GEOMETRÍA Y ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ANGEL GUTIÉRREZ

ADELA JAIME

una empresa docente®   Universidad de los Andes

Bogotá, 1998

Versión de la obra GEOMETRÍA Y ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.
Autores: Angel Gutiérrez y Adela Jaime
Edición original en español publicada por "una empresa docente" y el Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. en México
ISBN 970-625-106-5

Diseño carátula: INTERLÍNEA EDITORES LTDA.

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976 Tel. (57-1) 284-9911 ext. 2717. Fax: 3524066 Ext. 2709
Servidor WWW: http: //ued. uniandes. edu.co
Bogotá. Colombia

Primera edición: enero de 1995 ("una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica)
Primera reimpresión: octubre de 1998, "una empresa docente"

Impresión: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

ISBN 958-9216-21-8

Impreso en Colombia

TABLA DE CONTENIDO

LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: FUENTE DE REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

DR. ANGEL GUTIÉRREZ
UNIVERSIDAD DE VALENCIA

INTRODUCCIÓN

Pretender describir con detalle en unas pocas páginas todos los aspectos que conforman la Didáctica de las Matemáticas sería una tarea imposible, similar a lo que ocurriría si se pretendiera, en el mismo espacio, describir qué son las Matemáticas y cuáles son sus característica y componentes. Por tanto, en este texto presentaré, en primer lugar, algunas ideas globales sobre la Didáctica de las Matemáticas tal como se concibe en la actualidad y, en las secciones siguientes, daré dos ejemplos concretos de algunos problemas por los cuales se interesa la Didáctica de las Matemáticas. La elección de estos ejemplos se debe sólo al interés por discutir situaciones que los profesores de enseñanza primaria y secundaria puedan sentir próximas a su actividad y que éstos conozcan porque hayan estado presentes en sus propias clases.

La Didáctica de las Matemáticas, como la entendemos hoy en día, nació entre los años cuarenta y cincuenta, aunque la preocupación por la enseñanza de las Matemáticas ha existido desde mucho tiempo antes. Recordemos a unos de los clásicos griegos, el Menón (Platón, 1970), en el cual un profesor (Sócrates) da una clase de matemáticas a un estudiante (un esclavo), al tiempo que va explicando a otro filósofo (Menón) la metodología de enseñanza que utiliza. Este es un texto de didáctica que tiene varios miles de años de antigüedad, en el cual se propugna un método de enseñanza, el método socrático, que se sigue teniendo en cuenta en la actualidad. La determinación de ese límite en la mitad del presente siglo se debe a que antes de los años cuarenta había personas aisladas que se preocupaban por la enseñanza de las matemáticas, pero no había un cuerpo de conocimientos y unas metodologías de trabajo organizados y reconocidos de forma universal.

Como descripción totalmente general, y por lo tanto muy vaga, podemos decir que la Didáctica de las Matemáticas se interesa por todo aquello que influya en el aprendizaje y comprensión de las matemáticas, no sólo en el contexto educativo, sino también fuera de él. Este interés da lugar a focos de atención bastante diversos, resumidos de forma no exhaustiva en la Figura Nº 1, que comentaré en los párrafos siguientes.

GUTIERREZ, A. Y JAIME, A., *GEOMETRÍA Y ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 1-22.

