mirar los catálogos.

Saludos,

Stephen

Querida Vibeke:

En nuestro grupo encontramos el tema interesante porque pudimos hacer cosas diferentes. Trabajamos en el tema de comprar ropa y del club juvenil. Creo que el trabajo sobre el club juvenil fue mejor porque me divertí mucho.

Rikke

Querida Vibeke:

Espero que estés bien. En el momento trabajamos en algo que no puede costar más de 8.000 DKr. y en lo que se tiene que comprar para un nuevo club juvenil. Tenemos un clima bueno. Hace sol y está como para caminar hasta el lago.

Cordialmente,

Marianne

Querida Vibeke:

Espero que estés OK... El clima está bueno, como para ir de paseo al lago. Fin. Cordialmente,

Lotte

Una vez más, aprendimos que es imposible predecir los resultados de un experimento de enseñanza.

EJEMPLARIDAD

Es obvio que el proyecto “Relaciones económicas en el mundo de los niños” incluye muchos aspectos, pero, ¿cuáles de estos son importantes para la educación matemática crítica? ¿Es importante que el proyecto se relacione con las experiencias cotidianas de los niños, o que la discusión tenga que ver con asuntos económicos fundamentales? ¿Qué se puede decir

de la cuarta condición del enfoque temático que requiere que el trabajo con el tema permita crear conceptos matemáticos, ideas sobre la sistematización o ideas sobre cómo y cuándo usar las matemáticas? ¿Se cumplió con la condición? Y, ¿hasta qué medida cumplir con ella es esencial para la educación crítica? No basta con que hayamos tenido la sensación de que el proyecto fue “bueno”, sino que tenemos que tratar de comprender lo que esto podría significar. También es obvio que esta no es una pregunta completamente empírica: ¿qué buscar? Además, los conceptos antes desarrollados como competencia democrática, alfabetización matemática y ciudadanía crítica, ¿cómo se relacionan con el proyecto? Tales conceptos generales no son de forma inmediata operacionales en relación con situaciones educativas particulares.

Debo restringirme a explicar una noción que nos puede ayudar a construir este puente teórico. Me refiero a la noción de *ejemplaridad* que, de hecho, tiene su origen fuera de la tendencia crítica en la educación. Este constructo es esencial en la comprensión de algunas de las fuentes de inspiración de las nociones de trabajo por proyectos y enfoque temático como elementos de la educación crítica. La ejemplaridad también se convierte en un vínculo entre consideraciones educativas generales y la práctica educativa. La idea de ejemplaridad ha hecho parte de la “metafísica” que nos hace ver “Relaciones económicas en el mundo de los niños” también como una inmersión en una comprensión más general de las características económicas de la sociedad.

En 1951, en Tübingen (Alemania), tuvo lugar una conferencia sobre la educación secundaria y superior. Una de las principales preguntas de la conferencia fue cómo llevar a cabo los objetivos de una educación general (o liberal), en una situación en la que el currículo parece expandirse sin medida y donde las nuevas áreas del conocimiento y la nueva información se añaden de manera incesante. Si toda información importante debe ponerse en manos de los estudiantes, se hace imposible cualquier exploración de preguntas y temas particulares. El peligro es obvio. Sin embargo, ¿cómo podemos evitar hacer equivaler la educación con la enseñanza superflua de una multitud de rutinas, en la que los estudiantes en verdad no se involucran? En ese tiempo, la preocupación por una educación general estaba en primer plano de la agenda de la educación alemana y el concepto de *Allgemeinbildung* adquirió un papel central.

Una posibilidad para sobrepasar el problema de la expansión del número de materias es identificar algunas estructuras básicas y, con ellas como principios guía, elaborar un currículo. De acuerdo con este estructuralismo, que entre otros fue defendido por Jerome S. Bruner, las características básicas de una materia pueden aprehenderse sin fraccionar las conexiones lógicas de la materia y convertirla en una masa de información. Este enfoque muy conocido guió, en la década de los 60, las reformas edu-

cativas generales y, junto con el bourbakismo, las reformas en la educación matemática. No obstante, un punto de vista diferente se formuló en la conferencia de Tübingen, donde se sugirió que el problema de la expansión del currículo podía solucionarse. El término ejemplaridad de hecho no se usó en la declaración oficial de la conferencia; mas la idea principal sí se aclaró: los valores culturales fundamentales pueden experimentarse y comprenderse con base en el estudio, en profundidad, de un ejemplo. Una parte importante de la educación alemana del momento estaba influida por la *Geisteswissenschaftliche Pädagogik* que concebía la educación como una introducción a los valores de las humanidades y de otros productos culturales humanos importantes. Naturalmente, las matemáticas pueden verse como una de las construcciones humanas más importantes y, por lo tanto, la educación matemática debía introducir a los estudiantes a los valores culturales integrados en esta área del conocimiento¹².

Uno de los participantes en la conferencia fue Martin Wagenschein quien, después de la conferencia, asumió un papel muy activo en el desarrollo de la idea de la ejemplaridad en la educación matemática y en las ciencias naturales. En el periodo entre las dos guerras mundiales, Wagenschein fue profesor en una escuela experimental que no organizaba la enseñanza según los horarios usuales, sino por periodos. Tal forma de organización quizás también estaba a tono con la concepción de la educación ejemplar. Wagenschein no desarrolló ninguna exposición bien elaborada de sus ideas, pero éstas se encuentran en diferentes artículos; así que su concepción de la ejemplaridad tiene que recolectarse en diversas piezas de su trabajo.

Resumiré la idea de la ejemplaridad por medio de tres supuestos epistémicos (no enumerados como tales de manera explícita por Wagenschein). Los supuestos tienen que ver con el objeto epistémico, la relación entre el objeto de conocimiento y el sujeto y, finalmente, el sujeto epistémico. En primer lugar, la tesis sobre el objeto epistémico o de conocimiento se basa en la idea de que un fenómeno específico puede reflejar una totalidad. Esta idea condensa una visión holística donde la totalidad de la complejidad puede estar presente en cualquier aspecto de tal complejidad. Wagenschein ejemplificó esto de diferentes maneras: una característica fundamental de la historia de la humanidad puede estar presente en un evento histórico aislado; un fenómeno natural particular puede comprender un conjunto completo de fenómenos naturales; y una sola demostración matemática puede abarcar un sistema rico de demostraciones matemáticas. Wagenschein enfatizó que los fenómenos individuales no son un paso hacia la totalidad, sino un espejo de la totalidad¹³.

La segunda tesis tiene que ver con la relación entre el objeto de conocimiento y el sujeto cognoscente. Postula que es posible llegar a comprender

12. Wittenberg (1963) presenta una de las obras más interesantes en este contexto.

la complejidad en su totalidad al concentrarse en un aspecto particular. No sólo es posible que el fenómeno individual pueda ser un espejo de la totalidad, sino que es posible para el sujeto cognoscente aprehender la totalidad al concentrarse en la singularidad. Una comprensión profunda de la historia de la humanidad puede obtenerse por medio del estudio minucioso de un evento específico. Lo general puede comprenderse a través de lo particular¹⁴. Wagenschein enfatizó que la idea de ejemplaridad se opone a la especialización; no busca simplificaciones sino busca la complejidad en lo particular. El ejemplificó esta tesis en repetidas ocasiones cuando, por ejemplo, trató de mostrar cómo la geometría euclidiana puede desarrollarse con base en una única demostración. Trató de demostrar que al concentrarse en el teorema de Pitágoras, los estudiantes pueden obtener una comprensión global de la geometría¹⁵. Wagenschein no cree que si los estudiantes trabajan sólo con el teorema de Pitágoras se vayan a aislar y vayan a encasillarse; por el contrario, una pregunta muy bien seleccionada puede ser la entrada a una materia entera y, ganar profundidad en un área del conocimiento determinada significa establecer contacto con otras materias y con los principios generales de la ciencia. Para Wagenschein, la interdisciplinariedad es el resultado de una absorción que comienza con una pregunta particular, pero que incita a la apertura.

La tercera tesis sobre el sujeto epistémico formula que es posible para un sujeto en su totalidad dejarse atrapar, sorprender y absorber por una cuestión específica y, además, comprometerse por completo con el proceso de “llegar a conocer”. Por lo tanto, la educación, basada en el principio de la ejemplaridad, debe despertar la curiosidad de los estudiantes y debe surgir de preguntas y problemas introductorios dirigidos hacia la aprehensión interdisciplinaria de los valores de la humanidad. Con estas formulaciones Wagenschein reveló su adhesión al romanticismo dominante en gran parte de la cultura germana.

Las tres tesis reúnen el principio de ejemplaridad. Un ejemplo específico puede convertirse en el puente entre el sujeto epistémico y el objeto. Esta conjetura educativa no se basa en evidencia empírica de ninguna manera tradicional, pero sí se basa en las interpretaciones de Wagenschein sobre sus propias experiencias. La ventaja de la noción de ejemplaridad es que se ubica entre las situaciones concretas de la práctica educativa y las interpretaciones filosóficas de la realidad, el conocimiento y la persona.

13. Ver Wagenschein (1965, p. 300). Puede ser atractivo comparar esto con los postulados de G. W. Leibniz, quien sostuvo que la mónada individual (el “átomo” en la metafísica de Leibniz) contiene en sí misma la complejidad del mundo.

14. Ver Wagenschein (1965, p. 301).

15. Para el desarrollo de las ideas del teorema de Pitágoras como base de la geometría, ver *Das exemplarische lehren als fächerverbindendes prinzip* [El aprendizaje ejemplar como principio para un currículo integrado] en Wagenschein (1965).

Oskar Negt desarrolló aun más esta idea de ejemplaridad pero en un contexto diferente. Negt se interesó en la educación vocacional y en *Soziologische Phantasie und exemplarisches Lernen* [Fantasía sociológica y aprendizaje ejemplar] trató de reevaluar algunas de las ideas de la ejemplaridad y de relacionarlas con el concepto de imaginación sociológica acuñado por el antropólogo C. Wright Mills. Sin embargo, la inspiración que Negt obtuvo de la Teoría Crítica de Adorno resultó ser más fundamental. Adorno nunca trató de expresar ninguna consecuencia educativa específica de su crítica a la educación, sino que restringió su actividad crítica a la interpretación filosófica del término. A través de su dialéctica negativa, reveló las discrepancias entre el contenido conceptual y la realidad educativa, pero nunca trató de articular ninguna realidad idealizada. Por lo tanto, no estableció ningunos objetivos para la educación crítica —y tampoco era su intención hacerlo. No obstante, Negt se acerca más a la práctica educativa.

No trataré de enunciar de nuevo las ideas de Negt, sino sólo indicaré cómo la reformulación de las tesis de la ejemplaridad puede ofrecer inspiración para una educación crítica. La primera tesis sostiene que un fenómeno particular puede ser el espejo de una complejidad total. Esta tesis puede tener una interpretación sociológica que significa que un evento sociopolítico individual (por ejemplo un incidente en un lugar de trabajo) puede reflejar una totalidad política. Esto se puede formular en términos marxistas, como lo hizo Negt, diciendo que la estructura de una economía del capital se convierte en una condición básica para la vida del individuo. La totalidad no necesita definirse, como lo hizo Wagenschein, como algo exento de cualquier tipo de conflicto o crisis cultural para presentarse como algo halagüeño, sino que puede interpretarse como una controversia cotidiana. La ejemplaridad puede reformularse y entonces referirse a las características críticas de la sociedad.

Al reformular la siguiente tesis encontramos que es posible comprender una complejidad social al concentrarnos en un evento particular. Esto tiene bastante sentido en la educación vocacional que ayuda a los trabajadores a conocer y comprender su propia situación política. Para lograr esto no es necesario enseñarles una serie de hechos básicos; en cambio, una educación que tenga tal objetivo puede comenzar por lo particular, es decir, que puede iniciar como una discusión que de hecho sucede en el lugar de trabajo. Esto no significa limitar las posibilidades para conocer las características básicas de la sociedad. La situación particular revela las estructuras generales y éstas pueden comprenderse al concentrarse en lo particular. Este punto muestra cómo Negt relaciona ejemplaridad con imaginación social en el título de su libro. Aquí hallamos las raíces epistémicas de la idea de concentrarse en la situación de los estudiantes como la base de lo que se aprende. (Es obvio que Freire basó su enfoque en una idea similar, pero sin usar la terminología de la ejemplaridad.)

La última tesis es más difícil de reformular, pero puede relacionarse con la convicción de que el objetivo de la educación no sólo es transferir información sino también involucrar a los trabajadores en tratar de mejorar su propia situación. La educación de los trabajadores también se convierte en una actividad política, según Negt, y el primer movimiento fuerte de educación progresista a finales de los años 60 generalizó esta idea. La imaginación social se orienta hacia lo que puede resultar de la transformación de la realidad social actual. Así la educación adquiere una perspectiva política. Podemos usar la tercera tesis como un recordatorio para tomar en cuenta la dimensión subjetiva de la educación.

La radicalización que Negt hace de la ejemplaridad puede llevarse no sólo a la educación vocacional de adultos, sino a la educación en general. No es difícil ubicar esta generalización en palabras de cajón como orientación por problemas, trabajo por proyectos y tematización —pero, ¿por qué orientación por problemas? Porque un problema específico puede ser el punto de entrada a una complejidad; una totalidad puede hacerse comprensible a través del estudio intensivo de un problema central. El trabajo por proyectos se convierte en una posibilidad cuando el currículo de la educación no está delimitado por una secuencia de piezas de información identificadas lógicamente. La tematización incluso se convierte en otra forma de organización educativa, que no parte el tiempo de estudio en diferentes materias, sino que lo organiza de acuerdo con temas¹⁶. Es posible mirar las ideas conectadas con la ejemplaridad como una forma de especificar lo que puede ser el significado educativo de *Mündigkeit*. La reconstrucción de la ejemplaridad muestra que este término tomado del vocabulario de Adorno se relaciona con el concepto de imaginación social.

Al mirar en forma retrospectiva los lineamientos fijados inicialmente para identificar el contenido de un enfoque temático, encontramos que la idea de ejemplaridad se expresa en ellos, aunque no de manera explícita. Cuando ubicamos dentro de círculos concéntricos los niños en el proyecto “Relaciones económicas en el mundo de los niños”, vemos la influencia del pensamiento ejemplar. El dinero de bolsillo, los subsidios infantiles y el dinero para la dotación del club juvenil, todos tienen que ver con las estructuras económicas que circundan a los niños; y una razón para escoger tales “círculos” fue la idea de que es importante para ellos aprender algo acerca de su posición en la sociedad. De esta manera, el aspecto de ejemplaridad, como lo interpretó Negt, se hizo presente. No obstante, no se prestó mucha atención al aspecto de ejemplaridad como lo interpretó Wagenschein. La posibilidad de que a través de un ejemplo específico podamos ser capaces de adentrarnos en profundidad en los asuntos matemáticos no se exploró

16. Los enfoques temáticos y el trabajo por proyectos también han sido desarrollados sin ninguna preconcepción basada en la educación crítica.

durante el proyecto. De hecho, la concepción de ejemplaridad, como la desarrolló Negt y como en gran medida se ha adoptado en la educación crítica, indica que las ideas originales de Wagenschein no son importantes. La educación crítica debe preocuparse por el imaginario social y una visión tradicional de la competencia matemática parece no relacionarse con este término. Esta es una de las razones por las cuales el desarrollo de la educación matemática crítica se dejó a un lado en la corriente principal de la educación crítica.

Tan sólo una conexión débil entre las teorías educativas generales y la práctica educativa puede ubicarse con la noción de ejemplaridad. Lo que se ha dicho sobre el poder formativo de las matemáticas, las matemáticas como parte de la tecnología, la competencia democrática y las condiciones para una ciudadanía crítica todavía pertenece a las partes nubladas de esta investigación. Sin embargo, el término ejemplaridad ha sido el primer paso para posibilitar el hallazgo de un camino que una el concepto de *Mündigkeit* y el salón de clase.

CAPÍTULO 5

“LA CONEJERA” Y “CONSTRUCCIONES”

La Escuela Independiente de Aalborg es una pequeña institución privada fundada en 1981 con el ánimo de poner en práctica algunas de las ideas pedagógicas más progresistas que se habían discutido en Dinamarca desde comienzos de los años 70, pero que también habían tenido dificultades para ponerse en marcha en escuelas grandes donde se realizaba la educación corriente. En dicha escuela se obtuvo mucha experiencia en la organización del trabajo por proyectos, tanto en pequeña como en gran escala y en diferentes niveles. No obstante, sólo una materia nunca se había integrado a los rasgos de este trabajo interdisciplinario de forma considerable: matemáticas. Se había pensado que era muy difícil incorporar esta materia en el verdadero trabajo por proyectos, de tal manera que la enseñanza de las matemáticas seguía los libros de texto ordinarios. Mientras las otras áreas se organizaban en trabajo por proyectos y con enfoques temáticos y la enseñanza se convertía en una verdadera empresa interdisciplinaria, el área de matemáticas se mantenía a distancia, como un observador reservado.

Uno de los propósitos de los dos proyectos (“La Conejera” y “Construcciones”) desarrollados recientemente en la escuela era crear un contexto educativo amplio, rico en posibilidades para la realización de actividades, para el trabajo cooperativo entre los niños y para la generación de espacios donde los niños decidieran acerca de sus propias tareas, y — como algo novedoso dentro de esa riqueza — para el desarrollo de las matemáticas. El objetivo principal no era concretar las matemáticas sino ver de qué manera se podían desarrollar a partir de un contexto amplio que requiriera su uso. Si las matemáticas están presentes en todos lados en las situaciones cotidianas, entonces no sería necesario crear ninguna concretización artificial. En cambio, deberían crearse situaciones abiertas donde ellas pudieran florecer. El enfoque en la planeación de “La Conejera” y “Construcciones” era usar la vasta experiencia del grupo de profesores de la escuela para organizar el trabajo por proyectos.

Después de describir estos dos proyectos trataré de prestar atención a dos nociones que pueden ser útiles para un análisis posterior de situaciones educativas, con miras a esclarecer algunas de las características que puedan ser relevantes para la educación matemática crítica. Los proyectos incorporan algunas de estas prioridades educativas que la experiencia amplia en la planeación del trabajo por proyectos en la escuela primaria y secundaria ya

ha sacado a la luz. En este sentido, los dos proyectos ilustran y actualizan la experiencia práctica en educación progresista que se ha desarrollado en Dinamarca y creo que tal experiencia es importante para un análisis más profundo de la educación matemática crítica.

Los niños involucrados en los proyectos tenían entre 10 y 12 años de edad. Los proyectos integraron cerca de 45 niños de tres clases diferentes, lo cual implicó que las diferencias de edades entre los niños fueran mayores de lo que sucede en una situación de enseñanza normal. En el grupo había “habilidades mixtas”, i.e., no se había hecho una selección ni agrupación previas. “La Conejera” y “Construcciones” se realizaron de forma consecutiva durante un periodo de dos meses y medio en total, con una interrupción de una semana para vacaciones y un periodo de dos semanas para una enseñanza organizada de manera más tradicional. Se utilizó un tiempo de doce horas por semana para los proyectos y durante el resto del tiempo los niños tenían sus lecciones normales. Los profesores involucrados fueron Jens Jørgen Andersen, Ole Dyhr y Thue Ørberg. Andreas Reinholdt, del Seminario de Formación de Profesores de Aalborg también estuvo involucrado y coordinó la participación de estudiantes de esta institución.

OPINIONES SOBRE LAS MATEMÁTICAS

Antes de iniciar los proyectos se entrevistó a algunos de los niños¹. La intención de las entrevistas no era tratar de poner a prueba ninguna tesis preformulada ni específica acerca de las percepciones de los niños sobre las matemáticas, sino simplemente recoger algunas impresiones de las opiniones y emociones de los niños sobre la materia. La intención también era darles una oportunidad para expresar sus visiones acerca de las matemáticas. Se esperaba que mostrar un interés por sus opiniones ayudaría a cambiar sus visiones acerca de su propia posición en el salón de clase de matemáticas, de ser unos receptores de información a ser unos participantes cuyas opiniones vale la pena escuchar.

Todas las entrevistas siguieron el mismo patrón general. Primero se les daba a los niños la oportunidad de expresar sus opiniones generales acerca de las matemáticas. Después seguían unas preguntas sobre cómo veían las matemáticas en la sociedad, que comenzaban con una pregunta acerca de las matemáticas y la ingeniería y, por medio de preguntas relacionadas con las labores de las granjas, se les preguntaba acerca de los trabajos de sus padres y también si sabían si sus padres usaban las matemáticas. Esta sección de las entrevistas concluía preguntándoles si conectaban las matemáticas con algo de su propio futuro. Las entrevistas eran abiertas y podían tomar direcciones variadas, lo cual de hecho sucedió. También se tocó en

1. Thue Ørberg realizó las entrevistas.

las entrevistas la *ideología de lo falso-verdadero*, tan difundida en matemáticas, que establece que cualquier problema formulado en términos matemáticos tiene una y una sola respuesta correcta.

En general, los niños tenían la fuerte sospecha de que alguien de hecho usaba las matemáticas, pero fue obvio que ninguno de ellos nunca había percibido cuándo un adulto las empleaba en su trabajo o en su vida privada. Usualmente los niños estaban seguros de que un ingeniero tiene que usar las matemáticas para diseñar algo como un puente, pero cuando se les preguntaba sobre los posibles usos que un granjero podía darles, no mostraban estar seguros. Dos de los niños sugirieron la idea de que algún granjero podía utilizarlas cuando quería hacer algo parecido a la labor del ingeniero. Dieron la misma respuesta cuando se les preguntó si pensaban que iban a utilizar las matemáticas en su vida profesional o privada futura.

Las matemáticas no se perciben como una herramienta importante sino como un cierto tipo de juego que tiene que jugarse de acuerdo con ciertos parámetros y que uno puede decidir tomar de forma más o menos deliberada. Para los niños, la aplicación real de las matemáticas fuera de la práctica en la escuela es un fenómeno misterioso —ellos nunca habían presenciado tal actividad. E incluso si habían visto actividades matemáticas, no eran capaces de reconocerlas como tal. No saben qué es lo que tienen que buscar; sin embargo, comparten la opinión de que matemáticas es una materia importante. Dado que nunca han visto las matemáticas en uso, les fue difícil expresar ideas más específicas sobre ese fenómeno. Normalmente ayudar a desarrollar un lenguaje sobre las matemáticas no hace parte de la educación matemática. Las consideraciones sobre este metanivel se ignoran. No obstante, como lo indican las entrevistas, los niños tienen algunas ideas sobre las matemáticas, pero no tienen suficientes oportunidades de modificarlas o desarrollarlas como parte de su formación matemática.

El entrevistador también preguntó si un problema matemático siempre tiene una y sólo una respuesta correcta o si es posible algunas veces encontrar diferentes respuestas, todas ellas correctas. Las respuestas de los niños con respecto a la última posibilidad fueron definitivas: “No, nunca he visto eso”; “...no, no puedo recordar tal situación”. La ideología de lo falso-verdadero es bastante aceptada y, por lo tanto, los niños no pueden ver la comunicación en el salón de clase como algo esencial en el desarrollo de ideas y de una comprensión. En tanto esta ideología domine, los niños no necesitan prestar atención especial a los aspectos comunicativos del salón de clase de matemáticas —primordialmente, la comunicación se vuelve significativa si es difícil para los niños encontrar una solución a un problema. La comunicación se vuelve un medio de control.

Como es natural, estas entrevistas ofrecieron tan sólo un conocimiento superficial de la evidencia empírica sobre las metaconcepciones de los niños sobre las matemáticas. No obstante pueden servir para ilustrar dos

tesis acerca de ellas. La primera tiene que ver con la posición social de las matemáticas. Las entrevistas indican que ésta es invisible e incomprensible para los niños en general. Para ellos es difícil expresar ideas sobre la posición de las matemáticas y sobre el uso que de hecho se les da. Es difícil también identificar las matemáticas en las situaciones prácticas y en el trabajo. Es importante relacionar la idea de la invisibilidad de las matemáticas con los supuestos sobre su poder formativo ya que, si ambos supuestos son correctos, presenciamos una situación desafiante y crítica para la educación matemática. Este conflicto se ha formulado como la *paradoja de la relevancia*: de un lado, las matemáticas tienen una influencia social penetrante y omnipresente y, por el otro lado, los estudiantes y los niños son incapaces de reconocer esta relevancia². La segunda tesis ilustrada por las entrevistas es que los niños tienen una perspectiva absolutista de las matemáticas. Un problema matemático se relaciona con una y sólo una respuesta correcta. Que esta metaconcepción pueda ser errónea no tiene nada que ver en especial con el surgimiento en la filosofía de las matemáticas del cuasiempirismo o con una tendencia escepticista y falibilista, que revelan el absolutismo clásico como una problemática. El absolutismo de los niños puede tener que ver no sólo con la confiabilidad de las matemáticas puras sino también de las aplicaciones de las matemáticas, lo cual le atribuye un carácter de infalibilidad a la solución de problemas reales cuando se han empleado herramientas matemáticas. Esta forma extendida de absolutismo es un problem real en la educación (aun si se considera que el cuasiempirismo estuviese equivocado).

El hecho de que los niños tengan gran dificultad para identificar cualquier uso de las matemáticas fuera del salón de clase también tiene una implicación para la motivación potencial de los niños. Algunas veces la motivación general se basa en la posibilidad de que un niño pueda verse en una situación específica y atractiva en la vida posterior; pero este tipo de motivación es casi imposible de desarrollar en la educación matemática. Las dificultades para identificar las matemáticas en uso también tienen una consecuencia en la aplicación de la idea de ejemplaridad, como se entiende en términos de Negt. Hasta cierto punto, se presupone que podría ser posible captar la perspectiva sociológica general a partir de un ejemplo específico. Esto significa que las nociones originales de la ejemplaridad en la educación presuponen algún tipo de transparencia. Sería posible, según Negt, relacionar una tarea específica en el proceso educativo con los problemas sociales generales. Pero este supuesto de la transparencia se pone en duda cuando las matemáticas entran en el juego.

2. Esta paradoja ha sido enunciada de manera explícita por Mogens Niss.

“LA CONEJERA”

Cerca de la Escuela Independiente de Aalborg hay un pequeño parque natural llamado La Conejera. Este fue el centro del primer trabajo temático. El proyecto se dividió en unidades diferentes, de distinta duración, ya que cada unidad podía variar desde casi una hora hasta casi una semana. El proyecto se planeó, en primera medida, para involucrar arte creativo y diseño en su primera etapa; después, gracias a la biología, podía dirigirse hacia las matemáticas que se concibió como el “tema emergente”. La presentación que sigue parece muy bien organizada, pero ese no fue precisamente el caso —como es natural hubo mucha confusión y también algunas interrupciones. La descripción a continuación sólo presenta un bosquejo de las directrices del proyecto.

Unidad 1

Una breve charla sobre el parque introdujo el proyecto. La Conejera no es un terreno muy interesante, pero ¿qué podría transformarlo en una área fascinante, en una zona que los niños desearan tener en el vecindario de la escuela? Algunas de las ideas que surgieron fueron convertirlo en un bosque y, por qué no, de palmas; o en una arboleda de frutales como manzanos, peros y ciruelos; o en un césped apropiado para jugar fútbol; o en una especie de jungla con lianas colgando de los árboles. También podría convertirse en un pantano —el agua siempre es atractiva para los niños— o en una cueva. O podría ser una playa y, por qué no, convertirlo en un verdadero centro recreativo que, como es natural, tuviera un tobogán.

Una idea importante de esta introducción era liberar la imaginación de los niños de cualquier tipo de restricción práctica. El asunto no era proponer una alternativa realista (que considerara, por ejemplo, la falta de dinero de las autoridades o distintas normas y regulaciones), sino crear un espacio libre para que floreciera la fantasía. Hubo un gran entusiasmo pero, al mismo tiempo, fue difícil para los niños mantenerse dentro de la dirección del proyecto en su globalidad.

Unidad 2

Durante esta unidad los niños tenían que trabajar en parejas para construir un paisaje fantástico. Cada grupo recibió una cartulina y sobre ella construyeron un escenario utilizando recortes de revistas, papel brillante, pedazos de tela, etc., y cantidades alarmantes de pegante, por supuesto. Para muchos estudiantes fue difícil realizar la tarea: ¿qué significa hacer un paisaje fantástico? Esta unidad duró dos días y cuando se terminó, las diferentes sugerencias se unieron y se colocaron formando una sola imagen en la pared del salón. Las diferentes carteleras parecían de verdad unirse en un paisaje de aventura.

Unidad 3

Algunos animales se iban a colocar en ese “territorio”, así que los niños recibieron un nuevo trozo de cartulina que tenía dibujados dos óvalos que representaban el patrón básico del cuerpo de un animal. Y usando esto como un comienzo, crearon sus propios animales. Los óvalos se pintaron para motivar un inicio, pero de inmediato los niños preguntaron: “¿se deben colorear?, ¿los podemos cubrir con la piel de ese vestido viejo?” (los niños contaban con cantidades de trapos viejos y chatarra). Recortaron los animales de la cartulina y los ubicaron en el paisaje.

Al principio algunos de los niños perdieron la concentración: “¿qué va a resultar de todo esto?” Entonces, empezaron a surgir y a tomar forma las historias sobre los animales: “una mañana, cuando el dragón Omaplixila volaba para encontrar algún pantano y algo de musgo, se chocó con un Okiko que reposaba sobre un árbol...”. Los niños hicieron sugerencias sobre cómo continuar las historias. También se hizo obvio, tan sólo con mirar el paisaje de retazos en la pared, que los animales iban a interactuar.

Unidad 4

Se entregó un cuestionario a los niños que contenía preguntas sobre los animales inventados: ¿qué tan grande son?, ¿qué altura tienen?, ¿cuánto pesan?, ¿qué tan fuertes son?, ¿qué comen y en qué cantidad?, ¿son carnívoros o herbívoros?, ¿viven en los árboles o en los pantanos?, ¿pueden nadar?, ¿tienen alas?, ¿qué tan rápido pueden volar? Para muchos niños el primer paso para responder era difícil pues se preguntaban dónde poder encontrar una respuesta. Pero después las cosas cambiaron: “Si los animales de Hanne y Peter pueden volar con una velocidad de *tanto*, ¿los nuestros deben poder hacerlo con mínimo una velocidad de *tanto más*! Además, ¿comen el doble que esos!”. Se colocó toda la información en los cuestionarios y se tomaron fotocopias mostrando cada animal y su correspondiente información. Esto facilitó buscar la información cuando se necesitara³.

Unidad 5

Los niños trabajaron en grupos para escribir historias sobre sus animales. La idea original era que cada grupo escribiera una historia en conjunto, pero algunos niños prefirieron hacer su versión individual. Cuando se terminaron las historias, ellos tuvieron la oportunidad de hacer una edición “profesional” utilizando un procesador de palabra y disfrutaron mucho ver sus historias impresas. Todas se reunieron en un libro pequeño y cada niño recibió una copia.

3. El conjunto de información era tan rico y complejo que todos los conceptos de estadística que se introducen en la escuela primaria y secundaria en Dinamarca podrían usarse si se quisiera estructurar e investigar en detalle las tales cifras.

Unidad 6

Se invitó a la escuela un consejero de las autoridades locales en el tema del medio ambiente; les habló a los niños sobre su trabajo y con ellos visitó el parque. Allí les explicó el significado de ser considerados con el medio ambiente y los niños aprendieron sobre la complejidad de la naturaleza y la riqueza de la vida “microscópica” del área. Algunos prestaron más atención, mientras que otros encontraron distracciones menores. En La Conejera hay un pequeño lago al que es fácil arrojar piedras y palos. Entre algunos de los varones se presentó el habitual forcejeo y juego que los llevaba a dar un paso cada vez más cercano (y peligroso) al borde del agua.

Unidad 7

Después se dividió la clase en dos grandes grupos, uno que se encargaría de observar la vida en el laguito de La Conejera y otro que investigaría el campo. La escuela logró prestar varios instrumentos para el trabajo: binóculos, pipetas, salabardos, un medidor de pH, un medidor de oxígeno, etc. Los niños debían atrapar la mayor cantidad posible de insectos diferentes. Cada vez que atrapaban uno, debían llenar una guía con diferentes detalles sobre el insecto para poder determinar su nombre. Un gran diagrama dibujado en un material impermeable permitió a los niños encontrar el nombre de la mayoría de los insectos. Tenían que seguir el diagrama de árbol y contestar diferentes preguntas como ¿cuántas patas tiene el insecto?, ¿tiene alas?. Al final de la rama podían encontrar su nombre.

Unidad 8

También se les dio un nuevo cuestionario con la misma estructura del que se empleó cuando se recolectó la información acerca del parque de aventuras. Tenían que llenar el formulario: primero, escribir el nombre del insecto y, luego, completar otros trozos de la información como, por ejemplo, si habían encontrado al insecto en el lago, en su superficie o en el fondo. El cuestionario pedía dos tipos de información. Una, lo que era posible ver (número de patas, etc.) y, otra, lo que es posible encontrar en libros de biología. Había una colección de libros disponibles en el salón de clase. Una parte del cuestionario se podía llenar durante el trabajo de campo, aunque a veces el viento hiciera volar los papeles por el aire.

Algunos de los niños volvían a la escuela con las medias mojadas. Parecía que cada lago tenía que pasar la prueba de cuánto se podía caminar hacia su interior antes de que el agua se comenzara a entrar por encima de las botas de caucho.

Unidad 9

Esta unidad consistió en una visita al zoológico de Aalborg, cuyo propósito esencial era conocer acerca de la vida de los ratones y su comportamiento.

En ese momento había una exposición especial al respecto en el zoológico y ese pequeño animal resultaba ser también uno de los habitantes de La Conejera.

Unidad 10

En esta unidad bastante larga se tabularon los números de todo el material e información recolectados. Había computadores disponibles para que los niños almacenaran la información. También tenían que hacer diagramas del lago e indicar las diferentes áreas de hábitat de los animales e insectos. A partir de este trabajo se podían producir muchos diagramas y estadísticas y los niños habían visto la razón de la manipulación estadística al haber estado involucrados en la tarea de recolección de datos.

Una experiencia importante para los niños fue ver la relevancia de tener la información en un computador. Fue posible preguntar cosas como: ¿cuántos insectos que viven en la superficie del lago encontramos?, ¿cuántos en el fondo? y ¿cuántos en el medio? Una aclaración de esas preguntas podía hacer surgir una nueva: ¿esos números nos dicen algo acerca de la calidad del agua del lago?

Unidad 11

Paralelamente con el trabajo de organización de la información, los niños produjeron pequeñas historias sobre un habitante de La Conejera. Los cuentos comenzaban con algo como “Soy una mosquita de agua que vive...” Los niños debían identificarse con uno de los animales y tenían que narrar el mundo desde esa perspectiva.

Unidad 12

El proyecto terminó volviendo a las preguntas iniciales pero ahora ubicadas dentro de un contexto realista. ¿Qué se podría hacer en La Conejera para convertirla en un área atractiva?

“CONSTRUCCIONES”

Las matemáticas no dominaron de ninguna manera en “La Conejera” a pesar de que, como se mencionó, la intención era hacer que las matemáticas surgieran de la riqueza y apertura de la organización educativa. En “Construcciones” se planeó que las matemáticas tuvieran un papel más crucial. Las matemáticas se pueden usar de varias maneras; incluso simultáneamente con otros medios de descripción. En “La Conejera” se creó una situación que permitía el uso de diversas formas de descripción; en “Construcciones”, no obstante, se previó el uso de las matemáticas como herramienta de diseño. Existe una diferencia en el uso de las matemáticas en el caso en que se haya recolectado un conjunto de información y se quieran usar las matemáticas para tratar de ilustrar algunas relaciones o correlacio-

nes, en comparación con el caso en que se esté tratando de realizar algún tipo de construcción. El segundo proyecto intentó mirar las matemáticas desde este punto de vista constructivo⁴. “Construcciones” no siguió los lineamientos del enfoque temático, sino que se organizó como una serie de talleres. Debía haber rotación, de taller a taller, entre los niños que conformaban un grupo.

El día antes de que el proyecto comenzara hubo una reunión con los padres de familia. Esto quiere decir que desde el puro comienzo los padres tuvieron una idea precisa sobre qué era el proyecto y qué involucraba. Los talleres tuvieron lugar en el gran salón de la escuela y los padres tuvieron la oportunidad de probarlos.

Taller 1

La tarea de este taller consistía en hacer una construcción con un Lego. También era posible utilizar Lego-Técnico, un sistema más avanzado que permite hacer conexiones con un computador y otros instrumentos de dirección. Primero los niños debían realizar una construcción determinada siguiendo estrictamente un plano. Después podían hacer experimentos y realizar sus propias construcciones. Sin embargo, terminar la construcción guiada tomó más tiempo de lo esperado. Algunos varones tan sólo comenzaban a construir cosas y a jugar con el Lego, mientras que las niñas trataban de manera más cuidadosa de terminar la tarea de hacer la construcción indicada.

Bastantes matemáticas se involucran en tal práctica de construcción: contar, tener en cuenta las proporciones, medir, etc. Dado que un plano es bidimensional y la construcción real es tridimensional, se dieron muchos razonamientos del tipo “si — entonces”: si ese es “doble” y ese está cubierto con el “triple” rojo, entonces tenemos que usar dos de ese primer tipo para poder..., etc.

Taller 2

Había computadores disponibles en este taller y los niños trabajaron en parejas. Se les pidió hacer un experimento utilizando una versión danesa de LOGO. La primera tarea consistió en controlar los movimientos del ratón que aparecía en la pantalla. Después debían darle órdenes al ratón escribiendo pequeños programas. Después el trabajo iba avanzando. Los niños se concentraron en cosas diferentes: algunos calcularon de manera cuidadosa el ángulo con el que debía hacerse girar al ratón de la pantalla y la distancia que tenía que moverse para dibujar un patrón determinado; mientras que otros estaban felices de usar la información y las ideas que podían espiar de sus amigos.

4. Con algunas excepciones, como por ejemplo en el Taller 5 que tiene que ver con mediciones.

En este taller también fue posible observar la diferencia entre las actitudes de los varones y las niñas. Mientras que los primeros tendían a precipitarse hacia tareas más complejas e interesantes sin preocuparse por el trabajo más rutinario, las niñas eran con frecuencia más cuidadosas en primero tratar de manejar las habilidades básicas, lo cual implicaba que cuando llegaban a las tareas más retantes, tenían una ventaja. También fue interesante percibir la ambivalencia de los niños en general cuando algún otro grupo usaba una de sus ideas: se sentían un poco halagados por el hecho, pero al mismo tiempo consideraban la idea como una propiedad privada: “¡...es nuestra idea, no la pueden tomar!”

Una de las observaciones más importantes e interesantes fue que el cálculo explícito de los ángulos y las distancias se hizo por lo general cuando algo funcionaba incorrectamente en la manera intuitiva de aproximarse al problema. Los errores pueden verse como una motivación fuerte para usar de manera explícita las matemáticas. Los cálculos explícitos fueron la consecuencia de la insuficiencia de las ideas intuitivas. Las matemáticas se convirtieron en el lenguaje para discutir la naturaleza de los errores.

Taller 3

Este taller propuso realizar construcciones con palillos de 15 cm. de largo y 1 mm. de diámetro. La primera tarea fue construir lo que se quisiera y se podían cortar los palillos como fuese necesario. Después se les pidió construir un diamante formado por triángulos. Y por último construir un cubo. De manera inmediata los niños se dieron cuenta de la necesidad de algo para sujetar los palillos cuando las construcciones no contenían triángulos.

Después de la construcción del cubo tuvieron la oportunidad de construir lo que desearan y, por azar, surgió entre los grupos la idea de construir un avión cubriendo con un papel muy delgado, un esqueleto formado con los palillos. Se inició una competencia por elaborar el mejor avión. Se probaron los aviones no sólo en el salón, sino también fuera de la escuela. Esto dio un poco más de espacio en el salón lleno de estudiantes. Uno de los niños que no había sido muy exitoso en las lecciones normales construyó uno de los mejores aviones. Esto le dio mucho prestigio, del cual supo apropiarse durante el resto de la semana.

Taller 4

La tarea más importante de este taller era construir una cometa usando un dibujo de un modelo. El principal objetivo del taller era aprender a interpretar tal dibujo. Cuando terminaron, los niños probaron las cometas. Esto también ayudó a reducir la “densidad” de población del salón.

Taller 5

Este taller tenía que ver con mediciones. Se les asignó diferentes tareas: mídete a tí mismo y halla tu estatura, la medida de tu muñeca, cintura, tobi-

llo, etc. Después tenían que medir distintos objetos de la escuela como la puerta, la ventana, la mesa, etc. Por último debían medir diferentes distancias dentro de la ciudad utilizando un mapa. Un niño mostró especial interés en este taller y ayudó a los otros grupos a realizar las mediciones.

Taller 6

En este taller los niños tenían que cortar diferentes formas geométricas de un bloque de espuma de alta densidad. La primera tarea era cortar una caja y contar los lados, las caras y los vértices. Luego, cortar la caja partiendo de uno de sus vértices y contar el número de lados, caras y vértices del nuevo bloque; y así continuaba la actividad. La siguiente tarea consistía en cortar un cubo y dividirlo en dos objetos “triangulares”. Esta acción también estaba acompañada de preguntas. Una de las tareas era hacer una caja de la misma forma de las de los chocolates Toblerone y encontrar la medida de los ángulos —y muchas otras tareas similares.

Cortar figuras a partir de bloques de espuma fue una tarea un poco difícil de manejar. El alambre caliente que se utilizó para cortar el material con frecuencia se rompía; así que la labor principal del profesor se convirtió en reemplazar el alambre mientras que los niños perdían la concentración e interés.

Taller 7

Este taller también involucró construcciones con los mismos palillos del taller 3, pero esta vez eran más grandes pues medían 50 cm. de largo y 1 cm. de diámetro. Después de varias tareas, los niños debían construir un puente que abarcara un tramo de mínimo 1 m. Los niños tomaron ideas de una fotografía de un puente para trenes y captaron el principio básico de que los extremos del puente debían hacerse con triángulos. Se puso a prueba la estabilidad de la construcción al colgar un balde de la mitad del puente y llenarlo con agua hasta que pareciera que el puente alcanzaba su punto de máxima resistencia. La cantidad de agua se tomó entonces como la medida de resistencia del puente. Como era de esperarse, surgió de inmediato la competencia por hacer el puente más fuerte. Y por supuesto, algunos puentes de repente “no ganaron”.

La intención original era generar una competencia por hacer el puente más largo; pero esta idea se cambió por el proyecto conjunto de construir una torre. Como parte del proyecto “Construcciones”, los niños habían visitado la (conocida) torre de Aalborg, que es una construcción de acero. Como no todos los puentes se habían derrumbado durante la prueba del balde, y algunos podían incluso repararse, se podía disponer de una cantidad suficiente de puentes como para construir una torre. Esta fue la última espectacular empresa del proyecto. Se hizo una torre compuesta de varios puentes de un metro de largo, que alcanzó una altura considerable. Se ins-

taló en ella un ascensor que se había construido como parte del trabajo con el Lego. El elevador llegaba hasta la parte más alta de la torre que, de hecho, se parecía bastante a la de la ciudad de Aalborg. La torre y el ascensor se exhibieron al resto de la escuela durante una asamblea general.

COMENTARIOS SOBRE LOS PROYECTOS

Los profesores discutieron ampliamente tanto los detalles como los objetivos más generales de ambos proyectos. Uno de los profesores expresó que el gran problema era el hecho de que el contenido matemático no se había desarrollado mucho y, con respecto a “La Conejera”, agregó: “Cuando discutí los resultados del proyecto con mis estudiantes, primero dijeron que no veían ningunas matemáticas en el proyecto. Después discutimos las diferentes situaciones donde tenían que calcular y usar el computador. Entonces pensaron que sí, que quizás había algo de matemáticas, pero que ante todo había biología”. Otros profesores estuvieron de acuerdo, pero uno añadió que eso dependía de cómo se vieran las matemáticas: “Tal vez no es tan importante que los niños sientan que están trabajando con problemas de matemáticas o no, si de hecho lo están haciendo”. Sin embargo, hubo un acuerdo general en que el proyecto en realidad no se metió dentro de las matemáticas. Un profesor resumió esto al decir: “Nosotros no terminamos el trabajo con los diagramas y las estadísticas y creo que esto fue un poco inadecuado. Se hubiera podido trabajar más con matemáticas”.

Es obvio que los profesores no estuvieron satisfechos con el contenido matemático de “La Conejera”. La idea de las matemáticas como una materia que surgiera del proyecto no se había realizado. Una razón pudo ser que las situaciones creadas no contenían suficientes posibilidades para la aplicación de las matemáticas. Empero, en “Construcciones” no sólo fue posible poner en juego muchos tipos de usos descriptivos de las matemáticas, sino que también ellos resultaron más adecuados. Otra posibilidad mencionada fue que de hecho los niños usaron algo de matemáticas pero que no fueron capaces de darse cuenta de esto —y quizás incluso los profesores mismos no fueron lo suficientemente conscientes del hecho. Pero, ¿es verdad que si los niños emplearon las matemáticas de manera implícita, no importa que no se hayan dado cuenta de ello? Y si sí es importante que se den cuenta, ¿entonces cuál es el próximo paso a seguir? ¿Se habría podido prolongar “La Conejera” de alguna manera? Las mismas preguntas podrían surgir para “Construcciones”.

Debo mencionar algunas nociones que retomaremos más adelante. *Montar un escenario* para un proceso educativo se refiere al esfuerzo de establecer una situación en la que el proceso educativo pueda encarnarse para dar un significado a las actividades individuales que los niños deben realizar. El escenario debe posibilitar que los niños encuentren motivos

para las diferentes actividades y que verbalicen los tipos de competencias que pueden desarrollarse⁵. En “La Conejera” el escenario se estableció primero con la introducción de un paisaje fantástico y luego se concentró en el parque real. En “Construcciones” esto se llevó a cabo con la presentación de los diferentes talleres (aunque en este caso el montaje del escenario parece diferente). No uso la expresión montar un escenario para referirme a ideas y sugerencias aisladas que puedan llamar la atención de los niños en lecciones individuales, sino que tengo en mente una visión general que ofrece una perspectiva durante un proceso educativo más largo. Es importante que el escenario provea posibilidades para que los niños capten la idea de lo que tiene que hacerse y el propósito que puede tener una tarea específica. Montar un escenario indica que algo artificial tiene lugar y sólo en muy pocos casos es posible evitar esto en una situación educativa. Un escenario no debe mezclarse con la realidad.

El montaje del escenario del proyecto “Relaciones económicas en el mundo de los niños”, descrito en el Capítulo 4, tuvo lugar cuando se especificaron algunas situaciones y problemas cotidianos con los que se relacionaban las actividades de aprendizaje. De hecho, se montaron tres escenarios diferentes en cada uno de los tres subproyectos: el dinero de bolsillo, los subsidios infantiles y la dotación del club juvenil. Antes de comenzar el proyecto se le pidió a los niños que llevaran a la escuela catálogos de diferentes almacenes y desde ahí comenzaron a preguntar cuándo podían escoger lo que deseaban comprar. Tenían curiosidad sobre qué iba a suceder con todo eso. Entonces, el primer montaje de hecho sucedió en la discusión sobre el dinero de bolsillo; el siguiente, en la discusión sobre los subsidios infantiles y el último, en la discusión sobre el uso de los clubes juveniles. Los escenarios tenían contenidos que son serios e importantes no sólo desde la posición de los niños en ese momento, sino también desde una perspectiva sociológica. El uso que los niños dan al dinero de bolsillo es un tema importante, tanto como lo son el subsidio infantil y la posición de los niños en la sociedad evidenciada por la necesidad de los clubes juveniles. En “Relaciones económicas en el mundo de los niños”, los niños sugirieron qué hacer con el dinero del subsidio, pero de hecho no compraron nada. En este sentido la encarnación de la situación en la sociedad fue un juego. No obstante, el montaje del escenario permitió conectar las diferentes tareas que los niños debían realizar y les dio significado.

Hay varias maneras de montar un escenario y con base en los ejemplos descritos podríamos decir que encontramos tres formas diferentes de hacerlo⁶. Primero está la aproximación realista que se ejemplificó en

5. Montar un escenario se relaciona naturalmente con el enfoque temático, como se presenta en la introducción al Capítulo 4.

6. Con esto no quiero decir que estas sean las únicas, sino que hemos ejemplificado tres de ellas.

“Relaciones económicas en el mundo de los niños”. El material que se usó fue real, los precios considerados fueron reales y el problema de hecho existe. Pero el realismo no es la única estrategia y en “La Conejera” el primer escenario se construyó en una atmósfera de fantasía y de cuento: ¿qué se podía hacer con el terreno fuera de la escuela? Se invitó a los niños a que dieran sugerencias sin tener en cuenta las limitaciones de la realidad. Todo era posible; sin embargo, no se lanzó a los niños al vacío porque el escenario se había establecido. El montaje del escenario hizo posible que los niños (en su mayoría) identificaran un propósito para sus tareas en relación con un objetivo general. Como es natural, también hubiera sido posible usar una aproximación realista en la primera fase del proyecto “La Conejera”. Una tercera forma de establecer un escenario se ilustra con la variedad de talleres de “Construcciones”, que creó una atmósfera de trabajo colectivo. En este caso, el montaje del escenario involucró a los niños por medio del compromiso y la actividad.

Un asunto que se discute bastante con respecto a la organización por proyectos y la orientación por problemas de un proceso educativo es quién decide de qué se trata el problema inicial: ¿el profesor o los niños? De hecho, los profesores hicieron el montaje de los escenarios de los tres proyectos presentados. Pero, ¿qué tan importante es la autoorganización del proceso educativo? Puede no darse el caso de que los niños acepten comprometerse con, por ejemplo, sugerir qué comprar para dotar un club juvenil —de hecho este subproyecto finalizó un poco antes de lo planeado originalmente y de lo que el montaje del escenario sugería.

Una idea fundamental que debo conectar con el montaje de los escenarios es la de ofrecer *significado* a un proceso educativo. Algunas respuestas a preguntas de los niños como ¿por qué vamos a hacer eso? deben indicarse en el montaje del escenario. Por ejemplo, los diferentes cálculos que deben realizarse para sugerir comprar ciertos elementos para la dotación del club adquieren un significado con relación al escenario. Los niños son capaces de otorgar un significado si el escenario se establece de una manera comprensible para ellos. Pero no se exige que el significado que los niños otorguen sea *el* significado o *su* significado. Incluso si los niños hallan un significado comprensible, éste puede no aceptarse. No tiene sentido decir que un escenario pueda ofrecer *el* significado, sino sólo que ofrece *algo de* significado⁷. Tratar de proporcionar un significado no equivale a exigir que los niños lo acepten. El significado es algo que se ofrece, no que se exige. No todos los montajes tienen éxito en establecer un significado: en la primera fase de “La Conejera” los niños expresaron confusión porque parecían no ver cuál era el punto de investigar un paisaje fantástico.

7. De hecho, queda como una pregunta abierta qué puede ser, en este contexto, el significado de “*el* significado”.

Es tentador comparar esto con la enseñanza tradicional de las matemáticas en la que el libro de texto con frecuencia establece la estructura principal. Una lección individual sólo adquiere significado al ser un paso para terminar una tarea curricular determinada. Podría argumentarse que en todas las situaciones educativas se monta un escenario y que el libro de texto por lo general lo define; pero no voy a usar el concepto de esta forma tan liberal. Quiero restringir el uso del montaje de un escenario a ejemplos como los que he mostrado. Esto implica que el montaje de un escenario presupone la introducción de una perspectiva específica con la cual las actividades de los niños puedan relacionarse. El metalenguaje normal de la educación tradicional está regido por una lógica de instrucciones. Establecer un escenario reconoce la importancia de que los niños sean capaces de ver un significado para sus tareas educativas individuales —y esta no es una simple cuestión de motivación. Es una forma de romper la “lógica de instrucciones” que se expresa en la secuencia de ejercicios a través de los cuales se guía a los niños para alcanzar un objetivo invisible.

El significado en la educación se relaciona con la disponibilidad de un *lenguaje acerca de* lo que se hace durante el proceso educativo. El significado educativo se asocia con un metalenguaje y con las posibilidades de discutir direcciones alternativas para el proceso. Por lo tanto, es importante que los niños puedan apropiarse no sólo del contenido que se va a aprender, sino también del metalenguaje sobre qué se va a aprender y para qué propósito. Es importante tanto que los niños capten un significado, como que también tengan la posibilidad de negociar el significado del contenido de su educación⁸. Esto significa que veo una relación estrecha entre las nociones de montaje de un escenario, significado en la educación y metalenguaje sobre el contenido educativo. La importancia de desarrollar tal lenguaje sobre las matemáticas también se indica en las entrevistas con las que se inició “La Conejera” y “Construcciones”. Los niños tenían opiniones sobre las matemáticas, pero no poseían medios adecuados para expresarlas.

El montaje de un escenario es un intento por ofrecer un lenguaje, no idéntico al lenguaje de la materia en sí, para identificar lo que se hace y lo que debe hacerse. Tan sólo debemos imaginarnos las diferencias entre niños discutiendo qué hacer con algunos ejercicios de un libro de texto y niños calculando algunas de las informaciones requeridas en uno de los subproyectos de “Relaciones económicas en el mundo de los niños”. Pero también el requisito de un metalenguaje tiene una perspectiva diferente. Quienes aprenden son personas actuantes y una acción no puede tener lugar sin un razonamiento. Tomar una decisión bien fundamentada presupone clarificación y negociación y también un lenguaje con el que sea posible

8. Un fenómeno característico es que, cuando se le pregunta a los estudiantes qué están haciendo en matemáticas, tan sólo tratan de repetir lo que han aprendido, pero no son capaces de hablar *sobre* la materia.

describir y discutir el contenido y los propósitos de las diferentes alternativas⁹.

La idea de negociar un significado y adquirir un (meta)lenguaje puede aclararse más con el término de *semántica multifacética* (o *pragmática multifacética*)¹⁰. Analicemos un concepto sencillo como el de suma de decimales. Este concepto tiene muchos contextos. Desde la perspectiva de un niño, el concepto puede relacionarse con la suma de enteros y, tal vez también, con la realización de cálculos usando una calculadora de bolsillo o, quizás, con actividades llevadas a cabo en lecciones anteriores, etc. También hace parte de la vida cotidiana de un niño con la suma de dinero, por ejemplo. Pero el concepto cotidiano de suma de decimales no necesariamente se rige por la lógica que esperamos que un concepto matemático obedezca. Para el niño el algoritmo de la suma puede depender de las unidades en cuestión. Es diferente sumar cantidades de dinero, al menos cuando se trata de cantidades de dinero de bolsillo, que sumar el peso de diferentes objetos, por ejemplo. El dinero se puede visualizar de manera diferente al peso y una visualización determinada puede crear un cierto algoritmo. El concepto de suma se ubica dentro de una red de relaciones semánticas. Al dejar la perspectiva del niño a un lado, encontramos que un concepto matemático todavía tiene una variedad de relaciones semánticas, algunas establecidas en diferentes tipos de prácticas de trabajo y otras en las matemáticas puras. La red semántica está viva y es una criatura de múltiples brazos que puede compararse con un pulpo. El montaje de un escenario es una manera de reconocer este hecho y un intento por incluir tal riqueza semántica en el proceso educativo.

Como lo indican los comentarios de los profesores, las matemáticas se perdieron en “La Conejera”, a pesar de que el proyecto había incorporado una gran cantidad de posibilidades para poner las matemáticas en uso. Los niños tenían la oportunidad de usar una variedad de competencias matemáticas; sin embargo, no reconocieron haber hecho siquiera algo de matemáticas. Este hecho nos llevó a resaltar la importancia de la *arqueología matemática*¹¹. Este concepto se torna interesante porque el montaje de un escenario también puede significar un cambio en el foco. No sólo provee posibilidades de focos educativos, sino también de distorsiones sistemáticas de ellos. El uso de las matemáticas no es un fenómeno transparente y, por lo tanto, la ejemplaridad no es una tarea sencilla en la educación matemática.

9. Esto se discutirá con mayor profundidad en el Capítulo 10.

10. Aquí no trataré de mantener una distinción precisa entre semántica y pragmática. La semántica tiene que ver con el significado de un término, mientras que la pragmática con la situación en la que se aplica. Esta distinción puede hacerse aun más difusa con la tesis de que el significado de un término se asocia con la manera en que se usa.

11. Michael Foucault usó la expresión arqueología del conocimiento, pero no trato de relacionar mi trabajo con el suyo.

Las matemáticas pueden integrarse en tal grado que desaparezcan tanto para los niños como para los profesores. Entonces se hace necesario dedicar tiempo a tratar de asir la competencia imbricada. Las matemáticas tienen que reconocerse y hay que darles un nombre. Esa es la labor de la arqueología matemática. Pero los proyectos “La Conejera” y “Construcciones” terminaron sin hacer esta arqueología —muy rápido, por decirlo así. Es importante que un proyecto que contenga matemáticas como elemento implícito no termine en el momento en que por lo general los proyectos terminan, es decir, cuando se producen las partes más visibles y se exhiben los resultados. Dedicar algún tiempo a la arqueología matemática puede ser útil. Y, ¿por qué es esto importante? Si de hecho los niños se involucraron en las tareas matemáticas y si de hecho aprendieron matemáticas de manera implícita, ¿por qué se les debe molestar con una arqueología matemática? ¿Por qué es esto importante desde la perspectiva de la educación crítica? Mi primera respuesta sería algo del tipo: Si es importante llamar la atención sobre el hecho de que las matemáticas hacen parte de nuestra vida cotidiana, entonces también es importante ofrecer a los niños los medios para identificar y expresar este fenómeno.

Uno de los fines de una arqueología matemática es explicitar el uso que de hecho se da a las matemáticas que se esconden tras las estructuras y rutinas sociales. Lo anterior es el proceso de excavar para sacar a la superficie las matemáticas y prestar atención a cómo las matemáticas pasan de ser una guía explícita a convertirse en una eminencia gris escondida tras, por ejemplo, el manejo social y económico. Una arqueología matemática es un intento por explicar las abstracciones mentales que se nos presentan como abstracciones materializadas —es una respuesta a la integración de las matemáticas en nuestra segunda naturaleza. Esta es una explicación global, pero también se le puede dar una interpretación educativa a la arqueología matemática.

Como parte del trabajo en “Construcciones”, los niños fabricaron un puente y se dieron cuenta de que cuando usaban las varas largas para hacer cubos no se lograba generar una estabilidad. Una solución mejor al problema de la estabilidad fue usar triángulos. Hubiera sido importante ir más allá en el asunto de la construcción del puente. En la educación primaria una arqueología matemática puede significar ilustrar el hecho de que los ingenieros, involucrados en las construcciones tecnológicas, tienen que aplicar las matemáticas si desean evitar problemas similares a los que tuvieron los niños. La actividad educativa habría podido involucrar una visita a los sitios de trabajo de los ingenieros para mirar los dibujos y los planos con los cálculos, etc. Naturalmente la idea no es que los niños tengan que entender las matemáticas en uso, sino que comprendan que ellas se han usado. El presente ejemplo también ofrece oportunidades para hablar de la geometría de una manera más concreta: dadas tres longitudes es posi-

ble construir uno y sólo un triángulo (si una de las longitudes no es mucho mayor que las otras dos). A partir de esta experiencia tendría sentido discutir con mayor profundidad conceptos geométricos para ilustrar que se pueden aplicar cuando se hable de las construcciones que los niños realizaron y que los conceptos pueden usarse también para mejorar dichas construcciones¹².

Ser capaz de ver lo que las matemáticas de hecho hacen significa que ellas deben identificarse. Una contextualización puede ser más o menos artificial y más o menos compleja. Si es tan compleja que las matemáticas tienden a desaparecer, entonces tiene sentido rastrearlas con una arqueología matemática.

Una arqueología matemática es una actividad educativa que implica ser conscientes de que algunas de las actividades del salón de clase —por ejemplo la manera de sistematizar la información sobre los diversos insectos que se encontraron en “La Conejera”— son de hecho matemáticas. Más aun, descubrir las raíces matemáticas de una actividad se relaciona con la idea del poder formativo de las matemáticas. Si generar una discusión sobre el poder formativo de las matemáticas tiene sentido, entonces tenemos que ser capaces de identificar ejemplos de las matemáticas en uso. Por lo tanto, una arqueología matemática puede tener sentido tanto cuando se dirige hacia las actividades del salón de clase, como cuando se enfoca en los fenómenos sociales. El problema es el mismo: es difícil observar las aplicaciones de las matemáticas y, por lo tanto, expresar una opinión al respecto. Si permanecen invisibles y escondidas tras la superficie tecnológica de la sociedad, se nos salen de las manos. Si los niños no se dan cuenta de las matemáticas en acción, no tienen ninguna posibilidad de cuestionar sus opiniones acerca de ellas. Si no perciben que usan las matemáticas, no pueden cuestionar su imagen de la materia como un área que sólo le pertenece al libro de texto.

12. Como es natural, no se esperaba que los niños que participaron en “Construcciones” realizaran este trabajo. Para ellos el trabajo terminó donde se mencionó, también por algunas razones pedagógicas. Mi sugerencia sólo pretende ilustrar lo que puede significar una arqueología matemática.

CAPÍTULO 6

EL CONOCER REFLEXIVO

La alfabetización matemática se introdujo como un término comparable con la alfabetización. Sin embargo, todavía no hemos explorado la competencia de la alfabetización matemática. La labor que tenemos es encontrarle una interpretación que pueda identificar conexiones entre el contenido de una práctica educativa experimental y conceptos elevados como ciudadanía crítica, por medio de los cuales he tratado de caracterizar una posición general sobre la educación crítica. Adorno nunca intentó aplicar sus exposiciones sobre la educación al salón de clase, ni identificar los aspectos de la educación crítica dentro de una práctica educativa. Su crítica fue conceptual y nada más que eso. Si bien ya se mencionó el concepto de ejemplaridad como una base para la generación de ideas prácticas al identificar el enfoque temático y el trabajo por proyectos como posibilidades, la ejemplaridad no explica cómo se conectan tales principios organizadores con la educación crítica.

Hemos visto ejemplos de diferentes actividades educativas. Pero todavía queda la pregunta de cuáles de las características de dichas actividades son esenciales en la educación matemática crítica: ¿la integración de varias materias como en el enfoque temático?, ¿las cuestiones políticas asociadas con el contenido, como en “Relaciones económicas en el mundo de los niños”?, o, ¿la posibilidad de que los niños se involucren en una variedad de actividades como en “La Conejera” y “Construcciones”?, ¿es un problema que los niños, en proyectos como “La Conejera” por ejemplo, no parezcan ser conscientes de su aprendizaje de las matemáticas? Los conceptos generales delineados hasta el momento parecen no posibilitar la identificación de las características esenciales de una práctica educativa desde una perspectiva crítica. La falta de conexión entre “una filosofía de” y “una práctica educativa” simplemente todavía no se ha abordado.

Es esencial cubrir la brecha entre filosofía y práctica porque la noción de educación matemática crítica no puede desprenderse de ninguna de las dos por separado. Creo que es imposible construir una idea de la educación matemática crítica usando únicamente un enfoque tipo Adorno, ni tampoco se puede formar una concepción de una práctica crítica como un compendio de una variedad de actividades bien intencionadas. Preguntar por las características de una práctica que pueden ser esenciales para una educación crítica implica llamar al estrado tanto al concepto de educación mate-

mática crítica como al de práctica educativa. Por lo tanto, a continuación trataré de ubicar un concepto epistémico por medio del cual seamos capaces de encontrar un potencial para la práctica educativa en nuestros constructos teóricos, al igual que partes de la perspectiva general en las situaciones prácticas. Por medio del uso de la noción de reflexión trataré de darle más contenido a la alfabetización matemática.

EL CONOCER REFLEXIVO: UNA PRIMERA APROXIMACIÓN

No podemos predecir las consecuencias de la manera como el desarrollo tecnológico influye en la vida social. Vivimos sobre estructuras de riesgo desconocidas —esta es la realidad que se esconde tras la paradoja de Vico. En las sociedades altamente tecnologizadas de hoy en día, los métodos formales y las tecnologías juegan un papel preponderante en la creación y conformación de tales estructuras que ponen en riesgo el desarrollo social. Junto con la tecnología, que contiene unas matemáticas congeladas, nos ubicamos en una zona de conflicto entre potenciales constructivos y destructivos. Desde un punto de vista epistemológico, esta situación requiere una distinción importante.

Como ejemplo tomemos el funcionamiento del tráfico vehicular: muchísimos carros (particulares) causan polución; se quema mucha gasolina y ésta va a parar a la atmósfera, etc. Esta forma de transporte conlleva algunos riesgos graves (de tipo ecológico, por ejemplo) que vamos a tener que enfrentar en un futuro no muy lejano. La manera de afrontar estos problemas que comienzan a surgir no consiste en desarrollar la habilidad de los conductores para manejar, i.e., su habilidad para maniobrar un vehículo en medio del tráfico pesado; tampoco consiste en instruir más a los conductores sobre mecánica —cómo está construido el automóvil, cómo funcionan los frenos, cómo podrían repararse, entre otros. Naturalmente es de mucha utilidad tanto que se pueda reparar el vehículo, como que se pueda conducir de una mejor manera. Sin embargo, esta no es una respuesta satisfactoria al problema del tráfico vehicular. Para enfrentar este problema y reaccionar ante él de forma adecuada, tenemos que desarrollar una mejor comprensión de lo que significa “tráfico vehicular”, visto como el fenómeno complejo de la organización del transporte y del tráfico en general. ¿Cuáles son las consecuencias económicas y ecológicas del tráfico vehicular? ¿Qué acciones políticas y sociales se necesitan y cuáles parecen ser viables? Necesitamos aprender *acerca* del tráfico vehicular para responder estas preguntas. Obviamente aprender sobre el tráfico vehicular no es en sí una solución a los problemas que él causa; empero, sí es el paso epistemológico que se debe tomar para hacerse cargo del problema en sí. Se debe desarrollar el conocimiento en un metanivel si queremos que nuestras

acciones no degeneren en medidas de desesperación. Apegarse al mejoramiento de las habilidades de conducción sería adoptar una política de avestruz.

Llamemos *conocimiento tecnológico* al conocimiento necesario para desarrollar y usar la tecnología. Como ejemplo de este tipo de conocimiento tenemos tanto el conocimiento requerido para manejar un carro, como el saber-hacer necesario para repararlo y construirlo. Las habilidades para conducir no son del mismo tipo que el conocimiento sobre el tráfico vehicular. El último es un ejemplo de metaconocimiento que por el momento llamaremos *conocimiento reflexivo*. Sin embargo, tiene que ampliarse el concepto de conocimiento. El conocimiento tecnológico incluye no sólo conocimiento implícito y verbalizado, en el sentido usual de la palabra, sino también una variedad de competencias para realizar ciertas acciones —la habilidad para transitar no es únicamente un conocimiento explícito sino que parte de él puede estar organizado en la forma de competencias tácitas. A este complejo de competencias simplemente les doy el nombre de conocimiento tecnológico, y este es el objeto de reflexiones que también pueden incluir tanto las competencias verbalizadas como las no verbalizadas.

La tesis fundamental que relaciona el conocimiento tecnológico con el conocimiento reflexivo es que el primero en sí mismo es incapaz de predecir y analizar los resultados de su propia producción; se necesitan reflexiones que se basen en diferentes competencias. La competencia para fabricar vehículos no es suficiente para evaluar las consecuencias sociales de la producción de automóviles. La habilidad para mejorar las vías no produce una mejor comprensión del tráfico vehicular. El conocimiento tecnológico nació corto de visión, tanto como podía serlo. El conocimiento reflexivo tiene una base más amplia. El conocimiento reflexivo debe basarse en un horizonte más amplio de interpretaciones y conocimientos previos¹. Tiene que captar la situación en la que el conocimiento tecnológico se pone en marcha. No obstante, pasar del conocimiento tecnológico al reflexivo no es una cuestión de seguir pasos sencillos. Los conocimientos tecnológico y reflexivo constituyen dos tipos diferentes de conocimiento que no son independientes. Puede ser importante manejar alguna aproximación tecnológica para dar sustento a las reflexiones. Para ser capaces de comprender y discutir las implicaciones sociales de la polución ocasionada por el tráfico vehicular, tenemos que saber las condiciones y principios básicos relacionados con la fabricación de automóviles, mas no es indispensable manejar todos

1. Esto significa que no veo posible reducir la reflexión y el pensamiento crítico a una “consciencia lógica”. En esta línea se han dado intentos por relacionar el pensamiento crítico en la educación con la lógica informal y con la crítica dentro de las disciplinas —para una discusión al respecto ver McPeck (1990). En contraste, mi enfoque tiene un alcance más amplio.

los aspectos de dicha fabricación. Si ese fuera el caso, la democracia en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico se volvería imposible: sólo los expertos podrían controlar a otros expertos y, entonces, tendríamos como resultado una expertocracia.

El conocimiento reflexivo no puede armarse como un rompecabezas de componentes tecnológicos. Aun si recolectamos todas las partes posibles de una información tecnológica, no necesariamente seremos capaces de construir reflexiones de estas partes solas. Las reflexiones no se forman reorganizando información tecnológica. El conocimiento tecnológico no contiene en sí una autocrítica ni tampoco la especificación de las tendencias alternativas del desarrollo tecnológico. Así que la base epistemológica de las reflexiones no se encuentra en la tecnología, sino en los aspectos sociológicos y éticos de la manera como manejamos la tecnología. Mientras que el conocimiento tecnológico tiene por objetivo solucionar problemas tecnológicos, el objeto de la reflexión es la complejidad de las implicaciones de una solución tecnológica sugerida para estos problemas. El lenguaje tecnológico se refiere a su propio dominio, mientras que el objeto del lenguaje del conocimiento reflexivo incluye las soluciones a estos problemas. El conocimiento reflexivo sobrepasa al conocimiento y al lenguaje tecnológicos y, además, se refiere a normas y valores.

La importancia del conocimiento reflexivo surge de la existencia de conflictos entre los impactos constructivos y destructivos de la tecnología. La tecnología puede bien ser una reacción a algunos aspectos críticos de la sociedad. Sin embargo, en el intento por solucionarlos, crea nuevas estructuras de riesgo. No estamos resolviendo los problemas y disolviendo las estructuras de riesgo —éstas, en cambio, se transforman. No podemos sostener por más tiempo una interpretación optimista (las crisis tecnológicas pueden surgir) y es imposible aferrarse a un determinismo (la acción crítica es posible). Por lo tanto, tenemos que reflexionar sobre la tecnología y sus consecuencias. Los conflictos entre los impactos constructivos y destructivos de la tecnología, i.e., los potenciales críticos de la tecnología, hacen que se necesite la crítica.

Por medio del conocimiento tecnológico podemos ser capaces de cambiar la tecnología y también de reflexionar acerca de una manera de solucionar un problema tecnológico. Pero, ¿es posible cambiar una tecnología por medio del conocimiento reflexivo? Desde mi perspectiva la respuesta (afortunadamente) es sí, dados los ingredientes críticos de las supuestas soluciones tecnológicas. Esto significa que veo la paradoja de Vico como la expresión de un desafío permanente y no como algo imposible de superar (en situaciones particulares). La paradoja de Vico se originó por la imposibilidad de reducir epistemológicamente el conocimiento reflexivo al conocimiento tecnológico. Si hubiese sido posible construir reflexiones a partir de trozos de una competencia tecnológica, la humanidad hubiera sido capaz

de manejar sus propias creaciones. Justificar un optimismo a pesar de esto depende de la posibilidad de darle algún sentido a la reflexión.

A continuación dejaré a un lado la perspectiva general de la tecnología para mirar aquellas partes de ella donde las matemáticas juegan un papel esencial. Por lo tanto, es necesario hacer una distinción más entre conocimiento tecnológico y *conocimiento matemático*. La componente formal del conocimiento matemático está integrada en las diferentes tecnologías y, en especial, en la tecnología de la información. Esto implica que terminaremos distinguiendo tres tipos de conocimiento. Uno es el conocimiento matemático que se refiere a la competencia que comúnmente llamamos habilidades matemáticas, incluidas las competencias para reproducir pensamientos matemáticos, teoremas y demostraciones, al igual que para ejecutar algoritmos y realizar cálculos (la competencia avanzada de inventar y descubrir nuevas matemáticas también está incluida en esta categoría). También tenemos el conocimiento tecnológico que se refiere a la habilidad de aplicar las matemáticas y los métodos formales para el logro de fines tecnológicos (concentramos nuestras discusiones en las aplicaciones de los métodos formales porque caracterizan a las sociedades con un alto desarrollo tecnológico). Y por último encontramos el conocimiento reflexivo que tiene que ver con la evaluación y la discusión general de lo que se puede identificar como un fin tecnológico y con las consecuencias éticas y sociales de lograr tal fin con las herramientas seleccionadas².

El conocimiento reflexivo, definido en términos abstractos, es la competencia necesaria para ser capaces de tomar una posición justificada en una discusión sobre asuntos tecnológicos. En este sentido podemos relacionar el conocimiento reflexivo con la competencia general necesaria para reaccionar como ciudadanos críticos en la sociedad de hoy en día³. La posibilidad de que el público sea el conjunto de sujetos que no sólo reciben los productos del sistema, sino que también le genera demandas, supone una

2. Hemos descrito la relación entre conocimiento reflexivo y tecnológico desde un punto de vista semilógico y hemos enfatizado en la imposibilidad de descomponer el conocimiento reflexivo en pequeños trozos, cada uno de los cuales corresponde a algún conocimiento tecnológico. Esta irreductibilidad también puede discutirse desde un punto de vista sociológico al mostrar cómo las instituciones y comunidades de investigación que sostienen y producen el conocimiento tecnológico se encuentran separadas de las instituciones sociales que pueden llegar a ser las representantes del conocimiento reflexivo. Esta separación institucional se refleja incluso en la educación.

Esta separación refleja una dualidad entre las ciencias y las humanidades. Desde un punto de vista analítico y filosófico, la dualidad ha sido negada por el positivismo lógico con la nominación de un método científico como paradigmático y por la promoción de la tesis de la unidad de las ciencias. La tradición hermenéutica ha pasado de alto la dualidad al “olvidarse” de lo científico para favorecer el establecimiento de un método de interpretación respetable. No obstante, es esencial superar esta dualidad si se pretende someter el resultado de las construcciones tecnológicas a investigaciones críticas.

comprensión reflexiva. La pregunta que queda es si las reflexiones pueden reorientar un desarrollo tecnológico.

No obstante, mi terminología ha caído ya en un problema. El concepto de conocimiento tiene muchas connotaciones filosóficas. En la epistemología clásica que va desde Platón hasta Russell, se ha asumido que el conocimiento debe asociarse con tres condiciones básicas: aseverar que se conoce una proposición significa que ella se cree, que hay suficientes razones que la sustentan y que es verdadera⁴. La asociación conceptual entre conocimiento y verdad marca el camino hacia un absolutismo, donde el conocimiento se asocia con la autoridad. Tal vez por esta razón no tenemos mayores dificultades cuando hablamos de conocimiento matemático (aun si aceptamos una interpretación falibilista de las matemáticas). Es probable que también usemos la expresión conocimiento tecnológico, a pesar de que ese cuerpo de conocimiento no se pueda describir de la misma manera que el conocimiento matemático. Puede ser más apropiado, más bien, hablar de competencia tecnológica e indicar que la competencia empleada no necesariamente se expresa de manera explícita. Con frecuencia asociamos el conocimiento con una explicabilidad, mientras que la competencia tecnológica en algunas situaciones toma la forma de una competencia tácita. Parece incluso más difícil hablar de conocimiento reflexivo; en este caso parece absurdo referirse a cualquier cuerpo autorizado de conocimiento. La expresión conocimiento reflexivo indica la existencia de algún grado de explicabilidad y quizás la existencia de algún tipo de cuerpo autorizado de conocimiento; y esto es engañoso. Tenemos que buscar esta competencia particular en términos de disposiciones y habilidades. Por lo tanto, prefiero comprender las reflexiones como un proceso y, en lo que sigue, preferiré utilizar palabras como reflexiones, reflexionar y *conocer reflexivo*, en cambio de conocimiento reflexivo. También usaré los términos *conocer matemático* y *conocer tecnológico*.

REFLEXIONES Y MODELAJE

Para llegar a una interpretación más específica del conocer reflexivo debemos echar un vistazo al modelaje matemático⁵. Podemos concebir el modelaje como una manera potente por medio de la cual las matemáticas ejercen su poder formativo. En un proceso de modelaje las matemáticas no sólo

3. El uso que hace Hans Freudenthal del término reflexión es diferente del mío. En *Revisiting mathematics education* [Una nueva mirada a la educación matemática], relaciona este concepto con una actividad de “subir el nivel” asociada con el proceso de conocer las matemáticas. El concepto de Freudenthal pertenece a la teoría del desarrollo del conocimiento matemático, mientras que mi intención es orientar el concepto hacia afuera de las matemáticas.

4. Ver el Capítulo 11 para una discusión más profunda sobre el conocimiento.

tocan la realidad sino que también la exprimen y la transforman. Las abstracciones se materializan. El modelaje se convierte en un acto tecnológico y en una manera de introducir los sistemas a la realidad. Al concentrarse en el modelaje, la discusión sobre la reflexión no sólo se especifica sino que también se restringe. Empero, el modelaje matemático constituye un problema en la evaluación de las tecnologías porque el lenguaje matemático aparentemente transparente crea la paradoja de Vico en todo su esplendor.

Me permito hacer una distinción entre dos tipos de modelaje: el *modelaje puntual* y el *modelaje extendido*. En el caso del modelaje puntual, el problema al que nos enfrentamos se transforma en un lenguaje formal, en términos del cual tratamos de solucionar el problema original. El modelaje extendido es diferente. En este caso la terminología matemática no se usa para describir un problema específico, sino que se usa para proveer una base genérica para un proceso tecnológico. Las matemáticas hacen parte del marco conceptual a través del cual interpretamos y reacomodamos la realidad. Como ejemplo podemos pensar en la distinción entre valor de cambio y valor de uso, que es fundamental en la organización capitalista de la vida económica y que se lleva a cabo a través del sistema de contabilidad por partida doble, que hace importante establecer unos cálculos generales de los valores en términos de un sistema monetario abstracto⁶. En este caso el modelo de cálculos matemáticos ofrece un medio para transformar y manejar una situación compleja. En el tipo de modelaje extendido, las matemáticas se encuentran imbuidas en las partes de nuestro sistema conceptual básico para manejar los asuntos sociales. Las matemáticas se convierten en una condición trascendental para los fenómenos individuales — y también para los tipos de modelos puntuales. La distinción entre modelaje puntual y extendido significa que también podemos partir el concepto de *formaciones matemáticas* —que son el resultado del ejercicio del poder formativo de las matemáticas— y hablar de formaciones *locales* y *globales*. Aquí trataré de concentrarme en las formaciones locales y trataré de especificar un proceso que conduce de las abstracciones mentales a las materializadas.

La actividad inicial en un proceso de modelaje (puntual) es ubicar un área problemática y un área de interés. Concebir un problema como algo que pertenece a la realidad sería una simplificación excesiva. Tiene más sentido interpretar un problema como una falta o defecto en una construcción conceptual. No obstante, tiene mucho más sentido identificar un problema

5. Jensen (1980) ha jugado un papel importante en la discusión acerca del modelaje matemático en Dinamarca. Para mayores detalles sobre la discusión ver Blum y Niss (1991), Blum et al. (Eds.) (1989), Blum, Niss y Huntley (Eds.) (1989), Niss, Blum y Huntley (Eds.) (1991) y Lange et al. (Eds.) (1993).

6. Para una discusión más detallada de este fenómeno ver Keitel, Kotzmann y Skovsmose (1993).

como una inconsistencia entre una construcción mental/teórica y una situación real. En otras palabras, el concepto de problema no se refiere a sólo una de las dos categorías, lenguaje o realidad, sino que designa una relación entre ellas⁷. Usemos un ejemplo de la economía. El área problemática puede tener que ver con la política económica de un gobierno: ¿cómo es posible analizar y, hasta cierto punto, predecir de forma lo más precisa posible los resultados de las sugerencias que se hacen a la política económica?, ¿es posible indicar algunas implicaciones generales, por ejemplo, con respecto al número de desempleados, usando métodos de predicción económica? Se ha avanzado en intentar responder estas preguntas con el desarrollo del Modelo de Simulación del Consejo Económico (MSCE) utilizado por los economistas daneses cuando aconsejan al gobierno y a los políticos sobre política económica y sus posibles consecuencias⁸.

Un modelo matemático debe basarse en una interpretación específica de la realidad. Otras posibilidades no existen. No podemos entrar en contacto con una “realidad” sin estructurarla. Este enunciado se ha enfatizado en la filosofía de la ciencia como una reacción a la doctrina del positivismo lógico, para el cual la objetividad y neutralidad son objetivos posibles, aunque difíciles, de obtener. Norwood Russell Hanson explicó por qué las observaciones en general, incluidas las observaciones científicas, se preestructuran de acuerdo con nuestros patrones conceptuales. No es posible ni tampoco importante tratar de evitar dichos patrones⁹. En cambio, podríamos usar investigaciones de nuestro mundo preestructurado como la base para reestructurar actividades y, quizás, llegar a una mejor comprensión. Un modelo nunca puede ser un modelo de la realidad. Tenemos que seleccionar elementos de la realidad que concibamos como los importantes; también tenemos que decidir qué relaciones entre ellos son esenciales. De esta manera creamos un *sistema*, que no es en sí una parte de la realidad. El

7. Estipular la existencia de tal relación crea otro problema filosófico similar al que enfrenta cualquier teoría de correspondencias. ¿Qué significa que las entidades conceptuales correspondan a la realidad? La situación parece ser que hemos iniciado nuestra investigación sobre los efectos del modelaje matemático tapándonos con un problema filosófico imposible de resolver. Más aun, mi formulación puede ser equívoca si se asume un relativismo lingüístico. Tal relativismo dificulta mantener una distinción precisa entre lenguaje y realidad.

Debo mencionar otro asunto. He descrito crisis como una característica de la realidad. ¿Cuadra esto con la posición del relativismo lingüístico? Veo el problema como algo del estilo: las crisis son reales en el sentido de que no pueden interpretarse de manera que desaparezcan y, no obstante, todavía la realidad puede ser estructurada por el lenguaje.

8. Kirsten Hermann y Mogens Niss (1982) han investigado el MSCE con la intención de dar un ejemplo de modelaje matemático real accesible a los estudiantes de los últimos grados de secundaria. La idea básica ha sido que es importante que los estudiantes comprendan la naturaleza de las aplicaciones de las matemáticas al estudiar un ejemplo real. Este análisis es un ejemplo de la introducción del modelaje matemático real de significancia social en la educación matemática. También ejemplifica la arqueología matemática.

9. Ver Hanson (1958).

sistema es una entidad conceptual creada por medio de ciertas interpretaciones de la realidad, i.e., por medio de un cierto marco teórico para mirar la realidad y teniendo en cuenta ciertos intereses para constituir un conocimiento. Las precondiciones para el proceso de construir un sistema pueden ser implícitas o explícitas, pueden ser anticipadas o accidentales; pero están presentes inevitablemente. Una sistematización conceptual de la realidad es un prerrequisito para el modelaje matemático. Especificar estructuras micro o macro económicas supone un proceso de toma de decisiones sobre los elementos principales de una economía y sobre las relaciones básicas entre los elementos seleccionados. El desarrollo de un sistema no puede basarse en el simple acto positivista de observar. Esta es la razón por la que prefiero el término desarrollo de un sistema en vez de, por ejemplo, identificación de un sistema¹⁰.

Se puede hacer un intento por modelar el sistema conceptual desarrollado y, de esta manera, un *modelo matemático* se convierte en una especificación y en una semidescripción de un sistema conceptual creado por una interpretación de las características de la realidad. Por medio del modelo matemático, las descripciones verbales y no formales de las relaciones entre los diferentes parámetros pueden expresarse en términos de relaciones funcionales y las características de las relaciones, como propiedades de las funciones matemáticas seleccionadas. La terminología matemática substituye la terminología que se usó originalmente para definir el sistema. En el MSCE, la Función de Producción Cobb–Douglas juega un papel crucial. Esta determina el Producto Interno Bruto como una función de dos variables, a saber, la inversión de capital y la fuerza de trabajo. Esta especificación es una consecuencia de efectuar el desarrollo del sistema desde la teoría económica neoclásica. El modelo tuvo como núcleo de su desarrollo esta función. El paso siguiente es especificar las condiciones matemáticas adicionales que la función tiene que cumplir, por ejemplo, con relación a su diferenciabilidad y las propiedades de sus derivadas parciales. Tales especificaciones se expresan en forma de la ecuación de una función y, al resolver esto, se conoce más sobre la Función de Producción. Entonces, con esta función como punto de referencia, el modelo se descompone en un gran número de ecuaciones, lo cual hace que el modelo tenga una utilidad para realizar predicciones económicas.

Si un modelo matemático es manejable numéricamente, puede ser necesario transformarlo en algoritmos. Una pregunta principal es cómo definir los métodos numéricos requeridos para manejar los cálculos necesarios. Con frecuencia transformar descripciones matemáticas en procedimientos algorítmicos es una maniobra compleja (debe recalarse que un modelo

10. Mi uso del término desarrollo de un sistema es diferente del que se encuentra en ingeniería de sistemas donde el término se refiere al proceso total de realizar sistemas.

matemático no necesita ponerse en forma numérica para ser útil. Un modelo puede revelar correlaciones y características importantes de una interpretación de una estructura económica, incluso si no es posible proceder con una etapa numérica). Con miras a emplear un modelo matemático, los resultados formales tienen que interpretarse y ponerse en práctica y, con base en tales interpretaciones, se pueden prescribir y llevar a cabo acciones. En el caso del MSCE, los resultados se entregan a los políticos y llegan a influir el debate político y económico y, por último, las decisiones que se toman.

Para resumir, hemos identificado las siguientes como actividades incluidas en el proceso del modelaje matemático puntual: *identificación de un problema, desarrollo de un sistema, matematización, algoritmización e interpretación*, que incluye la *puesta en práctica*. Estas actividades se han mencionado en un orden secuencial. Es obvio que el proceso de modelaje involucra muchos bucles; pero lo más importante es que no necesariamente debe existir un orden secuencial en estas actividades. Puede darse el caso de que un cierto modelo se tenga a disposición y que éste ya se haya aplicado; entonces una interpretación novedosa y diferente confronta al modelo. Esto hace necesario regresar al proceso del desarrollo del sistema para reexaminar las precondiciones generales y, entonces, darse cuenta de que el área problemática puede delimitarse de una manera diferente. El subproceso del modelaje mencionado no puede ponerse en un orden secuencial de ningún tipo. Acabo de delinear una combinación de actividades integradas.

Las actividades de modelaje descritas pueden verse como una especificación posible de una ruta que conduce de las abstracciones mentales a las materializadas (donde ubicamos las interpretaciones e incluimos una puesta en práctica como el paso “final” del proceso de modelaje)¹¹. Las abstracciones mentales se caracterizan como modelos de pensamiento, mientras que las materiales tienen un status diferente: pertenecen a la realidad en sí. Anteriormente traté de especificar el camino en términos de una transición de un tipo de formalización a otro —de una formalización del lenguaje a una formalización de rutinas. Al materializar las abstracciones, se establecen las características fundamentales de la “sociedad de las abstracciones”; y este acto puede discutirse en términos de los elementos de la

11. También es posible usar las actividades de un proceso de modelaje descritas para señalar el camino que conduce de las abstracciones reales a las abstracciones mentales (cuando permitimos que una matematización se vuelva el paso “final” del proceso). Esto indica que es engañoso interpretar el camino que conduce de las abstracciones reales hacia las mentales como el inverso del camino que va desde las abstracciones mentales hacia las materializadas. Los elementos de un proceso de modelaje interactúan de una manera más caótica. No obstante, una perspectiva importante de ese caos es ver cómo las matemáticas se usan como un elemento en un proceso de diseño y esto significa enfocarse en las formaciones matemáticas.

construcción matemática de un modelo: un elemento básico para materializar las abstracciones es la materialización de las especificaciones matemáticas de un sistema desarrollado conceptualmente. El modelaje matemático entonces termina ejerciendo un poder formativo¹².

El modelaje puntual y el extendido se pueden considerar como dos extremos. El modelaje puntual se concentra en problemas específicos imbuidos dentro de un sistema más local y “estrecho”, mientras que un uso más extenso de las matemáticas se encuentra cuando toda un área o parte de la vida social se convierte en el objeto del modelaje. Como se ha indicado, podríamos pensar en nuestro sistema monetario como una mezcla de modelos matemáticos e ideas económicas. Constituye una totalidad de matemáticas congeladas. Si diseñamos un modelo para pronosticar el resultado de algunas inversiones, este modelaje se hallará imbuido en una estructura totalmente matematizada que ejemplifica un modelo extendido, mientras que el modelo particular para efectuar el diagnóstico es puntual. Las actividades descritas como pertenecientes al proceso de modelaje se ajustan más al modelaje puntual. Tal y como he delineado el proceso de modelaje, éste se convierte en una actividad llevada a cabo por grupos particulares de personas. Por el contrario, el modelaje extendido se interpreta mejor si se considera como un producto cultural que parece tener orígenes sociales variadísimos.

Un problema principal relacionado con el proceso de modelaje matemático tiene que ver con el encubrimiento de las nociones previas. Este es el fenómeno de disfrazar la complejidad de la construcción del sistema conceptual que constituye los fundamentos mismos del modelo en sí. Por lo tanto, la identificación de las nociones y comprensiones previas se vuelve *la primera y una de las mayores tareas del conocer reflexivo*. Por lo general se olvida y elimina durante el proceso de modelaje que un modelo matemático no es tan sólo un modelo de la realidad, sino que representa una interpretación específica, basada en un marco conceptual más o menos elaborado y en algunos intereses. En cambio, se desarrolla una metafísica extraña que le adscribe objetividad al modelo en sí. El lenguaje de las matemáticas hace invisible el proceso mismo de la construcción de un sistema y, al hacer esto, dificulta la identificación de la naturaleza del desarrollo del sistema que ha precedido al modelo en cuestión. De acuerdo con la Función Cobb–Douglas, la producción nacional está determinada por la fuerza de trabajo y la inversión de capital. Una metafísica global de la economía se constituye en un modelo económico a través de esta función cen-

12. Es importante observar que se pueden ejercer diferentes posibilidades de presión poderosa a lo largo de los caminos del proceso de modelaje. Algunas características básicas de la vida social se conectan con la manera como la sociedad ejecuta y controla el desarrollo de sistemas y con la manera como permite que algunos de ellos se materialicen tomando la forma de un orden social.

tral que refleja, por ejemplo, el supuesto de que los costos ecológicos quedan por fuera de consideración cuando se describen los patrones económicos.

Algunas veces el proceso del desarrollo de sistemas se apoya en teorías bien establecidas; y este es el caso si el modelaje tiene que ver con fenómenos físicos particulares ya descritos por la mecánica clásica. En este caso, la interpretación previa será de una naturaleza algo diferente si el modelaje se relaciona con la economía. El objetivo de la reflexión es no tratar de eliminar la interpretación previa, sino identificar la naturaleza de las nociones que precedieron al modelaje matemático. Estas nociones previas con frecuencia son arrasadas por el lenguaje matemático y como consecuencia se hace parecer como idénticos a dos modelos si matemáticamente lo son. El proceso de modelaje matemático tiene lugar en contra de los antecedentes que las nociones previas constituyen. Tiene lugar en contra de los antecedentes constituidos por los intereses (políticos, económicos, etc.), dependiendo de la naturaleza y alcance del proceso de modelaje. Más aun, tiene lugar en una situación caracterizada por una cierta distribución del poder, al igual que de una cierta distribución más o menos establecida de teorías y prejuicios. Las estructuras de los intereses, poderes y teorías (o prejuicios) constituyen los antecedentes de un proceso de modelaje. Entonces, *la primera tarea del conocer reflexivo* puede describirse con el siguiente principio: hay que tratar de explicitar las precondiciones del proceso de modelaje que se esconden cuando el lenguaje matemático les aplica un maquillaje de neutralidad.

De acuerdo con Russell, Wittgenstein (en el *Tractatus*) y Carnap, el acto de formalizar un lenguaje natural es un paso epistemológico importante¹³. La riqueza del lenguaje natural tan sólo revela confusión y ambigüedad, las cuales emergen porque la gramática del lenguaje natural es inexacta. El lenguaje natural es, por lo tanto, insuficiente para la formulación de ideas y teorías científicas y, más bien, es una fuente principal de malentendidos. Se vuelve necesario crear un lenguaje mejorado que pueda volverse el lenguaje de la ciencia, un proyecto que el positivismo lógico ha abanderado, en especial Carnap quien vio en el lenguaje formal el fundamento para la unificación de la ciencia¹⁴. Se asumió que un lenguaje formal podía describir la realidad porque la estructura lógica de tal lenguaje “encajaría” en la estructura lógica de la realidad. En el *Tractatus*, Wittgenstein expresó una visión similar al subrayar que los límites del lenguaje coinci-

13. En este contexto, la Teoría de las Descripciones de Russell es importante. Esta sugiere cómo traducir de un lenguaje natural, construido en lo que Russell consideraba como una gramática insuficiente, a un lenguaje formal que no admite la posibilidad de que se presenten ambigüedades.

14. De hecho, Carnap (1937) añadió la idea de que el lenguaje de la ciencia debe ser extensivo, lo cual significa que el lenguaje adecuado para la ciencia es aquel que se desarrolla junto con las ideas de la teoría de conjuntos.

den con los límites del mundo y aquí el lenguaje se interpreta como un lenguaje formal. Las descripciones del lenguaje natural son de calidad inferior a las del lenguaje formal; así que tiene que darse una traducción de la formulación en el lenguaje natural para dejar a un lado la metafísica que se ha construido en él.

En el artículo “The elimination of methaphysics through logical analysis of language” [La eliminación de la metafísica a través del análisis lógico del lenguaje], Carnap explica con gran detalle la debilidad de la gramática del lenguaje natural. Esta permite la formulación de oraciones que son correctas desde un punto de vista gramatical, pero que no contienen ninguna información significativa, i.e., oraciones que no enuncian hechos o hipótesis empíricas. Estas deben considerarse como pseudooraciones. Carnap, por lo tanto, sugiere que el lenguaje de la ciencia debería desarrollarse de una forma tal que sólo aceptase como gramaticalmente correctas aquellas oraciones que tuviesen un contenido científico apropiado. La base para este lenguaje debería ser el lenguaje desarrollado en la lógica formal. Usando este lenguaje como referencia, Carnap da el ejemplo de cómo es posible revelar que diferentes proposiciones del libro *Was ist Metaphysik* [Qué es la metafísica] de Martin Heidegger, proposiciones relacionadas con la Nada y la Ansiedad que son los términos claves en la ontología del existencialismo, no pueden traducirse a una forma lógica inequívoca, ya que violan varios principios de la gramática formal. Tales proposiciones parecen afirmaciones pero, de acuerdo con Carnap, simplemente son tonterías. De esta manera, el lenguaje formal nos libra de un lodazal metafísico. Al purificar nuestro lenguaje purificamos nuestros pensamientos. Los límites de nuestro lenguaje formal se convierten en los límites de nuestro mundo (científico).

En oposición con esta visión, la filosofía del lenguaje natural ha enfatizado que un lenguaje formal tan sólo ofrece una fotografía muy aproximada e imprecisa de la realidad. La riqueza del lenguaje natural es esencial porque crea un potencial descriptivo que una descripción formal nunca podrá alcanzar. En esta tradición filosófica, una formalización se ve como un juego de lenguaje (primitivo) construido sobre unas pocas palabras (los conectores lógicos) que tal vez tienen una “vida civil” en el lenguaje natural tal y como es, pero que, después de haber sido reclutadas para “prestar el servicio militar” en las filas del lenguaje formal, deben comportarse de una manera fija y rígida. Esta posición sostiene que el lenguaje natural contiene una infinidad de posibilidades para otorgar los significados y matices necesarios para una comunicación seria. Un lenguaje formal tan sólo puede convertirse en una máscara muerta e imprecisa de una parte del lenguaje natural. Esta posición es propia de la filosofía del lenguaje natural como la presentan, entre otros, Wittgenstein (en *Philosophical investigations*), Gilbert Ryle y John Langsham Austin. Estas dos posiciones opuestas ofrecen

dos maneras diferentes de mirar las formalizaciones del lenguaje: una formalización puede ser un acto epistemológico productivo o una simplificación rimbombante.

Asociado con esta discusión encontramos otro aspecto de las tareas del lenguaje. En el *Tractatus* se desarrolla un supuesto: el lenguaje ofrece una “imagen de la realidad”. La imagen puede ser precisa o no, pero la tesis que Wittgenstein adjuntó a la Teoría de la Imagen es que un lenguaje formal es capaz de dar la mejor imagen posible de la realidad. En *Philosophical investigations* Wittgenstein se rehúsa a aceptar este supuesto y él mismo se convierte en un crítico implacable de su trabajo anterior y desarrolla una interpretación mucho más rica de las “labores del lenguaje”. En vez de una teoría del lenguaje como una imagen, concibe el lenguaje como una colección de “juegos” y, a través de esto, introduce la teoría del lenguaje como acción. El asunto ya no es más si el lenguaje puede proveer una imagen adecuada, sino que se vuelve una cuestión acerca de qué juegos del lenguaje estamos jugando. La noción de juegos de lenguaje da lugar a la teoría de los actos de habla¹⁵.

Con frecuencia hablamos de los modelos matemáticos desde la teoría de la imagen: el modelo describe un objeto con un cierto grado de aproximación. Sin embargo, esta manera de interpretar los modelos fácilmente repite la falacia del *Tractatus*, i.e., la idea del lenguaje como una imagen de la realidad. Es posible tratar de superar esta falacia no cambiando el modelo sino la realidad, permitiéndole asumir una existencia a los objetos descritos con lenguaje matemático. Entonces, el modelo matemático se puede usar de una nueva manera. En vez de ser una descripción de algo, se convierte en el trazado de un diseño. Esta eliminación de la falacia del *Tractatus* consiste exactamente en el paso de las abstracciones mentales hacia las abstracciones materializadas. El problema es que esta solución de la falacia se aborda de una manera implícita. Seguimos hablando de modelos matemáticos como si describieran algo real, mientras que de hecho prescriben algo potencial. Este fenómeno de la prescripción añade un significado más profundo a la tesis del relativismo lingüístico.

Debo retomar la idea de que estamos “haciendo” algo por medio del lenguaje y, desde esta perspectiva, miraré el proceso de modelaje. Percibir el lenguaje como una acción ofrece una puerta de entrada a los aspectos normativos de las aplicaciones tecnológicas de las matemáticas. Ubicaré cuatro tipos diferentes de juegos de lenguaje involucrados en un proceso de

15. Norman Malcolm, en *Ludwig Wittgenstein: a memoir* [Ludwig Wittgenstein: una memoria], cita el siguiente comentario de Wittgenstein: “Tenemos la idea de un modelo ideal o de una descripción ideal de lo que uno ve en cualquier momento. Pero tal descripción ideal no existe. Hay numerosos tipos de cosas que llamamos ‘descripciones de lo que vemos’. Todas ellas son imprecisas. E ‘imprecisas’ no significa ‘aproximadas’. Tenemos la idea equivocada de que hay una cierta descripción exacta de lo que uno ve en cualquier momento dado” (Malcolm, 1966, p. 50).

modelaje para proporcionar una mejor comprensión de las “irracionalidades” de las abstracciones materializadas. Así podré ubicar los problemas específicos relacionados con las transiciones entre estos diferentes juegos de lenguaje.

Primero tenemos el lenguaje con el que hablamos de la realidad y tratamos de establecer un área problemática. No digo que este lenguaje sea homogéneo, sino que más bien puede describirse como un conglomerado de juegos de lenguaje diferentes; sin embargo, se le puede dar un nombre a este grupo y lo llamaré *lenguaje natural*. Con su uso, tratamos de manejar la realidad. Este se basa en las interpretaciones del sentido común sobre la realidad. Dichas interpretaciones no siempre son consistentes o bien fundamentadas. Pueden incluir malentendidos, confusiones, parroquialismos y prejuicios.

Podemos inventar una terminología especial y usar varios términos cargados de teoría para resaltar aspectos de la realidad, pero éstos no existen como simples componentes en sí de la realidad. El hecho de resaltarlos les otorga un *status* diferente y, por lo tanto, entran a hacer parte de un sistema. El lenguaje del desarrollo de un sistema es diferente del lenguaje natural en la medida en que incluye términos técnicos acuñados como parte de un discurso teórico. La transición de un lenguaje natural a un *lenguaje sistémico* toma lugar como una parte esencial del desarrollo de un sistema. Este lenguaje incorpora términos basados en el marco teórico seleccionado para interpretar la realidad. Si tomamos la economía de nuevo como ejemplo, términos propios de este lenguaje son consumidor ideal, elasticidad de los precios, multiplicador del gasto público, costo marginal, etc. El uso de tales términos posibilita ver nuevos aspectos de la vida económica, a pesar de que ellos no sean como tales hechos puros sino configuraciones elaboradas¹⁶.

Un nuevo paso en el proceso de modelaje se da cuando una matematización adquiere la forma de una transición incompleta de un lenguaje sistémico a un *lenguaje matemático*. En vez de descripciones informales de las relaciones entre ciertos parámetros, se introducen funciones matemáticas específicas. El costo marginal, por ejemplo, se define en términos de la derivada de una función. Dependiendo de cómo miremos el potencial epistémico de un lenguaje natural y de uno formal, podemos describir el camino que se sigue para ir de un lenguaje natural a uno matemático, como un camino semánticamente constructivo o destructivo.

Para hacer el modelo manejable numéricamente, se tienen que inventar algoritmos y este paso también incluye una transición de un lenguaje a otro. Puede darse el caso de que tengamos que dejar a un lado la terminolo-

16. En este caso podemos ver que el lenguaje sistémico tiene uno de sus orígenes en el modelaje matemático extendido.

gía del análisis matemático y aplicar el lenguaje del análisis numérico. Démosle a éste el nombre de *lenguaje algorítmico*. Por último, me permito enfatizar que las transiciones entre los juegos de lenguaje mencionados únicamente ocurren en un orden secuencial en mi descripción. Esta anotación, que el subproceso del modelaje matemático no puede hallar un orden lineal, también significa que no existe un orden natural entre las transiciones de un juego de lenguaje a otro¹⁷.

Un proceso de modelaje involucra transiciones lingüísticas que se caracterizan por ser traducciones incompletas —por esto prefiero el término transición en vez de transformación. El desarrollo de un sistema se constituye en una transición de un lenguaje natural a uno sistémico, mientras que la matematización se convierte en una transición de uno sistémico a uno matemático, etc. Los cuatro juegos de lenguaje mencionados —natural, sistémico, matemático y algorítmico— no son del mismo “tipo” lingüístico. Son diferentes en cuanto a su sintaxis, semántica y pragmática. La sintaxis de las matemáticas no es esencialmente ambigua, en tanto que la del lenguaje sistémico y natural sí lo es. Tenemos que añadir la palabra esencialmente porque el lenguaje de las matemáticas no cumple los estándares de los lenguajes formalizados establecidos por la tradición formalista. Según el formalismo, la gramática de un lenguaje formal tiene que ser no ambigua, pero las matemáticas en uso deben aflojar su corbata de formalidad. No obstante, los lenguajes de programación que controlan los trabajos algorítmicos tienen gramáticas no ambiguas. De manera similar es posible señalar diferencias en las semánticas de los diferentes tipos de lenguajes. El lenguaje natural tiene una semántica tal que permite discutir asuntos normativos, mientras que esto es imposible de hacer en el lenguaje matemático. La transición que conduce de un lenguaje natural a uno matemático, por lo tanto, implica cortar la posibilidad de formular controversias e incertidumbres normativas. El lenguaje sistémico se ubica en el medio ya que puede mantener la puerta abierta para que se dé un discurso normativo. La pragmática, entendida como el contexto del discurso, también se diferencia en los distintos tipos de lenguaje. Tan sólo pensemos en las diferencias entre los grupos sociales para quienes es posible entender y usar los juegos de lenguaje involucrados.

Ningún proceso de traducción nos llevará de un juego a otro. No tiene sentido hablar de una actividad de traducción entre lenguajes de diferentes tipos. Más bien, el paso de un lenguaje a otro constituye un salto irregular —una metamorfosis lingüística. Las transiciones implican la eliminación de posibilidades de discusión, a pesar de que algunas veces algo más pueda ganarse. Podemos asociar diferentes posibilidades de actos de habla con los diferentes juegos de lenguaje que constituyen el proceso de modelaje. El

17. Debe señalarse que aun si tuviese sentido considerar las matemáticas como un lenguaje, no necesariamente tiene sentido identificarlas como tal.

acto de formalizar, por lo tanto, se convierte en una actividad que abre nuevas posibilidades y cierra otras. Es un movimiento entre diferentes alcances de posibilidades para la acción. La tesis de que una competencia tecnológica no incluye la capacidad para evaluar los efectos de las construcciones tecnológicas se puede interpretar ahora en términos de la imposibilidad de traducir entre los distintos tipos de juegos de lenguaje involucrados en el proceso. El lenguaje necesario para identificar las consecuencias no es ni el lenguaje matemático ni el algorítmico. El lenguaje sistémico quizás pueda permitir una discusión de las consecuencias, pero éste está cargado de constructos teóricos y puede estar sesgado en una manera diferente a la de los sesgos del lenguaje natural.

Ahora, entonces, sí podemos especificar una *segunda tarea del conocer reflexivo*: el conocer reflexivo debe abordar los problemas y las incertidumbres asociadas con las transiciones entre los diferentes tipos de lenguaje involucrados en el proceso de modelaje matemático. Un juego de lenguaje tiene puntos ciegos propios. Esto significa que la transición va acompañada de posibles defectos potenciales como, por ejemplo, la eliminación de la posibilidad de un discurso normativo. Las reflexiones tienen que captar las incertidumbres de tales transiciones, no para resolver ese problema —esto no se puede solucionar— sino para crear una consciencia de la naturaleza de las transiciones.

Un acto de habla es una acción; así que ¿qué es lo que hacemos cuando modelamos? Las transiciones entre los juegos de lenguaje son partes de una investigación (tecnológica) que en sí misma es sensible al proceso de modelaje. En este contexto seguimos teniendo en mente el modelaje puntual como el que se mostró en el ejemplo de MSCE. Podemos identificar cuatro aspectos del contexto del proceso de modelaje: la identificación del problema¹⁸, la estructura de la argumentación (que ofrece una fundamentación a las acciones tecnológicas), la base social para críticas y correcciones, y el alcance de las acciones (tecnológicas) posibles.

Debemos entonces a continuación examinar estos aspectos del contexto. Un elemento central del proceso de modelaje es un problema, pero las matemáticas no son una máquina neutral frente al problema investigado: durante el proceso de modelaje podemos esperar que el problema sufra una metamorfosis¹⁹. Las matemáticas influyen sobre la labor de la *identificación del problema*. Un proceso de modelaje (puntual) comienza a partir de un problema (tecnológico). Este problema se redefine dentro del marco de un sistema conceptual y, cuando aplicamos las matemáticas para manejar el problema descrito en el lenguaje sistémico, de nuevo hacemos reformulaciones. Así que, cuando usamos un modelo matemático no debe-

18. Aquí existe un cruce. La identificación del problema se describió como una de las actividades del modelaje puntual, pero decidí incluirla también como parte del contexto para el proceso de modelaje.

ríamos esperar resolver el problema inicial. El modelaje es un medio eficiente de transporte ya que nos conduce a nuevos lugares. O como Lakatos lo expresó: “Después de la experiencia de Colón, no deberíamos sorprendernos de no solucionar el problema que en un principio nos propusimos abordar”²⁰. El problema descrito en el lenguaje natural no conserva la misma forma cuando pasa al lenguaje sistémico y al matemático. Más bien, se descompone, reformula y cambia a lo largo de su travesía lingüística.