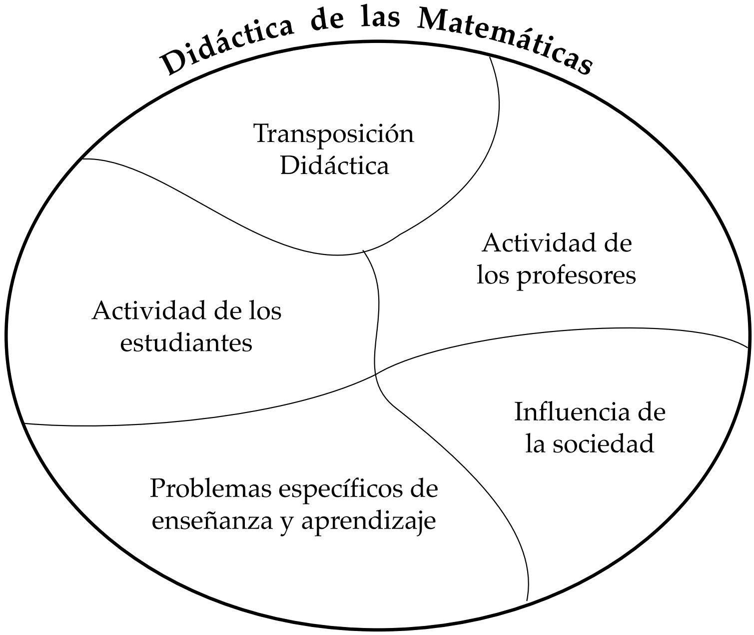


Figura Nº 1. Algunos focos de interés de la Didáctica de las Matemáticas

Uno de ellos se centra en estudiar las relaciones entre las matemáticas formales, las que hace un investigador, y las matemáticas escolares, las que se enseñan en primaria, secundaria o la universidad. La principal diferencia entre ambas se debe a que el tipo de trabajo que hace un matemático profesional es muy distinto del que puede hacer un estudiante, especialmente en primaria y secundaria. Entonces, se produce una transformación de las matemáticas “oficiales” para convertirlas en las matemáticas “escolares”, es decir de los contenidos y métodos reconocidos actualmente por la comunidad científica en los apropiados para determinado nivel educativo. Esta transformación se conoce con el nombre de “transposición didáctica” (Chevallard, 1985) y se refiere tanto a los contenidos matemáticos como a los métodos de trabajo:

En los libros de texto, especialmente en primaria y secundaria, se presentan los resultados (definiciones, teoremas, demostraciones, etc.) de manera que sean apropiados para la capacidad de comprensión de los estudiantes. No es razonable, por ejemplo, introducir el conjunto de los números naturales a los estudiantes de primer grado de primaria mediante los axiomas de Peano, ni tampoco mediante los axiomas conjuntistas, si bien dichos axiomas están contenidos de manera implícita en los problemas que resuelven los niños y en las propiedades de los números que aprenden.

Por otra parte, también es necesario reflexionar sobre las formas de trabajar (es decir de introducir y definir nuevos conceptos, demostrar propiedades, resolver problemas, etc.) tanto de profesores como de alumnos, para lograr un aprendizaje eficaz de dichos conocimientos, pues esas formas de trabajo deben ir formando, poco a poco, la destreza matemática de los estudiantes. Los métodos de trabajo que utiliza un matemático no se pueden llevar a las clases de primaria o secundaria; incluso en la universidad, sólo son adecuados para cursos especializados. Por lo tanto, las metodologías formales de los matemáticos se sustituyen por otras metodologías escolares, adaptaciones o transformaciones de las primeras, que pueden ser comprendidas y utilizadas por los estudiantes. Por ejemplo, la demostración por inducción se convierte en primaria en un estudio de algunos ejemplos particulares a partir de los cuales se deriva el resultado general.

Como la mayor parte del aprendizaje de las Matemáticas se produce dentro de las aulas, estudiantes y profesores constituyen dos de los focos principales de interés de la Didáctica. Por una parte, es necesario observar a los estudiantes cuando están realizando algún tipo de trabajo de creación o descubrimiento matemático, analizando la actividad que son capaces de desarrollar y cómo evoluciona con el tiempo. Por otra parte, el análisis anterior nunca podrá ser completo ni fiable si no tiene en cuenta la intervención del profesor. Por ejemplo, la forma como el profesor entienda las Matemáticas se reflejará en la manera de organizar la actividad de sus alumnos. En un aula donde los estudiantes están creando Matemáticas, el profesor no puede ser un recitador del libro de texto o un conferenciante dando una clase magistral, sino que debe ser el encargado de organizar y guiar el trabajo de sus alumnos. Por lo tanto, la Didáctica de las Matemáticas está interesada en estudiar el comportamiento de los profesores y también en elaborar métodos de trabajo que puedan ser idóneos para cada tipo de profesor.