El análisis del problema (¡o problemas!) tiene lugar dentro de una cierta *estructura argumentativa*. A ésta la concibo como un tipo de “lógica” para los argumentos permitidos y aceptables dentro del proceso de resolución del problema. Esta argumentación puede tener lugar de una manera más o menos coloquial. No obstante, el modelaje matemático cambia no sólo el lenguaje de la aclaración y la solución del problema, sino que también los aspectos argumentativos del proceso de solución. En los asuntos económicos esta situación es notoria. Toda la creación de modelos macroeconómicos hace surgir nuevas posibilidades para analizar la consecuencia de las decisiones económicas. Los modelos crean diferentes escenarios para el manejo económico y, en particular, crean nuevos argumentos sobre cómo resolver los problemas económicos. Las “lógicas” diferentes que influyen en las interpretaciones y las acciones también se pueden ejemplificar con el MSCE. En este caso encontramos la siguiente tendencia: si las predicciones basadas en el modelo de alguna manera parecen estar de acuerdo con las ideas y expectativas generales del gobierno, entonces los resultados del modelo se toman como un argumento de la base científica y relevancia de las sugerencias económicas. Pero, de otro lado, si el modelo no satisface tales programas políticos, se hace una crítica a los supuestos del desarrollo del sistema. Se cuestionan los presupuestos del modelo; de no ser así, se ignora o se excusa la predicción. Los opositores políticos pueden, como es natural, usar una estrategia opuesta. Esto fenómeno lo identifiqué como un cambio en la estructura de la argumentación. En vez de la estructura argumentativa, también podríamos hablar de la fundamentación de la acción tecnológica. Cuando tenemos una preocupación por la economía, tenemos fundamentaciones para las políticas económicas, quizás pseudorracionales porque se han escondido los supuestos subyacentes a la construcción del sistema. Si aplicamos un modelo matemático para tratar de manejar un problema tecnológico, al mismo tiempo estamos aplicando una herramienta

19. Esto se puede suponer cuando nos metemos con el modelaje puntual; pero con el modelaje extendido, el problema de la orientación no puede suponerse. En este caso el lenguaje matemático llega a expresar algunas abstracciones fundamentales construidas dentro de un sistema metafísico. Y al hacer esto, las abstracciones se vuelven más remotas y se esconden más, pero al mismo tiempo se vuelven más propias de la situación social. Por ejemplo, todos sabemos algo sobre el sistema monetario, pero casi nadie parece ser capaz de expresar los supuestos básicos que le subyacen.

20. Lakatos (1976, p. 9).

que no es neutral con respecto a la estructura de la argumentación, sino que es susceptible de verse influida por las transiciones lingüísticas. Es imposible enunciar, de manera general, si tal susceptibilidad es o no una ventaja. El punto es no bloquear el flujo de fundamentaciones de la acción. Es importante conceptualizar esta historia como parte de las reflexiones acerca del modelaje matemático.

Según Karl Popper, una teoría científica debe conectarse con un conjunto de falsificadores, normalmente no muy bien definidos. Un falsificador es una proposición cuyo valor verdadero contradice el valor verdadero de la teoría en cuestión. Si se encuentra que un falsificador es verdadero, entonces tendremos que refutar la teoría. El conjunto de los falsificadores no debe ser vacío si se quiere que la teoría tenga interés científico. Debe ser posible falsificar una teoría científica; ésta debe estar abierta a la crítica. Sin embargo, estas formulaciones popperianas se pueden reenunciar en términos sociológicos: cualquier teoría debe estar al alcance del grupo de personas que pueden ser capaces de articular una crítica. Es decir, debería ser posible, no sólo desde un punto de vista lógico, sino también sociológico, criticar una teoría. En otras palabras, un grupo de personas debería poder articular una crítica de una investigación tecnológica y de las acciones sugeridas que emanan de esta investigación. Doy el nombre de *base para críticas y correcciones* al grupo de personas para quienes es posible influir un proceso de investigación de la manera antes mencionada. La base entonces está conformada por el conjunto de críticos. Cuando hablamos del modelaje matemático involucrado en una actividad tecnológica, más bien podríamos hablar de la base social para dicha acción o de la base social para el manejo. La tesis es que la base para la crítica es susceptible a la naturaleza de los juegos de lenguaje empleados en el proceso de solución de un problema tecnológico y el lenguaje de las matemáticas determina de manera especial qué grupos de personas son capaces de seguir la travesía del modelaje, desde el área problémica, a la de los algoritmos (ubicada en la selva siniestra de los computadores) y de regreso al fresco y abierto lenguaje natural. Si vamos a examinar la construcción de modelos matemáticos, una cosa por hacer es mirar la historia de las bases para la crítica. Es importante identificar cómo la cantidad de poder que se le delega a diferentes grupos de personas que siguen el proceso de las investigaciones (tecnológicas) puede variar si se usan diferentes medios para la solución del problema. Esta es una de las labores de la reflexión.

En la búsqueda de los efectos del modelaje, también podríamos mirar el *alcance de las acciones posibles* recomendadas como resultado de la investigación tecnológica. Básicamente, un proceso de investigaciones tecnológicas termina en una acción —por contraste con una investigación científica que puede terminar en una verificación o falsificación de algún tipo. Así, cuando miramos el alcance de las posibles consecuencias de la

acción, nos concentramos en los aspectos tecnológicos genuinos del proceso mismo de investigación. Una evaluación ética se hace necesaria ya que el proceso de modelaje afecta su base. Entonces, el área de las acciones posibles constituye un objeto principal para la crítica.

Reflexionar sobre un proceso de modelaje matemático (puntual) incluye estudiar los efectos que el proceso de modelaje tiene sobre los aspectos principales del proceso de investigación tecnológica, i.e., los efectos en la identificación del problema, en la fundamentación de la acción tecnológica, en la base de la crítica y en el espacio que se abre para el manejo tecnológico. Estos aspectos constituyen el contexto de las abstracciones materializadas. De esta manera llegamos a una *tercera tarea del conocer reflexivo*: las reflexiones deben abordar cómo el modelaje matemático afecta de manera global al contexto de la resolución del problema, visto como una empresa tecnológica. Para precisar esta idea aun más: el conocer reflexivo tiene que identificar los poderes formativos de las matemáticas²¹. La descripción de la tercera tarea de la reflexión también muestra que el problema general de la democracia en una sociedad con un alto desarrollo tecnológico se conecta de manera estrecha con los efectos posibles del proceso de modelaje, en tanto éste puede influir en la base de la crítica y corrección.

EL CONOCER REFLEXIVO EN LA PRÁCTICA EDUCATIVA

¿Qué significan dentro de un contexto educativo los resultados del análisis del conocer reflexivo? Naturalmente no necesitamos afirmar que el único significado que se le puede asignar al conocer reflexivo es el de ser conscientes de las formaciones matemáticas, de las incertidumbres asociadas con las transiciones entre los diferentes juegos de lenguaje involucrados en un proceso de modelaje y de las precondiciones escondidas tras una formalización. Sin embargo, es importante ver si esta interpretación de conocer reflexivo tiene un sentido educativo. ¿Es posible en un contexto educativo elemental ilustrar algunas de las tareas del conocer reflexivo mencionadas? (Un problema es que no necesariamente tenemos que ver con un concepto de reflexión lo suficientemente rico como para que sea

21. Las tareas del conocer reflexivo que se han descrito pueden servir para ilustrar el concepto de reflexión. Pero permítanme únicamente señalar algunos resultados inmediatos de lo que se ha dicho y hecho hasta el momento. Para esta exposición se ha tenido en mente el modelaje puntual, lo cual significa que no hemos tocado el modelaje extendido. Entonces, ¿la terminología desarrollada se puede aplicar en general? No supongo que pueda ser así, pero ampliar un poco puede ser útil. Tiene que desarrollarse un análisis de una aplicación extendida como parte de un análisis cultural más amplio. Como ejemplo de este tipo de análisis se puede consultar Swetz (1987).

parte del objetivo educativo de desarrollar una competencia democrática y una ciudadanía crítica.) Para especificar la naturaleza de la alfabetización matemática es importante mirar el conocer reflexivo en un micronivel. Entonces tenemos que concentrarnos en el aula para buscar la fuente de tal competencia. Las características lógicas básicas del conocer reflexivo no tienen que cambiarse necesariamente al dar este paso. Las reflexiones pueden tener todavía que ver con la evaluación de (posibles) soluciones a problemas tecnológicos (que involucren las matemáticas), pero la complejidad del problema tecnológico se reduce.

En el Capítulo 4 discutimos el enfoque temático de “Relaciones económicas en el mundo de los niños”. El tema se dividió en tres subproyectos, de los cuales el tercero tenía que ver con la dotación de un club juvenil. Voy a indicar lo que podría significar el conocer reflexivo, tecnológico y matemático en ese contexto. Los niños debían balancear el presupuesto para que no excediera las 8.000 DKr. En este contexto, el conocer matemático se refiere a la habilidad de los niños para sumar números en abstracto y a la capacidad de resolver un problema como ¿cuántas veces es posible sumar 227 a 6.366 y todavía tener un total menor que 8.000? Este problema puede solucionarse por medios puramente matemáticos. Un problema tecnológico, en mi terminología, es precisamente el tipo de problemas con que los niños se enfrentaron en el trabajo por proyectos; por ejemplo: si compramos balones de fútbol con el resto del dinero, ¿cuántos entonces terminaremos obteniendo? Esta pregunta está enunciada en lenguaje natural y tiene un objetivo fuera de las matemáticas. Los niños emplean una competencia tecnológica cuando planifican lo que van a comprar. Tomar distancia de sus propuestas y mirar las soluciones sugeridas implica reflexionar en una solución tecnológica. Las preguntas, entonces, se convierten en: ¿nuestra propuesta de dotación es satisfactoria?, ¿es mejor que la de otros grupos?, ¿cómo es posible que hayamos podido comprar más cosas que los otros grupos?, ¿acaso nos equivocamos en alguno de los cálculos?, ¿será que ellos compraron algunas cosas muy caras (pero importantes)?, etc. El conocer reflexivo tiene la oportunidad de surgir en el aula al discutir tales preguntas. Aquí vemos una razón para el montaje de un escenario que establezca un contexto para que las discusiones tengan relevancia. El montaje de un escenario puede crear una riqueza semántica que ofrezca puertas de entrada para que ingrese al aula un lenguaje de reflexión que la terminología matemática sola no conlleva.

La distinción entre el conocer reflexivo, el tecnológico y el matemático es analítica. De hecho no somos capaces de identificar tres tipos diferentes de actividades que conduzcan a tres tipos diferentes de conocimiento. Las cosas se mezclan y no son distinguibles. Es posible que los niños aprendan algoritmos para abordar problemas matemáticos y que se concentren por completo en los aspectos matemáticos de ellos. Los niños podrían pregun-

tar significativamente: ¿hemos hecho el cálculo bien? Una competencia matemática puede seguirse incluso si se ignoran los aspectos tecnológicos. Esto es lo que se ha hecho bastante en la educación, bien sea porque rituales rígidos enfatizan las reglas y la formalidad como la esencia de las matemáticas, o porque domina una interpretación estructuralista de la naturaleza de las matemáticas. Los niños también podrían preguntar: ¿hemos hecho el cálculo apropiado?, lo cual conduce a las dimensiones tecnológica y reflexiva. No se pueden comparar y evaluar diferentes propuestas dentro del marco de las técnicas para hacer operaciones y resolver problemas. Esto indica que la distinción analítica entre los diferentes tipos de conoceres es significativa en el nivel de la escuela. La distinción entonces tiene una base en la realidad educativa.

Es posible que los niños se basen en un conocimiento proveniente del sentido común para lograr un objetivo tecnológico y usar técnicas no estándar. Como se señaló en “Relaciones económicas en el mundo de los niños”, las habilidades de los niños aumentaron de manera sorprendente cuando tuvieron que manejar problemas imbricados en sus comprensiones previas. Como es natural, algunas habilidades básicas pueden ser apropiadas para resolver un problema tecnológico, pero no es obvio hasta qué punto éstas sean necesarias. Podríamos considerar el uso de la calculadora, que por cierto los niños disfrutaron mucho. De hecho, un resultado del uso de la calculadora fue separar la competencia matemática, tal y como se les había enseñado de manera explícita, del tipo de competencia requerida para solucionar sus problemas. Cuando la calculadora estuvo presente, no fue necesario recordar los detalles de los algoritmos para la suma, resta multiplicación y división; en cambio, lo importante fue llegar a comprender la naturaleza del problema para entonces poder usar la calculadora: ¿cuántos balones de fútbol podemos comprar con el dinero que nos queda? Contemos cuántas veces se puede sumar 227 DKr. a lo que ya se ha gastado, sin que el total sea más que 8.000 DKr. En términos generales, la competencia para llevar a cabo una tarea tecnológica no es idéntica a la competencia matemática (formal).

Más aun, que los niños resuelvan cantidades de ejercicios donde tengan que ejecutar los algoritmos básicos para calcular no significa que se vuelvan más capaces de evaluar distintas propuestas de compra de equipos. No existen algoritmos para evaluar propuestas diferentes de solución a problemas tecnológicos; para estas reflexiones se necesita mucho más. De otro lado, la capacidad para realizar tales evaluaciones no es independiente de las capacidades tecnológica y matemática. Es necesario tener en cuenta las restricciones de la situación y, entre ellas, cuáles se pueden expresar de una manera matemática: “¿Nuestra propuesta no es satisfactoria porque hay muy pocos balones de fútbol, tenemos que comprar más! Bueno, esto significa que debemos comprar menos lazos para saltar. Pero, ¿de verdad creen que podemos ahorrar suficiente dinero comprando menos lazos?”

No podemos esperar encontrar ninguna relación lineal en el tiempo entre el desarrollo del conocer matemático, tecnológico y reflexivo. No se trata de que los niños primero tengan que adquirir una competencia matemática explícita antes de que sean capaces de usarla para resolver problemas tecnológicos. Tampoco podemos esperar que una competencia tecnológica tenga que desarrollarse antes de que puedan formarse una opinión razonada acerca de la solución propuesta. El movimiento estructuralista en la educación matemática supuso que era necesario enseñarle a los niños primero un orden matemático antes de que fueran capaces de aplicar tal orden. Los enfoques con orientación práctica y las discusiones de la “cognición en práctica” han criticado fuertemente este supuesto. Solucionamos problemas tecnológicos, metidos dentro de nuestra práctica, sin ser capaces de explicar la técnica formal empleada. Así, operamos dentro de un contexto social²². También es obvio que los niños tienen una base amplia para evaluar y formarse opiniones. El conocer reflexivo tiene una base. La educación también es un asunto de desarrollar y explicitar lo que ya de por sí tiene un sustento.

No obstante, incluso si el conocer reflexivo es parte del mundo de los niños, no necesariamente se puede desarrollar en cualquier tipo de situaciones educativas. La situación debe ser abierta. Esta es una condición necesaria (pero, por supuesto, no suficiente) si se desea que las reflexiones jueguen un papel activo en los procesos de enseñanza–aprendizaje. El conocer reflexivo no puede transmitirse a partir de un cúmulo de conocimiento reflexivo establecido, a través de un proceso guiado por el profesor. Se requiere crear situaciones que necesiten reflexión y que los niños perciban que vale la pena tomarlas como el objeto mismo de reflexión. Esto significa que el montaje de un escenario adquiere relevancia como un intento de comunicar la importancia del pensamiento reflexivo. Los problemas de palabras standard no establecen condiciones para la reflexión porque de inmediato ésta se reduce a: ¿hicimos bien la cuenta?, ¿el resultado está presentado de una manera que sea satisfactoria para el profesor? El problema en sí no tiene importancia para los niños y el contenido actual de la solución del problema se vuelve irrelevante. La única cosa importante es el valor instrumentalista de haber resuelto el ejercicio de forma satisfactoria. Esto no significa que los niños no reflexionen sobre lo que sucede en la enseñanza tradicional. Ellos evalúan lo que hacen, pero por lo general este tipo de evaluaciones están condenadas a permanecer en los rincones de sus mentes: “Este tipo de ejercicio es aburrido pero sencillo de resolver, sólo tienes que hacer esto y aquello”.

La idea a la que he tratado de dar significado (y no demostrar) es: *si la alfabetización matemática tiene un papel que jugar en la educación crí-*

22. Por ejemplo, ver Lave (1988).

*tica, similar pero no idéntico al papel de la alfabetización, entonces la alfabetización matemática debe verse como una composición de diferentes competencias: la matemática, la tecnológica y la reflexiva. En especial, el conocer reflexivo tiene que desarrollarse para darle a la alfabetización matemática un carácter potenciador*²³. No es muy necesario decir que esta formulación da lugar a diferentes preguntas: Si es esencial reflexionar sobre los modelos matemáticos reales empleados en los asuntos sociales importantes, ¿podríamos esperar entonces que el conocer reflexivo sea un concepto educativo apropiado? Si tratamos de simplificar la crítica al modelaje real, ¿tendremos por resultado que el profesor llegue a determinar las críticas de los estudiantes? Si tratamos de conectar las reflexiones con la práctica del modelaje en la educación matemática primaria, ¿las reflexiones que allí surgen terminan teniendo algo que ver con las reflexiones del modelaje “real”?

La importancia de la alfabetización matemática como una competencia integrada implica que los principios guías de la educación matemática no se encuentran más en las matemáticas sino en su contexto social. Esto significa un cambio fundamental en el enfoque de la educación matemática y creo que esto es esencial en cualquier reforma educativa que trate de establecer una práctica crítica. La educación matemática tiene que elevarse a un metanivel, como se acabó de argumentar. Esto hace imposible encontrar en las matemáticas exclusivamente lo que se debe incluir en el currículo²⁴. Los desarrollos en las matemáticas no son en sí una razón suficiente para una reforma educativa. Se trata más bien de considerar el papel de las matemáticas en la sociedad y de la posibilidad de ilustrar el poder formativo que de hecho tienen las matemáticas²⁵. Veo que este cambio epistémico es bastante fundamental. No obstante, ninguna base epistémica de la educación matemática le ha prestado suficiente atención a la alfabetización matemática como un concepto integrado y amplio. Por ejemplo, el enfoque

23. Una objeción importante a la distinción entre conocer matemático, tecnológico y reflexivo puede enunciarse así: esta distinción en sí presupone una concepción muy estrecha de conocer matemático. Esta objeción es bastante acertada. No obstante, encuentro la distinción útil para señalar la importancia de integrar una competencia matemática en un contexto más rico. También creo que mi concepción muy estrecha de conocer matemático tiene la fortaleza de describir lo que de hecho se desarrolla en la enseñanza ordinaria de las matemáticas. Esa “fuerza” descriptiva es naturalmente también una debilidad de la educación descrita. La competencia más amplia que he estado buscando es lo que llamo alfabetización matemática. Sin embargo, también he podido haber designado esta competencia con el nombre de conocer matemático. En ese caso, el uso del término conocer matemático podría tener una fuerza normativa, pero un contenido descriptivo débil.

24. Ver Davis (1993).

25. Esto significa rechazar cualquier teoría curricular que se centre en estructuras bien establecidas de conocimiento (como por ejemplo la de P. H. Hirst). Desde tal perspectiva, se vuelve legítimo desarrollar el conocimiento matemático de manera aislada del conocer reflexivo.

constructivista desarrollado a partir del constructivismo piagetiano original concentra su atención en el desarrollo del conocimiento matemático y no dice mucho sobre la importancia de desarrollar una concepción crítica del uso de las matemáticas.

SEIS PUNTOS DE ENTRADA AL CONOCER REFLEXIVO

Me permito describir algunos puntos de entrada al conocer reflexivo, todavía interpretado en el nivel de la educación básica, a sabiendas de que no hay ninguna garantía de que conduzcan al centro de la competencia democrática, ni al concepto de conocer reflexivo en su formulación general relacionada con la evaluación de las tecnologías en la sociedad. Un *primer* grupo de preguntas formuladas por los estudiantes y profesores, acerca de su trabajo en el salón de clase de matemáticas podría ser: ¿hicimos correctamente los cálculos?, ¿seguimos el algoritmo de manera apropiada?, ¿hay diferentes maneras de controlar los cálculos? Estas preguntas se dirigen a los aspectos matemáticos del proceso de resolución de problemas y cualquier intento de responderlas nos llevará de inmediato al campo de las matemáticas. A pesar de esto, las preguntas pueden verse como pasos rudimentarios para reflexionar acerca de lo que se ha hecho. En la escuela, todas las metarreflexiones parecen concentrarse en asuntos de este tipo. El dominio de tales preguntas apoya también la ideología del falso-verdadero, ampliamente difundida e incorporada a la mayoría de las matemáticas escolares.

Un *segundo* punto de entrada se encuentra cuando se formulan preguntas como: ¿hemos hecho los cálculos correctos?, ¿es posible escoger entre distintos algoritmos?, ¿un algoritmo determinado es confiable en cualquier circunstancia?, ¿es sensato? De manera más general podríamos preguntar: ¿hemos usado el algoritmo adecuado?, ¿tal algoritmo es la base correcta para lograr nuestros objetivos tecnológicos?

Las metarreflexiones no deben confinarse a si los métodos empleados son correctos y consistentes, sino que podríamos dar un *tercer* punto de entrada. Las reflexiones podrían referirse a la confiabilidad de la solución en un contexto específico. Aun si los cálculos son correctos y la eficacia de las técnicas se establece, puede no darse el caso de que los resultados sean confiables. Entonces podríamos preguntar: ¿obtenemos un resultado que podemos usar efectivamente como consecuencia de haber calculado de forma correcta y usado los algoritmos de manera consistente?, ¿los resultados son confiables para el propósito que tenemos en mente? Este tercer tipo de preguntas comienza a abordar la dicotomía del falso-verdadero y toma en cuenta el contexto del uso de las matemáticas. Las preguntas se relacionan con los medios y los objetivos. En este caso buscamos el aspecto tec-

nológico, mientras que en los dos primeros pasos apuntábamos a las herramientas matemáticas. Si es importante para los niños y estudiantes que se hagan preguntas de este tipo en el colegio, es importante que las matemáticas estén contextualizadas de manera tal que ellos vean su valor en dichas indagaciones. Refirámonos de nuevo al proyecto “Relaciones económicas en el mundo de los niños”. Incluso si los niños hallan la respuesta correcta a la pregunta ¿cuántos balones de fútbol podemos comprar? usando el método de sumar varias veces consecutivas 227 DKr. a 6.366 y contar cuántas veces esto se puede hacer antes de alcanzar las 8.000 DKr., no necesariamente se produce una respuesta razonable a la tarea original que tiene que ver con realizar sugerencias para la dotación de un club juvenil. Sin embargo, dado que los niños estaban involucrados en tal tarea, se volvió importante para ellos dar un tercer paso en la reflexión. Esto hubiera sido bastante irrelevante en una situación no contextualizada; la tarea entonces hubiera sido solucionar un problema puramente matemático —y eso hubiera sido todo.

Esto nos lleva al *cuarto* punto de entrada para desarrollar el conocer reflexivo. Podríamos formular preguntas como: ¿definitivamente es apropiado utilizar una técnica formal?, ¿de hecho sí necesitamos las matemáticas?, ¿es importante introducir un método formal?, ¿podríamos llegar a una solución sin matemáticas?, ¿la respuesta se basa en un cálculo matemático más o menos confiable y no en interpretaciones intuitivas de la situación en cuestión? Estas preguntas dirigen la atención hacia el hecho de que las técnicas formales y las matemáticas pueden ser herramientas no necesarias para alcanzar un fin tecnológico. En algunos casos, una manera intuitiva de manejar un problema específico puede ser preferible. Una experiencia importante para los niños es que algunas veces sean capaces de llegar a una solución sin las matemáticas²⁶. Cuando las matemáticas siempre tienen que estar presentes en el trabajo se sientan las bases para perpetuar la dualidad entre las ciencias y las humanidades, dualidad de la cual las matemáticas son una de las principales instigadoras. El cuarto grupo de preguntas ataca esa variante de la ideología del falso-verdadero que dice que los métodos formales deben privilegiarse. Los métodos formales pueden tener un mayor alcance en algunas situaciones, pero no siempre funcionan ni dan una respuesta apropiada. El contraste entre técnicas formales e intuitivas puede hacer ver la formalización como una de las muchas formas posibles de manejar un problema, y esta experiencia es importante cuando se desarrolla

26. Esta no es una experiencia problemática, incluso si algunas veces se le concibe como tal, cuando las matemáticas se contextualizan y se encuentra una situación en que los niños pueden resolver los problemas sin las matemáticas. Entonces ellos no se dan cuenta de que las matemáticas son una herramienta importante. Pero esto es tan sólo una consecuencia si la contextualización se percibe como una manera de ilustrar la necesidad de las matemáticas. Empero, este ha sido el axioma detrás de la mayoría de los intentos actuales por contextualizar las matemáticas.

el conocer reflexivo. En el proyecto “La Conejera” los profesores estaban preocupados por la falta de matemáticas en la parte principal del trabajo temático: ¿A dónde se fueron las matemáticas? Parecían haber desaparecido en medio del trabajo por proyectos. Pero esto también se hubiera podido interpretar como una condición positiva para la reflexión sobre la relevancia de las herramientas formales.

Encontramos un *quinto* punto de entrada hacia el conocer reflexivo cuando buscamos consecuencias más amplias del uso de técnicas específicas para solucionar un problema. En los puntos tercero y cuarto, las reflexiones se concentraban en los objetivos tecnológicos de la tarea, pero ahora buscamos fuera del objetivo original de nuestra acción y tratamos de encontrar las implicaciones generales de llevar a cabo una tarea determinada con medios formales. ¿Cómo la aplicación de un algoritmo afecta nuestra concepción de una parte del mundo? Esta es la pregunta que apunta hacia el poder formativo de las matemáticas. Ahora, ¿cómo manejamos esta pregunta en un contexto educativo? Para dar el quinto paso no podemos olvidar que estamos ubicados en un salón de clase. Sin embargo, antes de volver a este asunto, avancemos un poco más.

El *sexto* punto de entrada consiste en tratar de pensar acerca de la manera como hemos reflexionado sobre el uso de las matemáticas. El conocer reflexivo debe referirse a su mismo *status*. Esto concluye nuestro camino hacia la comprensión del conocer reflexivo en las prácticas del salón de clase.

Antes de regresar al quinto punto de entrada, me permito resumir los seis puntos por medio de preguntas claves —y tengo presente que los puntos de entrada tienen una organización analítica (y no más que eso). La lista no indica ningún orden o secuencia, ni dice nada acerca de cómo los puntos de entrada puedan aparecer en la práctica educativa:

- 1) ¿Usamos el algoritmo de la forma correcta?
- 2) ¿Usamos el algoritmo apropiado?
- 3) ¿Podemos confiar en los resultados de ese algoritmo?
- 4) ¿Podríamos hacer algo sin cálculos formales?
- 5) ¿Cómo afecta el uso de un algoritmo, apropiado o no, a un contexto específico?
- 6) ¿Podríamos haber hecho una evaluación de otra manera?

Las dos primeras preguntas se enfocan en la herramienta matemática; la tercera y cuarta, en la relación entre la herramienta y la tarea; la quinta, en el efecto general de perseguir un objetivo a través de la herramienta seleccionada y la sexta, en la forma como nos hemos estado aproximando a los asuntos enunciados en los cinco puntos anteriores.

¿Cómo entonces este significado de reflexión se relaciona con la discusión analítica de reflexionar sobre el modelaje matemático (puntual)? Parece haber una brecha entre las dos descripciones de reflexión. En el contexto de la práctica escolar, no he indicado una aproximación concisa a una investigación sobre el modelo que subyace al desarrollo de los sistemas, ni tampoco a los efectos del modelaje en sí. He formulado las cinco preguntas anteriores de una manera general, pero todavía es desafiante hallar un significado del asunto en un contexto educativo.

Con el quinto punto parece que en definitiva nos hemos salido del salón de clase. ¿Tiene algún sentido explorar la idea del poder formativo de las matemáticas en la educación elemental? Tal perspectiva no se incluyó, por ejemplo, en el proyecto “Relaciones económicas en el mundo de los niños”. Pero, ¿podríamos imaginarnos una extensión del trabajo temático de tal forma que la pregunta tuviese sentido? Miremos más de cerca el segundo subproyecto, los subsidios infantiles, e imaginémosnos que tratamos de formular preguntas más fundamentales sobre el subsidio infantil²⁷. El pago real de los subsidios infantiles en Dinamarca ha variado de acuerdo con diferentes conjuntos de reglas, así que tratemos de explorar estas consideraciones. Supongamos que F , la cantidad de dinero de nuestro fondo, es una cantidad fija. ¿Cómo distribuimos ese dinero entre un número N de familias? Dependiendo de la edad de los estudiantes involucrados en nuestro nuevo proyecto, la pregunta podría especificarse de diferentes maneras. El número de familias podría ser tan pequeño que podría darse una descripción de cada familia: ingreso de los padres, número de hijos, ocupación de los padres, edades de los hijos, condiciones de vida, etc. Se le podría entonces pedir a los estudiantes que sugirieran formas razonables de distribuir el subsidio infantil (S). Una respuesta naturalmente podría ser $S = (F/N)$, pero al menos, podríamos asegurarnos de que sólo las familias con niños recibieran el subsidio. Así, tendríamos que sustraer el número de familias sin niños N_0 , y obtener la nueva fórmula $S = F / (N - N_0)$. Sin embargo, la cantidad de dinero dado a cada familia debería de manera natural depender del número de niños de cada una, así que si el número total de niños es C y el número de niños en una familia específica f se llama C_f , entonces tendremos la fórmula $S = C_f (F/C)$. Pero ¿qué pasa con el ingreso de la familia? y ¿qué implica que uno de los padres viva solo con los niños?, etc.

La pregunta importante es, por supuesto, qué tipo de información sobre las familias se va a utilizar. En un extremo podríamos tener muy poca y en el otro se podría considerar la situación global de la familia, por ejemplo, la distancia de su residencia al sitio de trabajo, la importancia de tener un automóvil para ir al trabajo y para poder recoger a los niños del jardín

27. Esto tal vez no hubiese sido posible en el contexto real en que sucedió “Relaciones económicas en el mundo de los niños”. Las cartas finales de los niños indican que el interés en el tema se había terminado.

infantil. Construir una fórmula en el primer caso no es muy difícil, pero imaginar una en el segundo es casi imposible. El diseño de un algoritmo presupone hacer ciertas simplificaciones y los estudiantes podrían hacer esto durante el proyecto. Podrían experimentar las dificultades que surgen al traer más y más aspectos al sistema formal. La discusión podría con facilidad evolucionar de lo que es razonable y justo hacia lo que es imposible, en relación con la herramienta tecnológica. Lograr ganar una impresión de este tipo de desarrollo es fundamental para comprender el poder formativo de las matemáticas.

Una condición para el uso de un método formal es obtener algún grado de simplicidad. La realidad tiene que reorganizarse para posibilitar la aplicación de las matemáticas. Esta es una comprensión esencial que los estudiantes deben adquirir y ella hace surgir preguntas como: ¿es necesario desarrollar un método formal para tomar decisiones sobre los subsidios familiares?, ¿sería posible confiar en algún tipo de juicio personal para cada caso?, ¿cuáles serían las consecuencias de esto?, ¿sería posible emplear una combinación de las dos, de tal manera que un cálculo formal mostrara el monto “standard” para el subsidio familiar y que un juicio individual permitiera modificar la descripción formal una vez se hayan considerado las circunstancias específicas? El punto es que cuando se decide que algún tipo de método formal se va a usar, también se decide que sólo un conjunto limitado de factores se van a tomar en consideración. Los estudiantes podrían llegar a darse cuenta de que esto es algo que surge del proyecto —y también de que en algunos casos no existen alternativas al proceso de dar forma, a pesar de que existan otras maneras alternativas de ejercer ese poder formativo de las matemáticas. Una vez se fija un algoritmo para la distribución del dinero, una pequeña parte de la vida social también se fija. Las formaciones entonces se convierten en una realidad congelada para mucha gente que no tiene más alternativa que aceptar el resultado del cálculo.

Estas consideraciones indican que es posible ilustrar, en un nivel bastante básico en la escuela, lo que se quiere decir cuando hablamos de que las matemáticas ejercen un poder formativo en la sociedad y, de hecho, le dan forma. Es posible mostrar los efectos del modelaje matemático. Esto es importante si se desea proporcionar una conexión entre el conocer reflexivo (desarrollado en las prácticas del salón de clase) y la competencia democrática (que incluye la alfabetización matemática como uno de sus componentes). No digo que este enfoque será en sí un éxito educativo; mi intención es simplemente mostrar lo que puede significar ilustrar que las matemáticas tienen el poder de dar forma a la sociedad. Si esta sugerencia es realizable, entonces es posible desarrollar más ejemplos dentro de los mismos lineamientos: ¿cómo se pueden estructurar esquemas de pago de impuestos?, ¿cómo pueden estructurarse el pago y los impuestos a la gasolina y el gas,

como parte de una política ecológica general?, etc. De la misma manera como la alfabetización puede referirse a la capacidad para hallar las estructuras políticas e ideológicas de la sociedad, la alfabetización matemática puede significar la capacidad para hallar las estructuras tecnológicas y formales construidas dentro de la sociedad. De otro lado, si todo se vuelve tan difícil como para no encontrar el quinto punto de entrada al conocimiento reflexivo en las prácticas escolares, entonces se pone en duda que la educación matemática crítica sea un proyecto realista. Quizás enfocarse en el poder formativo de las matemáticas no sea la mejor manera de lograr esto²⁸.

UNA ANOTACIÓN SOBRE EL CONOCER

Para identificar un problema tecnológico no es suficiente usar un lenguaje formalizado; los objetivos tienen que establecerse en un lenguaje diferente. La actividad tecnológica se orienta por las metas que se quiere alcanzar, y esta actividad dirigida es el objeto del conocer reflexivo. Con referencia a lo que puede significar el conocer reflexivo en el salón de clase, hemos encontrado que partes de tales reflexiones tratan las herramientas matemáticas empleadas para lograr dichos objetivos, otras partes abordan las relaciones entre las herramientas y los objetivos tecnológicos, otras tienen que ver con las consecuencias de perseguir esos fines con las herramientas seleccionadas y finalmente tiene que ponerse en el foco las reflexiones mismas.

No obstante, esta exposición es muy simple ya que parece introducir una clasificación lógica en el concepto de conocer. No es el caso que primero necesitemos elaborar una competencia matemática para ser capaces de aplicarla en el logro de objetivos tecnológicos y, por último, evaluar lo que se ha hecho. Los diferentes tipos de conoceres se integran de diversas maneras. Cuando los estudiantes en una situación cotidiana se preocupan por los asuntos financieros, ellos se involucran de manera simultánea en tres acciones diferentes. Compran algo y juzgan si éste es razonable como un acto por sí solo. Cuando los niños en “Relaciones económicas en el mundo de los niños” sugirieron qué comprar para dotar al club juvenil, todos los tipos de actividades se hicieron presentes en la misma situación.

Los tipos distintos de conoceres interactuaron en patrones complejos. Los estudiantes cambiaron de una actividad a otra; o más precisamente, se involucraron en una actividad total pero compleja que, desde un punto de

28. Mis formulaciones pueden indicar algunas relaciones entre una aplicación puntual de las matemáticas y el conocer reflexivo en la educación matemática elemental. Pero, ¿qué pensar del modelaje extendido? Tal vez este tipo de modelaje es más relevante para el concepto de ciudadanía crítica. Pero, ¿tienen sentido las reflexiones sobre el modelaje extendido en la educación matemática elemental?

vista analítico, contiene tres diferentes aspectos. En vez de sostener que existen de hecho tres niveles diferentes autocontenidos, creo que existe una red de interrelaciones. Sugiero que se presenta una *red de interrelaciones entre los tipos de conoceres*. Las reflexiones pueden implicar cambios en los objetivos tecnológicos, que a su vez motivan cambios en el uso de la herramienta empleada. Puede ser necesario encontrar herramientas más apropiadas, por ejemplo. No confío en una teoría aditiva del desarrollo del conocimiento, sino más bien en una teoría *reactiva*. La analogía de la red explica mi interés en la semántica multifacética que se mencionó en el Capítulo 5.

Empero, la red se puede destruir fácilmente y esto es lo que sucede con frecuencia en las matemáticas escolares. Los elementos reflexivos se han dejado al otro lado de la puerta de entrada del salón de clases de matemáticas, en el olvido y, en cambio, la educación matemática se ha concentrado en el desarrollo de una habilidad matemática. Varias epistemologías han servido sólo para enfatizar este aspecto. La estructura de red se ha despedazado y se ha promovido un conocimiento matemático autocontenido. Esta separación en la educación destruye el potencial crítico de la educación matemática. Aunque el montaje de un escenario pueda ser artificial, provee aun una manera natural de desarrollar el conocer matemático, tecnológico y reflexivo como una estructura integrada que es posible identificar como la competencia de la alfabetización matemática.

Un paso importante por fuera del aislamiento del conocer matemático es el que ha dado la orientación por aplicaciones en la educación matemática. Muchos ejemplos de las matemáticas aplicadas se han desarrollado para ilustrar la utilidad de las matemáticas. Este es un paso importante, pero fácilmente podría convertirse en un estereotipo, si adquiere la forma de información para los estudiantes sobre la utilidad de las matemáticas. Todo el complejo de los conoceres matemático, tecnológico y reflexivo debe hallar un lugar en la educación matemática. Esta es una condición para el desarrollo de la competencia de la alfabetización matemática. He empleado la distinción entre los tres tipos de conoceres para llamar la atención sobre el hecho de que el conocer reflexivo se ha ignorado en el pasado a pesar de ser vital en cualquier intento por establecer una educación matemática crítica. A pesar de que la distinción es analítica, se ha “materializado” en la educación matemática tradicional y, por lo tanto, la encuentro útil. No obstante, el objetivo no es mantener la distinción sino hacer superflua la necesidad de ella.

CAPÍTULO 7

“SUBSIDIO FAMILIAR EN UNA MICROSOCIEDAD”

La alfabetización matemática se ha analizado en términos de tres tipos de conoceres: el matemático, el tecnológico y el reflexivo. Y se ha aclarado que el conocer reflexivo es la competencia que podría radicalizar la alfabetización matemática. Así, se le ha dado al conocer reflexivo la tarea de catalizar la consciencia crítica. ¿Tiene sentido en la educación matemática elemental tratar de involucrar a los estudiantes en un proceso de crítica a los sistemas que se han establecido por medio de las matemáticas? Como una ilustración educativa, discutiré el proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad”.

He descrito el montaje de un escenario como una herramienta para posibilitar que los estudiantes vean que lo que se ha planeado sucede en el salón de clase. A pesar de que el contenido del escenario es ficticio, puede ofrecer un significado a preguntas como: ¿hicimos los cálculos correctos? y ¿nos las podríamos arreglar sin cálculos formales? El objetivo educativo de ilustrar las formaciones que las matemáticas crean presupone un contexto rico. Más aun, el problema de las transiciones entre los distintos juegos de lenguaje involucrados en un proceso de modelaje no se puede discutir en términos adecuados si el montaje de un escenario no se lleva a cabo. Un escenario puede ayudar a proveer un espacio semántico para formular y discutir preguntas acerca del modelaje matemático y sus posibles efectos. El montaje del escenario puede ofrecer posibilidades para que los estudiantes extraigan preguntas relevantes para desarrollar el conocer reflexivo.

LA ESTRUCTURA DEL PROYECTO

¿Qué escenario deberíamos establecer para darle sentido educativo a las preguntas relacionadas con el poder formativo de las matemáticas? Esta fue una pregunta principal en la planeación del proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad” que tuvo una duración de dos semanas. El profesor, Henning Bødtkjer, y yo decidimos desarrollar la idea mencionada en el Capítulo 6: tratar de describir una microsociedad y, al hacerlo, pedirle a los estudiantes distribuir cierta cantidad de dinero como un tipo de subsidio infantil. Sin embargo, decidimos más bien hablar de subsidio familiar, para

hacer el problema más complejo. Los estudiantes involucrados, 20 en total, tenían entre catorce y quince años. El proyecto se realizó en la Escuela de Klarup, cerca a Aalborg.

Unidad 1

Se discutieron las ideas generales de los subsidios infantil y familiar. Se dividió a los estudiantes en cinco grupos. En la mayoría de los casos hubo dos niñas y dos varones en cada uno. Los mismos grupos deberían trabajar juntos durante todo el proyecto. Se les pidió describir algunas familias imaginarias incluyendo información como la estructura de la familia, el número de hijos, sus edades, el ingreso de los padres, etc. Además podían añadir cualquier otra información que fuera de interés. No se sugirió ningún lineamiento para la descripción. Las familias ficticias, 24 en total, conformaron la microsociedad en la cual se basó el resto del proyecto¹.

Unidad 2

Los estudiantes tenían que discutir los criterios de acuerdo con los cuales iban a distribuir un monto fijo de dinero equivalente a 240.000 DKr. Este monto posibilitaba proveer un subsidio familiar similar al existente en general en Dinamarca. Cada grupo podía verse a sí mismo como las autoridades de un municipio que debían decidir sobre la distribución del subsidio familiar. Más adelante en el proyecto sería posible comparar la administración del subsidio en diferentes municipios. Los estudiantes también tenían que especificar el tipo de información que necesitaban para completar los cálculos necesarios, con base en sus criterios de distribución del dinero.

Se sugirieron muchos criterios, pero también se reveló un gran deseo por introducir cambios. Una de las razones para esto fue que los criterios sugeridos para la distribución podrían ser muy difíciles de manejar en la práctica. Así que ya en esta etapa inicial los estudiantes estaban ejerciendo un cierto grado de autocensura.

Unidad 3

Los estudiantes recibieron el boletín *Círculo familiar*, una edición agradable, mecanografiada de sus descripciones. Henning y yo consideramos importante no distribuir las descripciones de las familias con la escritura a mano original de los estudiantes, sino darles la autoridad de un formato atractivo. Los estudiantes gastaron algún tiempo leyendo las historias y buscando las suyas en el boletín. Fue importante que compartieran la experiencia. En dos de los grupos uno de los estudiantes leyó en voz alta del *Círculo familiar* mientras que los otros escuchaban y hacían comentarios.

1. En las siguientes secciones de este capítulo se encuentran algunas descripciones de las familias. Una posibilidad fue usar las familias verdaderas de los estudiantes como una fuente para la descripción, pero esta posibilidad podría fácilmente generar problemas e incertidumbres. Así que preferimos hacer una microsociedad imaginaria.

Se veía que tenían la intención de conocer su sociedad. Uno de los grupos también comenzó a tomar notas para el trabajo posterior.

Henning y yo añadimos algunas familias a la microsociedad porque los estudiantes se fascinaron con familias bien organizadas, con buenos salarios y niños “felices”. Se dieron algunas excepciones, por supuesto; pero Henning y yo añadimos algunas familias problemáticas.

Unidad 4

Durante el estudio del boletín, los estudiantes se dieron cuenta de que era difícil tener una visión general de la microsociedad. Esto facilitó que el profesor sugiriera que se podría digitar los datos en un computador. Los grupos, por lo tanto, tenían que leer cuidadosamente el *Círculo familiar* y seleccionar la información relevante para sus principios de distribución. La labor de los estudiantes era crear una base de datos.

Para digitar los datos en el computador era necesario interpretar lo que se decía en el *Círculo familiar*. También se evidenció que las descripciones del boletín eran insuficientes en algunos aspectos. El grupo tenía que tomar decisiones sobre la información que hacía falta. La manera normal de hacer esto era preguntándole a los estudiantes que habían inventado la familia; al menos ellos podrían saber. Con frecuencia los estudiantes tomaban una decisión rápida: “Veo que falta la edad de los niños. Bueno, como la familia vive en la calle 13, ¡la edad de los hijos también debe ser 13!”

Unidad 5

Los grupos tenían que especificar el algoritmo de distribución. En consecuencia, la terminología tenía que ser semimatemática o semialgorítmica. En esta fase se evidenció que con frecuencia los criterios generales formulados inicialmente eran insuficientes, poco claros y ambiguos. Como la tarea consistía en hacer los cálculos, surgieron nuevos requisitos sobre la precisión de los enunciados y los criterios. Si los estudiantes creían que el ingreso de los padres era relevante, la descripción debía incluir, por ejemplo, si querían ajustar el subsidio familiar de acuerdo con una escala incremental o con una proporción. La base de datos permitía a los estudiantes obtener nueva información fácilmente, por ejemplo, ¿cuántas familias tienen un ingreso total inferior a cierta suma de dinero?²

Una manera de controlar si un algoritmo era lo suficientemente específico o no era imaginar que tenían alguien que les ayudara a hacer los cálculos. Si eran capaces de explicarle a esa nueva persona que desconocía la situación, cómo hacer el cálculo sin tener que explicarle todos los principios generales para la distribución, el algoritmo del grupo era lo suficiente-

2. Se hizo obvio que contar con la base de datos influyó la manera como los estudiantes manejaron la distribución. Por ejemplo, fue más fácil pensar en términos de incrementos en vez de proporcionalidad.

mente específico. Esta definición de algoritmo fue entendible y aceptable para los estudiantes.

Las aplicaciones de los algoritmos se volvieron más imaginativas de lo que esperábamos, y el paso de un modelo matemático a un algoritmo no evolucionó de manera clara en el proyecto. Una de las estrategias fue simplemente comenzar con alguna cantidad arbitraria de dinero que se le debía dar a cualquier niño, después encontrar cuánto dinero sobraba y, por último, hallar cómo distribuir el resto.

Unidad 6

Los grupos debían completar una lista que indicara el dinero recibido por cada una de las 24 familias del municipio. Fue interesante comparar los cinco municipios y se hizo en el tablero una lista similar a la que aparece en la Tabla No. 1. Las familias se tomaron una por una y, mientras el profesor leía en voz alta la descripción de la familia, los distintos grupos escribían en el tablero lo que habían sugerido dar a esa familia. Esto permitió hacer una comparación directa. ¿Cómo difiere el tratamiento dado a cada familia en cada municipio? Entonces se podían formular de inmediato las siguientes preguntas: ¿por qué se trataron de manera tan diferente?, ¿qué política social se adoptó en los diferentes municipios?, ¿se revela una tendencia de izquierda o de derecha?, ¿puede ser ventajoso para una familia pasarse a vivir a otro municipio? Un comentario en común que surgió de los grupos en la discusión fue: “Estamos de acuerdo en que existen diferencias, pero en todo caso hicimos los cálculos de manera correcta”.

Unidad 7

Los grupos debían escribir una carta a algunas de las familias diciéndoles cuánto dinero iban a recibir y cómo el municipio había calculado dicha suma. Esta tarea tenía la intención de forzar a los estudiantes a recapitular lo que hicieron cuando calcularon el monto de los subsidios.

Unidad 8

Planeamos regresar a una discusión general sobre los principios de la distribución pidiéndole a los estudiantes decidir sobre un sistema final de distribución. En este paso la discusión se concentraría en el conflicto entre lo que se consideraba justo y lo que era manejable desde un punto de vista técnico. Este conflicto es esencial en la discusión del poder formativo de las matemáticas. Pero la discusión no se llevó a cabo con gran detalle.

Los aspectos principales del poder formativo de las matemáticas se tocaron al comparar la distribución del subsidio familiar con otros tipos de regulaciones sociales donde se puede observar fácilmente el conflicto entre lo que es posible manejar y lo que es razonable y justo.

COMENTARIOS SOBRE EL PROYECTO

Cada familia de la microsociedad tenía un número oficial, lo cual facilitó comparar las diferentes sugerencias de cada uno de los grupos. A continuación presento algunas de las descripciones de las familias.

Familia 3

La familia Westergaard vive en un apartamento al occidente de Copenhague. Laila tiene 5 años y juega hockey en el hielo cada lunes y miércoles. Ella recibe 5 DKr. a la semana como dinero de bolsillo, porque tiene 5 años. Está ahorrando dinero para comprarse un nuevo palo de hockey. Esben tiene 10 años y está aprendiendo a tocar el saxofón cada martes. Cada viernes participa en un grupo de danza folklórica. Recibe 10 DKr. semanales como dinero de bolsillo, porque tiene 10 años. Después está Tor-kild quien tiene 14 años. El no tiene ninguna ocupación especial en su tiempo libre, aparte de coquetearle a las chicas. Recibe 50 DKr. como dinero de bolsillo cada semana. Por último está la hermana mayor Pía. Tiene 21 años. Ella no vive ya con la familia, sino que vive con su compañero. Ella no trabaja sino que recibe un subsidio de desempleo, pero el dinero que recibe no le alcanza para mucho. El padre de los niños se llama Eskild, tiene 56 años y trabaja como vendedor en un almacén. Su salario es de 14.493 DKr. al mes. La madre se llama Christina y tiene 37 años. Ella tiene un club de tejido con unas amigas los martes. Acabó de comprar un abrigo de piel que le costó 5.000 DKr.; así gastó sus ahorros. La mamá de Eskild, quien estaba ya muy vieja, murió hace poco y les dejó 20.000 DKr. Con este dinero pagaron sus deudas y les sobraron 5.000 DKr.

Familia 12

Lars es un niño pequeño que vive en el campo. Su padre cría cerdos y gana 10.000 DKr. al mes. Tienen problemas para subsistir una vez han pagado los impuestos y por eso Lars no puede tener el caballo que ha deseado tener desde hace dos años. Todos los de su clase (el grado séptimo) compraron un computador, pero Lars, en cambio, compró una llanta nueva para su vieja bicicleta que tiene 10 años. Todos compran ropa nueva todo el tiempo, pero Lars tiene que usar la ropa que su papá usaba cuando era joven. En varias ocasiones la finca de su papá ha estado a punto de ser vendida por orden de la Corte, pero todas las veces su papá ha podido evitarlo en el último momento. El heredó algún dinero pero lo gastó en renovar la finca hace dos años.

Familia 19

La familia Spore está conformada por Magnus Spore (padre, 40 años), Grethe Spore (madre, 39 años), Willy Spore (hijo, 15 años) y Anne-Marie

Spore (hija, 14 años). El padre es el vicepresidente de “Los Ganadores”, el club de equitación más grande de Dinamarca y gana un salario mensual de 45.333 DKr. La madre dirige la escuela de equitación llamada “Findstrupgaard”. Ella trabaja como instructora de equitación y se ha vuelto una de las más famosas instructoras de toda Escandinavia. Su hijo Willy y su hija Anne-Marie están en grado octavo en el colegio “Skipper Clements”. La familia vive en la hacienda Findstrupgaard. Tienen 20 caballos, 5 vagones, 2 camionetas, 1 BMW y 1 casa de recreo en California donde van de vacaciones cada verano. Una vez se ganaron 6 millones de coronas, libres de impuestos, en una lotería. También heredaron mucho dinero del padre de Grethe.

Familia 24

Hace poco Aase Hansen consiguió empleo en una cafetería ubicada en una calle llamada Bygaden. Parece que es un trabajo permanente. Ahora se gana 11.500 DKr. al mes. Ella tiene dos hijos quienes se la pasan incitándose entre sí: Jacob dice que Iben no hace sino engordar y ella dice que él se come todos sus caramelos licorados. Jacob tiene 12 años e Iben, 14. Hace medio año, Aase Hansen comenzó a vivir con Frede Jensen, quien tiene un apartamento más bien grande. Frede Jensen nunca se ha casado. El es un trabajador no cualificado y ahora tiene un trabajo permanente en una compañía de transporte marítimo. La mayoría del tiempo Aase, Jacob e Iben viven solos en el apartamento de Frede, pero cuando él está de vacaciones disfrutaban mucho de estar juntos. Aase y Frede no se van a casar, sino que prefieren la situación tal como está. Cuando Frede está en casa, comparten los gastos. Frede gana 21.000 DKr. mensuales. Jacob e Iben sólo reciben dinero de bolsillo cuando Frede está en casa. Una vez les dio 200 DKr. a cada uno.

La mayoría de las familias de la microsociedad eran buenas familias; pero también se incluyó la descripción de una familia de un trabajador extranjero, con siete hijos y su esposa embarazada de nuevo. Esta familia (la número 4) provocó algunas discusiones: las personas de culturas extranjeras no siempre son bien recibidas en Dinamarca. La familia 23 tenía un niño lisiado y necesitaba usar una silla de ruedas y otros equipos muy costosos.

Como se mencionó, los estudiantes debían discutir y establecer sus criterios generales para la distribución del dinero. El grupo 4 comenzó formulando los siguientes principios. Con base en ellos el grupo debía encontrar qué información incluir en la base de datos:

- 1) Las familias que ganan mucho dinero deben recibir menos que las que ganan poco.
- 2) Si los hijos son mayores de 18 años, la familia no debe recibir nada.

- 3) Si la familia tiene sólo un niño y gana bastante, no debe recibir nada. Pero si tiene más de un hijo, debe recibir una cantidad de acuerdo con sus necesidades.
- 4) Las familias con hijos muy pequeños o con adolescentes deben recibir un apoyo adicional.
- 5) Un padre o madre que vivan solo(a) con sus hijos debe recibir un apoyo adicional.

El grupo 3 formuló el siguiente criterio para la distribución: “cada familia debería recibir lo mismo, independientemente de su ingreso y del número de hijos”. Sin duda tal principio evitaría al grupo trabajo adicional. De forma interesante, no obstante, el grupo llegó a esta conclusión después de una larga e intensa discusión. Uno de los principales argumentos era que también es costoso *no* tener hijos. Una pareja sin hijos con frecuencia quiere tenerlos y en muchos casos esto significa que la pareja se debe someter a diferentes tratamientos médicos; y una de las clínicas danesas especializadas en problemas de fertilidad cobra muchísimo a sus pacientes. Más tarde el grupo cambió su principio radical y se involucró en un proceso de modelaje más complejo.

El grupo 2 hizo unos cálculos que pueden servir para ilustrar la naturaleza *ad hoc* de los algoritmos usados. Primero establecieron que el monto total de dinero a distribuir era 240.000 DKr. y que había 45 niños en la microsociedad. Después de algunos cálculos adicionales éste número se cambió por 51. A partir de éste, calcularon el porcentaje del monto total que cada niño debería recibir (1,961%). Luego, estipularon cinco intervalos de ingreso:

- 1) por encima de 650.000 DKr.
- 2) entre 650.000 y 480.000 DKr.
- 3) entre 479.999 y 320.000 DKr.
- 4) entre 319.999 y 200.000 DKr.
- 5) entre 199.999 y 0 DKr.

Entonces revisaron los criterios: las familias que ganan más de 650.000 DKr. no deben recibir ningún subsidio y las familias que ganan menos deben recibir más que las familias que ganan más. Y entonces ajustaron los porcentajes de lo que debe recibir cada niño dependiendo del intervalo de ingreso en el que se ubica la familia. Entonces, los cinco porcentajes fueron, respectivamente:

- 1) 0%
- 2) 0,980%

- 3) 1,307%
- 4) 1,961%
- 5) 3,945%

Obtuvieron estas cifras tomando como base el porcentaje promedio y modificándolo de acuerdo con los niveles de ingreso. Después de algunos cálculos el grupo encontró que todavía sobran 53.336 DKr. por distribuir. También quisieron repartir este dinero, así que hicieron modificaciones leves en los diferentes porcentajes (no sé cómo llegaron a estas nuevas cifras):

- 1) 0%
- 2) 0,987%
- 3) 1,975%
- 4) 2,469%
- 5) 3,457%

Después de esto todavía les sobran 2.897 DKr., pero dado que el tiempo se había acabado, el municipio decidió ahorrar este dinero. Este grupo estaba un poco sorprendido de que su primer cálculo no hubiese sido exacto. Ellos creían que su procedimiento original no era una manera *ad hoc* de hacer los cálculos, sino que, por el contrario, era bastante exacta. La lista de las distribuciones sugeridas por los cinco municipios se muestran en la Tabla No. 1. Es interesante comparar las sugerencias. Parece haber algún acuerdo general. La familia 4 recibió la mayor suma de dinero en todos los municipios, Esta era la familia del trabajador extranjero. También hubo un acuerdo en que la familia 14 no debía recibir nada porque estaba conformada por un anciano que iba a celebrar su cumpleaños número 90, junto con sus hijos y nietos. En general las sugerencias de los diferentes grupos no excedieron las 240.000 DKr. En el grupo 4, la diferencia es más bien alta, pero como ellos explicaron: “Nuestro municipio tiene que ahorrar algún dinero siempre que sea posible”.

Finalmente se le preguntó a los estudiantes si habrían distribuido el dinero de una forma diferente o no, si no hubieran tenido que usar las matemáticas. Algunos comentarios fueron:

Bueno, pienso que hubiéramos distribuido de manera diferente el dinero si no hubiésemos tenido ningún modelo. Hubiéramos tenido en cuenta algunas cosas más. Pero en todo caso hubiéramos tenido que considerar el ingreso, el número de hijos y su edad, tal como lo hicimos en nuestro modelo. Sin embargo, tal vez también habríamos tenido en cuenta el total de posesiones de la familia. Tal vez hubiéramos hecho una escala más refinada. Por ejemplo, yo le hubiera dado a la familia 13 un poco más de 8.814 DKr. que fue lo que le dimos (Grupo 1).

Nuestra distribución se basó en el modelo que hicimos. No creo que hubiéramos podido distribuir el dinero de manera diferente. Yo no hubiera podido. Creo que el dinero se repartió de una forma justa ... de hecho, pienso que sólo los padres que en realidad no tienen manera de mantener a sus hijos deberían recibir dinero. Los otros no lo necesitan (Grupo 3).

De alguna manera creo que hubiera hecho algo diferente, si hubiera tenido una descripción más completa de la familia. Algo más se hubiera podido considerar como si, por ejemplo, los padres divorciados recibían otros tipos de subsidios (Grupo 5).

Familia	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
1	13.907	20.940	13.333	9.880	10.077
2	8.814	8.381	13.333	6.000	5.043
3	18.314	18.069	19.999	12.000	7.543
4	46.128	42.161	46.665	19.600	35.077
5	3.000	0	0	0	2.543
6	8.814	18.069	6.666	11.800	15.077
7	18.314	12.571	19.999	8.800	7.543
8	32.221	20.052	33.332	14.600	12.543
9	9.500	6.023	6.666	4.000	5.077
10	8.814	8.381	13.333	8.000	5.043
11	6.000	0	0	0	5.043
12	4.707	6.023	6.666	5.000	5.077
13	8.814	20.940	6.666	6.000	10.077
14	0	0	0	0	0
15	3.000	0	0	0	2.543
16	0	5.755	0	1.800	5.043
17	6.000	0	0	0	0
18	8.814	12.046	13.333	8.332	5.043
19	6.000	5.755	0	4.000	5.043
20	6.000	5.755	0	1.800	5.043
21	4.407	12.046	6.666	2.800	2.543
22	6.000	0	0	1.800	5.043
23	8.814	5.755	13.333	5.800	5.043
24	8.814	8.831	13.333	1.000	10.077
Total	245.196	237.103	233.323	133.012	171.184

Tabla N° 1. Las distribuciones sugeridas por cada “municipio” o grupo de estudiantes

EL CONOCER REFLEXIVO EN EL PROYECTO

En un proceso de modelaje suceden transiciones entre diferentes juegos de lenguaje. Este tipo de transiciones se pueden encontrar en el proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad”. El *Círculo familiar* constituye la “realidad” de acuerdo con el montaje del escenario. La primera transición lingüística tuvo lugar cuando se elaboró la base de datos. Los estudiantes tuvieron que analizar las descripciones de las familias y, del montón de información, seleccionaron lo que era relevante para formar la base de datos. Este paso es similar al del desarrollo de un sistema en general, que presupone interpretaciones de la realidad. Al menos dos tipos de interpretaciones tuvieron lugar cuando los estudiantes crearon la base de datos. Primero, hubo que tomar decisiones sobre qué información era la relevante y esta decisión dependía de los criterios de distribución seleccionados. Por ejemplo, se tenía que decidir si las edades de los hijos eran o no relevantes —y, ¿qué decir de las edades de los padres? Naturalmente una solución era incorporar mucha información en la base de datos, pero incluso esto dependía de una interpretación (en la descripción de una de las familias se mencionó que uno de los niños tenía pecas y esta información no se incluyó en ninguna de las bases de datos). Más aun, la información se había enunciado de manera coloquial y algunas veces se necesitaba una interpretación para destilar la información en forma de números. Por ejemplo, ¿cómo podría ponerse en la base de datos la información sobre una familia en la que la pareja está separada, el padre vive con su secretaria, los niños viven la mayor parte del tiempo con la madre y el padre no le da una cantidad de dinero suficiente a la madre para el sostenimiento de los hijos?

Tanto la decisión sobre el alcance de la información relevante como la cristalización de la información en la forma de “datos” suponen una cierta perspectiva. Recolectar datos es una actividad compleja. En la descripción general del proceso de desarrollo de un sistema se mencionó que tal desarrollo se basa en un marco teórico más o menos fundamentado y en un conjunto más o menos sesgado de intereses. Los datos no son el reflejo especular de alguna realidad objetiva, sino que representan una perspectiva condensada. Establecer unos datos como la base de un sistema es un proceso creativo. Es un acto que se lleva a cabo a través de un lenguaje sistémico. Esta concepción se reprodujo en el proyecto y los estudiantes tuvieron que modelar un sistema cuya naturaleza es similar a la del verdadero proceso de desarrollo de un sistema.

Una transición lingüística diferente tiene lugar cuando se especifica un algoritmo matemático de distribución. En el proyecto se hizo difícil distinguir entre una matematización y el desarrollo de un algoritmo. De hecho, parece haberse dado un paso directo desde el sistema desarrollado hacia un algoritmo. Una vez los estudiantes seleccionaron su conjunto de datos, trataron de describir cómo distribuir el dinero antes de tratar de hacer un

modelo matemático general. En un principio delineé las diferentes actividades del proceso de modelaje matemático con un orden en el tiempo pero, como se dijo, tal orden puede conducir a confusiones. También se dio durante el trabajo en el proyecto el hecho de que el desarrollo de un algoritmo para la distribución influyera en los criterios de distribución de los estudiantes. De manera implícita cambiaron los principios de distribución de acuerdo con lo que encontraron más manejable. Las dos transiciones, la del desarrollo del sistema y la del desarrollo del algoritmo, se convirtieron en las dos transiciones principales en el proyecto.

Cuestiones fundamentales diferentes se conectan con la formatividad, la acción del poder formativo de las matemáticas. Una tiene que ver con la falta de armonía entre lo valioso y lo manejable. Esta falta de armonía también se encuentra de manera general cuando se da solución a los problemas sociales usando medios tecnológicos. El conflicto puede tomar la siguiente forma: encontramos que la mejor manera de resolver un problema es ésta; sin embargo, la única solución técnicamente viable es aquella. La estructura de tal conflicto indica cómo una discusión que se refiere a las visiones e ideales se substituye por una discusión sobre las posibilidades técnicas. Esta substitución con frecuencia acompaña a las formaciones matemáticas. Los juegos de lenguaje involucrados en el proceso de modelaje no dejan mucho espacio para el discurso ético.

Un problema educativo surge cuando se mira qué tanto es posible o no crear una situación en la que los estudiantes puedan darse cuenta de tal conflicto. No obstante, durante el desarrollo de los algoritmos para la distribución del subsidio, los estudiantes se acercaron a problemas de esta naturaleza: “¡no podemos hacerlo así porque nos demoraríamos mucho! Si tomamos en cuenta ese factor no vamos a terminar nunca!”. Durante el proyecto el conflicto algunas veces se resolvió simplemente olvidando los criterios originales propuestos. Los estudiantes también deseaban terminar el trabajo. Durante el trabajo inicial en grupos, se fijaron algunos criterios para la distribución “ideal”, pero dada la complejidad de (incluso) la microsociedad, estos ideales eran imposibles de alcanzar. Cuando se aplicaron las matemáticas, se introdujeron simplificaciones. Durante el proceso de desarrollo del sistema, las visiones de una acción ideal se transformaron en cálculos manejables. Lo que es técnicamente posible sustituyó a lo que tal vez se había considerado óptimo. La discusión de las normas y valores puede eliminarse fácilmente por la discusión de las posibilidades técnicas. Esta objetivización es un aspecto general de la formatividad de las matemáticas. Los estudiantes que participaron en el proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad” tuvieron la oportunidad de sumergirse en la discusión de tal fenómeno.

Estos comentarios que han resaltado las características del proceso de modelaje han sido un poco negativos. De manera implícita se han conec-

tado estrechamente con una interpretación de la relación entre lenguaje natural y lenguaje formal: la interpretación muestra que el paso de un lenguaje natural rico a una gramática formal rígida ignora posibilidades importantes de obtener nuevas percepciones. Se han usado términos como simplificación y hacer las cosas manejables. Tal como se ha presentado en esta sección, la formatividad matemática se ve principalmente como algo problemático, y, por lo tanto, las reflexiones tienen que ver con las limitaciones y dificultades. El proceso de modelaje, por decirlo así, se ha descrito como una variante de una *alquimia inversa*.

Es claro que es posible encontrar otras interpretaciones que podrían dar credibilidad a los que apoyan la formalización y no aceptar el panorama prometedor que pintan los filósofos del lenguaje natural. Al usar las matemáticas algunas veces se pueden encontrar soluciones que no son posibles de identificar si no se emplearan. El modelaje tiene que ver con una transición entre juegos de lenguaje y la gramática de las matemáticas también ofrece posibilidades inalcanzables por medio del lenguaje natural³. Es necesario no concebir la transición de los criterios verbales a las matemáticas como algo que siempre conduce a la simplificación y a la concisión. Durante el desarrollo de un sistema algo puede perderse, pero también se puede ganar algo diferente. Si, por ejemplo, se fuera a distribuir el subsidio familiar sin ningún tipo de algoritmo, entonces la distribución estaría sujeta a principios más arbitrarios. Desarrollar un algoritmo matemático también implica una manera de discutir y de obtener principios universales. Las matemáticas pueden ofrecer a la discusión un conjunto de argumentos más fuerte y, por lo tanto, también el resultado de un modelaje matemático puede ser la obtención de unas “reglas de oro”.

COMPRENDER LA FORMATIVIDAD

La ilustración del poder formativo de las matemáticas es un aspecto esencial en “Subsidio familiar en una microsociedad”. Las matemáticas “congelan” el algoritmo de lo que se debe hacer y, en este sentido, el modelo matemático (implícito) se vuelve un principio para la acción. El modelo manifiesta normas para la distribución. Se ha enfatizado que la tesis del poder formativo de las matemáticas no sugiere que las matemáticas sean el único agente del desarrollo social. Más bien nos preocupa la interrelación entre diferentes fuerzas, una de las cuales son las matemáticas. También se ha enfatizado que la tesis no implica que las matemáticas, como tales, posean un poder formativo. Pero entonces, ¿en qué sentido pueden las matemáticas alterar la sociedad?, ¿cuál es el significado del término matemáticas en tales formulaciones? Es obvio que no tiene mucho sentido susti-

3. Volveré a este asunto en mis comentarios del Capítulo 9 sobre el proyecto “Energía”.

tuir matemáticas por matemáticos. No se le puede dar una interpretación concebible a una afirmación como los matemáticos están dándole forma a nuestra sociedad. El proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad” se llevó a cabo para ofrecer una ilustración educativa de las formaciones matemáticas, pero a su vez indica que el término formación necesita considerarse de manera más profunda.

La formatividad se describió originalmente, en términos abstractos, como el camino que conduce de las abstracciones mentales a las abstracciones materializadas. Esta terminología ofrece una formulación idealista del potencial de las matemáticas y sus efectos. Empero, el hecho de que haya reformulado la materialización de abstracciones como algo que se ocupa de las transiciones entre diferentes juegos de lenguaje de por sí transforma la concepción original. El término juegos de lenguaje lleva el pensamiento antropológico al campo de la filosofía del lenguaje. Al hacer enunciados como las matemáticas están dándole forma a nuestra sociedad, de por sí estamos construyendo una entidad abstracta; una reificación de las matemáticas tiene lugar. Entonces parece ahora relevante hablar acerca de la comunidad matemática como un grupo socialmente constituido que produce resultados que tienen un uso posible en un contexto diferente. Tal aproximación está más de acuerdo con lo que de hecho se ha ilustrado en el proyecto. La formatividad también se refiere a un contexto social y, por lo tanto, la expresión las matemáticas están dándole forma a nuestra sociedad es una abreviación de la siguiente formulación. La comunidad científica de matemáticos es un grupo socialmente constituido, socializado en el paradigma de la práctica matemática que puede definirse por diferentes “coordenadas”: un lenguaje que puede describirse como semiformal, un conjunto de visiones metamatemáticas, un conjunto de preguntas aceptadas, un conjunto de métodos aceptados y un conjunto de enunciados aceptados⁴. Y este paradigma produce las herramientas por medio de las cuales se pueden alcanzar los objetivos tecnológicos de una manera nueva y efectiva. Al dar los equipos y herramientas analíticas para la acción tecnológica, el producto de la práctica matemática llega a jugar un papel único en nuestra sociedad.

No aspiro a dar ninguna interpretación de las matemáticas como el motor primario de la sociedad. Tenemos que reconocer una interacción y siempre necesitamos considerar diferentes fuerzas sociales, una de las cuales son los intereses económicos y otra el desarrollo tecnológico. No trataré de establecer un determinismo al argüir que las fuerzas económicas dominan, ni un determinismo tecnológico al defender que la tendencia interna de la tecnología específica el desarrollo social. Sólo apoyo la existencia de una

4. Para una discusión más detallada de estas coordenadas de la práctica matemática, ver Kitcher (1984).

interacción de diferentes fuerzas, en la que los resultados del paradigma de la práctica matemática tiene un papel que jugar. Si recapitulamos lo que sucedió en el proyecto, encontramos que las matemáticas como una herramienta tecnológica interactúan con una política para establecer un sistema de distribución; pero la herramienta no está subordinada a los principios para el desarrollo del sistema, ni tampoco domina por completo los objetivos originales; sino que hay una interacción. Dejemos que éste sea el significado de la expresión las matemáticas están dándole forma a nuestra sociedad⁵.

Un objetivo de las reflexiones es captar la naturaleza de las formaciones matemáticas y, en consecuencia, ayudar a definir la alfabetización matemática como una competencia crítica general. Como parte de una educación crítica, la alfabetización se refiere a la competencia para interpretar los fenómenos sociales y, según la tesis del relativismo lingüístico, tales fenómenos también están constituidos por el lenguaje. Si las matemáticas tienen un poder formativo, entonces los fenómenos sociales están estructurados en parte por un lenguaje formal y, por lo tanto, la alfabetización matemática puede tener un papel similar al de la alfabetización. Espero haber ilustrado esto con el proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad”. Por esta razón creo que el proyecto es útil para darle significado a la educación matemática crítica.

El montaje de un escenario es importante porque la discusión de un sistema creado por las matemáticas no tiene mucho sentido si el modelaje no hace parte esencial de una situación que hace surgir preguntas y que los

5. La discusión del uso de las matemáticas se ha relacionado de forma especial con lo que hemos llamado el modelaje puntual. Quizás el modelaje extendido, como se ejemplifica en el uso de las matemáticas al establecer un campo semántico para la discusión económica, influye bastante. Tal vez un aspecto de las matemáticas es proveer herramientas analíticas para interpretar ciertos fenómenos, lo cual quiere decir que la importancia de las matemáticas se fundamenta en su potencial para crear estructuras sintácticas y semánticas para el discurso tecnológico. Esto significa que una influencia social principal de las matemáticas no se encuentra en las aplicaciones directas de los modelos matemáticos, sino en el dominio lingüístico del discurso del desarrollo de sistemas, i.e., del lenguaje sistémico. Por lo tanto, ejemplos de modelaje extendido podrían mostrar una influencia esencial de las matemáticas en la vida social.

No obstante, si este uso analítico de las matemáticas es tan decisivo, ¿cuáles son las consecuencias de lo anterior desde la perspectiva de la educación? Si el uso analítico de las matemáticas es esencial y de hecho ejerce un poder importante al influir y reestructurar no sólo las acciones tecnológicas, sino también el lenguaje básico del discurso tecnológico, ¿qué implica esto en los intentos por establecer una educación matemática crítica? Si tratáramos de ilustrar este aspecto de las matemáticas en la educación, ¿en qué dirección entonces tendríamos que mirar? Más aun, si llegamos a ver este aspecto de las matemáticas como esencial (desde la perspectiva de la filosofía de la ciencia), podría resultar no esencial como parte de la educación crítica. La fuerza analítica de las matemáticas podría ser muy “intangible” como para volverse un principio de una práctica educativa. En resumen, estas consideraciones requieren una discusión relacionada con un proyecto educativo diferente que pretenda ilustrar los poderes mágicos del lenguaje matemático.

estudiantes perciben como algo que vale la pena investigar. La discusión del poder formativo de las matemáticas no puede progresar a menos que tengamos una descripción en lenguaje natural de una situación en la que las formaciones puedan surgir. Estas no pueden evaluarse desde un lenguaje formal. Si el escenario de fondo desaparece del proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad”, todo el proceso educativo podría fragmentarse en una serie de pequeños ejercicios. No es difícil ver que todas las competencias matemáticas elementales que se pueden desarrollar durante el proyecto también habrían podido alcanzarse por medio de una secuencia normal de ejercicios matemáticos. El punto, sin embargo, está en que la descomposición en ejercicios destruiría la posibilidad de desarrollar reflexiones críticas acerca de toda la actividad. Las reflexiones y, por lo tanto, el desarrollo de la alfabetización matemática presuponen una situación que ofrezca una discusión con un contenido semántico. Esto hace que el montaje de un escenario sea muy importante en la educación matemática crítica.

Mi punto no es que, una vez montado un escenario conveniente, las reflexiones florezcan entre los estudiantes. Mi descripción no pretende exponer la historia de un éxito educativo. Embarcarse en una investigación sobre lo que de hecho puede suceder entre los estudiantes y cómo pueden ellos en verdad reaccionar en las condiciones identificadas conceptualmente para el desarrollo de la reflexión, es una labor empírica diferente⁶. Mi punto aquí es simplemente relacionar el significado del montaje de un escenario con las condiciones para la reflexión. Un escenario ofrece una escalera semántica, pero no obliga a nadie a subir por ella. Si los estudiantes no se hubiesen involucrado en un proceso que posibilite discutir su trabajo, ellos no habrían tenido la oportunidad de percibir el conflicto entre lo que es técnicamente realizable y lo que es preferible entre un conjunto de principios y otro.

UNA ANOTACIÓN SOBRE LAS PREGUNTAS RETADORAS

Parece obvio que durante el proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad” se hubieran podido formular a los estudiantes algunas preguntas de una manera más directa. Ellos establecieron criterios generales para la distribución del subsidio familiar, pero cuando se metieron en el problema de hacer la distribución en sí, algunas veces se “olvidaron” de sus criterios. Se dejaron *absorber* por la tarea técnica de hacer la distribución⁷.

6. Iben Maj Christiansen, de la Universidad de Aalborg, formula esta pregunta como el foco de su investigación. Ella indaga el diálogo en el salón de clase desde la perspectiva de la educación matemática crítica.

Este fenómeno de la absorción es de importancia general. Existe una diferencia entre el discurso que tiene por resultado criterios sobre algunos aspectos de manejo y el discurso usado cuando el manejo se lleva a cabo. En el proyecto vimos la diferencia entre desarrollar un sistema y desarrollar un algoritmo para realizar este sistema. Los estudiantes se involucraron en dos tipos diferentes de discusión dependiendo de si asumían el papel de políticos que enuncian principios o el papel de técnicos que ponen las cosas en funcionamiento. Las discusiones entre los estudiantes pasaron de lo que es deseable a lo que es manejable. Este es el paso más crítico. Podríamos ver la transición del primer al segundo asunto como una transición entre dos juegos de lenguaje diferentes (dos discursos diferentes), el primero dirigido hacia los objetivos y los valores, y, el segundo, hacia las posibilidades tecnológicas. Los asuntos variaron desde ¿qué queremos hacer? hasta ¿qué podemos hacer?

Esta es una transición fundamental que no se puede evadir cuando el modelaje matemático juega un papel importante. Como ya habíamos comentado, las transiciones entre diferentes juegos de lenguaje inconmensurables son parte esencial del proceso de modelaje matemático. Pero es posible evitar que la perspectiva técnica absorba toda la investigación. Reflexionar sobre las cuestiones tecnológicas presupone el “regreso de lo que ha sido absorbido”. El discurso tecnológico tiene que estar imbuido en el discurso más amplio dentro del cual la evaluación tiene lugar. La absorción tecnológica en sí es peligrosa porque oculta las incertidumbres. Si se pretende evaluar los resultados de un instrumento tecnológico, producido de una manera absorbida, es importante que se produzca una nueva transición. No es posible usar el medio del discurso tecnológico si deseamos evaluar los resultados del instrumento tecnológico. Los lenguajes de las matemáticas y los algoritmos son insuficientes para la evaluación de dichos instrumentos. Estos lenguajes producen una visión cerrada que dificulta ver la importancia del conocer reflexivo.

Cuando uno se encuentra absorbido en un asunto tecnológico, moverse de una forma de lenguaje a otra se dificulta. Sin embargo, hubiera sido posible durante el proyecto confrontar a los estudiantes con su absorción de una manera mucho más directa. Después de haber hecho sus sugerencias para la distribución, se hubiera podido confrontar a los diversos grupos pidiéndoles volver a sus criterios originales. Una parte esencial de la estrategia educativa hubiera sido liberar a los estudiantes de su absorción tecnológica. Creo que este es un aspecto esencial de la educación crítica. Las distribuciones finales que hicieron los diferentes grupos se hubieran podido contrastar entre sí, a pesar de que revelaban una similitud extraña. Ningún grupo, por ejemplo, había considerado los problemas específicos de la

7. Desde un punto de vista educativo, tal preocupación puede ser una ventaja; pero se ve de manera distinta desde la perspectiva de una acción tecnológica.

familia 23. En la descripción se veía que la familia tenía un niño lisiado que necesitaba equipo costoso. ¿Por qué los grupos no consideraron esto? Como comentó uno de los estudiantes, si hubieran considerado este aspecto, su distribución se hubiese basado en la intuición y no en los cálculos. Pero el punto no se discutió mucho más. Aquí tenemos un obstáculo epistémico que es similar al obstáculo general de cómo conducir una evaluación de instrumentos contruidos con una absorción tecnológica.

Si en una situación educativa tenemos que dar el paso de hacer cálculos y aplicar las matemáticas a reflexionar sobre lo que se ha hecho, las *preguntas retadoras* parecen tener un papel especial que jugar. Tal vez es necesario provocar un movimiento desde la base de las acciones tecnológicas hacia la dirección del conocer reflexivo. Por lo tanto, las preguntas retadoras adquieren un significado epistémico especial⁸. No hay un continuo de desarrollo de conocimiento que conduzca de la posesión de unas habilidades matemáticas, a la comprensión del uso de las matemáticas. La importancia de las preguntas retadoras es una idea esencial que hay que extraer del proyecto de la distribución. Naturalmente, siempre se tiene que tener en mente que estamos representando una escena. Los estudiantes saben que independientemente de lo que hagan en la distribución, sus acciones no tendrán una consecuencia. Ellos están representando una “realidad” ficticia. De cualquier forma, la idea epistemológica que sugiero tener en cuenta es que el desarrollo del conocer reflexivo es de una naturaleza dialógica. Hace falta más de una voz si se desean seguir las perspectivas normativas⁹.

8. Morten Blomhøj ha discutido la importancia de las preguntas retadoras como parte de una aproximación crítica a la educación matemática.

9. Esta idea se desarrollará en profundidad en el Capítulo 11.

CAPÍTULO 8

“NUESTRA COMUNIDAD”

En una educación matemática que intente establecer medios para organizar y reorganizar “interpretaciones de las instituciones sociales, tradiciones y propuestas de reforma política”¹, es importante resaltar el hecho de que las matemáticas son un ingrediente predominante en la tecnología de hoy en día. La educación matemática crítica, entonces, se refiere a un tipo de educación que trata de criticar las aplicaciones auténticas, en la vida real, de las matemáticas. Pero incluso si hemos tenido éxito en ofrecer una interpretación educativa a las formaciones matemáticas y, al hacer esto, le dimos al término conocer reflexivo un significado educativo razonable, no hemos discutido todavía el *alcance* de las reflexiones. Tal vez concentrarse en el poder formativo de las matemáticas es una limitación muy estricta que reduce la concepción de reflexión.

He descrito la alfabetización matemática como un concepto análogo al de crítica a la ideología. Algunas de las características de nuestra concepción de vida social están tan profundamente arraigadas en las tradiciones y normas que se hacen invisibles y difíciles de cuestionar. Entonces, la labor de una crítica a la ideología es colocar sobre la mesa y en la agenda de discusión tales conformaciones escondidas. En este sentido, una crítica a la ideología se vuelve toda una empresa intelectual y, hasta cierto punto, tal intelectualización se duplica por medio de la idea de que el conocer reflexivo tiene que abordar las preguntas sobre el modelaje matemático. La crítica se convierte en pensamientos posteriores o en pensamientos posteriores al modelaje, y la reflexión, en un proceso para llegar a comprender los supuestos y efectos de la aplicación de algunas técnicas formales. Pero también debemos cuestionar si hemos llegado al corazón de la *naturaleza* genuina del conocer reflexivo. El concepto de reflexión puede haberse desarrollado en una dirección muy analítica y académica.

La alfabetización matemática, con el conocer reflexivo como centro, se ha especificado como la competencia que define a la educación matemática crítica. Una incertidumbre acerca del alcance y naturaleza del conocer reflexivo, por lo tanto, indica que no podemos afirmar haber encontrado una explicación definitiva para la educación matemática crítica. Además, encontramos una brecha conceptual entre la noción no muy bien sustentada de competencia democrática y la noción de reflexiones sobre los métodos

1. Ver la sección “Alfabetización y alfabetización matemática” en el Capítulo 1.

formales. No se ha establecido una relación filosófica fuerte entre el concepto de conocer reflexivo y de “vida” en una democracia. Hemos puesto al descubierto una conexión por medio de la tesis de poder formativo de las matemáticas y del supuesto de que vivir en una democracia requiere de una consciencia de los principios estructuradores de la sociedad; pero debe existir una ruta de conexión más directa entre los dos².

Quizás nos hayamos encontrado con otra complicación. Puede darse el caso de que una competencia compleja, como es la alfabetización matemática, pueda encontrar espacio para desarrollarse en un currículo fraccionado en diferentes materias. Tal vez una condición esencial para desarrollar la alfabetización matemática presupone una interdisciplinariedad, lo cual implica, hablando literalmente, que el concepto de “educación matemática crítica” contiene una contradicción. Mientras que las matemáticas no incluyen un lenguaje sobre las matemáticas, las reflexiones sí presuponen tal lenguaje y, por lo tanto, las reflexiones requieren una interdisciplinariedad. No obstante, trataré de dar una “solución” de corto plazo a este problema. Cuando hable de “educación matemática crítica” no tengo en mente la intención de señalar un currículo diferente para la enseñanza de las matemáticas, sino que el término más bien se refiere a una forma de práctica educativa en la que la alfabetización matemática se pueda desarrollar. Esta práctica puede ser interdisciplinaria, con una orientación por problemas, con una organización de trabajo por proyectos, etc. Empero, la naturaleza de la interdisciplinariedad en la que la educación matemática puede crecer tiene que discutirse y trataré de relacionar esta discusión con un nuevo ejemplo. No me concentraré en hacer una elaboración más profunda de la “alfabetización matemática” sino que trataré de una manera más directa de relacionar una práctica educativa interdisciplinaria, donde se incluyen las matemáticas, con una interpretación de la vida democrática en una comunidad local.

LA ESTRUCTURA DEL PROYECTO

El municipio de Hinnerup está en el centro del distrito de Hinnerup y allí se ubican las autoridades locales y el Consejo Municipal. El proyecto “Nuestra Comunidad” tuvo lugar en una escuela de primaria y básica secundaria en el municipio de Hinnerup. La intención del proyecto era darle a los estu-

-
2. Incluso si la alfabetización y la alfabetización matemática ofrecen medios para decodificar los fenómenos sociales, no necesariamente tienen que ser las únicas competencias con tal potencial que se desarrollen en la escuela. La alfabetización matemática podría relacionarse con otras actividades diferentes al modelaje matemático. Por ejemplo, ella puede tener que ver con una consciencia más directamente relacionada con la situación educativa en la que se ubican los estudiantes, lo cual se indica a través de preguntas como: ¿por qué tenemos que aprender cosas como estas?, ¿por qué tales ejercicios se encuentran en los libros de texto?

diantes una idea de algunas de las condiciones y posibilidades, no sólo para vivir y trabajar en una comunidad local, sino también para influir sobre su vida política y social. ¿Puede la escuela preparar a los estudiantes para que participen como ciudadanos en una democracia, no sólo como receptores del output o producto generado por las autoridades, sino también como generadores de un input o insumo para la comunidad? Con esta pregunta como telón de fondo, el proyecto generó una situación para involucrarse con la noción de democracia. Como el municipio donde se llevó a cabo es bastante pequeño (10.000 habitantes en total), la concepción rousseauniana original de la democracia directa podía tener algún sentido. El proyecto intentó que tal concepción también tuviera un significado educativo.

Quince estudiantes, cuyas edades estaban alrededor de los dieciséis años, participaron en el proyecto que fue planeado, organizado y puesto en práctica por dos profesores, Jørgen Boll y Jørgen Vognsen. Todos los estudiantes estaban en grado décimo, que en Dinamarca es el último de la escuela secundaria. Por lo tanto, los estudiantes debían decidir si deseaban continuar con una educación vocacional, o si querían continuar con la escuela superior secundaria, orientada hacia la formación técnica o hacia la formación académica básica para el ingreso a la universidad. En Dinamarca es frecuente que los estudiantes realicen un trabajo práctico en distintos tipos de labores por un periodo corto, con el fin de que puedan hacerse una idea de lo que significa tener un trabajo y tengan la oportunidad de formular esperanzas y planes (realistas) para el futuro. Así, el proyecto también incluyó una semana de “entrenamiento” laboral, pero con la condición de que todos los estudiantes debían encontrar un “empleo” en el municipio de Hinnerup, lo cual se había acordado de antemano con las autoridades. Primero se familiarizó a los estudiantes con la idea general de proyecto y luego siguió un periodo de dos semanas completas dedicadas al trabajo en el proyecto. Durante la primera semana los estudiantes tuvieron su entrenamiento y, en la segunda, trabajaron en el salón de clase. A continuación presentaron un resumen del proyecto en las siguientes unidades.

Unidad 1

Se presentó y discutió con los estudiantes la intención del proyecto. Por medio de algunas preguntas sobre el municipio, se enteraron del entrenamiento laboral y del trabajo por proyectos que vendría a continuación. También se introdujeron algunos de los temas que habían provocado discusiones políticas acaloradas en Hinnerup. Uno de esos temas tenía que ver con la ubicación de una ruta de descongestión vial; otro, con el servicio de calefacción del municipio; y un tercero, con el establecimiento de un club juvenil.

Unidad 2

Se le presentó a los estudiantes un *Boletín de empleos*, que se colocó en la cartelera del salón. Una de las noticias del boletín decía:

Asistente de jardín infantil

El Jardín Infantil de la Cruz Roja ofrece un cargo de asistente (38 horas a la semana) para participar en trabajo práctico y educativo con niños y en otras actividades. Se prefieren candidatos que deseen un entrenamiento en el área socioeducativa. El horario de trabajo es de 7 a.m. a 3 p.m. o de 9 a.m. a 5 p.m. El salario y las condiciones de trabajo se determinarán según los acuerdos colectivos vigentes. Para mayor información comunicarse con Elin Filtenborg, tel. 86 91 12 33, ext. 612, los lunes de 1 p.m. a 2 p.m. Favor anexar a la solicitud la documentación relevante para el municipio de Hinnerup. Alcaldía Municipal, Nørregade 1, DK-8382 Hinnerup.

Los avisos, que habían sido arreglados entre las autoridades locales y los profesores, estaban escritos con el lenguaje oficial y los trabajos ofrecidos cubrían todo el espectro de posibilidades laborales del municipio: terapeuta ocupacional, portero, profesora, supervisor ambiental, trabajadores no calificados, bibliotecario, asistente técnico, etc. Los estudiantes debían escoger los trabajos que querían tener y los profesores les ayudaron a completar las solicitudes pertinentes. Algunos trabajos eran más atractivos que otros, en especial aquellos del Departamento Técnico.

Unidad 3

Una vez el municipio recibió las solicitudes, se dieron citas de entrevista a los estudiantes. Las entrevistas se llevaron a cabo de manera realista (los entrevistadores estaban acostumbrados a hacer este tipo de trabajo de verdad). Algunos de los estudiantes no pudieron conseguir el trabajo que deseaban por la simple razón de que más de uno solicitó el mismo trabajo; pero en todo caso, se les asignó otro puesto. Los estudiantes percibieron el proceso de conseguir un trabajo como algo vital ya que dentro de algunos años se verían en la misma situación, pero esta vez sí real.

Unidad 4 (Una semana de entrenamiento laboral)

Además de trabajar por una semana, los estudiantes tenían que responder unas preguntas generales, formuladas por los profesores, acerca de su sitio de trabajo. Los profesores habían presentado anteriormente estas preguntas a las personas que trabajaban en los diversos sitios de manera que supieran algo sobre lo que los estudiantes iban a preguntar. Las preguntas involucraban: la experiencia en general de los estudiantes durante la semana de trabajo, la naturaleza del servicio que la institución determinada presta al municipio, la estructura de la toma de decisiones en la institución (quién toma las decisiones y de dónde proviene el dinero para su funcionamiento),

y los cambios que se espera la institución sufra en un futuro. Además de responder a estas preguntas, los estudiantes debían escribir un reporte breve acerca de su experiencia de trabajo. En general los diferentes sitios fueron bastante receptivos a los nuevos trabajadores. Incluso un estudiante llegó a participar en reuniones regulares del grupo de trabajo donde se discutieron algunos problemas de la institución.

Unidad 5 (Lunes en la mañana)

Después de la semana de entrenamiento laboral, siguió una semana completa de trabajo en algunos problemas seleccionados de Hinnerup. Durante esta semana los estudiantes trabajaron en su salón de clases corriente. Como introducción general, se invitó a un jefe de despacho de las autoridades locales para que diera información sobre la estructura del municipio, en especial sobre las relaciones entre los políticos, quienes (en principio) toman las decisiones, y los empleados municipales que preparan el trabajo que sirve de base para la toma de decisiones y quienes también tienen que implementarlas. La conferencia se parecía a aquella introductoria para los nuevos trabajadores del municipio —y fue tan real que incluso se tornó un poco aburrida.

Una persona de la Oficina de Seguridad Social de la localidad trató otro tema. Describió algunas de las oportunidades que esta parte del Servicio Civil podía ofrecer. En Dinamarca tenemos problemas de desempleo entre la gente joven, así que el tema descrito bien podría convertirse en realidad dentro de poco en la vida de los estudiantes.

Unidad 6 (Lunes en la tarde)

Los estudiantes recibieron varios reportes y panfletos con información sobre el municipio de Hinnerup, como la planeación urbana, las proyecciones de población, etc. También se les dieron hojas adicionales con nueva información y con diferentes preguntas y tareas que debían resolver durante el resto de la semana. Algunas de las tareas se realizaron en grupos, en parejas o individualmente. Las preguntas y tareas tenían que ver con la terminación del reporte del periodo de entrenamiento laboral, el estudio de las proyecciones poblacionales del municipio, la formulación de sugerencias para la situación económica del Conservatorio, el análisis de los planes de construcción de vivienda para diferentes secciones de la comunidad y, por último, la elaboración de un diccionario con las palabras nuevas que los estudiantes hubieran encontrado en la lectura de los reportes e informaciones sobre Hinnerup.

No fue posible que todos los estudiantes trabajaran en la misma tarea al mismo tiempo; por ejemplo, calcular la situación económica del Conservatorio requería el uso de un computador y tan sólo había algunos disponibles.

Unidad 7 (Martes en la mañana)

En esta mañana se organizó un trabajo de grupo orientado hacia la realización de una proyección poblacional para Hinnerup. Los estudiantes habían recolectado estadísticas que especificaban el número de personas en los diferentes grupos de edad. Tenían que mirar el desarrollo del grupo comprendido entre los quince y los sesenta años de edad, ilustrar la proyección por medio de un diagrama y tratar de explicar la tendencia de la proyección. Los estudiantes en sí se encontraban dentro de ese grupo, así que la proyección también podría arrojar información sobre el número de clases en el grado décimo que habría en el futuro (se evidenció que podría haber alguna disminución y que no se podría esperar que todo colegio del municipio tuviera grado décimo en el futuro). Más aun, los estudiantes debían comparar el desarrollo de diferentes grupos de edades. Las implicaciones más generales de la proyección tenían que ver con los programas de construcción de viviendas y de escuelas y con la capacidad de los jardines infantiles y casas de descanso. Los estudiantes tenían que comparar sus conclusiones con las descripciones oficiales de tales programas en el municipio.

Unidad 8 (Martes en la tarde)

Un ingeniero civil, empleado del Departamento de Planeación Municipal, dio esa tarde una conferencia. El tema principal de la sesión fueron las sugerencias para la construcción de una nueva vía de descongestión que conectaría dos áreas diferentes de Hinnerup, que se encontraban divididas por los rieles del ferrocarril. El centro de la ciudad está cerca de la estación del tren, mientras que las áreas residenciales se ubican al norte y sur del centro. ¿Cómo se podrían unir el norte y el sur sin destruir, por ejemplo, una gran parte de un área forestal cercana al centro u otras áreas de recreación? Este asunto había generado bastante discusión. Había una confrontación entre diversos grupos de interés: ¿cuál era la solución más satisfactoria desde un punto de vista técnico?, ¿qué era lo más preferible ambientalmente? y ¿cuál la solución menos costosa? Estas preguntas también debían discutirse en términos de los diferentes intereses locales que influían sobre la evaluación de las soluciones sugeridas.

Los estudiantes pudieron participar en la discusión con el ingeniero civil puesto que el tema se había tratado en la introducción del proyecto y porque los estudiantes, durante la mañana del martes, habían adquirido información adicional sobre las condiciones de la planeación urbana del municipio. En el salón se exhibió un modelo físico a pequeña escala de una de las soluciones; de esta manera se logró que los estudiantes se hicieran una mejor idea de cuáles podrían ser las implicaciones de esa solución. El tema de la conferencia, que abarcó todos los demás tópicos, fue el por qué es importante tener una planeación urbana en un municipio.

Unidad 9 (Miércoles en la mañana)

Esta sesión de trabajo en grupo tocó el tema del Conservatorio Municipal. Este Conservatorio ofrece lecciones a estudiantes interesados en la música (la existencia misma del Conservatorio Municipal demuestra que es posible llevar a cabo una iniciativa local si se logra movilizar suficiente apoyo). El Conservatorio es una escuela privada, lo que significa que el gobierno no cubre sus gastos de funcionamiento, sino que los padres de los estudiantes que asisten a él tienen que pagar por los costos de la educación de sus hijos. No obstante, en muchos otros municipios daneses las autoridades locales apoyan financieramente los conservatorios.

Los estudiantes disponían de la información necesaria sobre la economía del Conservatorio y antes de que el proyecto “Nuestra comunidad” comenzara, los estudiantes habían aprendido a abordar problemas utilizando hojas de cálculo en el computador. Esto significaba que la tarea de hacer un presupuesto y calcular las consecuencias de diferentes posibilidades era algo que podían manejar. Los estudiantes trabajaron en grupos y los resultados de cada uno se organizaron en forma de sugerencias sobre las finanzas del Conservatorio Municipal, sobre la manera de lograr apoyo del municipio y sobre la estructura de pagos por parte de los estudiantes. Por ejemplo, los precios de matrícula para los estudiantes pequeños debían ser diferentes de los correspondientes para los mayores; y también los precios debían depender del tipo de actividad musical —es menos costoso organizar un coro que enseñarle a un solo niño a tocar piano. Más aun, se podría hacer un descuento en el precio de la matrícula en el caso en que dos o más niños de una misma familia asistieran al Conservatorio. Los presupuestos elaborados tenían términos bastante realistas y de hecho las propuestas se le entregaron al director del Conservatorio.

Las investigaciones de los estudiantes continuaron. Se calculó lo que podría significar, en términos de un aumento en el pago de impuestos, obtener el apoyo de las autoridades locales y se discutió si otras organizaciones diferentes al Conservatorio podrían reclamar el derecho a recibir apoyo financiero por parte de las autoridades. De esta manera se enfatizó el hecho de que no tiene sentido en una democracia discutir un caso aislado, sin considerar si una decisión particular tiene o no consecuencias generales. También se estimó lo que el apoyo en general a las actividades culturales en el municipio podría implicar para el nivel de pago de impuestos por parte de los ciudadanos. De esta manera los estudiantes tuvieron una idea de las posibles razones por las cuales algunas veces los políticos tienen que decir “no” al gasto de dinero adicional.

Unidad 10 (Miércoles en la tarde)

La sesión de la tarde comenzó con la charla de un político local quien habló de cómo solucionar dos tareas (bastante diferentes) en la comunidad: la

prestación municipal del servicio de calefacción y la Defensa Civil. El último tema se convirtió en el más fascinante porque los estudiantes se enteraron de que, en caso de guerra, la escuela estaba designada para convertirse en un hospital de emergencia. En el sótano de la escuela, al que nunca antes habían tenido acceso, los estudiantes vieron los implementos disponibles para el hospital. Era obvio que los materiales almacenados eran completamente insuficientes, tanto así que era ridículo llamar a eso un hospital de emergencia —tan sólo había algunas camas y frazadas.

De manera directa esta experiencia hizo surgir preguntas como: ¿cuánto debe invertirse en una situación por completo hipotética, una guerra que estalle en Dinamarca, a sabiendas de que es muy probable —eso se espera— que las cosas compradas con ese dinero en realidad nunca lleguen a utilizarse?, ¿qué opinamos acerca del miserable hospital de emergencia ubicado en el sótano de la escuela?, ¿cómo podemos comparar los gastos en el hospital con los que deben hacerse, por ejemplo, en el Conservatorio?

Unidad 11 (Jueves en la mañana)

Esta mañana se organizó como trabajo en grupo. Los estudiantes debían continuar con las diferentes tareas que se les habían asignado al comienzo de la semana (Unidad 6, el lunes por la mañana).

Unidad 12 (Jueves en la tarde)

El Alcalde visitó la clase. El tema particular para la sesión de esa tarde fue la posibilidad de establecer un club juvenil en Hinnerup. Era obvio que los estudiantes habían adquirido durante la semana ciertas ideas relevantes para la discusión; tenían más ideas acerca de la estructura de los procesos de toma de decisiones en una comunidad local y sobre las posibilidades y limitaciones económicas.

Unidad 13 (Viernes)

Este último día se dedicó por completo a terminar las diferentes tareas asignadas y a presentar los resultados de cada grupo al resto de la clase.

COMENTARIOS SOBRE EL PROYECTO

Es obvio que el proyecto “Nuestra comunidad” contó con un gran apoyo de las autoridades locales del municipio de Hinnerup, gracias a la planeación cuidadosa que Jørgen Boll y Jørgen Vognsen habían realizado. También fue muy conveniente que el proyecto hubiera tenido lugar en una comunidad pequeña donde la gente se conocía entre sí, por ejemplo, tanto el director del Conservatorio como el Alcalde habían sido profesores del colegio anteriormente.

El proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad” descrito anteriormente se concentró en el poder formativo de las matemáticas. El proyecto

descrito en este capítulo genera la pregunta del grado en que una competencia, que comprenda el conocer reflexivo según nuestra interpretación original, tiene de hecho un papel crucial que jugar en el desarrollo de una competencia democrática. “Nuestra comunidad” sugiere que he descrito de manera limitada el concepto de reflexión al haber identificado de manera fuerte a la escolaridad como una preparación para la vida democrática. La educación matemática puede ser una parte de tal empresa, sin tener que tomar el camino difícil e indirecto de reflexionar sobre los procesos de modelaje matemático.

Es obvio que la intención de “Nuestra comunidad” no era hacer de la educación una preparación acrítica para una ciudadanía obediente. Interpretar la idea de educación para la democracia tan sólo como la introducción de los estudiantes a los valores básicos del estado democrático es una simplificación burda. Una introducción a la democracia también supone que los estudiantes se familiaricen con formas de ver la democracia como algo que involucra negociación. El aprendizaje para la democracia también puede significar aprender cómo interactuar con las autoridades y, en este caso, “aprender haciendo” tiene sentido. Por lo tanto, una educación para la democracia debe incluir una mirada crítica a los antecedentes de la toma de decisiones en un contexto concreto.

“Nuestra comunidad” se basó en un montaje cuidadoso de un escenario educativo por parte de los profesores, lo cual facilitó a los estudiantes identificarse con el escenario. Hemos distinguido varios tipos de montajes: uno realista, ejemplificado por “Relaciones económicas en el mundo de los niños” y este proyecto “Nuestra comunidad”; otro imaginario, ilustrado en “La Conejera”; y un tercero, basado en una serie de actividades que los estudiantes deben desarrollar, como en “Construcciones”. El montaje de un escenario debe proveer conexiones entre la “realidad”, que en el caso de “Nuestra comunidad” no estaba muy lejos del salón de clase, y las actividades educativas. No obstante, el montaje de un escenario es de suma importancia incluso en este caso. Hubiera sido posible enseñar a los estudiantes, en una situación normal de clase, todos los diferentes hechos sobre el municipio de Hinnerup, pero esto hubiera determinado una educación bastante diferente que probablemente no hubiera tenido nada que ver con una verdadera educación para la democracia. La artificialidad del montaje de un escenario es también una manera de establecer conexiones con la realidad. El hecho de que los estudiantes hubieran tenido que solicitar un empleo en el municipio y prepararse para las entrevistas de selección fue una “realidad simulada” que, no obstante, hizo el proyecto más realista. El montaje de un escenario es una manera de comunicar el significado de un proceso educativo ya que proporciona un lenguaje sobre lo que se hace a lo largo de la práctica educativa.

En el Capítulo 3 analicé el término democracia en relación con la cuestión de la delegación de la soberanía y llegamos a enfocarnos en el término competencia democrática definido como la oportunidad (y la habilidad) de la mayoría de controlar a las personas a cargo de la toma de decisiones. Más aun, se analizó esta competencia como contenedora de un elemento importante de la alfabetización matemática, el conocer reflexivo, porque se evidenció la importancia que tiene para los participantes en una democracia ser capaces de identificar el poder formativo de las matemáticas. Sin embargo, con el proyecto “Nuestra comunidad” regresamos a la interpretación original de democracia presentada por Rousseau a la cual, quizás con un poco de precipitud, juzgué de poco relevante en términos educativos. Este proyecto indica que la educación matemática puede integrarse como parte de una educación democrática de una manera más inmediata. Los estudiantes llegaron a investigar alguna de la información que sirve de antecedente para las decisiones tomadas por las autoridades del Consejo Municipal de Hinnerup como, por ejemplo, lo concerniente al programa de construcción de vivienda. Ellos pudieron investigar las posibilidades de decisiones alternativas como, por ejemplo, en lo concerniente al Conservatorio. En ambos casos tuvieron que utilizar el fondo matemático de las decisiones. Es más, no sólo fueron observadores de las rutinas democráticas sino que se involucraron en ellas. Tuvieron la oportunidad tanto de escuchar al Alcalde como de contribuir gracias a una discusión frente a frente con él. Naturalmente tal contacto tan cercano con las autoridades no es una condición necesaria para una educación para la democracia; no obstante, creo que esta situación podría simbolizar lo que significa una educación que se esfuerce por hacer que los estudiantes reaccionen y también actúen en una democracia³.

Este proyecto muestra que se le puede dar al término *Mündigkeit* una interpretación específica, como que los estudiantes sean capaces de participar en discusiones políticas que tengan lugar en una comunidad local. No es necesario confinar este concepto al nivel de la generalidad filosófica y limitarlo a la crítica de una ideología. El concepto de *Mündigkeit* ha dormido en paz en el cielo conceptual de la Teoría Crítica desde que Adorno lo colocó allí; pero “Nuestra comunidad” lo ha traído de vuelta a la práctica educativa, mostrando que el concepto tiene una interpretación simple y directa.

Es claro que también es posible encontrar potencial para investigar el poder formativo de las matemáticas en “Nuestra comunidad”. Tal investigación puede basarse en el análisis del presupuesto del Conservatorio.

3. Además de una competencia democrática podríamos hablar de una actitud democrática, lo cual querría decir que no sólo es importante que los participantes en una democracia posean ciertas competencias, sino que también deban mantener ciertas actitudes. “Nuestra comunidad” ilustra que la concepción de democracia también podría extenderse en la dirección de lo actitudinal.

Podría ser posible continuar una investigación sobre el precio de las matrículas y encontrar cómo diferentes políticas ponen de manifiesto diferentes actitudes sobre la familia, los niños, la situación económica, el elitismo, etc. Un sistema de matrículas puede ajustarse al ingreso de los padres de tal forma que cualquier interesado en la música pueda inscribirse, o podría ajustarse a la habilidad de estudiantes específicos y, así, hacer que sólo los más capacitados puedan recibir lecciones más intensivas de los profesores más calificados — sólo por mencionar dos extremos. No es difícil imaginar que si “Nuestra comunidad” se extendiera de tal manera, podría llegar a cubrir muchas características de las formaciones matemáticas.

Empero, la pregunta general es si “Nuestra comunidad” *tiene que desarrollarse* más para ilustrar el poder formativo de las matemáticas, si se desea que encaje en una concepción de la educación matemática como parte de una fuerza democrática y que haga parte de una educación matemática crítica. ¿La esencia de la educación matemática crítica se asocia con la identificación del poder formativo de las matemáticas y con el desarrollo de un conocer reflexivo en relación con la aplicación de los métodos formales en la sociedad?

Esta pregunta hace necesario regresar al concepto de crítica. Este no sólo se refiere a una competencia sino también a la actitud o disposición de un individuo. Una persona puede no ser crítica a pesar de que conozca todo aquello que sea necesario para llevar a cabo una crítica. También se debe presuponer una consciencia crítica. Abrir el espacio para el surgimiento de esta consciencia debe verse como parte de la labor educativa. Tomaré esto también como una parte de la educación matemática crítica. No es suficiente con mirar únicamente al objeto de crítica adecuado, sino que también es importante mirar las razones personales para llevar a cabo una crítica⁴. No podemos limitar la educación matemática crítica a proveer exclusivamente una crítica a las aplicaciones de las matemáticas. La democracia se refiere tanto a una competencia para la participación como a una consciencia y creo que un aspecto importante de una educación crítica es dar la oportunidad a los estudiantes para ser capaces de interactuar con gente que ocupa cargos de mayor poder. La competencia democrática no es sólo una competencia para reaccionar sino también para actuar; “Nuestra comunidad” ilustra este punto.

En el proyecto se realizó una variedad de actividades fuera del salón de clase. No tiene sentido sustituir una educación matemática tradicional por una crítica, si no se altera la estructura del programa de clases. Se deben romper de vez en cuando las barreras del salón de clase —no estoy diciendo que deba tener lugar una “ruptura” total. En “Nuestra comunidad”

4. Este aspecto se tratará en el Capítulo 10 que se ocupa de la intencionalidad.

la erradicación de las barreras impuestas a la materia tuvo lugar a lo largo de un periodo de duración considerable y quizás esto es esencial. La enseñanza tradicional de las matemáticas no se puede sustituir por una educación matemática crítica sin atacar la estructura regular del programa. La educación matemática crítica requiere un grado de interdisciplinariedad que supone una flexibilidad estructural.

En el proyecto se involucraron dos ejemplos de matemáticas: uno tuvo que ver con la representación gráfica para analizar las proyecciones poblacionales de Hinnerup y, el otro, con la realización del presupuesto del Conservatorio. Ambos tuvieron en común el hecho de que los cálculos proporcionaron justificaciones para la acción. De esta manera los dos ejemplos llegaron a mostrar el poder formativo de las matemáticas. No es posible evitar la acción. Es necesario tener un programa de construcción de vivienda y un presupuesto para el Conservatorio. Una experiencia esencial para los estudiantes fue que las proyecciones del desarrollo poblacional del Distrito de Hinnerup no fueron más reales, a pesar de que las matemáticas estuvieron involucradas. No obstante, algo impredecible podría siempre suceder.