Otro elemento que tiene influencia en el aprendizaje de las Matemáticas y que, por lo tanto, es relevante para la Didáctica, es la sociedad, tanto considerada en términos amplios, por ejemplo para comprender las diferencias entre los sistemas educativos de diferentes países o culturas, como considerada en términos microscópicos, para comprender la influencia ejercida por los padres, los compañeros de la sala de clase o los compañeros de juegos. Por ejemplo, muchas veces los juegos generan en los niños conocimientos y experiencias matemáticos inconscientes; así, al empezar a enseñar probabilidades en secundaria no se puede pensar que los estudiantes no saben absolutamente nada de probabilidades, pues cualquier niño practica desde los cinco o seis años juegos de azar con dados, cartas, etc., por lo que adquiere sin darse cuenta una concepción del azar, la equiprobabilidad y otros conceptos relacionados, que pondrá en funcionamiento cuando empiece a estudiar este tema en la escuela.

Un último centro de atención de la Didáctica de las Matemáticas, no menos importante que los anteriores, es el estudio de problemas específicos de enseñanza o aprendizaje que surgen en áreas concretas de las Matemáticas escolares. Estas están formadas por una serie de áreas, que unas veces están relacionadas y otras son bastante diferentes, cada una de ellas con su problemática específica: aritmética, geometría, álgebra, cálculo, probabilidades, etc. Una de las fuentes de problemas que debe resolver la Didáctica de las Matemáticas es estudiar cada una de estas áreas, para tratar de determinar cómo se pueden mejorar las condiciones de aprendizaje de los estudiantes, qué se puede hacer para evitar que éstos se equivoquen en un problema dado o para lograr que superen mejor sus dificultades, o por qué hay momentos en los que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades. Ese tipo de estudios implica determinar cómo están organizadas las Matemáticas, cómo piensan los estudiantes, cómo están organizados los contenidos que se van a enseñar, y es una de las actividades a las que se dedica más tiempo y esfuerzos en el seno de la Didáctica de las Matemáticas.

Otro punto de vista interesante para entender qué es la Didáctica de las Matemáticas es observarla en el contexto de otras ciencias que tienen que ver con las Matemáticas y con la educación, pues la Didáctica no es un área del conocimiento aislada. Figura Nº 2 esquematiza las principales relaciones.

La Didáctica de las Matemáticas tiene sus fuentes principales en tres áreas que se interesan de forma destacada por la enseñanza de las Matemáticas (parte superior de la Figura Nº 2), cada una de ellas con sus peculiaridades que la diferencian de las otras: en primer lugar, naturalmente, las Matemáticas. Buena parte de los didactas son matemáticos que han sentido la inquietud por los problemas didácticos, pero cuya formación inicial como matemáticos les proporciona un cierto punto de vista, una forma de entender dichos problemas. Otro grupo de didactas son psicólogos que, desde la perspectiva de la Psicología, se preocupan por los problemas de aprendizaje de las Matemáticas. Y un tercer grupo son los pedagogos, que también, desde sus propias concepciones de la problemática educativa, aportan ideas sobre cómo analizar los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. De la unión de estas tres posturas, junto a modelizaciones autónomas que no se derivan directamente de ninguno de los tres campos anteriores, surge el campo de estudio de la Didáctica de la Matemáticas, que tiene un carácter propio e independiente.