CONOCER REFLEXIVO: UN CONCEPTO ABIERTO

Las reflexiones manifiestan la competencia para captar y evaluar los efectos de una empresa tecnológica. Las reflexiones pueden tener que ver con las tareas tecnológicas tanto a una pequeña como a una gran escala. He mencionado seis puntos de entrada al conocer reflexivo como se puede desarrollar en el escenario de un salón de clase. Los puntos de entrada se identificaron con las preguntas: ¿hemos usado el algoritmo de la manera apropiada?, ¿hemos usado el algoritmo adecuado?, ¿podemos confiar en el resultado del algoritmo?, ¿podríamos haber abordado el problema sin usar cálculos formales?, ¿cómo afecta un contexto específico el uso de un algoritmo apropiado o no? y ¿habríamos podido realizar la evaluación de una manera diferente? Estas preguntas pueden claramente generalizarse; empero, creo que la reflexión puede significar mucho más. Para mí el ejemplo del proyecto “Nuestra comunidad” es esencial porque abre el concepto de conocer reflexivo. El proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad” se desarrolló con la interpretación original del conocer reflexivo en mente, teniendo como intención primera ilustrar el poder formativo de las matemáticas. “Nuestra comunidad” me hizo caer en cuenta de que la reflexión tiene diferentes dimensiones y que ellas ya estaban presentes en “Subsidio familiar en una microsociedad”.

El montaje de un escenario facilita la reflexión; esto lo muestran las preguntas que indican los diferentes puntos de entrada a la reflexión. ¿Cómo se puede preguntar de cualquier manera significativa si podemos

confiar en los cálculos de un algoritmo o si podemos arreglárnolas sin cálculos formales, sin que se haya montado un escenario? La presentación de las matemáticas como una secuencia de ejercicios hace de la reflexión una parodia. El montaje de un escenario es una manera de ofrecer una semántica que posibilita, e incluso también da importancia, a la reflexión acerca de los cálculos. No obstante, el montaje de un escenario también abre la posibilidad para que se den muchos otros tipos de reflexiones diferentes a los indicados por los seis puntos de entrada. Mencionaré como ejemplo algunas posibilidades integradas en el proyecto “Subsidio familiar en una microsociedad”.

Los estudiantes estaban describiendo las familias: “¿qué incluyo?, ¿la familia que voy a describir se parece a la mía?, ¿tienen estos personajes una mejor vida familiar?, ¿en qué familia preferiría vivir? El profesor nos pide incluir descripciones de familias no muy ricas, ¿por qué querrá esto?, ¿qué significa de hecho ser una familia ‘pobre’? ¿Sobre qué estarán escribiendo mis compañeros?, ¿estarán escribiendo algo sobre una familia que yo conozco?, ¿podría ser mi familia?, ¿por qué el profesor le pidió a Peter que cambiara algunos de los nombres en la historia que está escribiendo con Lisa?, ¿mi descripción será tan buena como la de Peter y Lisa?, ¿por qué estoy escribiendo solo si la mayoría lo está haciendo en parejas?”

Los estudiantes sentaron algunos principios para repartir el subsidio familiar. Discutieron estos principios y para establecerlos tuvieron que escoger prioridades. También se involucraron en cierto tipo de autocontrol. Modificaron algunos de los principios que habían propuesto originalmente: “¿qué incluyo en la base de datos? Parece fascinante teclear la información. Me gusta usar el computador. Ojalá los otros encuentren qué escribir, a mí sólo me gustan los computadores.”

Los estudiantes le escribieron unas cartas cortas a las familias haciendo una explicación sobre el subsidio que habían recibido: “Las familias son inventadas, así que ¿por qué tenemos que escribir esas cartas? El profesor quiere que hagamos eso, así que vamos a escribir algunas cartas. Bueno y, de hecho, ¿cómo explicamos lo que hicimos? Esto parece un poco difícil, ¿por qué debemos escribir sobre eso si ya lo hicimos? Ya terminamos, no entiendo por qué el profesor quiere que hagamos más. Parece que los otros están escribiendo unas cartas muy cortas, yo voy a hacer lo mismo.”

“Los resultados de las distribuciones se escribieron en el tablero, mientras que el profesor leía en voz alta las descripciones de las familias: ¿consideramos todo lo que debíamos? Raro, pero parece que se me olvidaron muchas cosas sobre las diferentes familias. Esa era una descripción extraña, ¿quién escribió esa historia? No puedo recordar a nadie que haya escrito sobre una mujer que tiene un trabajo en un bar. ¿Sería el profesor o tal vez el visitante de la universidad quien se la inventó? Parece haber una gran diferencia entre las sugerencias de distribución. Pero, ¿por qué parece

que el grupo aquel siempre le da menos dinero a las familias que el resto de nosotros? Seguro que ellos no gastaron todas las 240.000 DKr. Ellos más bien tuvieron un poco de pereza para realizar el proyecto”.

“El profesor quiere que discutamos el resultado, ¿qué querrá decir eso?, ¿qué vamos a discutir?, ¡no entiendo!. Pero Lisa parece tener algo que decir, como siempre. ¿Es verdad que una familia podría recibir tanto dinero del municipio? Estoy segura de que en mi casa no recibimos tanto dinero. ¿Cuánto dinero de hecho recibimos?, ¿cuánto reciben las familias ficticias? No pueden recibir tanto dinero mensualmente, ¿será que es lo que reciben por año, o qué? No recuerdo que nadie haya mencionado esto, pero han debido hacerlo en algún momento. No creo que vaya a preguntar.”

Existen muchas posibilidades para reflexionar sobre la manera como se hace la distribución, al igual que sobre el proceso educativo mismo. Es claro que en todo tipo de educación los estudiantes piensan acerca de lo que hacen y de lo que sucede en el salón de clase. El punto es que en el caso donde ha habido el montaje de un escenario, esas reflexiones tienen una mejor oportunidad de entrar en el dominio público del salón de clase. Un escenario debe incluir la reflexión como parte de la agenda.

La semántica multifacética que el escenario lleva al salón de clase hace de la reflexión un concepto abierto. No tiene sentido restringir la reflexión a algo que tiene que ver únicamente con el pensamiento sobre el modelaje matemático. Y si bien puede haber una ventaja en abrir el concepto, también puede haber riesgos. Si la reflexión incluye más y más, el concepto se enriquece en términos de amplitud, pero pierde en profundidad. Abrir un concepto no sólo significa hacerlo más aplicable, sino que, al mismo tiempo, es volverlo menos útil. Este es el peligro del paso que he sugerido. Además, me surge otra dificultad. Originalmente habíamos acordado definir la competencia crítica en términos de la alfabetización matemática que incluye el conocer reflexivo; pero ¿cuál termina siendo el contenido de la alfabetización matemática si se le da a la reflexión una estructura más abierta?

Si comparamos los proyectos “Nuestra comunidad” y “Subsidio familiar en una microsociedad”, encontramos una tendencia de las matemáticas a separarse. Para los educadores matemáticos (tradicionales) esto puede parecer un problema, pero para la labor más teórica de aclarar ideas educativas, la tendencia indica únicamente la posibilidad de que algunos de los aspectos esenciales de la educación matemática crítica no tienen que ver con las matemáticas. Sin embargo, debemos tomar una mirada fresca a un ejemplo diferente que indique que las matemáticas, en sí mismas, contienen un potencial crítico.

CAPÍTULO 9

“ENERGÍA”

El proyecto “Energía” tenía dos objetivos principales. Primero, debía ser fácil para los estudiantes ver y comprender lo que iban a hacer y, por lo tanto, lo que sucediera en el proyecto debía relacionarse con las experiencias de vida de los estudiantes. Y segundo, la exploración de algunos de los tópicos del proyecto debería poseer un valor de ejemplaridad. Como se discutió en el Capítulo 4, la tesis de la ejemplaridad dice que es posible desarrollar una comprensión general al concentrarse en (o dejarse absorber por) un ejemplo específico. La intención del proyecto era desarrollar y analizar situaciones de la vida cotidiana de tal manera que se pudiera dirigir la atención a algunos problemas globales del uso y abastecimiento de energía.

El proyecto se dividió en tres subtemas. El primero versó sobre la energía y la alimentación: ¿cuánta energía contiene cierto tipo de alimentos?, ¿cuánta se utiliza al hacer una tarea específica (montar en bicicleta, por ejemplo)? El segundo subtema tuvo que ver con el trabajo en una granja y se trataron dos preguntas: ¿cuánta energía se utiliza para producir cebada en un terreno de una hectárea y cuánta energía se estima producir a partir de la cebada segada? y, cuando se alimentan cerdos con cebada, ¿cómo son las cifras de la relación entrada–salida de energía? El tercer subtema trató el tema de la electricidad: ¿cuánta electricidad se usa en cada una de las casas de los estudiantes? y ¿es posible reducir tal uso?¹

Los veinte estudiantes involucrados en el proyecto tenían alrededor de quince años de edad. El curso no se encontraba clasificado, razón por la cual había una gran diversidad con respecto a la “habilidad” de los estudiantes. La intención del proyecto también era ofrecer una situación en la que tanto los “más hábiles” como los “menos hábiles” pudieran cooperar y encontrar varios retos en la tarea a realizar. El proyecto se organizó en la Escuela de Klarup y el profesor que planeó y llevó a cabo el proyecto fue Henning Bødtkjær. Andreas Reinholt del Seminario de Formación de Profesores de Aalborg fue el coordinador.

1. A lo largo de este capítulo hablo del uso de energía, como se emplea en el lenguaje cotidiano. La física establece que la energía no desaparece sino que se transforma. A este fenómeno de transformación se refiere el término uso de energía.

ESTRUCTURA DEL PROYECTO

El proyecto se puede describir en diferentes unidades. Como en los proyectos anteriores, cada unidad se desarrolló en una o más sesiones de clase.

Unidad 1

Los estudiantes tenían que llegar al colegio en ayunas. Allí cada uno debía medir cuidadosamente la cantidad de desayuno que iba a consumir: pan, mantequilla, queso, etc. (Obviamente el proyecto se había presentado el día anterior). Luego, cada estudiante calculó cuánta “provisión de energía” contenía su desayuno y así todos se dieron una idea del significado de esa expresión. Recolectaron estadísticas sobre la energía proporcionada por diferentes tipos de alimentos. También introdujeron estos datos en un computador. Uno de los estudiantes hizo el siguiente cálculo: pan: 59 gr. + 29.5 gr. (equivale a 1.000 Kj.); queso: 20 gr. + 20 gr. (equivale a 642 Kj.); mantequilla: 9 gr. + 4 gr. + 5 gr. (equivale a 558 Kj.); etc. La provisión total de energía fue de 3.050 Kj. Esto llevó a los estudiantes a compararse entre ellos mismos:

- Nosotros consumimos más o menos la misma cantidad de comida, pero parece que yo recibí más energía que tú.
- Pero eso es por el azúcar que tú usaste. Fíjate en cuántos Kj. tiene el azúcar. ¡Yo no le puse azúcar a mis hojuelas de maíz!

Estas comparaciones condujeron a algunas aclaraciones sobre la diferencia en cantidad y calidad de energía suministrada. También se tocó la idea de la calidad de los alimentos consumidos².

El profesor no había hecho cálculo preliminar alguno para indicar respuestas aproximadas; así que tanto los estudiantes como el profesor produjeron resultados que dieron nueva información. Sin ninguna comparación adicional, los resultados de los cálculos habrían sido muy abstractos. Pero se podría ofrecer una nueva perspectiva de comparación si los estudiantes se hacían alguna idea del “gasto de energía”. ¿Cuánta energía se gasta al realizar una tarea específica?

Unidad 2

La unidad consistió en dar un paseo en bicicleta. De esta manera los estudiantes pudieron hacerse a una idea más concreta de lo que significa el consumo de energía. El problema formulado fue cómo expresar estos

2. La calidad de los alimentos no se definió simplemente en términos de Kj., que es la unidad de energía correspondiente al trabajo realizado por una fuerza de un newton cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo de una distancia de un metro en la dirección de la fuerza. Una cantidad grande o pequeña de Kj. no determina simplemente si el desayuno fue de buena calidad o no. Otros factores como el contenido de fibra también se tuvieron en cuenta.

fenómenos con cálculos más específicos, pero los estudiantes sabían que el profesor tenía algunas fórmulas en mente. Todos los estudiantes habían traído sus bicicletas al colegio y tenían que hacer un recorrido cuya distancia se conocía. Las bicicletas de los estudiantes eran de todo tipo: algunas eran bicicletas de carreras muy bien equipadas. Un estudiante comentó: “Esta mañana encontré la rueda de mi bicicleta pinchada, así que pedí prestada la bicicleta de mi tía que vive a la vuelta de la esquina. Fue más difícil montar en una bicicleta vieja que en una nueva de carreras”. ¿Cómo se iba a reflejar esto en los cálculos? Las fórmulas que se iban a emplear también tuvieron en cuenta el parámetro de área frontal del ciclista, pero ¿cómo iban los estudiantes a calcularla?³ El profesor usó una cámara de video y todos los estudiantes debían montar su bicicleta y dirigirse en línea recta, de frente, hacia la cámara, para que se les filmara.

Unidad 3

Esta unidad involucró a los estudiantes en una serie de cálculos larga y complicada para mostrar cuánta energía habían empleado en el paseo en bicicleta. Para hacer este cálculo, se tenía que conocer la distancia recorrida (8.130 m.), el tiempo empleado (para uno de los estudiantes, por ejemplo, fue de 1.380 seg.), el área frontal del ciclista y el tipo de bicicleta empleada. Se podían utilizar tres tipos de fórmulas para determinar la resistencia de la bicicleta, r , que depende del tipo de bicicleta, de la velocidad v y del área frontal a :⁴

$$\text{Bicicleta de paseo: } r = 1,1 av^2 + 7$$

$$\text{Bicicleta de montaña: } r = 1,0 av^2 + 6$$

$$\text{Bicicleta de carreras: } r = 0,7 av^2 + 5$$

Cada estudiante individualmente estimó su área frontal usando su imagen filmada cuando conducía hacia la cámara. Para conseguir la escala apropiada, cada estudiante se había colocado un pedazo de cartulina donde habían dibujado algunos cuadrados de un dm^2 cada uno. La parte superior de la cartulina se adhirió a la camiseta de los estudiantes con dos alfileres. Esto significó que el pedazo de cartulina siempre tenía una posición vertical independientemente de si el estudiante estaba sentado derecho sobre la bici-

3. De hecho no era obvio para los estudiantes lo que en este caso significaba área. En la enseñanza de las matemáticas las áreas por lo general son de figuras planas, regulares, rodeadas por líneas rectas o curvas regulares.
4. En Bjerre (1985) se pueden encontrar tales fórmulas, al igual que la posibilidad de estimar la resistencia de la bicicleta y el gasto de energía del ciclista. Con claridad las fórmulas son simplificaciones, por ejemplo, la resistencia del viento también depende de la densidad del aire. Las fórmulas abarcan diferentes tipos de resistencia, como la resistencia del viento y de la bicicleta misma. El área frontal a tiene que medirse en m^2 y la velocidad v en m/seg . La fórmula entonces proporciona la resistencia de la bicicleta r medida en N (Newtons).

cleta o si estaba inclinado hacia el manubrio a medida que se dirigía hacia la cámara. La impresión de una toma de video se dividió dibujando una cuadrícula sobre ella. Esto permitió contar el número de cuadrados que se necesitaban para cubrir la imagen completa de la persona. Un estudiante estimó su área frontal en $0,41 \text{ m}^2$. Fue posible comparar estos resultados y se hizo evidente que el área frontal dependía de la posición de la persona sobre la bicicleta cuando estaba pedaleando.

Las fórmulas que determinaron la resistencia de la bicicleta necesitaron algo de explicación. Pero con esta base fue posible calcular la energía gastada al aplicar las siguientes fórmulas⁵ (que también requirieron explicación):

Fuerza de pedaleaje: $c = 3,6 \text{ } rv$

Gasto de energía del ciclista: $e = (4c + 400) t$

Para los estudiantes que emplearon 1.380 seg. en el viaje (usando una bicicleta de carreras), la energía gastada se estimó en 640 Kj. Algunos de los estudiantes se sorprendieron de lo poco que se había gastado en comparación con la energía que habían recibido en el desayuno. Para la mayoría de los estudiantes no fue difícil aplicar las fórmulas, pero fue problemático entender las ideas que hay detrás de ellas. No obstante, la intención principal no era explicar la base física y fisiológica, sino darle a los estudiantes la oportunidad de aplicar las fórmulas y de experimentar lo que significa gastar energía.

Unidad 4

Se dedicó algún tiempo a tratar de obtener una interpretación más general de los resultados. Estos habían sido difíciles de predecir, pero una vez se habían obtenido parecían tener sentido. Surgieron varios comentarios: “Si empleé 640 Kj. en el viaje, ¿qué distancia hubiera sido posible recorrer usando completamente el suministro de energía dado por mi desayuno?” Para uno de los estudiantes el desayuno parecía equivaler a cinco viajes en bicicleta. ¿Tiene sentido este resultado? Lograr un acuerdo en esto fue también una manera de evaluar los resultados. “¿Qué habría pasado si hubiera recorrido un trayecto más largo?” Las ideas centrales se concluyeron en términos de “entrada y salida” de energía y de “cuenta de energía”.

Se dibujaron gráficas para ilustrar la relación entre diferentes tipos de consumo de energía y, como un pequeño ejemplo, se calculó cuánta energía podría gastar un repartidor de periódicos que tiene que subir y bajar escale-

5. La fuerza de pedaleaje c se mide en Kj/h y el tiempo t en horas. La última fórmula muestra que en una posición de descanso también estamos gastando energía; dicho gasto se estima en 400 Kj/h. El factor 4 indica la eficiencia en el pedaleaje; el ciclista gasta la energía de diferentes maneras (sudando, etc.) y sólo 25% de la energía consumida se transforma en energía de pedaleaje.

ras. Se calculó que podría ser 4.020 Kj. por hora, lo cual excedía, sin duda, la energía empleada al sólo montar en bicicleta. También se calculó cuánto tiempo se demoraría emplear la energía suministrada por un paquete de papas fritas —fue sorprendente para los estudiantes encontrar que se demoraría mucho. Los estudiantes también experimentaron poniendo juntos diversos alimentos para encontrar la cantidad de energía que contendrían comidas hipotéticas. Esto no fue muy complicado porque la información estaba ya almacenada en los computadores.

Unidad 5

Esta unidad introdujo el subtema siguiente, a saber, el uso de energía en una granja y se preparó una excursión a una de ellas. El problema se presentó como una variación de la cuestión de la entrada–salida de energía. La actividad de una granja produce energía en la forma de alimentos, pero ¿cuánta energía debe utilizar el granjero para esa producción?, ¿cuáles son las cifras de la relación entrada–salida en el caso de una granja? Es obvio que para obtener un producto, el granjero necesita preparar sus terrenos y suministrar alguna energía. Los estudiantes y el profesor también estimaron que, desde el punto de vista del consumo y producción de energía (no necesariamente desde el punto de vista económico), es “mejor” negocio preparar un terreno para cosechar, que alimentar cerdos con maíz para producir tocino.

¿En qué debíamos fijarnos si tuviésemos que representar la relación de entrada–salida de energía? ¿Qué debíamos mirar cuando llegáramos a la finca? ¿Es de algún modo posible estimar lo que sucede en la granja? Una primera diferencia entre el asunto de la entrada–salida en el caso del desayuno–pedaleaje en la bicicleta era que, en el primer caso, se contaba previamente con un modelo matemático, mientras que en el segundo, no se conocía ninguno. Los estudiantes y el profesor debían imaginar qué tipo de cálculos podrían producir un resultado. Los estudiantes hicieron algunas sugerencias y, por ejemplo, se hizo evidente que el ancho de las diferentes herramientas empleadas para preparar el terreno debía ser importante. Entonces visitaron la granja para tratar de definir el problema. En este caso ni el profesor ni los estudiantes tenían ninguna idea sobre los resultados. ¿Cuáles son las cifras que expresan la relación entrada–salida? Nadie podía saber nada antes de que se hicieran los cálculos.

Unidad 6

Cuando los estudiantes llegaron a la finca, comenzaron a medir una hectárea para hacerse una idea específica de la magnitud del terreno que iban a emplear como unidad para sus cálculos. La tarea de medir un terreno de una hectárea fue sorprendentemente difícil para los estudiantes, pero finalmente encontraron que había cuatro postes en cada una de las esquinas del

terreno. Los estudiantes y el profesor caminaron juntos alrededor del terreno y trataron también de ubicarse en el centro del mismo. “¡Más grande que una cancha de fútbol!” Entonces se regresó a la pregunta original: ¿cuánta energía se utiliza para producir cebada en esa área?

El granjero les concedió una entrevista en la que explicó los diferentes pasos para adecuar el terreno, lo cual incluía: arar, hacer surcos, sembrar, regar, segar y recolectar. Los estudiantes también tuvieron que tener en cuenta cuántas veces se tenía que trabajar el terreno con las diferentes herramientas. Posteriormente miraron las herramientas usadas y midieron su amplitud con el fin de calcular luego la cantidad de combustible requerido en todo el proceso de siembra en el terreno. Una vez averiguada la amplitud de la herramienta, podían calcular la distancia que el tractor debía recorrer.

Después, los estudiantes observaron la cría de cerdos y experimentaron el olor y sonido repugnantes de la cochera. El granjero traía los cerdos a la granja cuando eran pequeños, es decir, cuando apenas pesaban 25 Kgr. “¿Qué tanto comen?, ¿cuánto tiempo permanecen en la granja?, ¿cuál es su peso promedio cuando los envían al matadero?” Los estudiantes necesitaban toda esta información para calcular las cifras del consumo de energía en la cría de cerdos. Los estudiantes vieron la montaña de cebada en el granero y, de hecho, se dieron cuenta de cómo la alimentación de los cerdos se hacía de una forma automática. La cebada era succionada de una pila por una máquina y era repartida a los cerdos en cantidades adecuadas para cada uno, dependiendo de su peso.

Unidad 7

Cuando regresaron a la escuela, los estudiantes comenzaron a calcular el consumo de energía necesario en la producción de una hectárea de cebada. Habían especificado tres tipos de entradas: las semillas, los fertilizantes (incluyendo el regado) y el combustible para el tractor. Estimaron que la distancia que el tractor debía recorrer en un año se acercaba a los 35 Km.; sabían la cantidad de semilla que se requería para la siembra; y habían recibido información sobre los fertilizantes y el regadío⁶. Después siguió una serie de cálculos complicados y todos estaban esperando ansiosamente los resultados. Fue bastante emocionante porque nadie sabía el resultado en concreto, pero todos tenían alguna idea de lo que podría ser.

Algunos estudiantes se perdieron en los cálculos, así que el profesor tuvo que supervisar y ayudarlos bastante. Pero fue esencial que todos hubieran entendido la pregunta general que guiaba la realización de los cálculos y que no hubieran perdido de vista el objetivo de los mismos. Uno de los estudiantes halló que el uso de energía sobrepasaba los 13'090.000 KJ.

6. Bastantes investigaciones en agricultura se han encaminado a determinar las cifras necesarias para calcular la “cuenta de energía” en las actividades agrícolas.

La energía resultante, contenida en la cebada segada, se calculó en 81'650.000 Kj. Así que un breve resumen del resultado mostraba que, al final de la producción de cebada, el granjero recibe de vuelta cerca de seis veces la cantidad de energía empleada inicialmente —“el sol le ayuda”⁷.

Unidad 8

Entonces se tomó el caso de la ceba de cerdos. Esta fase de los cálculos también se organizó con trabajo en grupos y se inició con la pregunta general: ¿cuál creen que es la información relevante para estimar la cantidad de energía que se usa en la producción de tocino? La respuesta simplificada fue que se tenía que conocer el peso de los cerdos cuando llegaban a la granja y cuando salían de ella; el tiempo que los cerdos permanecían en la granja; y la cantidad de alimentos que consumían en relación con su peso. Los estudiantes obtuvieron información sobre el crecimiento y alimentación de cerdos de un manual de planeación agropecuaria. Con base en estas estadísticas fue posible calcular cuánto suministro de energía, en forma de alimentos, necesita un cerdo, desde el momento en que llega a la granja hasta el momento en que es enviado al matadero. Un estudiante calculó este suministro en 2'635.000 Kj.

El siguiente paso fue calcular cuánta energía se acumula en un cerdo promedio cuando se convierte en tocino. El peso del cerdo es esencial, pero como es natural, cuánto de ese peso se va en restos de desperdicio. El resultado fue 496.000 Kj. Esto significa que aproximadamente un quinto de la energía que se pone en tal tipo de animal se recupera. Desde un punto de vista ecológico, los productos de origen animal son muy costosos⁸.

Unidad 9

Estos resultados se formularon en términos más generales y naturalmente hubo de tenerse en cuenta que los resultados eran bastante aproximados. ¿Estos cálculos eran confiables? ¿El resultado era impreciso, es decir, que si se recolectara información más detallada del mismo tipo de la ya obtenida se podría mejorar el resultado? o ¿se había pasado por alto algún parámetro esencial, el decir, que no se podía en realidad sacar ninguna conclusión con base en la información obtenida? Esta parte del proyecto tomó

7. Naturalmente los cálculos serían diferentes si se hubiera tenido en cuenta el uso más general de combustible como, por ejemplo, el combustible consumido por el granjero al conducir hasta el pueblo para comprar las semillas. Las cifras tan sólo consideraron lo directamente relacionado con el trabajo en el campo. Incluso la “cuenta de energía” habría sido diferente si se hubiese considerado la transformación del cereal hasta su producto final: una tajada de pan en la panadería. La energía consumida en las actividades agrícolas se aproxima a tan sólo 20% del consumo total en la producción de pan.
8. Este cálculo también se habría podido llevar más allá, si se hubiese considerado el paso desde la fábrica de tocino hasta las tiendas. Y eso sin mencionar la energía que se emplea en limpiar los refrigeradores, mantenerlos encendidos, etc.

la forma de una discusión general en el salón de clase. Los resultados también se discutieron con el granjero quien consideró que eran básicamente correctos. Desde una perspectiva global, los estudiantes aprendieron sobre las condiciones básicas para la producción agropecuaria.

También se discutió si era posible mejorar la cifra de entrada-salida para la producción de tocino y, por lo tanto, se discutió el espacio en la cochera. Entre más pequeño fuera el espacio, los cerdos aumentarían de peso más rápido. Pero este enfoque también tiene sus limitaciones: ¿es legítimo cebar cerdos teniendo en mente únicamente la cifra de la relación entrada-salida?

Otro punto se tocó: ¿cómo es la cuenta de energía en otros lugares del mundo? Sería interesante comparar las estadísticas de los Estados Unidos y, por ejemplo, las de China. Si la fuerza de trabajo humana como un factor que suministra energía no se toma en cuenta, la producción de maíz en los Estados Unidos es tal vez mucho más costosa e ineficiente que en los países en vías de desarrollo. Los estudiantes se involucraron bastante en estas discusiones y se sintieron orgullosos de que sus cálculos hubieran generado perspectivas de una naturaleza global.

Unidad 10

Esta unidad consistió en una tarde con los padres. Los padres de familia se enteraron del proyecto sobre la energía y en ese momento se les introdujo a la tercera fase: el uso de la energía eléctrica. Las preguntas centrales fueron: ¿sería posible ahorrar energía en las viviendas de los estudiantes si se conociera más sobre el consumo de los diferentes aparatos eléctricos como la aspiradora, la nevera, el refrigerador, el secador de cabello, etc.? y ¿sería posible encontrar alguna estrategia de ahorro?

Unidad 11

Los estudiantes obtuvieron los siguientes fragmentos de información: los precios del consumo de electricidad, las condiciones para la producción de electricidad y el hecho de que sobre la faz de la tierra queda sólo un poco de carbón. Por lo tanto tiene sentido tratar de reducir el consumo de electricidad. La base de esta parte del proyecto se convirtió en un esfuerzo cooperativo entre cada hogar y la escuela.

Unidad 12

Se le asignó a los estudiantes el trabajo de investigar el uso de energía en sus hogares. La primera tarea consistió en elaborar un diagrama de sus viviendas donde se señalaran las distintas instalaciones eléctricas y los electrodomésticos, con el fin de tener un panorama general. Cada estudiante había prestado de su casa un instrumento para medir el consumo de energía de cada uno de los aparatos eléctricos y la pregunta principal que se les formuló fue: ¿cuál aparato consume más energía? Se convirtió en una

actividad casi detectivesca encontrar al mayor consumidor de energía. Hubo varias consecuencias de esto: en una casa se cambiaron algunas de las bombillas corrientes, por bombillas de bajo consumo de energía; en otra, el refrigerador se trasladó al garaje. Con mayor frecuencia la reducción se hizo cambiando la temperatura de los congeladores ya que a menudo la temperatura era mucho más baja de lo realmente necesario. Fue posible para los estudiantes tomar prestadas del colegio bombillas de bajo consumo de energía y así reemplazar todas las bombillas en casa y observar si se producía algún cambio.

Los estudiantes midieron el gasto de energía en sus viviendas por un periodo normal de una semana y, luego, durante una semana de ahorro. ¿Fue posible reducir el consumo de energía con base en el conocimiento sobre el consumo de los diferentes aparatos eléctricos? Se comparó el consumo durante las dos semanas —se observaron algunas reducciones.

Unidad 13

En esta unidad los estudiantes implantaron en el colegio el programa “¡Ahorre energía!”. Ellos sabían el consumo normal de energía durante una semana porque se lo habían preguntado al portero. Entonces introdujeron una semana de ahorro al identificar las posibilidades de ahorro de energía. Produjeron diferentes carteles y volantes, pero se dieron cuenta de lo difícil que era llevar el mensaje del ahorro de energía a otros salones fuera del propio. El portero no pudo decir con precisión si en efecto había habido algún ahorro durante esa semana.

Unidad 14

De vuelta al salón de clase, las cosas se ubicaron en una perspectiva más global: ¿qué sucede si no se reduce el uso de energía?, ¿qué tipo de consecuencias podría esperarse? Este resumen dio paso a un nuevo proyecto: la construcción de un molino de viento.

COMENTARIOS SOBRE EL PROYECTO

Las fórmulas para calcular la resistencia de la bicicleta parecían difíciles de entender, pero los estudiantes tuvieron la posibilidad de discutirlos. Tenían una idea general de lo que significaban las fórmulas porque era posible relacionarlas con experiencias físicas. Como se mencionó anteriormente, se emplearon diferentes fórmulas dependiendo del tipo de bicicleta. No fue muy difícil ver que la constante en la fórmula de la bicicleta de carreras debía ser la menor. La bicicleta de carreras es sencillamente más fácil de hacer andar: “Bueno, tal vez la bicicleta de mi tía debe tener una constante mayor que 7, pero tal vez si la aceitara mejor podría disminuirse”. También fue obvio para los estudiantes que el área frontal tenía un papel que jugar,

al igual que la velocidad. Fue más sorprendente que la velocidad se tuviera que elevar al cuadrado. No obstante, esta característica de la fórmula también equivalía a algo de la experiencia de los estudiantes: se vuelve más difícil aumentar la velocidad entre más rápido se pedalee.

Las fórmulas empleadas en los modelos de entrada-salida en el caso del desayuno-pedaleaje se sacaron de fuentes sobre medicina deportiva; eran simplificaciones de fórmulas específicas que de hecho se utilizan para calcular la resistencia de una bicicleta. Los estudiantes sabían esto y ese hecho concedió a las fórmulas una autoridad que normalmente se le atribuye a las fórmulas en la enseñanza de las matemáticas —con frecuencia los ejercicios matemáticos tradicionales usan fórmulas inventadas. El objetivo era posibilitar la comprensión de los estudiantes de las ideas básicas de las fórmulas —no generar una crítica de su contenido en sí, se creía que esto podría ser muy difícil. Sin embargo, la actitud de los estudiantes hacia estas fórmulas “confiables” fue muy diferente en comparación con su actitud hacia las fórmulas inventadas. De hecho, las fórmulas inventadas de los libros de texto parecen conservar una autoridad mucho mayor en la enseñanza tradicional de las matemáticas. Lo que expresan puede estar bien o mal, pero no se le presta mucha atención a tales posibilidades porque la labor primaria de la educación matemática es diferente. Un ejercicio sólo tiene que ver con la aplicación de la fórmula dada y el resultado se considera bueno si la fórmula se ha aplicado correctamente. Es irrelevante si el resultado es útil o no o si es confiable o no. Tomemos como ejemplo que en un libro de texto se especifican dos fórmulas para determinar el crecimiento de las estalactitas y estalacmitas en función del tiempo. Para los estudiantes es completamente irrelevante si los cálculos arrojan un resultado confiable para el crecimiento; las fórmulas pueden conservar su autoridad en el silencio. En contraste con esto, las fórmulas para la resistencia de la bicicleta se discutieron y se evaluó su plausibilidad, incluso a sabiendas de que se basaban en investigaciones. En este caso los estudiantes no mostraron mucho respeto a la autoridad y se hizo urgente encontrar si las fórmulas tenían o no una confiabilidad intuitiva. Esto tuvo que ver con la importancia subjetiva de los resultados.

Durante el proyecto se emplearon distintos tipos de terminologías. Se desarrollaron expresiones matemáticas por medio de las cuales se llevaron a cabo los cálculos. Fue más fácil para los estudiantes “más capaces” realizar los cálculos, mientras que los “menos capaces” necesitaron ayuda —y de hecho recibieron ayuda y apoyo sustanciales de sus compañeros. Un segundo tipo de terminología se desarrolló cuando tuvo lugar la discusión de este tipo de fórmulas: ¿cuál es la idea general de las fórmulas? De manera sorprendente esta conversación sobre las fórmulas se hizo menos abstracta de lo esperado y, de hecho, fue comprensible para los estudiantes que no pudieron hacer por sí mismos los cálculos. La razón de esto parece ser que habían ganado un sentimiento personal de lo que podrían significar.

Esto fue sorprendente porque investigar fórmulas en términos generales normalmente se concibe como una labor abstracta. Pero los estudiantes fueron capaces de interpretar la idea general de las fórmulas. ¿Qué significa que la fórmula contenga los parámetros de área frontal y velocidad y no otros? ¿Qué significa que el producto del área frontal y la velocidad (elevada al cuadrado) tenga que multiplicarse por un factor, dependiendo del tipo de bicicleta? ¿Qué significa que se tenga que sumar una constante? (Y, ¿qué significa la constante cuando la velocidad es cero?) Tiene sentido distinguir entre la habilidad para hacer cálculos formales y la habilidad de comprender lo que las fórmulas simbolizan. La habilidad para hacer los cálculos parece no ser un requisito necesario para comprender el “trabajo de las fórmulas” cuando los estudiantes tienen alguna experiencia informal de lo que las fórmulas expresan. En tercer lugar, se manejó la terminología relacionada con el propósito de los cálculos y el punto central aquí es que la explicación general dada por el profesor se hizo en términos comprensibles para (quizás) todos los estudiantes. La terminología de la entrada–salida es bastante común y fue posible expresarla de una manera comprensible porque los estudiantes ya tenían una experiencia específica de la “entrada” y la “salida” al igual que de su relación: “¿Cuánto tiempo seremos capaces de pedalear antes de que necesitemos tomar un bocadillo?” Un fenómeno similar se puede encontrar en el caso del modelo de entrada–salida en la granja. Incluso si varios de los estudiantes no hubieran sido capaces de hacer los cálculos por sí mismos, al menos habrían sabido sobre qué versaban —y estaban ansiosos por saber el resultado final.

Este fenómeno puede relacionarse con la distinción hecha anteriormente entre el conocer matemático, tecnológico y reflexivo. No trato de decir que esta distinción refleje la distinción original, pero acentúa la posibilidad de que el conocer matemático no sea una condición necesaria para el desarrollo de una competencia tecnológica y, más aun, que una competencia tecnológica plenamente desarrollada no sea una condición necesaria para el desarrollo del conocer reflexivo. Para los estudiantes es posible comprender el contenido general de las fórmulas sin, de hecho, ser capaces de llevar a cabo los cálculos. También es posible comprender la idea del modelo de entrada–salida sin haber captado la naturaleza específica de las fórmulas. La comprensión de lo que sucede en el proceso de la educación matemática no es una suma lineal de comprensiones previas cuya base involucra las matemáticas. Para los estudiantes, comprender es más bien tener consciencia de la red de relaciones a la que nos hemos referido anteriormente.

La manera como el proyecto “Energía” se organizó implicó que los estudiantes mismos no pudieran convertirse en los directores del proceso educativo, pero durante éste se establecieron algunos *puntos estratégicos*, desde los cuales era posible que los estudiantes “vieran” lo que habían

alcanzado y lo que se iba a hacer durante la siguiente fase del proyecto. La dirección del proceso educativo y el propósito de las diferentes actividades no tuvo que expresarse necesariamente en términos matemáticos ni tecnológicos, sino que habría podido expresarse en términos relacionados con las experiencias cotidianas de los estudiantes o con experiencias que hubieran desarrollado como parte del proyecto. Cuando se establece un punto estratégico, no es catastrófico en términos educativos que los estudiantes no entiendan los detalles de los cálculos siguientes, dado que tienen una meta-concepción de lo que están haciendo⁹. Fue esencial para el proyecto “Energía” que las cifras de la cuenta de energía tuvieran un significado. Los estudiantes habían tenido una experiencia física tanto del suministro de energía como de su consumo. Por lo tanto, la idea del modelo de entrada-salida tuvo un significado bastante tangible (se hizo evidente que uno necesitaría pedalear casi durante dos horas a una velocidad considerable para gastar la energía proporcionada por un paquete de papas fritas). El significado no sólo fue importante para la interpretación de los cálculos, sino que también fue esencial para establecer los puntos estratégicos desde los cuales los estudiantes podrían obtener una visión global del proyecto. Los resúmenes de los diversos subtemas no estratificaron a los estudiantes de acuerdo con su “habilidad” (aunque de alguna manera esto hubiese sucedido cuando se realizaron los cálculos).

Para calcular el consumo de energía en la producción agrícola de cebada, se tuvo como información relevante la amplitud de las máquinas empleadas y el número de veces que se tiene que trabajar el terreno mientras que no se consideró tanto la percepción específica del tamaño de un terreno de una hectárea. Así que nos podemos preguntar ¿cuál fue la función de haber medido el terreno de una hectárea? Como se mencionó anteriormente, fue algo difícil para los estudiantes encontrar la manera de delinear un terreno de una hectárea. Ellos estaban un poco confundidos pero finalmente encontraron la manera de hacerlo y decidieron que su terreno debía tener por dimensiones 200 m. de ancho por 250 m. de largo. Desde un punto de vista matemático, medir una hectárea y caminar a lo largo de su perímetro fue algo innecesario, pero debemos considerar que el conocimiento matemático no es todo lo que está en juego en la educación matemática. La medición del campo fue esencial para tener un punto de referencia en la discusión posterior. Cuando se llegó a uno de los momentos de concluir sobre la experiencia, i.e., cuando se hizo necesario tener un punto estratégico en el proceso educativo, el terreno de una hectárea tomó una importancia cardinal. Más tarde, se hicieron varias referencias a este terreno y así se posibilitó hacer resúmenes con un carácter bastante concreto: “Que la cifra de entrada-salida calculada muestre una proporción de uno a seis significa que el granjero puede recolectar la cebada que contiene

9. Este punto se desarrollará con mayor profundidad en el capítulo sobre la intencionalidad.

cerca de seis veces más energía que la que tiene que usar cuando realiza todo el proceso de arar, hacer surcos, sembrar, regar, segar y recolectar y todas las otras cosas que necesite hacerle al área alrededor de la cual nosotros caminamos”. Naturalmente una afirmación sobre las cifras de entrada-salida no contiene más información esencial si se hace o no referencia a un terreno particular. La diferencia está en que el profesor puede hacer referencia a una situación en la que los estudiantes han participado. La terminología empleada para explicar las ideas generales de los cálculos cuenta con un nuevo significado. Así que la actividad de medir el terreno puede interpretarse como una forma de enriquecer la semántica para la discusión del proceso educativo. Medir el terreno ofrece un punto estratégico con respecto al significado. Si se desea que los estudiantes no pierdan el interés, es importante que los puntos estratégicos del proceso educativo involucren a los estudiantes como participantes; entonces es posible hacer referencias como: “cuando estábamos montando en bicicleta...” o “cuando caminamos alrededor del terreno...”

Uno de los propósitos principales del montaje de un escenario es la producción de puntos estratégicos. Estos se convierten en montañas dentro del paisaje semántico del trabajo por proyectos. Desde su cima es posible obtener una visión general sobre el proyecto. Así se ayuda a crear un metalenguaje sobre las diversas actividades del proceso educativo. Los puntos estratégicos se vuelven entonces condiciones semánticas de comunicación entre los estudiantes y el profesor, no sólo acerca del contenido educativo preciso, sino también sobre las perspectivas de este contenido, sobre lo que se hace y sobre lo que se tiene que hacer.

LENGUAJE FORMAL VERSUS LENGUAJE NATURAL

El proyecto “Energía” llama la atención sobre algunas de las limitaciones de las descripciones previas del papel de las matemáticas en la sociedad. Se ha enfatizado que las matemáticas tienen un efecto notorio en la sociedad y se ha acuñado la expresión las matemáticas ejercen un poder formativo sobre la sociedad. Esto ha producido la idea de que lo más esencial de un proceso educativo en el que la alfabetización matemática se relacione con la alfabetización es llegar a ver las dificultades en hacer las transiciones entre los diversos juegos de lenguaje involucrados en el proceso de modelaje y ver cómo las matemáticas crean patrones para las acciones y diseños tecnológicos.

También se ha mencionado la noción de alquimia inversa. Sin embargo, no se ha cuestionado un supuesto que subyace a esta idea. ¿Se debe ver en primera medida la educación matemática crítica como una reacción a la alquimia inversa del modelaje matemático en los asuntos sociales? Este fue

un supuesto en el desarrollo del proyecto “Subsidio familiar en una micro-sociedad”. El proyecto “Energía” muestra que este enfoque no es el único posible —en tanto no excluyamos este proyecto como un ejemplo de educación matemática crítica. “Nuestra comunidad” ya hizo un aporte importante a nuestra noción de educación crítica y “Energía” también aporta algo adicional.

El término arqueología matemática designa el intento por identificar y enunciar el uso que se hace de las matemáticas y que se esconde detrás de la fachada pulida de la tecnología. No obstante, el proyecto “Energía” no incluyó una arqueología matemática, a pesar de que el proyecto se hubiera podido desarrollar en esa dirección. No es difícil encontrar posibilidades para reflexionar acerca de la confiabilidad de las fórmulas —por ejemplo de las fórmulas sobre la resistencia de la bicicleta— pero el punto es que estas reflexiones no definen el valor del proyecto “Energía” (que definitivamente tiene algún valor). El proyecto se aproxima a las matemáticas en un papel diferente al de prescribir la realidad y este papel diferente también tiene que discutirse en relación con la educación matemática crítica. Esto llama nuestra atención una vez más sobre la interpretación teórica de la relación entre el lenguaje formal (bien sea sistémico, matemático o algorítmico) y el lenguaje natural.

Se han mencionado dos posiciones diferentes al respecto: lo que puede llamarse la noción Russell–Carnap de que el lenguaje natural da pie a la confusión y ambigüedad, mientras que el lenguaje formal puede convertirse en la estructura subyacente y aglutinadora de las descripciones adecuadas sobre la realidad; y la noción Ryle–Austin que dice que los lenguajes formales son simplificaciones burdas de los aspectos limitados del lenguaje natural, al hacer formalizaciones muy dudosas como medio de descripción, excepto tal vez en algunas áreas muy restringidas. La noción Russell–Carnap y la noción Ryle–Austin representan dos posiciones diferentes sobre las relaciones entre tipos de lenguaje y la “realidad”. Una comprensión del modelaje matemático refleja una posición que se ubica en algún punto entre estos dos extremos.

La “realidad”, empero, es un concepto frágil. Permitir que se refiera a fenómenos no lingüísticos que pueden ser el objeto de descripción no puede soportar un examen minucioso, si no confiamos en un teoría como la Teoría de la Imagen, como se ha planteado en el *Tractatus*. Pero como se ha mencionado anteriormente, la teoría de la imagen produce una interpretación muy simple del lenguaje. En cambio, debemos considerar la complejidad de las funciones y efectos del uso del lenguaje. El aspecto descriptivo es sólo un aspecto y las descripciones e intervenciones realizadas por medio del lenguaje se mezclan en una teoría de los actos de habla, que ya se había anticipado con la noción del poder formativo de las matemáticas. La discusión de la noción Russell–Carnap versus la noción Ryle–Austin no se puede reducir a una comparación de los potenciales descriptivos, sino

que debe tener en cuenta lo que puede hacerse con diferentes tipos de juegos de lenguaje.

Sin embargo, permítanme que me concentre brevemente en el aspecto descriptivo, ahora visto como una sombra unidimensional de la función total del lenguaje. El lenguaje formal y el lenguaje natural se convierten en dos medios diferentes de descripción. Ellos no se pueden traducir simplemente de uno a otro y es improbable que abarquen los mismos rasgos de la realidad. Parte de la realidad puede describirse por medio de las matemáticas¹⁰, mientras que en algunos casos el lenguaje natural puede proveer descripciones más adecuadas. Es claro que es posible observar una superposición entre el espectro de las descripciones matemáticas y las del lenguaje natural, pero no podemos esperar que haya una completa coincidencia entre ellas. Algunos rasgos de la realidad se quedan por fuera del alcance de las matemáticas y permanecen dentro del alcance de las descripciones del lenguaje natural y viceversa¹¹. En algunos casos las descripciones del lenguaje formal pueden ser más apropiadas porque tienen un potencial no compartido por las descripciones en lenguaje natural. Esto significa que en algunos casos las descripciones formales tienen un potencial para expresar rasgos que de otra manera sería imposible revelar. Esto expresa una tesis fuerte sobre la utilidad de las matemáticas, pero mi interpretación se acompaña de una tesis similar que establece que en otros casos las descripciones en lenguaje natural tienen un poder que excede los potenciales de las matemáticas¹².

No asumo que todo pueda describirse por medio de un lenguaje adecuado. No asumo que el lenguaje, independientemente de si es formal o natural, pueda acercarnos a los límites de la realidad. Esto significa que se niega la tesis del *Tractatus*, i.e., que los límites del lenguaje son idénticos a los límites del mundo. No podemos esperar que ninguna de nuestras herra-

10. Aquí ignoro la discusión de si tal descripción en algunos casos puede ser exactamente correcta o si siempre es necesario algún tipo de aproximación —esto no es importante por ahora. Tan sólo quiero defender la idea de que en algunos casos las matemáticas tienen un poder descriptivo fuerte.

11. Esta posibilidad hace que los métodos cualitativos sean métodos de investigación científica autónomos, y lo mismo se aplica para los métodos cuantitativos.

12. Aunque las formulaciones que he hecho hasta ahora expresan cierta simetría entre las descripciones formales y las no formales, este no siempre es el caso. Tenemos que abordar la siguiente pregunta: si tenemos que discutir la relación entre dos diferentes tipos de descripciones para encontrar cuál es más confiable en un determinado contexto —y digamos que las descripciones son de diferente naturaleza, una emplea un lenguaje formal y otra, uno natural— ¿en qué lenguaje tendrá lugar la comparación? En esta situación el lenguaje natural muestra una superioridad, no existe ningún método formal por medio del cual podamos argumentar que se debe preferir una cierta descripción. El metalenguaje para la discusión y evaluación de las descripciones es no formal. No obstante, la necesidad de un metalenguaje no formal no implica que se deban preferir las descripciones del lenguaje natural.

mientas de descripción sea exhaustiva. Empero, un lenguaje puede expresar muchas cosas. *Fata morgana*, la ilusión en las descripciones (científicas), es siempre una posibilidad. Miremos primero las descripciones en lenguaje natural. Ellas siempre corren el riesgo de encarnar más de lo que de hecho puede ser el caso; puede decirse el observador observa la realidad y, de forma simultánea, algunas de las características (ideológicas) presentes en el lenguaje. El lenguaje natural —en esta interpretación— se concibe no sólo como un medio de comunicación y como una herramienta de descripción, expresión, acción, etc., sino también como una malla atrapadora de una gran variedad de supuestos construidos al interior mismo de la gramática del lenguaje. Estos rasgos pueden proyectarse también en la realidad por medio del acto mismo de la descripción. Cuando observamos y describimos, también observamos nuestro lenguaje. El lenguaje crea su propia plantilla de la realidad. Si no tenemos en cuenta el fenómeno de la proyección del lenguaje, ni que el lenguaje es un conjunto socialmente construido de condiciones para la interpretación, nunca ganaremos una consciencia del fenómeno por medio del cual el lenguaje puede causar *fata morgana*. Sin embargo, una observación similar se puede hacer con respecto al uso de un lenguaje formal porque éste también se construye sobre una gramática que establece condiciones de observación e interpretación. Formulado de una manera simple que se emplea para atacar al positivismo lógico: al tratar de aplicar un lenguaje formal como una herramienta descriptiva, la realidad se transforma en un conjunto de hechos ajustados con precisión por ese tipo de herramienta descriptiva. El lenguaje formal se vuelve tan problemático como el natural cuando no se asume que la estructura lógica del lenguaje es similar a la “estructura lógica del mundo” y, por lo tanto, esta tesis —también formulada por Wittgenstein en el *Tractatus*— es difícil de sustentar. El lenguaje formal también produce el fenómeno de *fata morgana*. Si no contamos con ningún medio de ajuste, podríamos estar tentados a adscribirle a la realidad las características lógicas que emergen de la gramática de ese tipo de lenguaje.

Para finalizar, no encuentro posible sacar ninguna conclusión general sobre la complementariedad de las nociones Russell–Carnap y Ryle–Austin, con respecto a la relación entre el lenguaje formal y natural. La complementariedad tiene que discutirse con referencia a situaciones particulares.

No se puede esperar que sean idénticos los tipos de ilusión, con respecto al significado causado por el lenguaje natural y por el formal; aunque podamos temer una superposición. La existencia de este traslazo implica que incluso si se pueden usar descripciones cuantitativas y cualitativas en un tipo de crítica complementaria, no se puede esperar que las descripciones controlen todas las formas de *fata morgana*. La idea misma de la descripción se conecta directamente con la posibilidad de tales ilusiones. Cuando tratamos de describir por medio del lenguaje, siempre percibimos las características de la descripción que pertenecen a la herramienta des-

criptiva; no obstante, no somos completamente capaces de identificar estos rasgos por completo. Empero, los medios cualitativos y cuantitativos de descripción son importantes para ofrecer una crítica complementaria de uno hacia el otro.

Cuando tratamos de comprender lo que podría hacer un lenguaje, es esencial ser conscientes de que podemos ver o mucho o muy poco a través del lenguaje usado (como se ha enfatizado, la descripción es sólo una dimensión de los posibles trabajos del lenguaje). En algunos casos podemos esperar que las matemáticas ejerzan un poder que no se halla en el lenguaje natural. Hasta el momento la perspectiva desarrollada sobre la educación matemática crítica se ha enfocado en el poder formativo de las matemáticas, que se relaciona con el fenómeno de la *fata morgana*: las matemáticas pueden describir relaciones que no son verdaderas, pero la realidad se puede cambiar y la *fata morgana* se vuelve real por medio de un acto de formatividad. La realidad se cambia para ajustarse a la descripción matemática de un “poder ser”. Se ha enfatizado que la educación matemática debe ser capaz de identificar este fenómeno y, desde esta perspectiva, se ha desarrollado la teoría del conocer reflexivo. Pero éste no es una base suficiente para la educación matemática crítica.

Si las matemáticas en algunos casos tienen un poder descriptivo único no idéntico al poder descriptivo del lenguaje natural, sólo se puede acceder a algunos rasgos de la realidad por medio de las matemáticas, tal vez incluso sólo algunos rasgos críticos¹³. Podríamos ser capaces de hacer algo por medio de las matemáticas que no pudiésemos ser capaces de hacer con el lenguaje natural solo. Una competencia matemática puede significar una potenciación, también en términos de la educación crítica. Y esto significa que la educación matemática crítica no se puede desarrollar únicamente a través de la tesis del poder formativo de las matemáticas. Para mí, el proyecto “Energía” indica no sólo que el papel social de las matemáticas tiene que discutirse con mayor profundidad, sino que también la noción de alfabetización matemática debe expandirse¹⁴.

13. Otro asunto que no ilustra el proyecto “Energía” es: ¿qué pasa con la competencia matemática “clásica” como ser capaz de manejar problemas matemáticos engañosos? Cuando vemos “Energía” como un argumento para interpretar las diferentes competencias que definen la alfabetización matemática como importantes, tal argumento se ha basado en las aplicaciones de las matemáticas para hallar las cifras de entrada-salida de energía. Este es un uso tecnológico de las matemáticas. Y todavía podríamos discutir la “ingenuidad” matemática. ¿Cómo interpretamos las condiciones previas de tales talentos desde la perspectiva de la educación matemática crítica? Tengo que admitir que esta también es una de las cuestiones que no trataré en este libro.

COMENTARIOS SOBRE LA ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA

Si miramos la manera como se discutió y analizó el problema de la entrada-salida en el caso de la granja en el proyecto “Energía”, se evidencia que no estamos tratando un ejemplo de formatividad —al menos no en una interpretación inmediata del término. Las matemáticas se usaron para expresar algunas correlaciones que simplemente no se pueden identificar de ninguna otra manera. Algo se puede ver y hacer por medio del lenguaje formal que no puede verse ni hacerse por medio del lenguaje natural. Los resultados de las investigaciones de los estudiantes podrían no haberse expresado o argüido de la misma manera específica sin los cálculos. Se habría podido sugerir que existe algún problema en la producción de tocino, pero no habría sido posible expresar la magnitud del problema sin los cálculos. Aquí encontramos un ejemplo de un poder único de las matemáticas, hecho visible en un contexto educativo. Naturalmente es necesario enfatizar que el lenguaje formal no sustenta ningún argumento independientemente de lo que se ve. La importancia de las matemáticas yace en un lugar diferente. Cuando las matemáticas se usan en una descripción, como esa en cuestión, se vuelve posible también analizar situaciones hipotéticas. Por ejemplo, ahora tiene sentido preguntarse cómo cambiaría la situación de entrada-salida si se modificara el uso de combustible. ¿Preparar el terreno de una manera diferente tendría implicaciones sobre el uso de energía?, etc.

Hablar de *fata morgana* parece presuponer que la función esencial del lenguaje es describir lo real, pero *fata morgana* puede ser útil en todo caso. Las matemáticas deberían describir situaciones hipotéticas e investigar situaciones posibles. Cuando usamos las matemáticas podemos vernos involucrados en un razonamiento hipotético sobre la realidad. Y este aspecto de las matemáticas puede verse como una parte del proyecto “Energía”. Esto introduce, de hecho, una nueva concepción de las matemáticas. Podrían interpretarse como una fuente importante para la construcción de situaciones hipotéticas que facilitan experimentos de pensamiento. Cuando se planifica la construcción de un puente, las matemáticas podrían usarse para llevar a cabo experimentos sobre la estabilidad del puente, sin tener que construirlo de antemano. Podemos experimentar con una política económica sin, de hecho, tener que hacer reformas económicas (esta fue la esencia de la construcción del modelo MSCE, por ejemplo). Este aspecto

14. El tipo de potenciación del que hemos venido hablando aquí es diferente del que emerge en forma de confianza en sí mismo por parte del estudiante que se da cuenta de que es capaz de hacer mejores matemáticas que el resto de la clase. Este tipo de confianza no es lo que me ha preocupado, pero algunas veces esta interpretación se mezcla con la idea de que las matemáticas son potenciadoras.

de los experimentos de pensamiento podría haberse encontrado en el proyecto “Energía”, si las investigaciones se hubieran llevado más allá. ¿Cuál sería el resultado si se adecuara el terreno de una forma diferente? ¿Cuánto combustible se emplearía en ese caso? ¿Sería posible cambiar la relación de entrada–salida de una manera radical? Veo la creación de posibilidades para tales investigaciones como la esencia de la aplicación de las matemáticas en este caso.

Algunas veces es imposible comparar una situación hipotética con la realidad pero en otras ni siquiera tiene sentido hacer comparaciones con la realidad. En el caso de la construcción de un puente, las situaciones hipotéticas guardan alguna similitud con la realidad pero ¿cómo comparar una investigación basada en el MSCE con la realidad económica? La realidad económica se construye por medios tecnológicos —por los medios con los cuales se analiza. Sin embargo, comprender situaciones hipotéticas compatibles con una situación verdadera crea posibilidades para la acción. Las matemáticas pueden ofrecer situaciones generales que sería imposible investigar si sólo tuviéramos a la mano el lenguaje natural. El rango de alternativas que dan acceso a una situación real determina la acción. Algunas veces parece imposible investigar conjuntos de situaciones hipotéticas que se asemejen a la realidad, pero como con frecuencia estamos obligados a actuar con tan sólo una mirada parcial a las alternativas, una aproximación a través del lenguaje formal a las situaciones hipotéticas puede también producir acciones irracionales. La formalización y la irracionalidad también pueden ir de la mano¹⁵. Pero a pesar de esto, la irracionalidad es lo único con lo que contamos y las matemáticas se vuelven entonces un medio para la solución de problemas reales.

Como se enfatizó anteriormente, la alfabetización matemática se compone de una competencia matemática, de una tecnológica y de una reflexiva. El conocer reflexivo le concede a la alfabetización matemática una agudeza radical. No obstante, en el proyecto “Energía” vimos como la competencia matemática se convirtió en un vehículo hacia un área importante de comprensión. Las percepciones que adquirieron los estudiantes durante el proyecto no se habría podido desarrollar sin las matemáticas. Esto recalca el hecho de que la alfabetización matemática sea una competencia integrada. Tiene sentido ver la alfabetización matemática y la alfabe-

15. Aquí podría iniciarse un nuevo análisis. Creo que una característica básica de una sociedad con un alto desarrollo tecnológico es que en su interior surgen nuevos tipos de estructuras de riesgo. Creo que una de sus fuentes está en la transición entre la formalización del lenguaje y la formalización de las rutinas. La base de nuestro manejo tecnológico son investigaciones realizadas por medio de estructuras formales. Esto significa que llevamos a cabo una acción tecnológica por medio de una investigación de un conjunto de situaciones hipotéticas. Estas situaciones se construyen por medios formales y con frecuencia no tenemos la oportunidad de comparar las estructuras de las situaciones hipotéticas con la situación real. Esto significa que la acción implica correr un riesgo.

tización como competencias que ofrecen medios para interpretar los asuntos sociales. El uso de las matemáticas posibilitó que los estudiantes interpretaran lo que habían observado sobre las actividades de la granja. Habría sido imposible aproximarse a las cifras de la relación entrada–salida de energía sin las matemáticas. El uso de las matemáticas permitió ver las causas de los fenómenos observados. Si surge el cuestionamiento de por qué la cantidad de energía se aumenta en un factor de seis cuando se produce cebada y se reduce en un factor de cinco cuando los vegetales se transforman en alimento para cerdos, es porque los estudiantes adquirieron una explicación para esos números como resultado de su participación en la recolección de los datos relevantes. Quizás no estuvieron seguros de que su justificación era correcta, pero aprendieron algo acerca de la naturaleza de la justificación. Los estudiantes adquirieron una posición más fuerte cuando vieron que el resultado no habría variado mucho si algunos de los datos no hubiesen sido correctos. Como es natural, estas observaciones siempre tienen que acompañarse de una duda más fundamental: tal vez se hayan dejado por fuera algunas características importantes. No es posible asegurar por medio de un análisis formal que no habrá puntos ciegos. No obstante, en el proyecto “Energía” las matemáticas describieron las relaciones que tenían similitud con las estructuras reales de la actividad en una granja y estas relaciones se abrieron a una discusión dada su formulación matemática. Las descripciones se volvieron hipótesis que podían mejorarse, discutirse y criticarse y, como los estudiantes participaron en el desarrollo del análisis matemático, fueron capaces de captar la parte esencial de un nuevo argumento.

Un aspecto importante de la aplicación de las matemáticas en el proyecto tiene que ver con la ejemplaridad. Las matemáticas se usaron para identificar un fenómeno que podía reconocerse como parte de un problema relacionado con la producción y el consumo de alimentos. Las cifras de entrada–salida describen una granja particular pero, dada la manera como se abordó el problema, el paso siguiente hacia una discusión del problema en un contexto más general no es muy grande. Tiene sentido preguntar si los resultados reflejan una tendencia general en las granjas danesas y si la tendencia es global. Los estudiantes no estuvieron lejos de entender la idea de que la producción de alimentos para animales, desde la perspectiva de la energía, es un proceso muy costoso. Para los estudiantes los problemas mundiales en la producción de alimentos podrían ser diferentes ahora con motivo de haber participado en el proyecto.

Una posible función del modelaje matemático es expresar la ejemplaridad de un fenómeno particular. Esto conecta la noción de ejemplaridad no sólo con la imaginación social, que se refiere a la habilidad de imaginarse que las situaciones sociales y políticas pueden ser diferentes, sino también con la crítica. La crítica se definió originalmente como una reacción a una situación y esta relación conceptual tiene una interpretación educativa en el

proyecto “Energía”. De hecho, uno de los resultados del proyecto fue el intento para cambiar el consumo de energía tanto en los hogares de los estudiantes, como en la escuela misma (el hecho de que la imaginación social no sea el único catalizador necesario para implantar un cambio también se ilustró en el proyecto, cuando el programa de la semana de ahorro de energía no tuvo ningún efecto). Empero, veo que el proyecto ilustra el hecho de que la potenciación de las personas por vía de la imaginación social puede convertirse en un aspecto de la educación matemática¹⁶.

Originalmente el conocer reflexivo se definió en relación con el proceso de modelaje matemático. Cuando las acciones tecnológicas se asocian con la competencia matemática en un fin específico, el conocer reflexivo tiene la forma tecnológica de manejar el proceso de resolución de problemas como su objeto en sí. Este aspecto de la reflexión no tiene ninguna posición obvia en el proyecto “Energía” pero, como se indicó antes, sugerí que el concepto de educación matemática crítica también abarca las cualidades del proyecto. No obstante, permítanme recapitular las diferentes posibilidades. Primero, podríamos continuar sosteniendo que un aspecto esencial de las matemáticas consiste en su capacidad de modelaje y en su potencial para expresar algo esencial o inesperado. Esto podría todavía concebirse como algo tan importante que cualquier reacción crítica debería tener estas posibilidades en cuenta. Por lo tanto, la crítica, al menos en lo que respecta a la educación matemática, tiene que definirse como una crítica a las aplicaciones de los métodos formales. Segundo, podría ser posible que la dimensión crítica de la educación matemática tuviese que ver con la naturaleza de los problemas externos en sí, i.e., problemas que se han modelado. Esta línea de interpretación — que de alguna manera es la forma original de definir educación crítica — ha sido disminuida en mi análisis anterior de la alfa-

16. Si las matemáticas potencian, necesariamente nos topamos con el problema del elitismo.

Las matemáticas se describieron como parte de una competencia democrática (no hemos recordado que “Nuestra comunidad” amplió nuestra comprensión sobre la posición de la alfabetización matemática como parte de una competencia democrática). Si aceptamos que es esencial un talento particular para las matemáticas, con facilidad nos podemos encontrar con un elitismo. Se enfatizó, con los filósofos de la democracia a los que nos referimos anteriormente, que una competencia para juzgar lo que hacen las personas en el poder no presupone una educación específica (si ese fuera el caso deberíamos sustituir la democracia por una expertocracia). Sin embargo, si la alfabetización matemática juega un papel en la ciudadanía crítica, se vuelve problemático si esta competencia se describe de forma tal que suponga una enseñanza avanzada de las matemáticas (a pesar de que crea que es significativo hablar sobre una educación matemática crítica como parte de los estudios universitarios, pero esto se tiene que argumentar de una forma diferente). Estoy hablando de la educación matemática elemental, es decir, la competencia matemática que estamos discutiendo es la que por lo general la gente obtiene. Tenemos que ser conscientes de la contradicción que podría surgir al desarrollar una educación matemática como parte de una fuerza democrática y, al mismo tiempo, enfatizar la necesidad de mantener un nivel avanzado de matemáticas.

betización matemática. Una razón para alejarse de esta crítica al modelaje es que el proyecto “Energía” ilustra la posibilidad de la ejemplaridad. Investigar una granja particular genera una comprensión de algunas preguntas globales fundamentales. En este caso, la materia esencial parece no ser el (mal)uso que de hecho se hace de las matemáticas, sino el área problemática que se ha modelado. La educación matemática se vuelve una manera de captar problemas específicos bien definidos y, dado su valor ejemplar, una percepción particular podría ofrecer una perspectiva global. Así, la educación matemática se convierte en una actividad crítica. Pero puede existir una tercera posibilidad. Quizás la posibilidad de que los estudiantes obtengan una concepción de su propia posición en el proceso educativo es un aspecto esencial del proyecto “Energía” y también de la educación crítica en general. Esto enfoca la construcción de los puntos estratégicos y de las condiciones necesarias para que los estudiantes logren una metaconcepción de lo que están haciendo. Esto significa que el concepto de conocer reflexivo todavía es útil, pero ahora tiene que extenderse en una dirección diferente. Tiene que ver con una metaconcepción del proceso educativo y no solamente con una metaconcepción de las aplicaciones de las matemáticas¹⁷.

17. Todavía cabe la posibilidad de que las tres alternativas mencionadas no sean exhaustivas. Por ejemplo, podríamos argüir que lo más esencial es que, como una extensión del proceso educativo, los estudiantes tuviesen la posibilidad de actuar. Esto significa que en el proyecto “Energía” ha debido desarrollarse más la última fase donde los estudiantes trataron de hacer algo con el consumo de electricidad en sus hogares y en el colegio. Esta es la parte activa del proyecto y es lo que caracteriza la dimensión crítica.

INTENCIONALIDAD

Una crítica no puede definirse únicamente con referencia a algún rasgo particular de una situación. Ser crítico significa prestar atención y reaccionar a una situación crítica que se ve como el *objeto* de crítica. Pero la crítica también puede ser elaborada por alguien que se concibe como el *sujeto* de la crítica. La palabra crítica se conecta etimológicamente con el término criterio, lo cual significa que criticar también implica discernir. Hasta ahora, una de las preocupaciones principales de mi análisis ha sido el objeto de la crítica, el cual ha tenido como foco el poder formativo de las matemáticas. Las descripciones se definieron como aquello que capta algunas de las implicaciones sociológicas y de las incertidumbres éticas de la aplicación de los métodos formales dentro de la tecnología. Pero una ciudadanía crítica, que incluya a la alfabetización matemática como una de sus componentes, también tiene una dimensión subjetiva. Explorar esto significa que los estudiantes (y el profesor) se vuelven el centro de la discusión.

El montaje de un escenario puede ser un medio para crear un campo semántico para discutir las actividades matemáticas. Los puntos estratégicos son como montañas en ese paisaje, que posibilitan la existencia de las componentes del lenguaje del conocer reflexivo. No obstante, este lenguaje también tiene una función diferente que de hecho ha estado presente en los proyectos descritos con anterioridad. El montaje de un escenario no sólo ofrece un lenguaje sobre las matemáticas, sino también un lenguaje sobre lo que sucede en la educación matemática y en un salón de clase particular. Tal montaje brinda oportunidades para que los estudiantes ubiquen los propósitos de sus actividades. Así se posibilita expandir el concepto de reflexión. Las reflexiones pueden dirigirse no solamente al papel social de las matemáticas sino también a situaciones mismas de enseñanza–aprendizaje. Desde un punto estratégico, los estudiantes pueden hacer de su propio proceso de aprendizaje un objeto de reflexión. También trataré de interpretar este aspecto como parte de la educación matemática crítica.

Si repasamos las descripciones de los proyectos, encontramos una característica común en su intento por hacer comprensible para los estudiantes de qué se trata la enseñanza y el aprendizaje. Por lo tanto, es *esencial reinterpretar todas las descripciones de los proyectos presentadas*. Además de pedirle al lector que revise lo que está escrito antes de este punto, trataré de discutir asuntos epistemológicos con el fin de elucidar por

qué las reflexiones sobre las situaciones personales de aprendizaje pueden verse como algo esencial dentro de la educación matemática crítica. Nos vamos a dirigir hacia la parte subjetiva de la educación para dar una mirada al concepto de desarrollo epistémico. No basta con buscar posibilidades para que los estudiantes comprendan los objetivos e ideas de la situación de aprendizaje, sino que además se deben buscar posibilidades para que ellos expresen y hagan comprensible al profesor la manera como ven sus ideas y esperanzas. En resumen, el desarrollo del conocimiento debe interpretarse de manera similar a un acto, si se desea que haga parte de una consciencia crítica. Este es un supuesto básico cuyo significado debe explicarse.

DISPOSICIONES, INTENCIONES Y ACCIONES

Algunas condiciones tienen que cumplirse para que tenga sentido decir que una persona está ejecutando una *acción*. No podemos decir que alguien está actuando y, al mismo tiempo, afirmar que ha sido forzado a hacer lo que de hecho está haciendo. Pinocho, por ejemplo, no pudo actuar sino cuando se liberó de sus cuerdas de marioneta. Las acciones presuponen un grado de indeterminación (o libertad). No podemos atribuirle acciones a sistemas mecánicos como un reloj; ni tampoco podemos decir que un árbol actúa cuando crece. Las acciones no se pueden describir ni en términos mecánicos ni en términos biológicos. Si el comportamiento de una persona puede de hecho describirse de tal manera, entonces ese comportamiento no hace parte de sus propias acciones. La respiración o el crecimiento del cabello no son acciones personales. La primera condición esencial para ejecutar una acción es que debe existir indeterminación, es decir, que la persona que actúa debe poder escoger¹.

La persona actuante debe tener alguna idea de los objetivos y razones para alcanzarlos. No se puede decir que una persona actúa si no tiene ninguna idea sobre qué hace y por qué lo hace. Esto debe interpretarse de

1. Si todos fuésemos simples sistemas mecánicos, completamente predecibles una vez se hubieran especificado todos los parámetros, ¿no querría esto decir que cualquier cosa que normalmente llamemos acción es de hecho un comportamiento predeterminado?, ¿no querría también decir que la acción se produce sólo en nuestra imaginación, tal vez debido a que no podemos discernir las múltiples causas que nos fuerzan a hacer lo que hacemos? y ¿no es acaso la consecuencia de lo anterior que el concepto de responsabilidad pierda su significado?, ¿podríamos calificar a Pinocho de responsable cuando tenía sus cuerdas? Más aun, si negamos la posibilidad de ser maquinarias de reloj complejas, ¿tenemos entonces que aceptar que los seres humanos comparten ciertos constituyentes “espirituales” cuya actividad no se puede explicar en términos mecánicos? A pesar de que estas preguntas son significativas filosóficamente, mi discusión no tomará esta dirección. Defiendo la idea de que tiene sentido hablar de las acciones humanas, pero también de que en muchos casos no podemos hablar del comportamiento de una persona como una acción —por ejemplo, cuando la persona hace algo como un reflejo, o como un hábito, o porque está forzada a hacerlo.

manera amplia porque la persona puede bien estar actuando incluso si su imagen del objetivo de la acción es confusa y la razón para obtener tal objetivo es oscura o simplemente está implícita en una situación. Esto también diferencia la acción de la *actividad ciega*, como mover una mano, rascarse la nariz, etc. Los comportamientos que resultan de la actividad ciega pueden no obstante llamarse acciones en una tradición del lenguaje natural. Pero mi esperanza no es forzar ninguna distinción hasta sus límites, sino simplemente enfatizar lo siguiente: las acciones, en el uso que le estoy dando al término, presuponen un grado de indeterminismo, i.e., una situación que posibilita la selección y que también involucra un grado de consciencia en el sentido de que las intenciones de la persona deben estar presentes en lo que hace².

La *intencionalidad* es un constructo analítico importante que restringe el análisis de la acción³. Una característica de la consciencia es que puede dirigirse hacia un objeto no presente⁴. Me es posible pensar en una mujer a pesar de que no se encuentre presente. Podría pensar en una mujer que ya no existe, como mi abuela, o en una que nunca ha existido, como mi tía millonaria de los Estados Unidos. De igual forma, en vez de orientarse hacia una persona, mi intencionalidad podría dirigirse hacia planes e ideas y expresarse como “tengo la esperanza de que ...”, “mi creencia de que ...”, “mi sueño de que ...” o “mi deseo de que ...”. Estas frases expresan la constitución relacional de la intencionalidad. Podría tener “la esperanza de que ...” y seguiría una descripción de una imagen mental de un estado de cosas. En todas las situaciones, mi consciencia se dirige hacia un objeto que no necesariamente está presente. La habilidad para dirigirse hacia un objeto no presente define la intencionalidad. En este sentido, la intencionalidad describe una relación entre un estado mental y lo que podríamos llamar un objeto intencional. El objeto intencional es aquello que satisface una relación de intencionalidad⁵.

2. Estas dos condiciones necesitan una modificación considerable. Puede no ser el caso, estrictamente hablando, de que la imposibilidad de escoger haga imposible la acción. Pensemos en el personaje, de una novela de Jean Paul Sartre, que finalmente obtuvo su libertad (existencial) sólo cuando terminó en la cárcel. También habríamos podido expandir el análisis de la selección hacia el concepto de poder, al argüir que la posibilidad de acción presupone una posición de poder. Al ejercer una acción se ejerce poder. El supuesto de la consciencia también necesita modificarse. Puede no darse el caso de que yo sea completamente consciente de mi acción, incluso si quiero darle el calificativo de acción. Podríamos analizar más a fondo la consciencia y podríamos, por ejemplo, usar la distinción entre consciencia, preconsciencia e inconsciencia.
3. Una fuente importante para referirme a la intención y la acción es Searle (1983).
4. La interpretación de la intencionalidad se puede expandir en diferentes direcciones. Tomaré la dirección de la filosofía, lo cual significa que “lo orientado con la mente” se usa aquí principalmente como un concepto filosófico y no como uno psicológico.

Permítanme ahora darle una mirada a la relación: *disposición-intención-acción*. Comenzaré con el concepto de *intención*. Podría “tener la intención de...” y por lo tanto seguiría con una descripción de algún tipo de acción que pretendo realizar. Las intenciones son ejemplos de intencionalidad dirigida hacia la acción (debe resaltarse que en esta interpretación, la intencionalidad se toma en su sentido más amplio que hace referencia a una variedad de relaciones, de las cuales las intenciones son sólo una de ellas). No podemos describir una acción sin describir la orientación de un individuo. Preguntarse si las intenciones de una persona se han satisfecho es equivalente a preguntarse si realizó ciertas acciones. Esta descripción, no obstante, no es muy precisa; puedo tener la intención de ser el próximo presidente de México sin tener posibilidad alguna de satisfacer mi intención. Podría tener intenciones irrealas. Pero si no consideramos este extremo, podríamos esperar que las acciones y las intenciones se relacionaran de una manera sencilla: la satisfacción de una intención es equivalente a la realización de una acción.

Una persona tiene intenciones, pero esto no necesariamente implica que siempre tenga que ser consciente de ellas⁶. Podríamos hacer algo sin tener en mente una imagen clara de qué estamos haciendo y para qué lo estamos haciendo. Tal vez podríamos expresar algunas de nuestras intenciones si se nos pregunta por ellas y esto significa que es posible hacer explícitas intenciones implícitas. Las intenciones de las acciones pueden explicitarse por medio de razones y objetivos.

Las intenciones se relacionan con las *acciones* por medio de las cuales se pueden llevar a cabo. Tengo la intención de hacer esto y aquello y, en efecto, lo hago. En este sentido, una intención podría ser la causa de una acción. No uso el término causa en el mismo sentido en que solemos hacerlo cuando decimos que golpear con el taco una bola de billar es la causa de que la bola se mueva. Este es un concepto mecánico de causa y efecto. Al usar el término causa, no quiero decir que una intención sea la causa de una acción de esta forma mecánica. Más bien, se trata de otro concepto de causalidad. La manera como los diferentes conceptos de causalidad pueden interrelacionarse es un asunto abierto. Usando esta terminología, podemos entonces decir que una intención puede ser la causa

5. Una pregunta difícil que no voy a considerar en este contexto es si la intencionalidad caracteriza a un ser consciente. Este asunto es esencial en la filosofía de la mente y un paso importante para discutir si la intencionalidad puede describirse y reducirse a otro tipo de relaciones.
6. En muchos análisis filosóficos clásicos del concepto de intencionalidad, una idea principal ha sido que la persona es consciente de sus intenciones. Esta idea no es útil si el concepto de intencionalidad pretende usarse en una discusión del concepto de acción. A la intención tiene que asignársele la posibilidad de ponerse por completo en la mira, tanto como de perderse en las sombras oscuras de la inconsciencia. Otro asunto es si tiene sentido hablar de intenciones que nunca pueden expresarse.

de una acción. Debemos decir “puede ser la causa de” y no “es la causa de” porque algunas veces tenemos que tratar intenciones no satisfechas. Las intenciones como causa no necesariamente producen efectos.

Las relaciones estipuladas entre intención y acción podrían incluso verse como una interpretación de la acción. Si no hay una intención que preceda una actividad, no podríamos llamarla acción; entonces es tan sólo una actividad realizada con base en un hábito o como parte de un reflejo (uso el término actividad de una manera amplia que abarca todo aquello que un ser humano pueda hacer; esto incluye todos los tipos de movimientos, bien sean acciones o no. En vez de actividad también podría emplear la palabra comportamiento). Podría tener la intención de caminar hasta la estación de tren para mirar los vagones. Podría incluso decidir hacerlo así. Entonces podría realizar la acción de caminar hasta la estación. Podría también suceder que necesitara aire fresco y, mientras caminaba por la ciudad, de repente me encontré en la estación mirando los vagones. En este caso habría realizado una actividad, y no calificaría mi llegada a la estación como una acción. Podría mostrarse incluso de manera más directa que las intenciones pueden disfrazar la definición de una actividad para volverla una acción. Si digo que mi intención es caminar hasta la estación para mirar los vagones, puede no darse el caso de que haya realizado la acción, incluso si, de hecho, fui a la estación y miré los vagones. Existe la posibilidad de que hubiera hecho eso por otra razón o que la actividad hubiese sido causada por otras cosas diferentes de mi intención de hacerla. Tal vez de casualidad pasé cerca a la estación porque me encontré con un amigo y, mientras nos hallábamos absortos recordando viejos tiempos, terminamos pasando por la estación. La actividad que realicé es, de hecho idéntica a la acción que hubiese satisfecho mi intención original. Sin embargo, si la actividad no se realiza con la intención de llevarla a cabo, no se combina con una intención para convertirse en una acción.

Para ser una acción, una actividad debe estar relacionada con una intención. Esto necesita comentarse más. La intención que hemos descrito como la causa de una acción constituye, por decirlo así, un evento fuera de la acción. Pero un comportamiento necesita algo más para volverse una acción. Una acción no sólo consiste en una intención inicial expresada antes de que la actividad tenga lugar y después la actividad en sí. Una acción no es simplemente la combinación de una intención original y de un movimiento del cuerpo que le sucede. Por ejemplo, no llevo a cabo la acción de caminar hacia la estación si pasó desapercibida de cualquier consciencia. Para realizar una acción debo, por lo menos en cierto grado, ser consciente de la actividad como parte de una acción. Podríamos decir que una acción se compone de una actividad física y de cierta consciencia de esa actividad. Podríamos hablar de *intenciones sin acción*. Estas intenciones no son lo mismo que la intención que causa una acción o la inten-

ción previa a la acción. La intención en la acción es aquello que tiene que añadirse a un cierto movimiento de mi cuerpo si desea llamarse acción. Wittgenstein una vez formuló la siguiente pregunta: ¿qué queda de la acción de levantar mi mano, cuando le quitamos el movimiento en sí de la mano? Las intenciones dentro de las acciones son prolongaciones de la intención como causa de una acción.

Las intenciones no nacen de la nada. Tienen raíces en un terreno de pre-intenciones o *disposiciones*. Voy a dividir las disposiciones en *antecedentes* y *porvenir*. Los antecedentes pueden interpretarse como aquella red socialmente construida de relaciones y significados que pertenecen a la historia de la persona. Cuando tratamos de explicar las intenciones de un individuo, con frecuencia nos referimos a sus antecedentes. Pero los antecedentes no son la única fuente de las intenciones. El porvenir es de igual importancia. Con esta expresión me refiero a las posibilidades que la situación social ofrece al individuo para percibir sus posibilidades. Para mí no está abierta la posibilidad de tener la intención (realista) de ser el próximo presidente de México. No es parte de mi porvenir y sólo si estuviera loco produciría intenciones de este tipo. El porvenir es ese conjunto de posibilidades que la situación social le revela al individuo. Las disposiciones se enraizan objetivamente pero no son un hecho. Las disposiciones están mediadas por el individuo y, por lo tanto, también expresan una subjetividad. Las disposiciones sólo son “disposiciones”; esto significa que son imposibles de observar de manera directa. Las disposiciones de una persona sólo se revelan cuando la persona actúa⁷. Tanto los antecedentes como el porvenir son interpretados y organizados por el individuo. Esto enfatiza que el tiempo no estructura la discusión de las fuentes de las intenciones. Las intenciones, como causa de las acciones, no tienen por qué relacionarse con el pasado como sucede en el caso de las explicaciones mecánicas. Cuando tratamos de dar explicaciones intencionales, el futuro está tan presente como el pasado⁸.

La relación entre las disposiciones y las intenciones tampoco es de causa y efecto. No tiene sentido hablar de que las disposiciones sean la causa de las intenciones, al menos no desde una interpretación sencilla de causalidad. Es mejor ver las disposiciones como una fuente de intenciones. Las intenciones emanan tanto de los antecedentes como del porvenir de un individuo. El individuo produce (o genera, o crea, o decide sobre) sus intenciones y al hacerlo revela sus disposiciones. Al interpretar sus disposi-

7. Un ejemplo de un concepto disposicional es la fragilidad de una lámina de vidrio. Que la lámina sea frágil no significa que de hecho se vaya a romper. Pero sí recibe un balonazo, muy fácilmente se rompería. Un concepto es disposicional si describe una tendencia interna y potencial. Para una discusión del concepto de disposicionalidad ver Ryle (1949).

8. No he empleado el concepto de motivación. Un problema es que muchos análisis de la motivación se basan en marcos conceptuales diferentes que tratan de reducir el término de intencionalidad a términos pertenecientes a la biología, por ejemplo.

ciones, un individuo puede generar intenciones que a su vez se convertirán en las causas de sus acciones. El proceso de generar intenciones no es un fenómeno biológico, sino que las intenciones se identifican a través de las decisiones del individuo. Sin embargo, es imposible crear todo tipo de intenciones a partir de la fuente de las disposiciones existentes. Mis intenciones preseleccionadas imponen limitaciones. Las intenciones pueden excluirse mutuamente⁹.

¿Qué significa haber realizado una acción exitosamente? La respuesta se convierte en un resumen de las nociones anteriores. He tenido éxito en ejecutar una acción si he sacado intenciones de mis antecedentes y porvenir preintencional, i.e., de mis disposiciones; y si estas intenciones se han satisfecho a través de mi ejecución de algunas acciones que de hecho son causa de las intenciones y que se han llevado a cabo, de tal manera que algunas de las intenciones se vuelven parte misma de las acciones. No obstante, la historia no puede terminar aquí. Las acciones tienen efectos y también tiene sentido tratar de interpretar el concepto de acción en términos de las reacciones de la persona ante estos efectos. Esto abre un proceso cíclico: las disposiciones se modifican por efecto de las intenciones y acciones.

Las disposiciones se encuentran enraizadas en la objetividad social de la persona y simultáneamente son producidas por ella, en parte como consecuencia de las acciones que lleva a cabo. Del éxito o fracaso de las acciones emergen disposiciones modificadas. La objetividad de las disposiciones se modela a través de las acciones y de esta forma se convierten en la verdadera nueva fuente de intenciones. Los constructos disposición–intención–acción constituyen un círculo conceptual para mirar las acciones. La manera como he presentado este círculo necesita todavía una modificación fuerte. He hablado de las acciones como una empresa individual, pero sería mejor ver las acciones de un grupo como la principal unidad conceptual. Sin embargo, no me meteré en esta discusión particular.

Sólo a manera de comentario: la defensa que se ha hecho de la intencionalidad como un factor humano único tiene implicaciones sobre la naturaleza de las explicaciones científicas. Las explicaciones mecánicas y biológicas se vuelven insuficientes para aclarar todo tipo de comportamiento humano, a pesar de que algunos comportamientos puedan explicarse de esta manera. Hacer una disección y traducir todos los tipos de explicaciones científicas en términos de explicaciones mecánicas ha sido el

9. Este hecho puede interpretarse desde un punto de vista puramente lógico. Si debo ser consistente, no tengo la libertad de sustentar tipos conflictivos de intenciones. Esta limitación es similar a la demanda de racionalidad en la teoría de la acción, la cual nos dice que un sistema de preferencias tiene que satisfacer ciertas relaciones lógicas, si se desea catalogar de racional el comportamiento de una persona. No arguyo que la estructura de las intenciones tenga que tener detrás un patrón estructurado; sólo digo que escoger algunas intenciones hace difícil o imposible tener algunas otras.

objetivo del positivismo lógico y una labor principal de la tradición conductista ha sido acomodar esto a las explicaciones psicológicas. Pero ninguna de las dos corrientes mencionadas ha alcanzado ninguna conclusión satisfactoria. Las explicaciones intencionales, que involucren objetivos y razones, constituyen una clase independiente de explicaciones. Explicar una acción haciendo referencia a los objetivos o a cualquier cosa que pudiese suceder en el futuro no significa que estemos tratando de explicar algo que de hecho sucede, por medio de algo que sucederá en el futuro. Hacer una explicación intencional significa explicar un acto por medio de la imagen que la persona se hace de algún estado futuro de cosas y por medio de las explicaciones de las razones y objetivos de la persona, independientemente si éstos son implícitos o explícitos.

Incluso si es importante distinguir las razones y objetivos de las causas mecánicas, en todo caso existe bastante interferencia entre estos dos tipos de conceptos. Algún comportamiento puede explicarse en una forma mecánica o biológica, haciendo referencia a los deseos y necesidades de la persona; la persona puede suponer que está haciendo algo por sí misma, mientras que en realidad está gobernada por deseos y necesidades escondidas. El punto no es negar la relevancia de tales explicaciones en algunas situaciones, sino apoyar la idea de que si lo que nos interesa son las acciones, entonces la explicación no puede simplemente reducirse a una explicación mecánica. Algunos de los comportamientos de los seres humanos necesitan explicaciones intencionales.

El hecho de que las explicaciones intencionales oculten una clase independiente de explicaciones, que son imposibles de analizar en términos biológicos o mecánicos, no implica que una persona deba ser completamente consciente de su intencionalidad. De hecho, el problema de la consciencia siempre estará presente. La consciencia no puede reflejar por completo su propio estado. La consciencia siempre se ve a sí misma de una forma distorsionada, como si estuviera en una sala de espejos. Una persona no puede captar del todo sus propios motivos, esperanzas, razones y metas. Por lo tanto, no puede esperarse que la persona misma dé una explicación intencional de su propio comportamiento. De hecho, podemos poner en duda que alguien sea capaz de especificar tal explicación. La consecuencia es que resulta imposible dar cualquier explicación intencional de una acción. No obstante, esto no significa que las explicaciones intencionales tengan que sacrificarse o abandonarse. Las explicaciones intencionales son necesarias —y también necesariamente incompletas.

APRENDIZAJE COMO ACCIÓN

Como se mencionó anteriormente, si queremos asir mejor el significado de la educación crítica, debo sugerir que el aprendizaje se interprete (de

manera similar) como una acción¹⁰. Por lo tanto, debemos considerar la relación *disposición–intención de aprendizaje–aprendizaje como acción*. Las disposiciones en este contexto cubren una totalidad similar a la totalidad de la cual emergen las intenciones para la acción, de ahí que debamos preocuparnos por los antecedentes tanto como por el porvenir. Una situación que pueda hacer surgir intenciones para el aprendizaje no pertenece automáticamente a los antecedentes de los estudiantes, que tienen que ver con su situación y herencia social. También tiene mucho que ver con las posibilidades de los estudiantes en su vida futura, no con sus posibilidades objetivas, sino con las posibilidades como el estudiante las percibe.

Las intenciones de aprendizaje pueden surgir a partir de las disposiciones. Las decisiones de quien aprende, por lo tanto, juegan un papel importante cuando se producen las condiciones de aprendizaje. No creo que las intenciones de aprendizaje sean diferentes de otros tipos de intenciones, salvo que pueden satisfacerse por medio de actividades de aprendizaje; entonces, el aprendizaje se vuelve una acción¹¹. Podríamos realizar varias distinciones de las intenciones de aprendizaje. Algunas pueden tener que ver con el contenido de lo que se aprende, pero esta no es la única posibilidad. Además de las que tienen que ver con el currículo, podría haber intenciones relacionadas con el profesor: el estudiante siente que tiene que hacer

10. Christiansen y Walther (1986) exploran la teoría de la actividad como una base para la interpretación de la educación matemática y enfatizan que los objetivos de los estudiantes juegan un papel importante en el proceso educativo. Mellin–Olsen (1987) enfatiza la “actividad” como un concepto educativo central: “La actividad se refiere a acciones que emergen de las motivaciones propias del individuo. La actividad se relaciona con el sujeto como un individuo político de la sociedad. Esto implica que el individuo, como miembro de la sociedad, se halla en una situación donde tiene la responsabilidad de su propia situación de vida, en particular, y de la sociedad, en general.” (Mellin–Olsen, 1987, p. 30). Y más adelante dice: “Las actividades tienen que ver, por lo tanto, con las decisiones, proyectos y objetivos correspondientes del individuo.” (p. 36). Haciendo uso de la teoría de la actividad, Mellin–Olsen desarrolla una posición educativa que expone la dimensión política de la educación matemática. Glasersfeld (Ed.) (1991) también ha sido de gran importancia para mí.

En este momento es necesario un comentario sobre mi uso del término actividad. No uso la palabra con el sentido que se usa en la teoría de la actividad que enfatiza que tener un objetivo es una parte importante de toda actividad. En la teoría de la actividad, el concepto de actividad es similar a mi uso de la palabra acción. Yo uso la palabra actividad como una actividad ciega donde su carácter de “ceguera” se subraya. Usando esta terminología podríamos decir que la pedagogía del *laissez-faire* conduce a algún tipo de actividad, pero cuando la atención de los niños se enfoca en un tema específico de forma accidental, no necesariamente ahí hay involucrada una acción.

11. Tal vez sea útil distinguir entre actividad de aprendizaje y el aprendizaje logrado visto como resultado de la actividad. Podría considerarse si la actividad de aprendizaje o el aprendizaje logrado deben verse como una condición para la satisfacción de las intenciones de aprendizaje. En mi interpretación, la actividad de aprendizaje cumple tal condición, a pesar de que mi interpretación se pueda objetar seriamente.

algo en la escuela porque el profesor así lo pidió. La decisión del aprendizaje puede tener que ver con la estructura del sistema educativo, como exámenes o puntajes. O podría asociarse con la posición del estudiante en la clase, por ejemplo con la competencia entre estudiantes. También podría relacionarse con las concepciones del estudiante sobre su futuro en la vida vocacional, la visión del estudiante sobre la posibilidad de conseguir un trabajo, etc. Esto significa que las intenciones de aprendizaje se basan en un conjunto complejo de disposiciones que pueden guiar al estudiante en muchas direcciones diferentes, no todas paralelas a la dirección que el profesor hubiera podido esperar¹².

Al describir las historias de aprendizaje de algunos estudiantes de los últimos grados de secundaria, Lena Lindenskov ha mostrado que las estrategias de aprendizaje de tales estudiantes despliegan patrones identificables en el sentido de que cada estudiante, cuando fue interrogado al respecto, pudo explicar e indicar por qué había reaccionado de una forma determinada ante un desafío de la educación matemática¹³. Las metaconcepciones de los estudiantes sobre las matemáticas crean patrones para interpretar las diferentes tareas que el profesor presenta. Los estudiantes identificaron sus prioridades y reaccionaron de acuerdo con ellas durante el proceso educativo. Lindenskov ha acuñado la expresión *currículo de los estudiantes* para designar tal patrón de reacción. Creo que estos patrones son una evidencia empírica de la idea de que los estudiantes, durante el proceso educativo, son personas actuantes y que aprender es similar a actuar¹⁴. Sus acciones tienen que entenderse en relación con sus disposiciones. Las estrategias de

12. Algunos de estos asuntos ya habían sido tratados por Nickson (1993). El hecho de que la disposición del estudiante influya en la situación de enseñanza–aprendizaje y también en la comunicación específica entre el profesor y los estudiantes se ha discutido con mayor profundidad con relación a un proyecto dirigido por Ib Trankjær en la Escuela de Nyvang en Randers. El tema de este proyecto son las características sociales del salón de clase de matemáticas. Bjarne Wüinz Andersen y Ane Marie Krogshede Nielsen produjeron una gran variedad de materiales de video sobre situaciones de clase que han servido como base para estudios posteriores.

Helle Alrø y yo hemos tratado de interpretar algunas de las situaciones del material de video y en algunos casos la comunicación entre el profesor y los estudiantes parece interpretarse mejor dentro de un marco del aprendizaje como acción (ver Alrø y Skovsmose, 1993). Los estudiantes tratan de encontrar cuál puede ser el significado de una situación específica de enseñanza–aprendizaje: “¿Qué estamos buscando? Pero como las preguntas de los estudiantes se han disfrazado bien y algunas veces incluso se han formulado en forma de respuestas a las preguntas del profesor, también se han malinterpretado y el profesor las ha considerado como respuestas “normales” a preguntas “normales”. De esta manera, el material que se produjo en la Escuela de Nyvang ha sido una evidencia empírica muy útil para el desarrollo del marco conceptual que se describe en este capítulo. Por último, debo enfatizar que el material de video puede usarse de muchas otras maneras para facilitar discusiones sobre la educación matemática.

13. Ver los trabajos de Lena Lindenskov.

14. Los resultados de Kirsten Grønbæk Hansen apuntan hacia la misma dirección.

aprendizaje revelan partes de las estructuras disposicionales de los estudiantes¹⁵.

Concibo el aprendizaje como algo causado por las intenciones de la persona que aprende. Pero aquí encontramos alguna divergencia con los análisis previos sobre la acción. El aprendizaje puede suceder incluso si no es causado por la intención original. Como ya se había enunciado, no le doy la denominación de acción a una actividad, si la actividad fue causada por algo diferente a la intención de hacer lo que la persona hizo, incluso si llega a hacer lo que tuvo la intención de hacer. Esta confusión o cambio de causa evita que la actividad sea una acción, empero, la persona puede llevar a cabo algunas actividades. Puede ser difícil analizar lo que sucede cuando un niño aprende a seguir algunas costumbres. Puede ser difícil analizar esto en términos del aprendizaje como acción. A esto le daré el nombre de aprendizaje por asimilación o enculturación a tal ajuste de comportamiento¹⁶. Muchas de las características de una cultura pueden ser asimiladas por el individuo sin, de hecho, tener la intención de aprender algo en particular. Esto muestra que la discusión del aprendizaje como acción tiene limitaciones cruciales. No obstante, continuaré el análisis a sabiendas de que no puede constituirse en un análisis completo del concepto de aprendizaje.

De la misma manera que en el caso de la acción, encuentro que el aprendizaje tiene un contenido dual. Además de referirnos a las intenciones de aprendizaje como la causa de la actividad de aprendizaje, también podemos referirnos a ellas como el ser consciente de la propia actividad como una actividad de aprendizaje. Consideremos el siguiente ejemplo. Un niño está jugando con centicubos; esto no es un aprendizaje como acción si el niño no le presta atención a la actividad, sino que la lleva a cabo de una manera desprevenida. El niño tiene que involucrarse en el aprendizaje si se quiere que la actividad de aprendizaje sea un aprendizaje como acción. Deben existir intenciones en el aprendizaje. ¿Qué pasa con esta afirmación normativa? ¿Qué significa el “deben”? Digamos algo como: si deseamos tratar de darle más significado a los ejemplos de educación matemática crítica, la interpretación del aprendizaje como acción debe iluminar el proceso.

Reflexionar es por excelencia una acción. La crítica es una acción y no puede desarrollarse en la escuela a menos que quien aprende se haga responsable del proceso de aprendizaje. Podemos aprender muchas cosas porque se nos manda, pero la competencia crítica es algo que no se puede imponer a un estudiante. Esta es la razón por la que el aprendizaje como

15. Puede ser interesante mirar retrospectivamente a la primera sección del Capítulo 5 donde se habla de las opiniones de los estudiantes sobre las matemáticas.

16. No estoy usando la palabra asimilación de ninguna manera similar a como lo hace Piaget en su discusión sobre la asimilación y la acomodación.

acción es un aspecto importante de la educación crítica. Las intenciones en el aprendizaje ayudan a definirlo como parte de una empresa crítica. Las rutinas pueden asimilarse de una manera desprevenida, mientras que la conciencia crítica no se puede desarrollar como una asimilación o enculturación (ciega). Si el aprendizaje significa no sólo recibir información sino también reflexionar, el aprendizaje debe ser *llevado a cabo* por quien aprende. Por lo tanto, encuentro que la epistemología de Piaget es engañosa ya que conecta el desarrollo epistémico con el crecimiento biológico, lo cual se ve en la definición y uso que Piaget da a los dos conceptos de asimilación y acomodación. La interpretación biológica ubica la discusión de los procesos de enseñanza–aprendizaje en el contexto de explicaciones científicas semejantes a los esquemas biológicos de explicación, y ubica el campo de las intenciones fuera del alcance epistemológico. Al hacer esto, el piagetianismo crea una riqueza de metáforas usada para describir y analizar lo que sucede en el salón de clase de matemáticas. Tales situaciones se describen de acuerdo con la riqueza de los ambientes de aprendizaje, y, de acuerdo con esto, se prefieren los ambiente mejores y más estimulantes. La educación entonces se concibe como cierto tipo de horticultura¹⁷. Pero el estudiante debe tener la oportunidad de escoger una orientación para involucrarse en el proceso de llegar a saber algo.

Al considerar las condiciones de una persona para realizar un acto, podemos identificar diferentes condiciones fundamentales para que un estudiante se involucre en un desarrollo epistémico que abra espacio para la conciencia crítica. El desarrollo epistémico no se puede forzar en una persona. No podemos, como profesores o diseñadores de currículo, implantar metas en un estudiante, ni tampoco implantar buenas razones. Se tienen que identificar las metas y el estudiante debe considerarlas como algo relevante. Ellos también deben aceptar las razones. De lo contrario, ni las metas ni las razones nunca llegarán a ser aquellas de la persona. Tal consideración y aceptación deben ir más allá, ya que la orientación intencional debe ser llevada a cabo por la persona misma. Una condición para un proceso de enseñanza–aprendizaje productivo es que se establezca una situación donde los estudiantes tengan la oportunidad de investigar las razones y metas de los procesos de enseñanza–aprendizaje sugeridos. Igualmente debe existir la oportunidad de acentuar las intenciones de los estudiantes e incorporar algunas de ellas como parte del proceso de aprendizaje. El estudiante mismo debe ubicar sus intenciones en el aprendizaje¹⁸. Por lo tanto, los conceptos de enseñanza y aprendizaje pierden algo de su significado

17. En mi crítica a la epistemología genética no incluyo su interpretación sobre el desarrollo intelectual temprano del niño; en este caso no tiene sentido. Pero sí tengo en mente la perspectiva de la situación de enseñanza–aprendizaje en el ámbito de la escuela. En el Capítulo 11 se discutirán otros aspectos de la epistemología genética,

18. Wagenschein había anticipado algunas de estas ideas sobre el involucramiento de los estudiantes (ver el Capítulo 4, sección “Ejemplaridad”).

clásico. La enseñanza no puede verse como un tipo de entrega, ni el aprendizaje como un tipo de recepción.

DIFERENTES FORMAS DE DESARROLLO EPISTÉMICO

La secuencia disposición–intención de aprendizaje–aprendizaje como acción no indica que los estudiantes posean algunas intenciones explícitamente formuladas que de hecho quieran llevar a la situación de aprendizaje. No tiene sentido hablar de las intenciones de los estudiantes como algo pre-existente, a pesar de que las disposiciones de los estudiantes sean recursos para las intenciones. Las intenciones de aprendizaje pueden desplegarse de varias maneras: pueden avanzar, refinarse, reestructurarse, remodelarse, desecharse, disolverse y despedazarse. Y esto sucede como parte del proceso educativo.

El surgimiento de intenciones seleccionadas para el aprendizaje con frecuencia sucede en una situación sobresaturada de demandas. La estructura de la escolaridad ejerce una estructuración forzosa en las disposiciones pre-intencionales. En una situación de clase normal no es común ver surgir intenciones de aprendizaje como parte de una negociación en la que el profesor expresa posibilidades y los estudiantes se expresan a sí mismos con el fin de captar la situación de una mejor manera. No obstante, la actividad de cambio y ajuste de las intenciones es la actividad más común que tiene lugar en la escuela. Las demandas de la situación hacen necesario que los estudiantes reestructuren sus intenciones, pero con frecuencia esto sucede de una manera fortuita. El ajuste de las intenciones no ocurre como una experiencia compartida sino como una empresa individual. Puede que se establezca una multiplicidad de intenciones diferentes que no necesariamente tenga mucho que ver con el aprendizaje.

El resultado no es que no se lleve a cabo un aprendizaje, sino que el aprendizaje como acción se cuaja como una *actividad forzada*, y las intenciones de las acciones de los estudiantes se vuelven diferentes de las intenciones relacionadas con el aprendizaje. Las demandas de la situación influyen en las intenciones que los estudiantes puedan añadirle a las actividades individuales de aprendizaje. Las intenciones en acción se vuelven estratégicas. Dado que los estudiantes siempre interpretan la situación escolar sobre la marcha, las demandas de la situación se vuelven parte de las disposiciones de los estudiantes y, por lo tanto, parte de la situación que los estudiantes consideran cuando determinan cómo actuar. Las intenciones, que llevan consigo una causa para el aprendizaje (como una actividad forzada), son invocadas por una interpretación de lo que tiene lugar en el salón de clase. Estas interpretaciones son moldeadas por la percepción de los estudiantes sobre sus antecedentes y porvenir y ofrecen razones y

metas, pero no necesariamente para el aprendizaje tal y como la escuela espera verlo.

El aprendizaje como una actividad forzada se encuentra en la enseñanza corriente que no abre espacio ni da libertad a los estudiantes. Las metas no se explican ni se mencionan las razones. Un conjunto de órdenes contenidas en los libros de texto y repetidas por el profesor dirigen el proceso. Esta es una *actividad dirigida* o una actividad prescrita y parece que los estudiantes se inhiben si se les ordena hacer algo. En este sentido, estamos tratando una forma de desarrollo epistémico distorsionado. La actividad dirigida puede tomar varias formas. Es posible hacer que los estudiantes “olviden” que no tienen alternativas ni oportunidades para ver el propósito y la razón al hacer la actividad encantadora y enigmática y, así, implícitamente motivadora. No obstante, es más normal dirigir una actividad por medio de un libro de texto y un currículo bien especificado acompañado de pruebas y evaluaciones, donde la vida oficial del salón de clase se rigoriga con números robóticos y muertos. Normalmente, tan sólo leyendo el libro de texto, es imposible que un estudiante se figure por qué tiene que hacer esto o lo otro. Un texto matemático es por lo general una secuencia cuidadosamente elaborada de órdenes y comandos que reflejan los comandos consignados en el currículo y que se convierten en sonidos audibles en boca del profesor. El salón de clase se convierte en un molino de ejercicios. El libro de texto puede contener un intento por motivar presentando ejemplos y ejercicios fascinantes, pero no invita a los estudiantes a tomar decisiones sobre la dirección del proceso de aprendizaje. Las intenciones de los estudiantes no se toman en cuenta.

El profesor y el currículo pueden guiar a los estudiantes de la misma forma como un grupo (fatigado) de turistas es guiado por una ciudad, escuchando la voz amable del guía quien habla sobre los edificios hermosos, las iglesias antiguas y todo aquello que se cruza en el camino. Los turistas no se involucran en ninguna acción durante el viaje —excepto decidir si quieren escuchar o no. Por supuesto sería equivocado suponer que no se captará nada, ya que algo podría aprenderse en cualquier desarrollo epistémico distorsionado. Esto es similar a lo que sucede en la educación matemática dirigida, pero con diferencias importantes. Los estudiantes no tienen opción sobre si entrar o no al salón de clases donde hay un currículo fijo. Los turistas no tendrán ningún castigo si no son capaces de repetir las palabras del guía; pero la situación es diferente en la escuela. El viaje también puede ser útil para los turistas después de que, cuando se hayan bajado del bus, regresen a algunos de los lugares interesantes. Pero normalmente los estudiantes no tienen la posibilidad de irse del salón de clases de matemáticas para darle una mirada más detallada a lo que parece ser de interés.

La antítesis de la actividad dirigida es la *actividad ciega*. Esta se asemeja a la libre empresa y no es común en la escuela. No obstante, en este caso también se eliminan las condiciones fundamentales para la negocia-

ción. Tal actividad se caracteriza por la ausencia de metas formuladas y negociadas, al igual que por la falta de razones explícitas. Menciono este tipo de situación degenerativa porque caracteriza algunos proyectos que han sido importantes en el desarrollo de sugerencias para una práctica educativa crítica. Por ejemplo, la pregunta fundamental del proyecto Glocksee tiene que ver con el grado con que la pedagogía del *laissez-faire* tiene importancia para una pedagogía crítica¹⁹. La pedagogía del *laissez-faire*, que también se ha incorporado en la pedagogía centrada en el estudiante, se ha criticado fuertemente desde el punto de vista de la pedagogía tradicional, mientras que la educación crítica, en su interpretación general, ha sido más reacia a rechazar la libre empresa en la escuela. Esto obedece a dos razones: en primer lugar, la libre empresa le asesta un golpe a los rituales tradicionales de la escuela y, aparentemente, crea una apertura al desechar las normas de organización de la enseñanza-aprendizaje; en segundo lugar, la libre empresa puede crear posibilidades para que los estudiantes se involucren en materias con una importancia personal y, tal vez, con una dimensión política no expresada. Sin embargo, mi interpretación del desarrollo epistémico indica las limitaciones de este enfoque. Permitir a los estudiantes moverse en la escuela aceptando o no los ofrecimientos de los profesores (lo cual ha sido identificado por muchos como la característica distintiva del proyecto Glocksee) dependiendo de la habilidad tanto de la materia como del profesor para atraer la atención de los estudiantes, significa una repetición de la interpretación biológica del proceso de aprendizaje. Sentir atracción por una determinada materia es diferente de ver y comprender las metas y razones de o para la enseñanza de esta materia.

De la misma forma como se han establecido dos condiciones para la acción que tienen que ver con el grado de indeterminación y el grado de consciencia, así mismo encontramos dos tipos de procesos de aprendizaje distorsionados. En la primera situación no se dejan abiertas alternativas sino que sólo existe una vía transitable. Esta situación inflexible fácilmente implica que las metas y las razones no se declaran. En el segundo caso, los estudiantes se encuentran en una situación abierta, pero este espacio abierto no es estructurado ni claro, así que se vuelve difícil negociar las razones y metas y los estudiantes se dejan a la deriva con sus propios instrumentos. Ninguno de estos extremos hace que las intenciones lleguen al aprendizaje de la manera que considero importante para que se dé una educación crítica.

Los estudiantes llegan a la escuela con ideas, esperanzas y expectativas. Las intenciones son inherentes a cualquier ser humano; no tienen que inventarse ni transplantarse. Lo significativo es el desarrollo continuo, casi raro de una nueva riqueza de intenciones. Esto no significa que las inten-

19. Ver Skovsmose (1981b).

ciones no se puedan mover, cambiar, desarrollar, explicitar, etc.; porque esto es lo que precisamente debe hacerse en la educación. Pero las demandas de las situaciones en la escuela con frecuencia llevan a tener *intenciones rotas* o *ignoradas*. Cuando se ignoran las intenciones de los estudiantes, parece que es imposible que ellos lleven a cabo acciones que puedan satisfacer las intenciones negociadas. Esto podría suceder al no darle ninguna posibilidad a los estudiantes de expresar metas y razones, o al no ofrecer ninguna razón para lo que está sucediendo. En breve, esto podría suceder como resultado de una actividad dirigida. Las intenciones rotas no son lo mismo que las intenciones *modificadas*, *integradas* o *compartidas*. El profesor tiene ideas y planes, los estudiantes también y no se puede suponer un paralelismo entre ideas y planes del profesor y los de los estudiantes. Compartir intenciones supone un procedimiento complicado que involucra imaginarse diferentes metas y razones. La relevancia del diálogo y la negociación en la educación crítica tiene que ver precisamente con esa modificación. Por medio de la actividad de compartir intenciones, los estudiantes pueden llegar a actuar como un grupo y añadir una nueva fuerza a las dinámicas de aprendizaje.