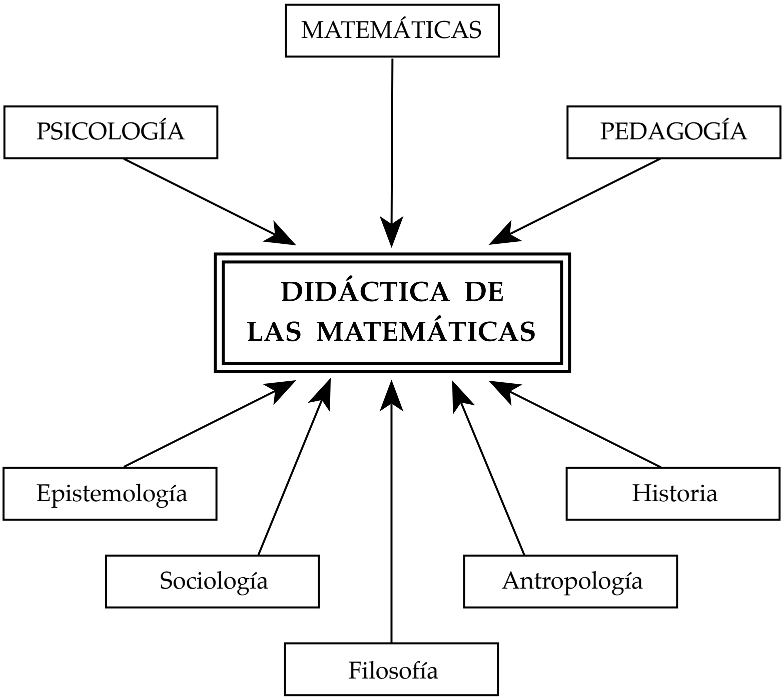


Figura Nº 2. La Didáctica de las Matemáticas relacionada con otras Ciencias

Pero también hay otras Ciencias que ayudan a entender algunos tipos de problemas de la Didáctica de las Matemáticas (la parte inferior de la Figura Nº 2 recoge las principales, aunque no todas). Por ejemplo, la Historia de las Matemáticas nos muestra cómo se han desarrollado los conceptos matemáticos a lo largo de los siglos, y su conocimiento sirve en Didáctica para analizar y explicar por qué los estudiantes tienen dificultades en determinados momentos de su proceso de aprendizaje de esos mismos conceptos. La Epistemología puede verse como un complemento de la Historia, ya que nos ayuda a comprender la evolución de la forma como los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos pues, con el tiempo, han ido cambiando de forma análoga los significados de esos términos. Por otra parte, como uno de los focos de interés de la Didáctica es estudiar la influencia de diversos elementos de la sociedad en el aprendizaje de las Matemáticas (profesores, otros alumnos, padres, juegos, etc.), la Sociología y la Antropología se deben tener en cuenta al adentrarse en esa parte específica de la Didáctica. Comentarios análogos se pueden hacer respecto de la Filosofía o algunas otras Ciencias.

ANÁLISIS DE LA SUMA Y LA RESTA DE NÚMEROS NATURALES

Uno de los temas básicos de la enseñanza primaria en cualquier país del mundo es el de las operaciones aritméticas con números naturales, en particular la suma y la resta. Todos recordamos las canciones de las tablas de sumar y las largas listas de sumas y restas que de niños tuvimos que resolver. Esos conocimientos siguen siendo el núcleo básico del aprendizaje de la suma y de la resta, aunque la metodología de enseñanza ha cambiado y, actualmente, no se hace énfasis sólo en la componente memorística, sino que también se trabaja en resolución de problemas de sumas y restas. Cuando hablo de “problemas” me estoy refiriendo a enunciados verbales que los niños tienen que entender, interpretar y traducir a una determinada operación; no me estoy refiriendo, por tanto, a ejercicios en los que se plantean explícitamente operaciones como 538 + 256 y en los que sólo hace falta aplicar el algoritmo correspondiente.