Tenemos que respetar las intenciones de las otras personas, pero es necesario no asignarles una posición sagrada. Las intenciones se determinan por la concepción de una persona sobre las metas y razones, que pueden ser difusas y no consistentes o bien elaboradas. Las intenciones son cuestionables pero no ignorables y el profesor tiene que retar y tratar de comprender las diferentes intenciones de los estudiantes —al igual que los estudiantes deben cuestionar las metas incluidas en el currículo y las intenciones del profesor al hacer esto o aquello. Este proceso puede crear colaboración en el salón de clase, lo cual puede ser la base para la modificación de las intenciones. Compartir las intenciones involucra establecer metas alternativas y críticas a las razones para hacer eso. Las razones y las metas tienen que ponerse en palabras o hacerse visibles en términos que estén dentro del horizonte de los estudiantes (como se ha descrito aquí, el compartir y la modificación de las intenciones parecen ser un proceso racional, pero en las prácticas del salón de clase toman una variedad de formas más complicadas).

En la educación matemática tradicional las intenciones raras veces se comparten. Las negociaciones se cortan con frases como “hoy vamos a aprender sobre...”. Las posibles intenciones que se esconden detrás de las series de comandos educativos no son comprensibles. De alguna manera, se deja al estudiante como un soldado en una trinchera en el frente de batalla sin saber su posición ni el próximo movimiento del ejército. El soldado no tiene posibilidad de hacerse una imagen de la situación estratégica. Si comienza a librar su propia batalla con base en su interpretación de la situación, probablemente ésta no tenga sentido en conexión con la situación estratégica global. El soldado no puede actuar sólo siguiendo órdenes. No

obstante, puede desarrollar su propia interpretación de su situación personal. Puede desarrollar sus propias intenciones, como mantenerse en la mejor condición física posible tratando de conseguir una mejor ración de comida, mejorando su habilidad para jugar ajedrez, etc.

Esto ejemplifica un fenómeno común del salón de clase: el desarrollo de *intenciones escondidas*. Esas intenciones no se comparten con la “audiencia del salón de clase”. Cuando las intenciones de los estudiantes se ignoran, la consecuencia no es que los estudiantes se vacíen de todo tipo de intenciones y se preparen para aceptar los objetivos y razones prescritas. En cambio, emerge una cantidad de intenciones escondidas y el currículo de los estudiantes con facilidad surgirá en clara confrontación con el currículo oficial. Los estudiantes no pueden actuar como parte de un proceso de aprendizaje común, se les arranca el poder cuando entran al salón de clase; en cambio, crean un nuevo espacio para posibles acciones²⁰. Algunos ejemplos de intenciones escondidas pueden ser: ¿cómo esconder el hecho de que no se hizo la tarea?, ¿cómo obtener calificaciones más altas?, ¿cómo hacer más amigos?, ¿cómo entrar al mismo grupo de trabajo en el que está Luisa? El estudiante puede inventar una gran variedad de intenciones escondidas que le dan sentido a su vida en la escuela cuando el currículo ha sido despojado de cualquier significado. La educación matemática tradicional, por lo tanto, se caracteriza no por la modificación o la integración de las intenciones y, por lo general, tampoco por la sustitución de ninguna intención, sino por la multiplicidad de intenciones no compartidas. Por esto las intenciones escondidas surgen como una epidemia en el salón de clase, como esperanzas y sueños entre los soldados del frente de batalla o como retoños de papa en una bodega oscura.

Algunas de las intenciones no compartidas pueden catalogarse de *instrumentales*²¹. Estas se ajustan bien a las demandas de la estructura de la escuela. Comportarse de acuerdo con las expectativas de los profesores y la escuela puede bien haberse establecido como una meta de los estudiantes, lo cual significa que algunas actuaciones excelentes en una materia pueden no estar determinadas por un interés en la materia misma, sino que son la consecuencia de un deseo de los estudiantes juiciosos. De hecho, los estudiantes pueden darse cuenta de que la mejor acción estratégica posible en la escuela es tratar de obtener las mejores calificaciones, independientemente de si la materias son interesantes o no. Lo que importa es obtener la mejor posición posible cuando comience la carrera por entrar en la educación superior. Esto significa que el instrumentalismo se vuelve parte de las deci-

20. Inicialmente argüí que una condición para la acción es cierto grado de indeterminación, pero después pregunté si podría ser posible actuar en una situación donde no hay la posibilidad de escoger. Permítanme dar como respuesta ambigua a esta pregunta que las intenciones escondidas constituyen esa posibilidad.

21. Ver Mellin-Olsen (1981).

siones propias de los estudiantes. En este sentido, las intenciones no compartidas pueden ser la causa del tipo de aprendizaje que hemos esquematizado como una actividad forzada que puede sonar contradictoria, pero donde los estudiantes pueden internalizar una reestructuración externa de las intenciones y llevar a cabo acciones instrumentales²².

FATALISMO, SERVILISMO Y LOGRO PERSONALES

Miremos de cerca el fenómeno de la actividad forzada. En este caso los estudiantes no tienen oportunidades de seguir intenciones preformuladas y no saben si ellas pueden ser valiosas o no. Algunos pueden desarrollar un instrumentalismo que encaja dentro de la lógica de la escuela, otros pueden perderse y el resultado puede ser un *fatalismo personal* o la producción de una autoestima negativa. Esto se puede ver en frases como “no soy capaz de hacer...”, “no me interesa lo que están haciendo hoy”, “tengo que hacer esto y aquello, pero no sé por qué”, etc. El fatalismo personal se produce con la devaluación de las ideas y metas de los estudiantes y con la desatención y no valoración de sus habilidades. El fatalismo personal es causado por la eliminación de la posibilidad de que los estudiantes se involucren en el aprendizaje como acción.

Como parte de su preocupación por el enfoque etnomatemático, Ubiratán D’Ambrosio ha subrayado la posibilidad de que un currículo de matemáticas bien estructurado pueda obstruir el aprendizaje. D’Ambrosio sostiene que una alfabetización matemática aprendida puede llegar a eliminar una alfabetización matemática espontánea preexistente. El sostiene que incluso si una persona es capaz de manejar cálculos y operaciones (informales) con formas geométricas, esta competencia con facilidad se puede reprimir cuando se enfrentan tareas matemáticas similares pero que tienen un vestido formal. Al enfrentar esta formalidad inflexible se crea un blo-

22. Un ejemplo asombroso de (un tipo de) instrumentalismo se encuentra en *A mathematician’s apology* [La apología de un matemático] donde Hardy escribe: “No recuerdo haber sentido, cuando era chico, ninguna pasión por las matemáticas y las razones que tuve durante mis estudios de matemáticas no eran muy nobles que digamos. Sólo pensaba en las matemáticas en términos de exámenes y becas: quería darle palo a los otros chicos y esta parecía ser la manera como podría hacerlo de forma más evidente” (Hardy, 1967, p. 144). Y después dice: “Por supuesto que descubrí en la escuela, como todo futuro matemático lo hace, que podía con frecuencia hacer cosas mucho mejor que mis profesores; e incluso en Cambridge me di cuenta, aunque naturalmente con menos frecuencia, de que algunas veces podía desempeñarme mejor que los profesores universitarios. Pero en realidad era bastante ignorante... con respecto a las materias a las que iba a dedicar el resto de mi vida; todavía pensaba en las matemáticas en esencia como una materia competitiva” (pp. 146-147). Estas citas sólo sirven como ilustración, porque en realidad no me siento muy a gusto sacando conclusiones de ejemplos extremos. Empero, el ejemplo de Hardy indica que algunos estudiantes pueden desarrollar cierto tipo de conocimiento a partir de una actitud instrumental.

queo psicológico y se levanta una barrera entre el formalismo matemático y la competencia matemática implícita, no expresada en palabras²³. En la etnomatemática se ha señalado que el fatalismo personal puede producirse por la ignorancia institucional de una competencia ya existente, integrada a la comprensión previa de los estudiantes y proveniente de su cultura. Esta comprensión previa probablemente no se verbalizará por completo y ciertamente no se verbalizará en el lenguaje de las matemáticas escolares.

El fatalismo personal es una posible característica de lo que he llamado las disposiciones de una persona. Las disposiciones están determinadas por las posibilidades que la situación social le ofrece al individuo y por la manera como la persona interpreta esas posibilidades. Una experiencia en la escuela puede apoyar una realimentación de la situación de enseñanza–aprendizaje a las disposiciones de los estudiantes y cultivar el fatalismo personal. Este puede manifestarse de varias formas y una de ellas la identifiqué como un servilismo hacia las preguntas tecnológicas y hacia aquellos que las pueden manejar.

Esta posibilidad tiene que ver con el *poder formativo de la educación matemática*: el servilismo de los estudiantes comienza a existir cuando se ignoran las comprensiones previas de los estudiantes. El poder formativo de la educación matemática puede discutirse en términos de intenciones rotas, intenciones modificadas, intenciones escondidas, instrumentalismo y fatalismo personal. Se puede discutir como una reestructuración de las disposiciones de aprendizaje de los estudiantes, esto es, una reestructuración de las fuentes de las cuales los estudiantes sacan intenciones para su proceso de aprendizaje. Sin embargo, el poder formativo de la educación matemática no es una característica que deba evitarse —esta es una misión imposible. El objetivo teórico debe ser aclarar este poder formativo. Justamente la labor de una educación matemática crítica debe ser ver este poder a la luz de conceptos tales como la competencia crítica.

Creo que los estudiantes son capaces de aprender casi todo si tienen razones para hacerlo. Esta es una consecuencia de ver el aprendizaje como algo en parte determinado por una decisión de quien aprende²⁴. Pero si el aprendizaje tiene que ver con la acción y se especifica con las intenciones, entonces cobra importancia interpretar la actuación en la escuela en términos de las visiones que los estudiantes tienen de su futuro. Para muchos estudiantes las matemáticas formales pueden parecer hostiles y excéntricas porque les es difícil ubicarse a sí mismos en una situación de la vida (futura), a la que aspiren llegar, donde las matemáticas que han visto en la escuela juegan un papel vital. Por lo tanto, es imposible para el estudiante identificar cualquier razón personal, excepto algunas instrumentales, para

23. Ver D'Ambrosio (1985b, p. 472).

24. Esto se conecta con las observaciones hechas sobre el proyecto "Relaciones económicas en el mundo de los niños", ver la sección "Comentarios sobre el proyecto" del Capítulo 4.

aprender cálculos abstractos. Cuando discutimos la actuación de un estudiante en la escuela, no (sólo) tenemos que mirar sus antecedentes, sino también su porvenir. El futuro o bien es la fuente de razones y sueños, o bien es la causa de su destrucción. Las acciones y, por lo tanto, el desarrollo epistémico también se orientan hacia la percepción que de hecho la persona tiene del futuro.

Entonces, si las oportunidades de aprendizaje del estudiante se eliminan de la misma forma como se eliminan las oportunidades de acción, el concepto de logro necesita reconceptualizarse. El análisis de logros necesita de una perspectiva global. La posibilidad de que un estudiante mantenga un objetivo en la escuela en parte se basa en el conjunto de posibilidades futuras (de trabajo) que el estudiante sea capaz de percibir como propias. Si el estudiante sabe que probablemente se convertirá en un trabajador, porque eso es lo que todos los miembros de su familia han sido, es difícil adjudicar objetivos personales al aprendizaje de las matemáticas abstractas. Y de hecho, en diferentes sociedades conjuntos muy diversos de posibilidades son visibles a los ojos de los estudiantes de acuerdo con sus antecedentes sociales. La consecuencia de esto es que una diferencia en logros no puede analizarse solamente en términos de la (falta de) riqueza y estimulación que los antecedentes sociales ofrezcan o no ofrezcan; sino que es igualmente importante lo que la sociedad le permite a los estudiantes, pertenecientes a un cierto tipo de entorno social, conceptualizar como su futuro. Mi punto es que cuando los estudiantes de un cierto tipo social se identifican como personas con menor nivel de logro en matemáticas que otros, la explicación de este fenómeno también puede encontrarse en las diferencias en el futuro de los diversos grupos sociales a los que pertenecen los estudiantes. Este futuro está presente en las disposiciones de los estudiantes. Si, por ejemplo, se identifican diversas actitudes entre los estudiantes hacia ciertas materias, la explicación de este fenómeno también tiene que expresarse en términos de la manera como perciben su futuro en la sociedad. De forma similar, si una sociedad materializa el racismo en términos de las diferencias de logros en la escuela dependiendo del color de la piel, este fenómeno también tiene que verse en términos del futuro que la sociedad le ofrece a los distintos grupos. Todo tiene que ver con el hecho de que los estudiantes interpretan su vida en la escuela a la luz de sus visiones de sus oportunidades personales en el futuro. En este sentido, el logro en la escuela refleja las disposiciones de los estudiantes.

La racionalidad completa presupone que la persona sea transparente a sí misma —pero esto no puede asumirse. Un punto esencial, no obstante, es que las acciones que pueden parecer irracionales desde una perspectiva, pueden tener un significado coherente desde otra diferente. Podría parecer irracional que los estudiantes algunas veces ignoren una materia. No hacen las tareas, recuestan su cabeza sobre el pupitre cuando llegan al salón y ni siquiera tratan de disimular su falta de interés. Empero, esta actividad “irra-

cional” puede tener un contenido racional. Ignorar una materia puede ser una forma de protegerse de las demandas del profesor, del libro de texto y del currículo, que parecen ser abrumadoras. Para evitar la derrota total, i.e., no ser capaz de manejar los problemas que desearían manejar, los estudiantes deciden no prestar ninguna atención a la materia. Esta se vuelve la defensa última en contra del fatalismo personal.

ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LOS PROYECTOS

La interpretación del aprendizaje como acción hace importante volver sobre los proyectos “Energía”, “Nuestra comunidad”, “Subsidio familiar en una microsociedad”, “Construcciones”, “La Conejera” y “Relaciones económicas en el mundo de los niños”. Inicialmente las reflexiones sobre los proyectos se presentaron en relación con las acciones tecnológicas y, dado que nos estamos concentrando en las matemáticas, el objeto de las reflexiones fue las aplicaciones de las matemáticas. El conocer reflexivo se reconoció como un elemento esencial de la alfabetización matemática, que integra las competencias matemática, tecnológica y reflexiva. Como se explicó con anterioridad, la alfabetización matemática designa una complejidad similar a la de la alfabetización y, como ésta, la alfabetización matemática puede aportar un significado educativo a la noción de ciudadanía crítica. Esta es la razón por la que la alfabetización matemática debe incluir el comienzo de una educación matemática crítica. Esta línea de análisis a su vez ha señalado el *objeto* de crítica.

La perspectiva de este capítulo, empero, ha sido el *sujeto* de la crítica y esto añade una nueva dimensión al concepto de reflexión. La reflexión puede orientarse hacia la situación de los sujetos en sí y, en este caso de la educación, esto significa que se considera la situación de los estudiantes y el profesor: ¿por qué tenemos que aprender esto de esta manera específica? Mi supuesto es que el sujeto de la crítica tiene que añadirse a nuestra concepción de reflexión para dar un significado coherente a la educación matemática crítica. El aspecto subjetivo debe ser tan esencial como el objetivo: no sólo es importante que la educación matemática ofrezca la posibilidad de comprender los rasgos esenciales de la sociedad y del papel de las matemáticas en ella, sino también que las diferentes intenciones de aprendizaje se negocien y compartan y que los estudiantes de esta manera se conviertan en actores del proceso de aprendizaje — y no en pasajeros ciegos de él.

Esto nos obliga a regresar al concepto de *Mündigkeit*, introducido por Adorno en la discusión educativa. *Mündigkeit* contiene una doble dimensión que revela tanto la orientación subjetiva como la objetiva de la crítica y, como consecuencia, la naturaleza dual de las reflexiones: para obtener una *Mündigkeit* se debe ser capaz de emitir juicios bien fundamentados.

Esta dualidad es la fortaleza de esta noción que originalmente caracterizó la educación crítica en su esfuerzo por conceptualizar una “educación después de Auschwitz”. Creo importante mantener esta dualidad como parte de la educación matemática crítica. Pero esto no significa que quiera descartar las características del conocer reflexivo y de la alfabetización matemática que había señalado en el Capítulo 6, sino que esas formulaciones deben repensarse en términos de la dualidad reflexiva.

Creo, no obstante, que tanto la dimensión objetiva como la subjetiva de la crítica ya han sido ilustradas por los proyectos discutidos. Por lo tanto, los proyectos revelan una falta en el enfoque analítico original que he tratado de remediar prestándole atención a la intención. Esto hace necesario no inventar nuevos proyectos, sino dar una mirada fresca a los “viejos”, a pesar de que me restringiré a hacer unos pocos comentarios para ilustrar lo que pueden significar expresiones como intenciones compartidas, intenciones de aprendizaje y estudiantes como actores (responsables) del proceso educativo. También se le dará un significado adicional a expresiones como montaje de un escenario y puntos estratégicos que antes se habían descrito como unas montañas semánticas del lenguaje de reflexión. Negociar intenciones hace necesario hablar de las posibles direcciones del proceso educativo. Esto presupone una terminología para expresar posibles intenciones de aprendizaje y posibles intenciones en el aprendizaje. Esto es precisamente lo que el montaje de un escenario y la creación de puntos estratégicos debe ofrecer: formas de explicar y negociar el significado de un proceso educativo. El montaje de un escenario es artificial, pero esta artificialidad puede volverse una manera racional de expresar el significado de una actividad educativa.

En el proyecto “Energía”, las escenas se planearon cuidadosamente. Primero, el proyecto se concentró en las cifras que expresaban la relación entrada–salida de energía como parte de la actividad propia de los estudiantes de montar en bicicleta. Después tuvo lugar una investigación sobre las mismas cifras en el caso de una granja. Estos dos montajes no sólo fueron dos instrumentos motivacionales, sino también una manera de posibilitarle a los estudiantes adquirir una idea de las cifras de entrada–salida y de permitirles comprender por qué *ellos* tienen que estudiar este fenómeno. Como es natural, sería posible informar a los estudiantes sobre el problema del uso de energía en una granja, pero esto no conduciría a los estudiantes y al profesor al proceso de compartir intenciones. El montaje de un escenario es una estrategia para crear un espacio para las acciones epistémicas: “¿por qué tenemos que pesar nuestro desayuno?, ¿será que en vez de desayunar antes de venir al colegio me puedo comer un paquete de papas fritas?” Responder tales preguntas presupone referirse a ideas sobre lo que el proyecto, como un todo, trata. Y para que tengan sentido, estas explicaciones no pueden darse en un lenguaje que esté más allá del alcance de los estudiantes.

“Nuestra comunidad” es un ejemplo de una interpretación educativa directa de la expresión los estudiantes involucrados en el proceso de aprendizaje. Una tarea inicial de los estudiantes fue solicitar un empleo en el municipio de Hinnerup. Fue obvio que esa era una realidad inventada, a pesar de que los estudiantes buscaron los trabajos que deseaban, escribieron las solicitudes ellos mismos, fueron a la entrevista de selección y esperaron el resultado. La artificialidad del montaje del escenario, no obstante, no hizo las cosas menos reales. En este proyecto el porvenir real de los estudiantes se estableció como parte del contenido intencional de la educación. Decidir sobre los trabajos que se deseaba solicitar obligó a los estudiantes a tener una visión realista de su propio futuro. Las esperanzas y sueños sobre las posibilidades futuras de trabajo se mezclaron con la realidad y, desde este porvenir, pudieron traer intenciones al proceso de aprendizaje. “Subsidio familiar en una microsociedad” también involucró a los estudiantes, en este caso como miembros del gobierno de diferentes municipios, que debían decidir y aplicar una manera de distribuir el subsidio familiar entre las familias del municipio. Se le asignó un papel específico a los estudiantes y comprender el significado de tal papel se convirtió en una manera de comprender la relevancia personal de las tareas educativas.

La esencia del proyecto “Construcciones” parece no tener mucho que ver con la reflexión sobre el uso de las matemáticas, a pesar de que he tratado de indicar esta posibilidad mostrando cómo una arqueología matemática habría podido continuar ese proyecto. Los niños hubieran podido llegar a ver qué tipo de matemáticas, de hecho, están detrás de sus actividades (tecnológicas): ¿cómo construir un puente lo más estable posible?, ¿por qué pensar en términos de triángulos? Una experiencia importante para los profesores involucrados en el proyecto fue la energía extraordinaria que los niños pusieron en su trabajo, a pesar de que sus intenciones posibles no se negociaron explícitamente. Esto indica una idea importante: las intenciones pueden compartirse incluso si no se expresan con palabras. Es posible *mostrar* las intenciones y verlas sin que ellas de hecho se describan. Hasta ahora he indicado que el proceso de compartir intenciones es un proceso (semi)racional que supone que las intenciones se describan. Pero esta noción de negociación no es necesariamente la única relevante. Compartir intenciones puede tener lugar de diferentes maneras. Esto también se enfatiza en “La Conejera”, proyecto que tuvo lugar dentro de un montaje cuidadoso de un escenario: ¿cómo mejorar el paisaje fuera de la escuela? (Sin embargo, en este caso fue más difícil para los niños “meterse” en el proyecto). Así que cuando hablo de la negociación de intenciones no me refiero necesariamente a una discusión explícita, sino a la posibilidad de ver el significado del proceso de enseñanza–aprendizaje y de que los estudiantes perciban su posición en el proceso.

La enseñanza tiene que crear una riqueza dentro de la que sea posible encontrar y compartir objetivos y direcciones. Las intenciones de las actividades sugeridas deben ser accesibles a los estudiantes. El montaje de un escenario es un intento por crear posibilidades para la negociación (en un sentido amplio), en un lenguaje accesible a los estudiantes. Sin embargo, la negociación supone un cierto tipo de paralelismo. Y no se ha dicho mucho sobre la posibilidad de que el profesor llegue a entender las intenciones de los estudiantes. ¿Cómo es posible involucrar a los estudiantes en el proceso de montaje de un escenario? ¿Es posible que los estudiantes inviten al profesor a sus montajes? Estas preguntas también pueden discutirse en relación con los proyectos anteriormente descritos como, por ejemplo, en “Relaciones económicas en el mundo de los niños”.

Una dirección apropiada del análisis es investigar los ejemplos con mayor profundidad para desarrollar el aspecto subjetivo de la crítica en una concepción balanceada de educación matemática crítica, que incorpore la dualidad de la reflexión. Pero no haré un viaje de regreso a la práctica educativa. En cambio, realizaré una excursión a la epistemología y daré una mirada adicional al concepto de conocer.

CAPÍTULO 11

CONOCER, UN EPÍLOGO

En el análisis anterior utilicé el concepto de conocimiento varias veces y subrayé diferentes tipos de conoceres relacionados con la educación matemática: el matemático, el tecnológico y el reflexivo. Pero no había tratado de definir explícitamente el término *conocer*. No trataré de remediar esta falta de consistencia analítica en este último capítulo, aunque sí trataré de investigar el concepto un poco más y, al hacerlo, trataré de relacionar mejor los conceptos de reflexión, crítica y conocimiento. Mi objetivo no es añadir más a la interpretación de la educación matemática crítica, sino dar una mirada más cercana a una parte del marco conceptual desarrollado.

A pesar de que conocer es un término problemático, el *conocer reflexivo* ha sido uno de los términos claves en el análisis precedente. Podíamos pensar que conocer es un concepto controlado, pero cualquier intento de sugerir una interpretación exhaustiva del término revela su textura abierta. Al profundizar en el concepto nos encontramos con una amplia variedad de nociones y aspectos —también aspectos bastante diferentes de lo que normalmente se incluyen en una epistemología. En este sentido, conocer revela una naturaleza explosiva. Quiero ubicarme fuera de mi análisis de la educación matemática crítica al elaborar sobre este aspecto de los supuestos conceptuales de mi análisis —y conocer es sólo uno de los conceptos explosivos sobre los cuales está construido mi análisis. No siento que sea seguro comenzar a construir una casa de ladrillos, cada uno de los cuales puede explotar. En todo caso, permítanme comenzar por una esquina de este edificio que parece estar controlada.

CONOCIMIENTO, UN CONCEPTO CONTROLADO

El supuesto de la *homogeneidad del conocimiento* establece que es posible integrar todo tipo de conocimiento en un sistema unificado. Esta tesis encuentra sustento tanto en el racionalismo como en el empirismo. El racionalismo señala que la *ratio* (i.e., razón) es una fuente uniforme de conocimiento, mientras que el empirismo establece que los sentidos juegan un papel preponderante. De acuerdo con el racionalismo, la mente no se contradice a sí misma si es capaz de purificarse al pasar por su cedazo todas las opiniones preconcebidas. Las tradiciones y normas dan lugar a malos hábitos de pensamiento: pueden causar la repetición de supuestos falsos y

una deducción imperfecta. En vez de apoyar cualquier mejora del conocimiento, las tradiciones y los hábitos deterioran el conocimiento. Para producir conocimiento el individuo tiene que deshacerse de todas las ideas que se han pasado como contrabando a su mente por medio de la vida social. La mente tiene que limpiarse apropiadamente para asegurar un comienzo correcto y fresco. Esta es la manera como René Descartes describe su método científico y filosófico. El primer problema, entonces, es dónde obtener un punto de partida. Descartes trata de encontrar un piso sólido en una proposición simple que no necesita ningún argumento de sustento. De acuerdo con él, cuando se comprende la proposición también se comprende que debe ser verdadera; y de tal comprensión se desprende un criterio de conocimiento. Entonces, después de haber deducido verdades simples y básicas, se puede continuar con pasos lógicos, pero distinguibles, hacia enunciados verdaderos más complejos. Ninguna verdad es tan remota que sea imposible alcanzarla por una deducción estricta. Con esta formulación, Descartes defiende la idea de que un sistema racional de deducción es completo y que la razón es omnipotente. Todas las verdades deducidas se ajustan dentro de la colección de las verdades ya establecidas. El sistema de conocimiento es consistente.

También, el empirismo concibe la tesis de la homogeneidad del conocimiento como verdadera. Si simplemente percibimos, somos capaces de acumular datos sensoriales y los datos empíricos no se pueden contradecir entre sí¹. Un exponente distinto de la interpretación empirista de la tesis de la homogeneidad del conocimiento es Carnap. El estableció que un análisis de los conceptos de la ciencia muestra que, sin importar la materia de los conceptos pertenecientes a la clasificación tradicional de la física, biología, química, psicología, sociología, etc., tales conceptos encuentran su lugar en un sistema unificado que contiene todo el conocimiento científico. Los conceptos de la biología, por ejemplo, se revelan como moleculares pero, cuando se descomponen en sus partes atómicas, su significancia empírica es obvia. El valor verdadero de una proposición arbitraria se determina por los valores verdaderos de sus partes atómicas.

La tesis de la homogeneidad del conocimiento tiene una larga historia en la filosofía. Platón la anticipó con la idea de que los objetos de conocimiento son ideas que no pertenecen a nuestro mundo real. Si una persona obtiene conocimiento, éste debe versar sobre el mundo eterno y, por lo tanto, el conocimiento de la persona no puede conducir a ningún tipo de contradicción. La tesis de Platón sobre la homogeneidad del conocimiento se expone en su discusión sobre el conocimiento, que de hecho inició toda

1. Wittgenstein en el *Tractatus* formula este último supuesto y sostiene que una proposición arbitraria es una función-verdad de proposiciones elementales que no pueden formar contradicciones. Cada proposición elemental establece un hecho simple y los hechos constituyen el mundo.

una tradición en la epistemología, al preguntar: ¿qué tiene que añadirse a la creencia verdadera para que sea conocimiento²? Una respuesta a esta pregunta se sintetiza en la *definición clásica de conocimiento*, de acuerdo con la cual deben satisfacerse tres condiciones para decir que una persona ha ganado un conocimiento. La persona *A* conoce *p* si y sólo si *A* cree que *p* es verdadero, *A* tiene suficiente razón para justificar *p* y *p* es verdadero. En resumen, el conocimiento es una creencia verdadera justificada. Veo que esta concepción clásica de conocimiento no está implicada en sí en la tesis de la homogeneidad; sin embargo, ésta revela tal concepción porque el conocimiento se asocia con la Verdad y con el hecho de que no se espera que los enunciados verdaderos se contradigan entre sí.

La noción de conocimiento como una creencia verdadera justificada se ha desarrollado de la mano con las reflexiones sobre los fundamentos de la epistemología, los cuales sostienen que se puede encontrar una base firme para el conocimiento: según el racionalismo, la base está en los axiomas simples cuyo carácter verdadero puede captarse por medio de un acto intuitivo y, de acuerdo con el empirismo, la base se encuentra en enunciados simples sobre las experiencias sensoriales. Esto da lugar a un supuesto sobre la existencia de un *cuerpo autorizado de conocimiento* (un cuerpo de verdades). Este supuesto es una forma diferente de enunciar la tesis de la homogeneidad del conocimiento. Se descarta la posibilidad de que distintos cuerpos de conocimiento entren en competencia y así se controla el conocimiento.

Es interesante analizar el concepto de crítica que de por sí acompaña a la definición clásica de conocimiento. Kant enfatizó la necesidad de una crítica al conocimiento en términos de una crítica a la razón pura. Tal crítica del conocimiento puede caracterizarse como una crítica definitiva. Una vez se ha llevado a cabo, podemos ver el sentido en que se puede obtener conocimiento y, a partir de ahí, el desarrollo del conocimiento se vuelve un proceso acumulativo. La idea de la crítica definitiva hace parte de la definición clásica de conocimiento, que invita a una búsqueda de un cuerpo autorizado de conocimiento. La esencia de la crítica, entonces, es la aclaración de la base sobre la cual se erige el cuerpo autorizado de conocimiento. La crítica se convierte en una actividad *a priori* separada de la acumulación de conocimiento (sin importar si la acumulación se describe en términos empiristas o racionalistas). Como consecuencia, la entrega de conocimiento se vuelve la base de la “educación lógica”.

La idea de la posibilidad de una crítica definitiva establece a la crítica como una práctica separada de la educación. La crítica entra a la filosofía como la labor de identificar un fundamento para el conocimiento y el sujeto epistémico individual se libera de la responsabilidad de la crítica. La crítica

2. Ver el diálogo *Theaetetus*.

no se lleva a la educación, ni tampoco se convierte en una parte del concepto del aprendizaje. En toda la tradición de la educación encontramos un impacto fuerte del supuesto de la existencia de un cuerpo autorizado de conocimiento³. Si existe una autoridad de conocimiento, el contenido de la educación se convierte en la repetición de algunas de las partes más básicas y simples de tal cuerpo y estas partes se llevan al salón de clase por medio de la enseñanza. Si deseamos que la educación crítica tenga sentido, tenemos que ver la crítica no exclusivamente como una necesidad *a priori*, sino también como una necesidad *a posteriori*.

CONOCER, UN CONCEPTO ABIERTO

Dejar a un lado la idea de la existencia de un cuerpo autorizado de conocimiento significa mirar al conocimiento sin sus bases fundacionales. Por lo tanto, el falibilismo sustituye al absolutismo y debe cuestionarse la idea de situar al conocimiento cerca del concepto de verdad⁴. El conocimiento se convierte en un concepto abierto, al igual que llegar a conocer. Así que, ¿qué podríamos interpretar como conocer si no presuponemos la existencia de un cuerpo autorizado de verdades? ¿Cualquier interpretación posibilita usar la palabra conocer sin reclamar cierta universalidad? Según la definición clásica, un enunciado sobre el conocimiento es un tipo de descripción. La proposición *A* conoce *p* comprende una descripción de una creencia específica (la creencia de *A* en *p*); una descripción de una estructura de apoyo racional, i.e., una descripción de algunas relaciones lógicas (*A* tiene suficientes argumentos); y una descripción de algunas de las relaciones metafísicas entre una estructura lingüística y algún estado de cosas (la verdad de *p*)⁵. No obstante, si un enunciado sobre el conocimiento no es una descripción, ¿qué podría ser entonces?

3. Un ejemplo importante de una interpretación de la educación como algo asociado a cierto tipo de conocimiento se encuentra en el análisis de P. H. Hirst. Hirst no asume la existencia de un cuerpo único de conocimiento integrado, sino que especifica diferentes áreas de conocimiento, cada una de las cuales debe tener un lugar en el currículo. Sin embargo, veo que la posición de Hirst está de acuerdo con el argumento de la existencia de un cuerpo autorizado de conocimiento porque las diferentes áreas, tal y como Hirst las ha identificado, no se contradicen entre sí. Ellas se han dividido el territorio del conocimiento entre sí y parecen convivir pacíficamente. Y juntas constituyen un cuerpo autorizado de conocimiento.
4. No obstante, no combinar el conocimiento con la verdad inmediatamente nos pone en aprietos. Si el conocimiento no se conecta con la verdad, introducimos el relativismo. Y, ¿cómo detenemos esto? Si cada enunciado puede ser parte del conocimiento de una persona y si la persona cree que el enunciado tiene suficientes razones para sustentarse a sí mismo, entonces el conocimiento fácilmente se relativiza a tal grado que seríamos incapaces de separar la creencia del conocimiento. El problema es cómo apartarse de la definición clásica de conocimiento sin caer involuntariamente en una definición vacía que borre cualquier diferencia entre conocimiento y creencia.

Según algunas ideas sobre la existencia de una variedad de juegos de lenguaje y de la multiplicidad de funciones de esos juegos, trataré de combinar el conocer con un deseo de argüir a favor de una posición específica, i.e., señalo la analogía entre conocer y prometer. Si una persona *A* (digamos que *A* es una mujer) promete *p*, la promesa no sólo es un reporte de algún estado de cosas. *A* da una descripción del contenido de la promesa pero no describe únicamente este contenido. Hay más cosas involucradas que la simple pronunciación de un enunciado. *A* promete *p* y, al hacerlo, lleva a cabo un acto por medio de su uso del lenguaje. Que una persona conozca una proposición *p* puede interpretarse siguiendo los mismos lineamientos⁶.

Si *A* sostiene que conoce *p*, también ofrece la seguridad de que está en la capacidad de sustentar suficientemente a *p*. La persona debe estar segura de que los demás puedan actuar como si *p* fuera cierto. Pero “estar segura” no es un concepto metafísico. No puede definirse por referencia a alguna cadena de pasos racionales de pensamiento o a algún conjunto de impresiones sensoriales. Estar segura no es sólo la medida del grado de verdad que una persona puede obtener y sobre el cual posteriormente puede dar un reporte. Estar segura significa que la persona encuentra que es capaz de concebir e imaginar todas las situaciones relevantes para reclamar que conoce y que está dispuesta a argüir que ha sido capaz de concebir todas las posibilidades relevantes. Estar segura no es sólo una descripción psicológica, sino que es una parte de una promesa. Conocer, por lo tanto, también tiene una dimensión ética. Que *A* conozca *p*, no significa únicamente que ella adquiera la obligación de discutir razones, porque conocer involucra estar segura, sino que también está en la obligación de mostrar lo que de hecho está prometiendo cuando declara que conoce *p*. Ella debe ser capaz de exponer su interpretación de “la verdad de *p*”.

La definición clásica de conocimiento se refiere a un estado mental de cosas, a las estructuras lógicas y a algunas relaciones metafísicas, mientras que esta definición que ofrezco se refiere al contexto social. Desde un punto de vista solipsista, no tiene sentido prometer nada. Una promesa supone la existencia de relaciones interpersonales (eso sin considerar la posibilidad de hacerse una promesa a uno mismo). El caso del conocimiento es el mismo. Expresar conocimiento supone un contexto social⁷. Esta es una profundización esencial que se debe hacer para comparar conocer con prometer. La expresión *A* conoce *p* no es poco menos específica que

-
5. Se debe subrayar que “la verdad de *p*” no necesita ser descrita por una teoría correspondiente de verdad, como se hizo anteriormente. Otras concepciones de verdad pueden asumirse, pero eso no marcaría ninguna diferencia en este contexto.
 6. En el artículo “What is a speech act” [¿Qué es un acto de habla?], Searle realizó un análisis de la noción de prometer. Este análisis me ha sido de gran utilidad. La posibilidad de un análisis no descriptivo de conocimiento fue presentado por Austin en su artículo “Other minds” [Otras mentes]. Aquí relaciona conocer con prometer.

la expresión A promete p . Conocer tiene una textura abierta. No podemos definir conocer reduciendo la noción a conceptos duros de cocinar, tan sólo podemos explicar conocer relacionando ese concepto abierto con otros conceptos igual de abiertos, con la esperanza de que tal red de similitudes semánticas arroje una aclaración⁸.

En consecuencia, debemos enfrentar la posibilidad de *conflictos de conocimiento* —situaciones donde se defiende un conocimiento y no existe un procedimiento disponible para resolver el conflicto. Los conflictos de conocimiento no pueden desecharse, como la interpretación clásica pretendía, ni tampoco pueden considerarse poco importantes y triviales, como dice la posición relativista. Un conflicto de conocimiento es el pivote del desarrollo del conocimiento. La posibilidad de un conflicto de conocimiento es una consecuencia de una interpretación del conocer como un tipo de promesa, hecha por personas específicas en situaciones específicas enmarcadas dentro de un horizonte específico. La expresión conflicto de conocimiento no se refiere al conflicto de creencias que surge cuando dos personas tienen opiniones diferentes. Esto precisamente es en lo que la interpretación relativista ha caído. Un conflicto de creencias no es problemático desde un punto de vista epistemológico —la gente puede tener razón cuando adopta diferentes creencias. Pero un conflicto de conocimiento conduce a una situación epistemológica delicada. No puede ignorarse sino que tiene que establecerse. No obstante, un conflicto de conocimiento no puede resolverse con una simple prueba empírica. Tiene que resolverse por medio de una negociación.

La existencia de conflictos de conocimiento rompe el supuesto de la existencia de un cuerpo autorizado de conocimiento. Una implicación de esto es que la posibilidad de una crítica definitiva no puede mantenerse.

7. La discusión de Wittgenstein sobre el lenguaje privado es importante en este contexto. El lenguaje privado es imposible, al igual que el conocimiento privado, por razones similares. (Entonces ¿qué pasó con Robinson Crusoe? ¿Para él fue en verdad imposible conocer algo?)
8. La noción de que el conocimiento comprende un cuerpo heterogéneo de verdades personales ha sido atacada por la posición relativista que sostiene que la verdad de una proposición siempre depende del contexto en el que se dice y, más aun, que es imposible decidir cuál contexto es adecuado para determinar el valor verdadero de una proposición. Según el relativismo no tiene sentido decir que p es verdadera; tenemos que decir que p es verdadera en el contexto c . Después, tenemos que enfrentar la posibilidad de que dos proposiciones, como p es verdadera en el contexto c y p es verdadera en el contexto d , sean ambas verdaderas. Estoy de acuerdo con esta conclusión. No obstante, no estoy de acuerdo cuando se llega al axioma básico de la posición relativista de que todos los contextos son iguales. Tampoco me gusta el relativismo modificado que dice que una proposición es verdadera si la mayoría así lo confirma. El problema para mí es que el relativismo elimina la diferencia entre conocimiento y creencia. Me parece que dos promesas diferentes se ofrecen en las siguientes declaraciones: conozco p y creo que p . Espero que la interpretación dada al conocimiento no llegue a colapsar en un relativismo; pero al menos no va a ser una repetición del absolutismo que se ha construido en la definición clásica.

Una investigación crítica de una declaración de conocimiento se convierte en una necesidad permanente. No hay conocimiento sin preconcepciones ni prejuicios. No tenemos unas bases, ni homogeneidad, ni tampoco un cuerpo autorizado de conocimiento. Tenemos entonces que introducir una crítica perpetua.

Ubicarse dentro de las preconcepciones y los prejuicios es una condición humana permanente. Esto es la consecuencia de encontrarnos forzados a vivir *dentro* del lenguaje y (por lo tanto) dentro del horizonte de nuestras comprensiones previas cuyos límites son imposibles de conceptualizar. Imaginar la posibilidad de un acto purificador en términos de una crítica limpiadora es imposible, a menos que volviéramos a la concepción de conocimiento como un concepto controlado. Así que la condición inalterable es vivir dentro de un horizonte, pero esto incluye una obligación: tratar de soltar nuestros prejuicios⁹. Esto indica la importancia de la crítica como una empresa que siempre tiene que llevarse a cabo a lo largo del desarrollo de conocimiento. La crítica es un requisito continuo. Esta es una consecuencia de dejar a un lado el supuesto de la existencia de un cuerpo autorizado de conocimiento y de aceptar como una condición epistémica básica que se puede conocer dentro de cierto horizonte. Siempre tenemos que hacer de una declaración de conocimiento un objeto de investigación más profunda. Tenemos que negociar lo que se concibe como el contenido de la declaración de conocimiento y cuál es la base para estar seguros de ello.

El paso de la idea de la existencia de una autoridad de conocimiento a la posibilidad de los conflictos de conocimiento trae la crítica a la educación. La tesis de la homogeneidad, en una u otra variante, ha dominado en la epistemología por cerca de 2.000 años. El primer ataque real a esta tesis se lanzó en la década de 1940 con la sugerencia de que las declaraciones de conocimiento podrían ser similares a las promesas. Al mismo tiempo se consideró la crítica dentro de la educación. La idea de que no podemos establecer una crítica definitiva, sino que esa crítica debe describirse como una necesidad permanente, constituye un avance importante en las teorías del aprendizaje que ven a la persona que aprende como un agente en el proceso de aprendizaje. Esto permite que los conceptos de intención y reflexión pasen a ser conceptos educativos. No podemos forzar a nadie a volverse un sujeto crítico. La crítica y la actividad forzada son ajenas una de la otra. Es imposible obligar a alguien a adoptar una posición crítica. Adoptarla supone una decisión por parte de quien aprende. La unión del conocer y la crítica como parte de una epistemología educativa es posible con la introducción de la intención y la reflexión. Lo que he llamado cono-

9. En la tradición hermenéutica de Hans-Georg Gadamer encontramos una interpretación positiva de términos como prejuicio, tradición y autoridad (ver Gadamer, 1989, pp. 277 ss). Sin embargo, el concepto de crítica es necesario si pretendemos no dejar que la hermenéutica degenerare en un conservatismo.

cer reflexivo designa al retoño de esta unión, pero también tenemos que recordarnos a nosotros mismos que el término *negociación* tiene que usarse para caracterizar esta unión.

TEORÍAS EPISTÉMICAS MONOLÓGICAS

El prefijo *mono* indica que la epistemología se concentra en el individuo y defiende la idea de que el individuo posee recursos adecuados para llegar a conocer; mientras que el prefijo *dia* (como en teorías epistémicas dialógicas, idea que se discutirá en la siguiente sección) indica que la base del conocer se encuentra en las interacciones. En esta sección me concentraré en el *monologismo*.

Según la tradición racionalista mencionada con anterioridad, la adquisición de conocimiento es un acto individual. La única competencia importante en el desarrollo de nuevo conocimiento es la *ratio*. Cuando la deducción tiene que encontrar su comienzo en verdades básicas, algunas verdades tienen que percibirse por un acto intuitivo; y en la tradición racionalista, la intuición se ve como un acto individual. La empresa racionalista entonces toma la forma del crecimiento del conocimiento a través de la deducción lógica a partir de este origen. La deducción también se emprende de manera individual. Cuando la *ratio*, que incluye la intuición y la deducción, se concibe de tal manera, las relaciones interpersonales no juegan un papel esencial en el desarrollo del conocimiento. El desarrollo del conocimiento y la comunicación se separan. La comunicación no se integra en la definición de conocimiento ni en la manera como éste avanza. En este sentido, caracterizo a la epistemología racionalista de monológica.

El monologismo es también una característica del empirismo que enfatiza que la fuente del conocimiento son los sentidos (y nada más que los sentidos). Las sensaciones son fundamentalmente individuales. No comparto mis sensaciones con nadie. Nadie puede sentir mi dolor. Las sensaciones son individuales y, en consecuencia, también lo es el fundamento empirista del conocimiento. En la interpretación empirista del desarrollo del conocimiento, se ha sugerido un “mecanismo de asociación”. Adquirimos una mezcla de sensaciones pero, dado que somos capaces de ver similitudes, hacemos asociaciones, y de estas asociaciones constituimos objetos e identificamos regularidades. No obstante, el conocimiento se basa en las asociaciones que encontremos entre nuestras sensaciones privadas. Asociar parece también ser una tarea individual. Esto significa que el monologismo también caracteriza la interpretación empirista del desarrollo del conocimiento.

Al ser monológicos, el racionalismo y el empirismo son similares; pero en relación con la naturaleza de la actividad que realiza el individuo son diferentes. Para un empirista, usamos nuestros sentidos para obtener cono-

cimiento y el acto de percibir es pasivo. No tengo que “hacer” nada para mirar a través de mis ojos. Si, por ejemplo, ejecuto un acto al hacer alguna interpretación, esto puede alterar la organización de mis sensaciones. Podría estar tentado a introducir algunos de mis prejuicios y “ver” de acuerdo con algunos de mis (malos) hábitos de asociación establecidos. Para hacer un cuadro impresionista es esencial negar las ideas sobre cómo se supone que son las cosas y tratar de relacionar la actividad de pintar únicamente con las impresiones que se tienen. Según Hume, por ejemplo, la dificultad para hacer esto proviene de la gran fuerza con que nuestros hábitos permean nuestras percepciones. Si somos capaces de eliminar tales influencias “ideológicas”, podremos ser capaces de captar los hechos puros en forma de datos sensoriales. Estos no se encuentran mediados por ningún sistema socialmente construido tal como el lenguaje, por ejemplo. Contraria a la actividad empirista de percepción pasiva, la actividad de deducción, como la ha desarrollado el racionalismo, es un acto llevado a cabo por el individuo y esto significa que el racionalismo ha incorporado un tipo de constructivismo. El sujeto epistémico del racionalismo es activo.

El monologismo también se encuentra en las teorías modernas del conocimiento. La intención de Piaget al establecer una epistemología genética fue basarse tanto en la tradición empirista como en la racionalista, sin degenerar completamente en ninguna de las dos. Piaget distingue entre dos tipos de experiencia: una tiene que ver con las propiedades físicas de los objetos y la otra, con las operaciones que un sujeto puede realizar sobre los objetos. Esta distinción es fundamental para la identificación de Piaget de las raíces genéticas de las matemáticas puras. Piaget sostiene que el conocimiento matemático no se crea a partir de una abstracción de las propiedades físicas de los objetos. Esta es una interpretación opuesta a la normal que el empirismo hace, por ejemplo, de los objetos geométricos: el concepto de plano es una abstracción de los planos físicos y los números son cantidades de algo. Piaget, no obstante, está de acuerdo con el empirismo con respecto a que las matemáticas tienen una base empírica, pero en vez de enfocarse en la observación que el sujeto hace de las propiedades físicas de los objetos, Piaget se concentra en las experiencias del sujeto sobre lo que es posible *hacer* con los objetos. Su tesis es que el conocimiento matemático se basa en acciones, i.e., las operaciones que se ejecutan sobre los objetos¹⁰. Piaget está de acuerdo con el racionalismo en que el desarrollo del conocimiento matemático se produce a partir de un acto racional, pero no cree que esto tenga mucho en común con la deducción lógica de hechos simples percibidos de forma intuitiva. Tampoco Piaget encuentra que sea un acto inductivo; sino que, en cambio, toma la forma de

10. En palabras de Piaget: “El hecho esencial es que (...) las experiencias logicomatemáticas tienen que ver con las acciones que el sujeto ejecuta sobre los objetos” (Beth y Piaget, 1966, p. 232).

reflexiones sobre las operaciones (que se ejecutan sobre los objetos). El conocimiento matemático crece al hacer de las operaciones el objeto de las abstracciones reflexivas. Los esquemas inmanentes de las operaciones se vuelven patrones logicomatemáticos de pensamiento explícitos.

Un problema relacionado con la tesis de Piaget es que las operaciones sobre los objetos parecen ser diferentes individualmente y en conjunto. ¿Cómo pueden tales operaciones volverse el fundamento del conocimiento matemático, si están estructuradas en términos no personalizados y generales? Sin embargo, Piaget identifica algo en común entre las operaciones y los objetos y tales rasgos comunes constituyen la base del conocimiento matemático. Piaget separa el sujeto psicológico del sujeto epistémico y defiende la idea de que la naturaleza general del conocimiento matemático se encuentra en el sujeto epistémico despojado de todos sus rasgos individuales¹¹. Cuando afirma la naturaleza común de las abstracciones reflexivas, al ubicarlas en el sujeto epistémico, Piaget sigue el racionalismo que defiende la naturaleza común de la *ratio*, pero con la diferencia de que la *ratio* piagetiana actúa sobre algo diferente que sobre lo que lo hace la *ratio* racionalista¹².

El empiricismo clásico desarrolla una teoría de la copia. El sujeto es pasivo, recibe impresiones y éstas se condensan en conceptos. Piaget combina el racionalismo y el empirismo al ubicar una fuente empírica para el conocimiento matemático y al describir los medios racionales del desarrollo del conocimiento matemático; a partir de esta combinación Piaget desarrolla su constructivismo. Una actividad de parte del sujeto se presupone para obtener algo sobre lo cual reflexionar. Las abstracciones reflexivas no sólo preservan sino que refinan la parte activa de la *ratio* racionalista. Las abstracciones reflexivas son los vehículos del desarrollo del conocimiento matemático¹³.

La epistemología genética de Piaget sostiene una interpretación monológica del desarrollo del conocimiento. Las operaciones del sujeto no se definen en relación con otros sujetos sino con las manipulaciones individuales de los objetos físicos. Las abstracciones reflexivas que realiza el

11. Ver Beth y Piaget (1966, p. 232).

12. Esta línea de pensamiento se ha desarrollado en la teoría de la actividad, pero sin la aceptación de la epistemología piagetiana en general. Ver por ejemplo Christiansen y Walther (1986).

13. Mi uso del término conocer reflexivo es bastante diferente al de *abstracción reflexiva*. El conocer reflexivo tiene como objeto el uso de la competencia matemática. Es una manera de ubicarse por fuera de la catedral del conocimiento formal y de darle una mirada más general. Con las abstracciones reflexivas continuamos ubicados dentro del mismo cuerpo de conocimiento. Todo el interés de la epistemología de Piaget es el desarrollo del conocimiento matemático en sí. No es del interés de esta teoría volver al conocimiento matemático o a sus aplicaciones objeto de reflexión. Pero la importancia del conocer reflexivo es precisamente que las aplicaciones del conocimiento matemático son críticas y esto no se encuentra conceptualizado en la epistemología piagetiana.

sujeto epistémico también son aisladas. No se necesita ningún tipo de comunicación con ningún otro sujeto epistémico para llevar a cabo tales reflexiones. Este supuesto también se resalta con la idea piagetiana de que las fuentes de las matemáticas y la lógica son “profundas” y diferentes de las fuentes del lenguaje. Hay similitudes entre la *ratio*, tal y como la describe la filosofía racionalista, y el sujeto epistémico. Ambos tienen la misma naturaleza y ambos, en su forma más pura, trabajan en aislamiento. La abstracción reflexiva es la piedra angular de la epistemología genética, tanto como la deducción lo es para el racionalismo y la inducción para el empirismo. El proceso de la abstracción reflexiva repite la naturaleza monológica de la deducción y de la inducción. El constructivismo de Piaget, entonces, es monológico.

El monologismo piagetiano ha constituido una perspectiva principal en la educación matemática. En la escuela primaria la enseñanza monologista se enfoca en el desarrollo intelectual del niño. El niño debe colocarse dentro del ambiente más estimulante y, con referencia a la epistemología genética, es posible especificar los rasgos importantes de tal ambiente. Debe posibilitarse que el niño se involucre en operaciones concretas y, así, facilitar el desarrollo de patrones logicomatemáticos de pensamiento. En el salón de clase experimental y progresivo habitan niños que dibujan, cortan, pegan y construyen. Esto genera una actividad bastante agitada y vivaz. Y ciertamente crea discusiones e interacciones entre los niños y entre ellos y el profesor. Sin embargo, esto se ha interpretado como una epistemología monológica, lo cual significa que la comunicación se concibe como algo que tiene que ver con la atmósfera que rodea el proceso de aprendizaje. La comunicación en este caso se reduce a un implemento pedagógico y metodológico.

Si se identifica la fuente del conocimiento matemático de manera adecuada, la crítica se vuelve sólo un prerrequisito para que los estudiantes reconceptualicen su competencia matemática existente construida, y no una actividad relacionada con la situación educativa en la que están involucrados o con el papel social de las matemáticas. La crítica, entendida como una autocrítica orientada hacia la construcción (individual) del conocimiento matemático, es el resultado del monologismo epistemológico. El monologismo dificulta ver la interacción en la educación como una precondition para una reflexión necesaria sobre el contenido en cuestión. Por lo tanto, la perspectiva monológica, que caracteriza la mayoría de las derivaciones de la interpretación piagetiana de la actividad en el salón de clase de matemáticas, dificulta repensar la educación crítica. El monologismo excluye la crítica como una *obligación educativa orientada hacia la política del conocimiento*.

TEORÍAS EPISTÉMICAS DIALÓGICAS

Como concepto epistémico, el *diálogo* pertenece a la misma categoría lógica que percepción o *ratio*. Mi tesis es que debemos orientarnos hacia una epistemología dialógica para integrar la crítica como un concepto educativo que permita lograr una comprensión epistémica de la educación matemática crítica. Esto también significa que tenemos que luchar con el uso de un cliché. La educación como diálogo ha sido el eslogan que muchos educadores alegres y progresistas han acuñado. Pero a pesar de que lo ha acaramelado, el término diálogo contiene un punto epistémico esencial. En este contexto, mi uso del término diálogo tiene mucho en común con el término *negociación*. El establecimiento del diálogo como un concepto epistémico está implicado en el hecho de haber dejado a un lado la tesis de la homogeneidad del conocimiento y haber aceptado que pueden generarse manifestaciones contradictorias de conocimiento y que esto tiene como consecuencia que el conflicto de conocimiento se vuelva realidad. Ver el conocer de manera similar a prometer revela el contenido social del conocimiento. Tanto como sucede con una promesa, el conocer también presupone una relación interpersonal. Esto se vuelve una condición básica en cualquier educación que se niegue a establecer una relación de “banquero”, término acuñado por Freire para describir la relación profesor–estudiantes.

El conflicto de conocimiento es un fenómeno epistémico delicado y no puede resolverse añadiendo nueva información, recogiendo más observaciones o realizando más cálculos cuidadosamente. El conflicto de conocimiento tiene que manejarse de una manera diferente. La crítica y la reflexión son necesarias. A partir de un conflicto de conocimiento esperamos desarrollar nuevos conceptos y ser capaces de reflexionar sobre el conocimiento que ya se tiene. Si se desea que el conflicto de conocimiento entre en un proceso dinámico, su naturaleza crítica y dialógica tiene que enfatizarse. Si A conoce p , B conoce q , y p y q son contradictorios, entonces cualquier progreso dependerá de la interacción entre A y B ¹⁴. Esta es la única manera de manejar una situación con dos sistemas conceptuales parciales. El conflicto de conocimiento indica que algunos marcos conceptuales son incompatibles y tal vez inconsistentes. Por lo tanto, el conflicto de conocimiento debe conducir a un cambio de conceptos. No existen procedimientos mecánicos para hacer esto. La superación de un conflicto de conocimiento no puede ser el resultado de un razonamiento puro o de algunos experimentos conducidos cuidadosamente. La única manera de hacerlo es la negociación.

14. A y B no necesariamente deben intepretarse como personas. Pueden también ser tradiciones (en el sentido de una interpretación hermenéutica), o paradigmas (en el sentido de la interpretación kuhniana) o textos.

Si abandonamos la idea de una crítica definitiva, la crítica y la reflexión deben entonces describirse en términos de negociación. Por lo tanto, una epistemología que se ubique dentro de una perspectiva crítica se vuelve dialógica. Para aclarar este punto puede ser interesante volver a la situación que existía antes de Kant. Como se había interpretado durante el Siglo de las Luces, por ejemplo como lo hizo Bayle, una crítica debía basarse en el debate público y debía volverse un medio para evidenciar las comprensiones erróneas y los prejuicios. Aquí encontramos la noción de crítica agarrada a una interpretación social de la negociación. Kant defendió la idea de que la crítica en sí debe someterse a un escrutinio y que la Razón tiene que dirigirse a la Razón misma en una autocrítica pura. Esto convirtió la crítica en una empresa intrasubjetiva, basada en la idea de que la labor de la epistemología filosófica es encontrar las bases incuestionables del conocimiento. Esto separó la crítica de la negociación. Aceptar que la crítica no puede ser una labor definitiva que se realiza una sola vez, sino que es una obligación permanente, significa que la crítica debe volverse dialógica. Esto rescata la idea original del la Iluminación.

La posibilidad de conflictos de conocimiento puede interpretarse como una fuente de reflexión y el conflicto de conocimiento, como una manifestación epistémica de situaciones críticas que proporcionan unos antecedentes ontológicos a la crítica. El conflicto de conocimiento genera entonces una reconceptualización. Por lo tanto, una epistemología dialógica se vuelve parte del marco epistémico para la educación crítica. El paso de una epistemología monológica a una dialógica es una manera de imposibilitar la permanencia de la noción de conocimiento como autoridad y de educación como una “entrega de mercancías”.

CONOCER, UN CONCEPTO EXPLOSIVO

Bajo el supuesto de que conocer es un concepto abierto, afín con prometer, el conocer se separa de cualquier base, y la crítica se hace necesaria en cualquier momento en que se desee emitir una declaración de conocimiento. Por lo tanto, la crítica se convierte en un concepto educativo y la perspectiva epistémica se convierte en dialógica¹⁵. Pero en el mismo momento en que la negociación y el diálogo entran en la epistemología, el conocer se sale de control. Pensar en términos de una epistemología dialógica significa que el conocer no puede concebirse más como un concepto impreciso con una textura abierta. Esto incluso sería asumir mucho sobre la precisión del concepto.

Dado que la negociación implica una relación interpersonal, el conocer se relaciona no sólo con la incertidumbre y el prejuicio, sino también con el

15. Ver también Brousseau y Otte (1991).

poder¹⁶. Hemos tocado el concepto de poder de diferentes maneras. A partir de la tesis del relativismo lingüístico y la idea de que las matemáticas pueden verse como un lenguaje, llegamos a la noción del poder formativo de las matemáticas. Pero esta noción puede desarrollarse aun más porque no tiene mucho sentido hablar del poder formativo de las matemáticas aisladamente. La noción del poder formativo de las matemáticas sólo tiene sentido cuando se entiende como un juego entre varias estructuras de poder de la sociedad. Esto abre otras perspectivas que trascienden el análisis presente. Esto significa que si en realidad llegamos a un concepto de conocer crucial para el análisis de la educación matemática crítica, entonces es probable que el análisis explote en diferentes direcciones. Ni siquiera una noción única y aparentemente específica como conocer puede entenderse a menos que la relacionemos con una variedad de aspectos que no se han tocado en mi presente análisis. No podemos redondear todo el análisis de la educación matemática crítica a menos que comprendamos los conceptos utilizados en el análisis, y comprender un concepto como conocer supone análisis mucho más complejos que el análisis completo en sí. Esto es lo que quiero decir con el término concepto explosivo.

Un concepto controlado puede fijarse con una definición que lo contenga de una manera precisa. Un concepto abierto no tiene límites predeterminados, pero su significado esencial puede, no obstante, ubicarse en algún lugar del panorama —es posible ubicar una montaña, aunque tal vez sea imposible determinar dónde comienza y dónde termina. Un concepto explosivo es diferente. Cuando hacemos una investigación detallada de tal concepto, sacudiéndolo y tratando de abrirlo, puede explotar en diferentes direcciones y llevarnos a lugares muy diferentes de los que originalmente fueron la base de nuestro análisis.

Comencé este análisis buscando un objeto de crítica y, por medio del análisis del poder formativo de las matemáticas, concluí que puesto que existe el modelaje matemático, las matemáticas tienen una influencia social importante. De ahí seguimos con la idea de que comprender el poder formativo de las matemáticas es un aspecto esencial de la educación matemática crítica. El objeto de la actividad crítica, por lo tanto, se ubicó en las aplicaciones de las matemáticas. Análisis posteriores me llevaron a ver que este objeto de crítica podría interpretarse en un sentido más amplio y se le dio a la alfabetización matemática una importancia similar a la de la alfabetización, como una competencia por medio de la cual nos volvemos capaces de interpretar y comprender las características de nuestra realidad social. La alfabetización matemática y la imaginación social se relacionaron mediante de la noción de *Mündigkeit*. Entonces caímos en cuenta de que también debemos considerar al sujeto epistémico. La crítica no puede

16. Como se mencionó anteriormente, los agentes de la relación interpersonal pueden ser tradiciones o paradigmas, al igual que personas.

llevarse a cabo como una actividad forzada. El sujeto que aprende debe ser el agente de la actividad crítica. La introducción de la intencionalidad dio nuevas perspectivas a los ejemplos de los proyectos mostrando la importancia de la comprensión de los estudiantes de las direcciones y metas del proceso educativo. Los estudiantes deben adueñarse de estas metas para hacer del proceso una parte de la actividad crítica. También se anotó que esta idea estaba incorporada en los ejemplos que, por lo tanto, podrían reexaminarse teniendo al sujeto crítico en mente.

La complejidad de la noción de crítica podría resaltarse más con la siguiente idea. Quizás podría ser imposible distinguir entre un sujeto crítico y un objeto crítico, si se pretendiera que una actividad fuera por completo crítica¹⁷. Permítanme explicar. Naturalmente marqué la distinción como una línea analítica —y esto ya se ha hecho muchas veces en los análisis anteriores— pero esta distinción no puede tener ningún apoyo ontológico en una situación que se defiende como parte de una educación crítica. Esto sucede porque siempre que un sujeto emite una crítica, esta crítica también se relaciona con una comprensión previa del sujeto y tal precomprensión siempre tiene que incluirse en una crítica, tanto como parte de los fundamentos de la crítica, como parte del objeto de la crítica. Por lo tanto, el objeto de crítica siempre tiene que incluir a su sujeto, lo cual hace confusa la distinción.

Esta idea posibilita comprender mejor la naturaleza de la paradoja: los seres humanos son incapaces de comprender sus propias creaciones. Relaciono la Paradoja de Vico con los productos, erigidos por medio de nuestra competencia tecnológica, pero que, no obstante, somos incapaces de comprender y cuyas funciones somos incapaces de describir y evaluar. Las creaciones humanas tienen efectos que la humanidad misma no siempre puede captar. La Paradoja de Vico expresa el pesimismo que se ha generado en la filosofía de la tecnología al identificar los límites del conocer. Sin embargo, quiero usar la noción de conocer reflexivo para referirme a aquella parte de nuestros recursos por medio de los cuales tratamos de luchar contra la Paradoja de Vico. Por medio de la reflexión tratamos de captar nuestra situación como una imbuída dentro de la tecnología. Por lo tanto, el conocer reflexivo refleja tanto un pesimismo como un optimismo: las reflexiones son necesarias dada la naturaleza aterradora del desarrollo tecnológico y las reflexiones son posibles dado que no estamos condenados a actuar ciegamente. Esta afirmación sugiere la posibilidad de ejercer un poder a través de la tecnología y también la posibilidad de reaccionar frente a su autoridad, lo cual significa que la potenciación también hace parte de la concepción de llegar a conocer. Lo que hemos creado se vuelve objeto de

17. Iben Maj Christiansen me ha sugerido esta importante idea.

nuestra crítica al igual que la base de la crítica. Entonces la Paradoja de Vico es una realidad.

Esto nos lleva a la *política del conocer*. El conocimiento es una expresión de poder, pero no sólo eso. El conocimiento también puede ser una reacción al poder. Cuando el conocer se combina con la crítica, el conocer se refiere a las crisis que forman la base de la actividad crítica. Esto ubica la epistemología en un contexto sociológico y político. Pensar en términos de la política del conocer revela que la perspectiva educativa, en la que he puesto el conocer, está lejos de ser la única perspectiva en la que podría ubicarse. Mi enfoque de la educación crítica y, de la educación matemática crítica especialmente, ofrece tan sólo una mirada parcial y estrecha a la totalidad que la noción de la política del conocer trae a la luz. No debo decir ni una sola palabra sobre lo que esa totalidad podría implicar, excepto que decir que, en *Nineteen eighty-four*, Orwell también formuló preguntas que encuentro cruciales dentro de una discusión sobre la política del conocer.

BIBLIOGRAFÍA

La lista bibliográfica que aparece a continuación es selectiva ya que he incluido los trabajos en inglés que han sido de mayor relevancia para el presente estudio. He incluido algunos de los trabajos en alemán que he consultado. Y sólo he incluido algunos pocos títulos de trabajos escandinavos, aunque la mayor base de mi trabajo se encuentra en ellos. Alguna de la literatura alemana la he estudiado en traducciones al danés, pero en esta bibliografía me refiero a las ediciones originales.

Abraham, J. y Bibby, N. (1988). Mathematics and society: Ethnomathematics and the public educator curriculum. *For the Learning of Mathematics*, 8 (2), 2-11.

Adorno, T. W. (1971). *Erziehung zur Mündigkeit*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Alrø, H. y Skovsmose, O. (1993). Det var ikke meningen! Om kommunikation i matematikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 1 (2), 6-29.

Anzinger, W. y Rauch, E. (Eds.) (1972). *Wörterbuch Kritische Erziehung*. Starnberg: Raith Verlag.

Apple, M. W. (1982). *Education and power*. London: Routledge.

Austin, J. L. (1946). Other minds. *Aristotelian Society*, 20, 148-187.

Austin, J. L. (1962). *How to do things with words*. Oxford: Oxford University Press.

Austin, J. L. (1970). *Philosophical papers*. Oxford: Oxford University Press.

Ayer, A. J. (Ed.) (1959). *Logical positivism*. New York: The Free Press.

Beck, U. (1986). *Risikogesellschaft: Auf dem Weg in eine andere Moderne*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Bell, D. (1980). The social framework of the information society. En T. Forrester (Ed.), *The microelectronics revolution* (pp. 50-549). Oxford: Blackwell.

Benhabib, S. (1986). *Critique, norm, and utopia: A study of the foundations of critical theory*. New York: Columbia University Press.

Benjamin, W. (1973). *Illuminations*. London: Fontana Press.

Benn, S. I. y Peters, P. S. (1959). *Social principles and the democratic state*. London: George Allen and Unwin.

- Berthelsen, J., Illeris, K. y Poulsen, S. C. (1977). *Projektarbejde*. Copenhagen: Borgen.
- Beth, E. W. y Piaget, J. (1966). *Mathematics, epistemology and psychology*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Bishop, A. J. (1988a). *Mathematical enculturation: Cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bishop, A. J. (1988b). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 179-191.
- Bishop, A. J. (Ed.) (1988). *Mathematics education and culture*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bishop, A. J. (1990). Western mathematics: The secret weapon of cultural imperialism. *Race and Class*, 32 (2), 51-55.
- Bishop, A. J. (1991). Mathematical values in the teaching process. En A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 195-214). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bishop, A. J. (1992). International Perspectives on research in mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (71-723). New York: MacMillan Publishing Company.
- Bishop, A. J., Mellin-Olsen, S. y Dormolen, J. (Eds.) (1991). *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bjerre, O. L. (1985). *Cykelmatematik*. Copenhagen: Danmarks Radio.
- Blomhøj, M. (1992a). Modellering i den elementære matematikundervisning — et didaktisk problemfelt, Tekst MI 58, Department of Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, Copenhagen.
- Blomhøj, M. (1992b). Samspil mellem teori og praksis — en forskningspraksis i matematikkens didaktik, Tekst MI 59, Department of Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, Copenhagen.
- Blomhøj, M. (1993). Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 1 (1), 16-37.
- Bloor, D. (1976). *Knowledge and social imagery*. London: Routledge.
- Blum, W. et al. (Eds.) (1989). *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*. Chichester: Ellis Horwood.
- Blum, W., Niss, M. y Huntley, I. (Eds.) (1989). *Modelling, applications and applied problem solving*. Chichester: Ellis Horwood.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- Booss-Bavnbeek, B. (1991). Against ill-founded, irresponsible modelling. En M. Niss, W. Blum y I. Huntley (Eds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 7-82). Chichester: Ellis Horwood.

- Booss-Bavnbek, B. y Pate, G. (1989a). Information technology and mathematical modelling, the software crisis and educational consequences. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 89 (5), 167-175.
- Booss-Bavnbek, B. y Pate, G. (1989b). Expanding risk in technological society through progress in mathematical modelling. En C. Keitel et al. (Eds.), *Mathematics, education and society*, (pp. 75-78). Paris: UNESCO, Division of Science, Technical and Environmental Education.
- Borba, M. C. (1990). Ethnomathematics in education. *For the Learning of Mathematics*, 10 (1), 39-43.
- Bourdieu, P. (1991). *Language and symbolic power*. Cambridge: Polity Press.
- Bowles, S. (1983). Unequal education and the reproduction of the social division of labour. En B. Cosin y M. Hales (Eds.), *Education policy and society* (pp. 27-50). London: Routledge.
- Brousseau, G. y Otte, M. (1991). The fragility of knowledge. En A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 13-36). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Carnap, R. (1937). *The logical syntax of language*. London: Routledge.
- Carnap, R. (1959a). The elimination of metaphysics through logical analysis of language. En A. J. Ayer (Ed.), *Logical positivism* (pp. 60-81). New York: The Free Press.
- Carnap, R. (1959b). The old and the new logic. En A. J. Ayer (Ed.), *Logical positivism* (pp. 133-146). New York: The Free Press.
- Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Christiansen, B., Howson, A. G. y Otte, M. (Eds.) (1986). *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Connerton, P. (1980). *The tragedy of enlightenment*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Curry, H. B. (1951). *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- D'Ambrosio, U. (1980). Mathematics and society: Some historical considerations pedagogical implications, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11 (4), 479-488.
- D'Ambrosio, U. (1981). Uniting reality and action: A holistic approach to mathematics education. En L. A. Steen y D. J. Albers (Eds.), *Teaching teachers, teaching students* (pp. 33-42). Boston: Birkhäuser.

- D'Ambrosio, U. (1985a). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5 (1), 44-48.
- D'Ambrosio, U. (1985b). Mathematics education in a cultural setting. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 16, 469-477.
- Damerow, P. et al. (1974). *Elementarmathematik: Lernen für die Praxis*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Davis, C. (1989). A hippocratic oath of mathematicians. En C. Keitel, C et al. (Eds.), *Mathematics, education and society* (pp. 44-47). Paris: UNESCO, Division of Science, Technical and Environmental Education.
- Davis, P. J. (1993). Applied mathematics as social contract. En S. Restivo et al. (Eds.), *Math worlds: Philosophical and social studies of mathematics and mathematics education* (pp. 182-194). Albany: State University of New York Press.
- Davis, P. J. y Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser.
- Davis, P. J. y Hersh, R. (1988). *Descartes' dream: The world according to mathematics*. London: Penguin Books.
- Dessauer, F. (1958). *Streit um die Technik*. Frankfurt am Main: Verlag Josef Knecht.
- Dewey, J. (1966). *Democracy and education*. New York: The Free Press.
- Dowling, P. (1991). The contextualizing of mathematics: Towards a theoretical map. En M. Harris (Ed.), *Schools, mathematics and work* (pp. 93-120). London: Falmer Press.
- Ellul, J. (1964). *The technological society*. New York: Random House.
- Ernest, P. (Ed.) (1989). *Mathematics teaching: The state of the art*. London: Falmer Press.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.
- Evans, J. (1990). Mathematical learning and the discourse of critical citizenship. En R. Noss et al. (Eds.), *Political dimensions of mathematics education: Action and critique* (pp. 93-95). London: Institute of Education, University of London.
- Fasheh, M. (1993). From a dogmatic ready-answer approach to teaching math towards a community-building, process-oriented approach. En *PDME 2: Political Dimensions of Mathematics Education*. Pre-Conference Papers, Johannesburg.
- Fischer, R. y Malle, C. (1985). *Mensch und Mathematik*. Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Frankenstein, M. (1983). Critical mathematics education: An application of Paulo Freire's epistemology. *Journal of Education* 165 (4), 315-339.
- Frankenstein, M. (1989). *Relearning mathematics: A different third R –radical maths*. London: Free Association Books.

- Frankenstein, M. (1990). Critical mathematical literacy. En R. Noss et al. (Eds.), *Political dimensions of mathematics education: Action and critique* (pp. 106-113). London: Institute of Education, University of London.
- Frankenstein, M. y Powell, A. B. (1989). Mathematics education and society: Empowering non-traditional students. En C. Keitel et al. (Eds.), *Mathematics, education and society* (pp. 157-160). Paris: UNESCO, Division of Science, Technical and Environmental Education.
- Freire, P. (1972). *Pedagogy of the oppressed*. New York: Herder and Herder.
- Freire, P. (1974). *Cultural action for freedom*. London: Penguin Books.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1976). Five Years IOWO. *Educational Studies in Mathematics*, 7 (3).
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gadamer H. G. (1989). *Truth and method*. London: Sheed and Ward.
- Gehlen, A. (1980). *Man in the age of technology*. New York: Columbia University Press.
- Gerdes, P. (1985). Conditions and strategies for emancipatory mathematics education in undeveloped countries. *For the Learning of Mathematics*, 5 (1), 15-20.
- Gerdes, P. (1986). On culture: Mathematics and curriculum development in mozambique. En M. J. Høines y S. Mellin-Olsen (Eds.), *Mathematics and culture* (pp. 15-41). Rådal, Noruega: Casper Publishers.
- Gerdes, P. (1988). On culture, geometrical thinking and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 137-162.
- Giroux, H. A. (1989). *Schooling for democracy: Critical pedagogy in the modern age*. London: Routledge.
- Glaserfeld, E. v. (Ed.) (1991). *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Glimm, J. G. (Ed.) (1991). *Mathematical science, technology, and economic competitiveness*. Washington DC: National Academy Press.
- Grouws, D. A. (Ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan Publishing Company.
- Grønbæk-Hansen, K. (1991). Matematikken i erhvervsuddannelserne. *Psyke og logos*, 12 (2), 409-421.
- Habermas, J. (1968). *Technik und Wissenschaft als 'Ideologie'*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

- Habermas, J. (1971). *Knowledge and human interests*. Boston: Beacon Press.
- Habermas, J. (1976). *Legitimation crisis*. London: Heinemann.
- Habermas, J. (1984, 1987). *The theory of communicative action I-II*. Heinemann, Cambridge: London and Polity Press.
- Hanson, N. R. (1958). *Patterns of discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hardy, G. H. (1967). *A mathematician's apology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Harris, M. (Ed.) (1991). *Schools, mathematics and work*. London: Falmer Press.
- Held, D. (1980). *Introduction to critical theory*. London: Hutchinson.
- Held, D. (1987). *Models of democracy*. Cambridge: Polity Press.
- Hermann, K. y Niss, M. (1982). *Beskæftigelsesmodellen i SMEC III*. Copenhagen: Arnold Busck.
- Hilbert, D. (1968). *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart: Teubner.
- Hilbert, D. (1964). *Hilbertiana: Fünf aufsätze von David Hilbert*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Hirst, P. H. (1969). The logic of the curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 1, 142-158.
- Hirst, P. H. (1973). Liberal education and the nature of knowledge. En R. S. Peters (Ed.), *Philosophy of education* (pp. 87-111). Oxford: Oxford University Press.
- Hoffman, M. R. y Powell, A. B. (1989). Mathematics and commentary writing: Vehicles for student reflection and empowerment. En C. Keitel et al. (Eds), *Mathematics, education and society* (pp. 131-133). Paris: UNESCO, Division of Science, Technical and Environmental Education.
- Hoffman, M. R. y Powell A. B. (1990). Gattegno and Freire: A model for teaching mathematically unprepared, working-class students. En R. Noss et al. (Eds.), *Political dimensions of mathematics education: Action and critique* (pp. 205-215). London: Institute of Education, University of London.
- Hoffmann, D. (1978). *Kritische Erziehungswissenschaft*. Stuttgart: Kohlhammer.
- Horkheimer, M. (1970). *Traditionelle und kritische Theorie*. Frankfurt am Main: Fischer Taschenbuch Verlag.
- Høines, M. J. y Mellin-Olsen, S. (Eds.) (1986). *Mathematics and culture*. Rådal, Noruega: Casper Publisher.
- Illeris, K. (1974). *Problemorientering og deltagerstyring*. Copenhagen: Munksgaard.

- Jay, M. (1973). *The dialectical imagination: A history of the Frankfurt School and the Institute of Social Research, 1923-50*. London: Heinemann.
- Jensen, J. H. (1980). Matematiske modeller — vejledning eller vildledning? *Naturkampen*, (18), 14-22.
- Jensen, H. S. y Skovsmose, O. (1986). *Teknologikritik*. Herning: Systime.
- Julie, C., Angelis, D. y Davis, Z. (Eds.) (1993). *Political dimensions of mathematics education: Curriculum reconstruction for society in transition*. Cape Town: Maskew Miller Longman.
- Kant, I. (1933). *Critique of pure reason*. London: MacMillan.
- Kapp, E. (1978). *Grundlinien einer Philosophie der Technik*. Düsseldorf: Stern-Verlag Janssen and Co.
- Keitel, C. (1989). Mathematics and technology. *For the Learning of Mathematics*, 9 (1), 7-13.
- Keitel, C. (1993). Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. En J. Lange et al. (Eds.), *Innovation in maths education by modelling and applications* (pp. 19-30.) Chichester: Ellis Horwood.
- Keitel, C. et al. (Eds.) (1989). *Mathematics, education and society*. Paris: UNESCO, Division of Science, Technical and Environmental Education.
- Keitel, C., Kotzmann, E. y Skovsmose, O. (1993). Beyond the tunnel-vision. En C. Keitel y K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 243-279) Berlin: Springer-Verlag.
- Kellner, D. (1989). *Critical theory, marxism and modernity*. Cambridge: Polity Press.
- Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford: Oxford University Press.
- Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology: Philosophical papers*, 2. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lange, J. de et al. (Eds.) (1993). *Innovation in maths education by modelling and applications*. Chichester: Ellis Horwood.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lempert, W. (1971). *Leistungsprinzip und Emancipation*. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag.
- Lerman, S. (1989). Investigations: Where to now. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of the art* (pp. 73-82). London: Falmer Press.

- Lindenskov, L. (1990a). The pupil's curriculum: Rationales of learning and learning-stories. En R. Noss et al. (Eds.), *Political dimensions of mathematics education: Action and critique* (pp. 165-172). London: Institute of Education, University of London.
- Lindenskov, L. (1990b). Mathematical concept formation in the individual. En G. Booker et al. (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 1 (pp. 61-68). Mexico D.C.: CONACYR, CINVESTAV.
- Lindenskov, L. (1991). Everyday knowledge in studies of teaching and learning mathematics in school. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 325-333). Genova: University of Genova.
- Lindenskov, L. (1993a). Exploring the student's own mathematics curriculum. En J. A. Malone y P. C. S. Taylor (Eds.), *Constructivist interpretations of teaching and learning mathematics* (pp. 149-156). Perth: CURTIN, University of Technology.
- Lindenskov, L. (1993b). *Hverdagsviden og matematik: Læreprocesser i skolen*. Roskilde: IMFUFA, Roskilde University.
- Malcolm, N. (1966). *Ludwig Wittgenstein: A memoir*. Oxford: Oxford University Press.
- Marcuse, H. (1964). *One-dimensional man*. London: Routledge.
- McPeck, J. E. (1990). *Teaching critical thinking*. London: Routledge.
- Mellin-Olsen, S. (1977). *Indlæring som social process*. Copenhagen: Rhodos.
- Mellin-Olsen, S. (1981). Instrumentalism as an educational concept. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 351-367.
- Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Mill, J. S. (1975). *Three essays on liberty, representative government and the subjection of women*. Oxford: Oxford University Press.
- Mills, C. W. (1959). *The sociological imagination*. New York: Oxford University Press.
- Mollenhauer, K. (1973). *Erziehung und Emanzipation*. München: Juventa Verlag.
- Moore, G. (1959). *Philosophical papers*. London: Unwin.
- Münzinger, W. (Ed.) (1977). *Projektorientierter Mathematikunterricht*. München: Urban und Schwarzenberg.
- Negt, O. (1964). *Soziologische Phantasie und exemplarisches Lernen*. Frankfurt am Main: Europäische Verlagsanstalt.
- Nickson, M. (1992). The culture of the mathematics classroom: An unknown quantity? En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 101-114). New York: MacMillan Publishing Company.

- Niss, M. (1977). The "crises" in mathematics instruction and a new teacher education at grammar school level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 8, 303-321.
- Niss, M. (1983). Considerations and experiences concerning integrated courses in mathematics and other subjects. En M. Zweng et al. (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 247-249). Boston: Birkhäuser.
- Niss, M. (1985). Applications and modelling in the mathematics curriculum — State and Trends. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 18, 487-505.
- Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. En W. Blum et al. (Ed.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 22-31). Chichester: Ellis Horwood.
- Niss, M., Blum, W. y Huntley, I. (Eds.) (1991). *Teaching of mathematical modelling and applications*. Chichester: Ellis Horwood.
- Noss, R. et al. (Eds.) (1990). *Political dimensions of mathematics education: Action and critique*. London: Institute of Education, University of London.
- Orwell, G. (1987). *Nineteen eighty-four*. London: Penguin Books.
- Otte, M. (Ed.) (1974). *Mathematiker über die Mathematik*. Berlin: Springer.
- Paffrath, F. H. (Ed.) (1987). *Kritische Theorie und Pädagogik der Gegenwart*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.
- Peters, R. S. (1966). *Ethics and education*. London: George Allan and Unwin.
- Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York: Columbia University Press.
- Platón (1992). *The republic*. London: Everyman's Library.
- Platón (1992). *Theaetetus*. Indianapolis: Hackett Publishing Company.
- Pompeu, Jr., G. (1992). *Bringing ethnomathematics into the school curriculum: an investigation of teachers attitudes and pupils learning*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Cambridge, Reino Unido.
- Popper, K. R. (1963). *Conjectures and refutations*. London: Routledge.
- Popper, K. R. (1965). *The logic of scientific discovery*. New York: Harper and Row.
- Popper, K. R. (1972). *Objective knowledge*. London: Oxford University Press.

- Raith, W. (Ed.) (1973). *Handbuch zum Unterricht: Modelle emanzipatorischer Praxis, Hauptschule*. Starnberg: Raith Verlag.
- Restivo, S. et al. (Eds.) (1993). *Math worlds: Philosophical and social studies of mathematics and mathematics education*. Albany: State University of New York Press.
- Riess, F. (Ed.) (1977). *Kritik des mathematisch naturwissenschaftlichen Unterrichts*. Frankfurt am Main: Päd. Extra Buchverlag.
- Rousseau, J. -J. (1968). *The social contract*. London: Penguin Books.
- Ryle, G. (1949). *The concept of mind*. London: Hutchinson.
- Ryle, G. (1954). *Dilemmas*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Sapir, E. (1929). The status of linguistics as a science. *Language*, 5, 207-214.
- Schumpeter, J. A. (1987). *Capitalism, socialism and democracy*. London: Unwin Paperbacks.
- Searle, J. (1969). *Speech acts*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Searle, J. (1971). What is speech act. En J. Searle (Ed.). *The philosophy of language* (pp. 39-53). Oxford: Oxford University Press.
- Searle, J. (1983). *Intentionality: An essay in the philosophy of mind*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Shan, S. J. y Bailey, P. (1991). *Multiple factors: Classroom mathematics for equality and justice*. Stoke-on-Trent: Trentham Books.
- Skovsmose, O. (1980). *Forandringer i matematikundervisningen*. Copenhagen: Gyldendal.
- Skovsmose, O. (1981a). *Matematikundervisning og kritisk pædagogik*. Copenhagen: Gyldendal.
- Skovsmose, O. (1981b). *Alternativer og matematikundervisning*. Copenhagen: Gyldendal.
- Skovsmose, O. (1984). *Kritik, undervisning og matematik*. Copenhagen: Lærereforeningernes materialeudvalg.
- Skovsmose, O. (1985). Mathematical education versus critical education. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 337-354.
- Skovsmose, O. (1988). Mathematics as part of technology. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 23-41.
- Skovsmose, O. (1989a). Towards a philosophy of an applied oriented mathematical education. En W. Blum et al. (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 110-114). Chichester: Ellis Horwood.
- Skovsmose, O. (1989b). Models and reflective knowledge. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 89 (1), 3-8.

- Skovsmose, O. (1990a). Mathematical education and democracy. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 109-128.
- Skovsmose, O. (1990b). Reflective knowledge: Its relation to the mathematical modelling process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21, 765-779.
- Skovsmose, O. (1992). Democratic competence and reflective knowing in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 2 (2), 2-11.
- Skovsmose, O (1993). The dialogical nature of reflective knowledge. En S. Restivo et al. (Eds.), *Math worlds: Philosophical and social studies of mathematics and mathematics education* (pp. 162-181). Albany: State University of New York Press.
- Snow, C. P. (1969). *The two cultures: And a second look*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Sohn-Rehtel, A. (1970). *Geistige und körperliche Arbeit*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Stork, H. (1977). *Einführung in die Philosophie der Technik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Swetz, F. J. (1987). *Capitalism and arithmetic*. La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company.
- Taylor, F. W. (1947). *Scientific management*. New York: Harper and Brothers Publishers.
- Tucídides (1972). *History of the Peloponnesian War*. London: Penguin Books.
- Tybl, R. y Walter, H. (Eds.) (1973). *Handbuch zum Unterricht. Modelle emanzipatorischer Praxis*. Starnberg: Grundschule, Raith Verlag.
- Tymoczko, T. (Ed.) (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhäuser.
- Vithal, R. (1992). The construct of ethnomathematics, and implications for curriculum thinking in South Africa. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Cambridge, Reino Unido.
- Volk, D. (1975). Plädoyer für einen problemorientierten Mathematikunterricht in emanzipatorischer Absicht. En M. Ewers (Ed.), *Naturwissenschaftliche Didaktik zwischen Kritik und Konstruktion*. Weinheim: Belz Verlag.
- Volk, D. (1977). Entscheidungsraum in den Lehrplänen machen! Wissenschaftstheoretische Probleme der Mathematik in der Ausbildung der Mathematiklehrer Aufnehmen. En F. Riess (Ed.), *Kritik des mathematisch naturwissenschaftlichen Unterrichts* (pp. 347-392). Frankfurt am Main: Päd. Extra Buchverlag.
- Volk, D. (1979). *Handlungsorientierende Unterrichtslehre am Beispiel Mathematikunterrichts. Band A*. Bensheim: Päd Extra Buchverlag.

- Volk, D. (Ed.) (1979). *Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht*. München: Wilhelm Fink Verlag.
- Volk, D. (1980). *Zur Wissenschaftstheorie der Mathematik: Handlungsorientierende Unterrichtslehre. Band B*. Bensheim: Päd Extra Buchverlag.
- Volk, D. (1989). Mathematics classes and enlightenment. En W. Blum et al. (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 187-191). Chichester: Ellis Horwood.
- Volmink, J. (1989). Non-school alternatives in mathematics education. En C. Keitel et al. (Eds.), *Mathematics, education and society* (pp. 59-61). Paris: UNESCO, Division of Science, Technical and Environmental Education.
- Volmink, J. (1990). The constructivist foundation of ethnomathematics. En R. Noss et al. (Eds.), *Political dimensions of mathematics education: Action and critique* (pp. 243-247). London: Institute of Education, University of London.
- Volmink, J. et al. (1994). *Social, cultural, and political issues in mathematics education: An annotated bibliography of selected writings (1980-1990)*. Durban: CASME.
- Wagenschein, M. (1965, 1970). *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I-II*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Whorf, B. L. (1956). *Language, thought and reality*. New York: The MIT Press.
- Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. Oxford: Pergamon Press.
- Wittenberg, A. I. (1963). *Bildung und Mathematik*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Wittgenstein, L. (1961). *Tractatus logico-philosophicus*. London: Routledge.
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. Oxford: Basil Blackwell.
- Young, M. F. D. (Ed.) (1971). *Knowledge and control*. London: Collier MacMillan.
- Young R. (1989). *A critical theory of education*. New York: Havester Wheatsheaf.

INDICE DE AUTORES

- Abraham, J., 71, 233
Adorno, T. W., 11, 22, 31, 45, 46,
86, 87, 107, 166, 213, 233
Alrø, H., 202, 233
Andersen, B. W., 202
Andersen, J. J., 90
Angelis, D., 239
Anzinger, W., 23, 233
Apple, M., 233
Austin, J. L., 119, 184, 186, 221,
233
Ayer, A. J., 233
- Bailey, P., 71, 242
Bayle, P., 15, 229
Beck, U., 62, 233
Bell, D., 43, 44, 55, 56, 64, 233
Benhabib, S., 12, 233
Benjamin, W., 52, 233
Benn, S. I., 32, 233
Berthelsen, J., 69, 233
Beth, E. W., 225, 226, 234
Bibby, N., 71, 233
Bishop, A. J., 65, 71, 234, 235
Bjerre, O. L., 173, 234
Block, E., 22
Blomhøj, N., 155, 234
Bloor, D., 48, 234
Blum, W., 113, 234, 241, 242, 244
Boll, J., 159, 164
Booss-Bavnbeek, B., 62, 234, 235
Borba, M. C., 70, 71, 235
Bourdieu, P., 63, 235
Bowles, S., 33, 235
Breugel, P., 67, 68
Brousseau, G., 229, 235
Bruner, J. S., 83, 235
Bødtkjer, H., 139, 171
- Carnap, R., 118, 119, 184, 186, 218,
235
Christiansen, B., 70, 201, 226, 231,
235
Christiansen, I. M., 153
Connerton, P., 12, 235
Copernicus, N., 47
Curry, H. B., 60, 235
D'Alembert, J. le R., 15
D'Ambrosio, U., 29, 70, 71, 210,
211, 235, 236
Damerow, P., 69, 236
Darwin, C., 47
Davis, C., 236
Davis, P. J., 48, 130, 236
Davis, Z., 239
Descartes, R., 218
Dessauer, F., 50, 236
Dewey, J., 23, 31, 41, 45, 236
Diderot, D., 15
Dilthey, W., 23
Dormolen, J., 234, 235
Dowling, P., 71, 236
Dyhr, O., 90
- Ellul, J., 51, 62, 236
Ernest, P., 71, 236, 239
Euclides, 59
Evans, J., 71, 236
- Fasheh, M., 17, 236
Fischer, R., 236, 238
Foucault, M., 104
Frankenstein, M., 70, 71, 236, 237
Frege, G., 2
Freire, P., 23, 26, 29, 30, 68, 70, 86,
236, 237, 238
Freudenthal, H., 69, 112, 237

- Gadamer, H.-G., 223, 237
 Gehlen, A., 51, 237
 Gerdes, P., 70, 71, 237
 Giroux, H. A., 23, 26-31, 34, 46, 237
 Glasersfeld, E. v., 201, 237
 Glimm, J. G., 5, 237
 Grouws, D. A., 234, 237, 240
 Grønbæk Hansen, K., 202, 237
- Habermas, J., 12, 20, 22, 25, 51, 237, 238
 Hanson, N. R., 114, 238
 Hardy, G. H., 48, 210, 238
 Harris, M., 236, 238
 Hegel, G. W. F., 11
 Heidegger, M., 119
 Held, D., 12, 31, 238
 Hermann, K., 114, 238
 Hersh, R., 48, 236
 Hilbert, D., 59, 60, 238
 Hirst, P. H., 45, 130, 220, 238
 Hoffman, M. R., 71, 238
 Hoffmann, D., 22, 238
 Horkheimer, M., 11, 12, 18, 238
 Howson, A. G., 235
 Hume, D., 16, 225
 Huntley, I., 113, 234, 241
 Høines, M. J., 64, 237, 238
- Illeris, K., 23, 68, 234, 238
- Jay, M., 12, 239
 Jensen, H. S., 52, 54, 239
 Jensen, J. H., 21, 113, 239
 Julie, C., 71, 239
- Kant, I., 4, 11, 16, 219, 229, 239
 Kapp, E., 50, 52, 239
 Keitel, C., 48, 57, 113, 235, 237-239, 244
 Kellner, D., 12, 239
 Kitcher, P., 151, 239
 Klöcker, M., 68, 71
 Kotzmann, E., 57, 113, 239
 Kristoffersen, I. L., 68, 71
- Krogshede Nielsen, A. M., 202
 Kuhn, T. S., 239
- Lakatos, I., 57, 124, 239
 Lange, J. de, 113, 239
 Lave, J., 129, 239
 Leibniz, G. W., 85
 Lempert, W., 23, 27, 68, 239
 Lerman, S., 71, 239
 Lindenskov, L., 202, 240
- Malcolm, N., 120, 240
 Malle, G., 236
 Marcuse, H., 11, 51, 240
 Marx, K., 11, 16, 18, 19, 24, 37, 52
 McPeck, J. E., 109, 240
 Mellin-Olsen, S., 65, 70, 201, 209, 234, 235, 237, 238, 240
 Mill, J. S., 38, 39, 40, 45, 240
 Mills, C. W., 86, 240
 Mollenhauer, K., 23, 68, 240
 Moore, G., 13, 14, 24, 240
 Münzinger, W., 69, 240
- Negt, O., 23, 68, 86-88, 92, 240
 Newton, I., 19
 Nickson, M., 71, 202, 240
 Nietzsche, F., 4
 Niss, M., 64, 69, 70, 92, 113, 114, 234, 238, 241
 Noss, R., 71, 236-238, 240, 241, 244
- Orwell, G., 1, 2, 6, 12, 17, 232, 241
 Otte, M., 48, 229, 235, 241
- Paffrath, F. H., 11, 241
 Pate, G., 62, 235
 Pericles, 35, 36
 Peters, R. S., 32, 33, 233, 238, 241
 Piaget, J., 72, 203, 204, 225-227, 234, 241
 Platón, 13, 24, 35, 112, 218, 241
 Pompeu, Jr., G., 70, 241
 Popper, K. R., 57-59, 61, 125, 241
 Poulsen, S. C., 69, 234
 Powell, A. B., 70, 71, 237, 238
 Raith, W., 23, 242

- Rauch, E., 23
Reinholt, A., 90, 171
Restivo, S., 48, 236, 242, 243
Riess, F., 69, 242, 243
Rousseau, J.-J., 35-38, 166, 242
Russell, B., 2, 112, 114, 118, 184, 186
Ryle, G., 119, 184, 186, 198, 242
- Sapir, E., 3, 5, 242
Sartre, J. P., 195
Schumpeter, J. A., 40-42, 44, 242
Searle, J., 195, 221, 242
Shan, S.-J., 71, 242
Skovsmose, O., 52, 54, 57, 64, 68, 69, 113, 202, 207, 233, 239, 242, 243
Smith, A., 13
Snow, C. P., 7, 243
Sohn-Rehtel, A., 57, 59, 243
Spinoza, B. de, 7
Stork, H., 50, 51, 243
Swetz, F. J., 126, 243
- Taylor, F. W., 53, 240, 243
Trankjær, I., 202
Tucídides, 35, 243
Tybl, R., 22, 243
Tymoczko, T., 48, 243
- Vico, G., 49, 54, 56, 65
Vithal, R., 70, 71, 243
Vognsen, J., 159, 164
Volk, D., 69, 70, 243, 244
Volmink, J., 70, 71, 244
Voltaire, F. de, 15
- Wagenschein, M., 23, 84-88, 204, 244
Walter, H., 23, 243
Walther, G., 201, 226, 235
Werner, T., 70
Whorf, B. L., 3, 244
Wilder, R. L., 48, 244
Wittenberg, A. I., 84, 244
Wittgenstein, L., 2, 9, 10, 118-120, 186, 198, 218, 222, 240, 244
- Young, M. F. D., 244
Young, R., 23, 244
- Ørberg, T., 90

ÍNDICE ANALÍTICO

- Absolutismo, 21, 92, 112, 220, 222
- abstracción(es), 57
- materializadas, 58, 61, 105, 113, 116-117, 120, 121, 126, 151
 - mentales, 57-61, 105, 113, 116, 120, 151
 - real, 60, 116
- acción, 194, 195, 197, 199, 200-201, 203
- e intención, 195-201
 - y aprendizaje, 200-203, 205, 210-212
 - y disposición, 196, 199, 201-202
- actividad, 194-195, 197, 201, 203, 205-206, 208
- ciega, 195, 201, 206
 - crítica, 15-16, 18, 20, 22, 30, 86, 230, 231
 - dirigida, 206, 208
 - forzada, 205-206, 210, 223, 231
 - prescrita, 206
- alfabetización, 26-30, 46, 67, 68, 107, 130, 136, 152, 153, 158, 183, 189, 210, 213
- alfabetización matemática, 26, 27, 29, 30, 46, 67, 68, 83, 107, 108, 127, 129, 130, 135-137, 139, 152, 153, 157, 158, 166, 170, 183, 187-189, 191, 193, 210, 213, 214
- y conocer reflexivo, 130, 137, 139, 157, 166, 170, 181, 187, 213
- algoritmo, 115, 125, 127, 128, 131, 133, 135, 141, 145, 149, 150, 154, 168
- Allgemeinbildung*, 45, 83
- alquimia inversa, 150, 183
- antecedentes, 198-201, 205, 212
- aprendizaje como acción, 200-203, 205, 210, 213
- arqueología matemática, 104-106, 114, 184, 215
- Base para críticas y correcciones, 114, 125
- Capitalismo, 24, 37, 86, 113
- ciudadanía crítica, 26, 41, 42, 44-46, 67, 83, 88, 107, 127, 136, 193, 213
- competencia democrática, 38-42, 45, 46, 63, 83, 88, 127, 131, 135, 157, 165-167
- concreto, lo, 72
- en un sentido físico, 72
 - en un sentido social, 72
- conflicto de conocimiento, 222, 228, 229
- conocer, 112, 217, 220-224, 226, 228-232
- concepto abierto, 220, 221, 229
 - concepto explosivo, 229, 230
 - política del, 71, 232
 - red de interrelaciones, 137
 - tipos de 111, 128, 136, 137, 139, 217
- conocer matemático, 112, 127, 129, 130, 137, 139, 181, 217

- conocer reflexivo, 107-139, 148, 154, 155, 157, 165-168, 170, 181, 187, 189, 191-193, 213, 214, 217, 223, 226, 231
 - y alfabetización matemática, 130, 137, 139, 157, 165, 170, 181, 187, 213
 - puntos de entrada al, 131-136
 - y modelaje matemático, 112-126, 131, 133-136, 148-150
 - tipos de, 111, 128, 136, 137, 139, 217
- conocer tecnológico, 112, 127, 129, 130, 137, 139, 181, 217
- conocimiento, 217-232
 - concepto controlado, 217, 223, 230
 - cuerpo autorizado de, 219, 220, 222, 223
 - definición clásica, 219, 220, 221, 222
 - homogeneidad del, 217-219, 228
 - tipos de, 111, 112
- conocimiento matemático, 111, 112, 130, 131, 137, 225-227
- conocimiento reflexivo, 109-112, 129, 136
- conocimiento tecnológico, 63, 109-112
- constructivismo, 70, 71, 131, 225-227
- crisis, 12-28, 30, 78, 86, 110, 114, 232
 - la dialéctica de las, 21
 - orden jerárquico de las, 19-20, 22
- crítica, 11-31, 45, 46, 50, 62, 64, 65, 67, 109, 110, 157, 167, 190, 191, 193, 203, 204, 207, 208, 211, 213, 214, 216, 217, 219, 220, 222, 223, 227-231
 - definitiva, 219, 222, 223, 229
 - objeto de la, 50, 62, 125, 193, 230, 231
 - sujeto de la, 193, 213, 219
 - y democracia, 31, 45, 65, 67
 - y educación, 11-30
- crítica a la ideología, 17, 18, 20, 23, 27, 29, 30, 157, 166
- crítica, términos claves, 69, 70
 - competencia crítica, 41, 44, 69, 70, 170, 203, 211
 - compromiso crítico, 70
 - distancia crítica, 69
- currículo de los estudiantes, 202, 209
- Datos, 148, 149
- democracia, 23, 26, 28, 30-46, 54, 56, 63, 65, 110, 126, 158-159, 163, 165-167, 191
 - en sociedades con un alto desarrollo tecnológico, 37, 42, 43, 54, 56, 110, 126
 - ideas básicas, 35-38
 - y capitalismo, 37, 40
 - y crítica, 31, 45, 65, 67
 - y educación, 23, 27, 30-46, 164-168
 - y expertocracia, 43, 44, 110, 191
 - y soberanía, 36, 38, 40, 41, 166
- democracia, condiciones para, 32, 37, 38, 42, 44
 - éticas, 33, 37, 38, 42
 - formales, 33, 37-42, 44
 - materiales, 33, 37, 42
 - posibilidades de participación, 33, 38
- democracia, tipos de,
 - crítica, 34
 - directa, 35, 36, 37, 41, 45, 159
 - radical, 28, 30
 - representativa, 36-38
- democrática, vida, 32-44, 158, 165
- desarrollo de un sistema, 115, 116, 121, 122, 148-150
- desarrollo epistémico, 194, 204-207, 212

- determinismo, 19, 20, 49, 53, 110, 152
 tecnológico, 49, 51, 110, 152
 diálogo, 219, 228, 229
 disposición, 196, 199, 201, 202, 205
 y antecedentes, 198-201, 205, 212
 y porvenir, 198-201, 205, 212, 215
- Educación,
 e igualdad, 32, 33
 y crítica, 11-30
 y democracia, 23, 27, 30-46, 164-168
 ejemplaridad, 23, 82-88, 92, 104, 107, 171, 190, 192
 emancipación, 12, 20-23, 27-29, 50
 empirismo, 47, 217-219, 224-227
 enfoque temático, 67-88, 97, 101, 107, 127
 epistemología genética, 72, 204, 225-227
 estructuralismo, 83, 128, 129
 estructuras de riesgo, 21, 56, 62, 108, 110, 189
 etnomatemáticas, 63, 70, 71, 211
 expertocracia, 43, 44, 110, 191
 explicación intencional, 200
- Fachkritik*, 23
 falibilismo, 92, 112, 220
 fata morgana, 186-188
 fatalismo personal, 78, 210, 211, 213
 filosofía, 8, 9
 analítica, 9, 10
 de la educación matemática, 7-10, 67
 de la tecnología, 49, 50, 52
 y práctica educativa 7, 10, 67, 107
- formaciones,
 globales, 113
 locales, 113
 formalismo, 47, 60, 122
 formalizaciones, 59-63, 64, 116, 118-120, 122, 123, 126, 132, 184
 de las acciones y rutinas, 60-63, 189
 de las matemáticas, 47, 59, 60, 62
 del lenguaje, 60-63, 116, 118, 119, 122, 136, 189
- Herramientas, 52-54, 63
 homogeneidad del conocimiento, 217-219, 228
- Ideología, 4, 16-18, 20, 23, 27-30
 crítica a la, 17, 18, 20, 23, 27, 29, 30, 157, 166
 igualdad de oportunidades, 32, 41
 igualdad en la educación, 33
 imaginación sociológica, 86, 87, 190, 191, 230
 instrumentalismo, 209, 210, 211
 intención, 194-209, 223
 compartida, 205, 208, 209, 214, 215
 escondida, 209, 211
 ignorada, 208
 instrumental, 209, 210
 integrada, 208
 modificada, 208, 211
 rota, 208, 211
 intención de aprendizaje, 201-206, 213, 214
 intención en el aprendizaje, 203, 204, 214
 intencionalidad, 182, 193-216, 231
 interdisciplinariedad, 18, 68, 85, 158, 168
- Juegos de lenguaje, 60, 119-123, 125, 126, 139, 148-151, 154, 183, 185, 221
 y modelaje, 118-123, 126, 139, 148-150, 154, 183
 transición entre, 120, 121, 126, 140, 148-150, 154, 183

- Lenguaje,
 algorítmico, 121, 122, 154
 formal, 2, 9, 60, 61, 113, 118-120, 122, 136, 150, 153, 183-189
 matemático, 5, 113, 118, 120-123, 152
 natural, 118, 119, 121-125, 127, 150, 153, 183-189
 sistémico, 121-123, 148, 152
- liberación,
 y tecnología, 49, 50, 51
- logro, 210, 212
- Matemáticas,
 como críticas, 62-65
 como un poder formativo, 47-65, 67, 88, 92, 106, 112, 113, 117, 130, 133-136, 139, 142, 149, 150, 151, 153, 157, 164, 166, 167, 183, 184, 187, 193, 230
 formalización de las, 59-61
 metaconcepciones de los niños sobre las, 91, 92
 y modelaje, 57, 59, 62, 112-126, 134, 135, 139, 149, 150, 152, 154, 157, 158, 165, 170, 183, 184, 190, 191, 230
 y tecnología, 5, 6, 49-52, 88, 108-111, 113
- matematización, 72, 79, 116, 121, 122, 149
- modelaje matemático,
 algoritmización, 116
 algoritmo, 111, 115, 121, 127, 128, 131, 133, 135, 141, 145, 149, 150, 154, 168
 área problemática, 113, 114, 116, 121, 125, 192
 desarrollo de un sistema, 115, 116, 121, 122
 estructura de argumentación, 123, 124
 identificación del problema, 124, 126
- juegos de lenguaje en, 118-123, 126, 139, 148, 149, 154, 183
- matematización, 72, 79, 116, 121, 122, 148
- interpretación, 114-118
- materialización, 117
- modelo matemático, 55, 58, 114-117, 120, 123
- sistema, 111-118, 121, 123, 134
- y conocer reflexivo, 112-126, 131, 133-136, 148-150
- modelaje matemático, tipos de,
 extendido, 113, 117, 121, 124, 126, 136
 puntual, 113, 116, 117, 123, 124, 126, 134, 136
- montaje de un escenario, 103, 104, 127, 129, 137, 139, 153, 165, 168, 170, 183, 193, 214, 216
- y puntos estratégicos, 181-183, 214
- y significado, 100, 102, 103, 165
- montaje de un escenario, tipos de
 104, 165
- basado en una actividad, 104, 165
- imaginario, 104, 165
- realista, 104, 165
- Mündigkeit*, 45, 46, 65, 87, 88, 166, 213, 230
- Negociación 222, 224, 228, 229
- Objeto de la crítica, 50, 62, 125, 193, 230, 231
- optimismo tecnológico, 6, 19, 49, 50, 53, 110, 231
- organización por proyectos, 23, 87, 89, 158
- orientación problemática, 22, 23, 87, 102, 158
- Paradoja de Vico, 49-54, 56, 65, 108, 110, 113, 231

pesimismo tecnológico 19, 49-51,
53, 56, 231

platonismo 47, 62

poder formativo de las matemáticas,
47-65, 67, 88, 92, 106,
112, 113, 117, 130, 133-
136, 139, 142, 149, 150,
151, 153, 157, 164, 166,
167, 183, 184, 187, 193,
230

de la educación matemática,
211

poder simbólico, 63, 64

política del conocer, 71, 231, 232

porvenir, 198-200, 205, 212, 215

positivismo lógico, 2, 12, 111, 114,
118, 186, 200

principio de esperanza, 22

puntos de entrada al conocer
reflexivo, 131-136

puntos estratégicos, 181-183, 192,
193, 214

Racionalismo, 7, 217-219, 221,
224-227

relativismo lingüístico, 2-5, 48, 54,
62, 114, 120, 152, 230

Semántica multifacética, 104, 137,
170

servilismo, 210, 211

situación,
crítica, 15-22, 24, 50, 190, 193
hipotética, 188, 189

sociedad,
con un alto desarrollo tecnoló-
gico, 6, 25, 34, 42, 44-46,
54, 56, 59, 62, 63, 65, 110,
111, 126, 189

de la información, 43, 64

sociedad de riesgo, 21, 62, 189

sujeto de la crítica, 193, 213, 219

Tecnología,
filosofía de, 49, 50, 52
y liberación, 49, 50, 51
y matemáticas, 5, 6, 49-52, 88,
108-111, 113

tecnología, tipos de, 52-55

de la energía, 52-54

de la información, 49, 52, 53,
55, 56, 61, 111

de la sociedad, 52, 53, 55

de las herramientas, 52-54

Teoría Crítica, 11, 12, 17, 22, 23, 69,
86, 166

teoría crítica, 18

teoría de la imagen, 9, 120, 184

teoría epistémica,
dialógica, 224, 228, 229
monológica, 224, 226, 227,
229

trabajo por proyectos, 68, 76, 83, 87,
89, 107, 127, 133, 183