Una cuestión sobre la que es interesante reflexionar, desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, es si todos los problemas de sumar o restar son iguales, se resuelven igual. Los problemas elementales de sumas o restas que se plantean en los primeros cursos de primaria se resuelven siempre sumando o restando dos números, luego matemáticamente son todos iguales. Pero, aparte de la operación que se realiza, hay otro elemento importante al pensar en los problemas aritméticos: que esos problemas deben tener alguna carga conceptual. El objetivo de los problemas debe ser transmitir los significados de la suma y la resta para que los niños entiendan bien estas operaciones. Es decir, que un niño aprenda bien a sumar y restar no es simplemente que sepa las tablas y que sepa operar con varios números de muchas cifras, sino que, cuando encuentre un problema en el cual no está la operación explícita, sepa ver que hay una operación y cuál es. Esas situaciones son diversas y conviene reflexionar sobre qué tipos de problemas hay que presentarles a los niños, para que sean variados y que reflejen las diferentes características conceptuales de la suma y de la resta, sus propiedades, relaciones, etc.

Los problemas elementales (de una sola operación) de sumas y de restas de enunciados verbales plantean situaciones en las cuales hay una determinada actividad que, en último término, se traduce en una suma o una resta. Podemos distinguir cuatro tipos de problemas (Carpenter, Moser, 1983) esquematizados en la Figura Nº 3.

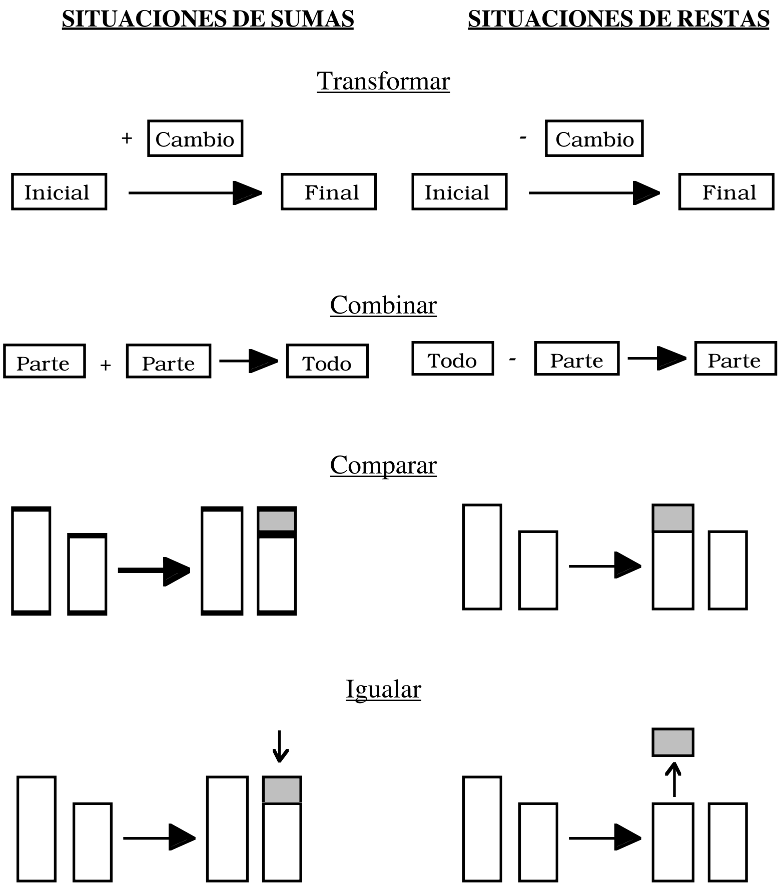


Figura Nº 3. Tipos de problemas de sumas y restas

El primer tipo, el más frecuente, son los problemas de transformar, en los cuales hay una cantidad inicial de objetos, una transformación, que implica que la cantidad de objetos crece en el caso de las sumas y disminuye en el caso de las restas, y una cantidad final de objetos. En la figura 4 pueden verse ejemplos de las tres formas posibles de enunciados, para la suma y la resta, dependiendo de qué valor sea desconocido. Comparando los tres problemas de cada columna, se puede distinguir entre los aspectos conceptuales y algorítmicos a que aludía antes: Los tres problemas de la columna izquierda [derecha] presentan situaciones de suma [resta], pues en todos ellos hay una cantidad inicial que ha sido incrementada [disminuida], pero, para calcular el resultado, en el primer problema de la columna de la izquierda [derecha] se realiza una suma [resta], mientras que en los otros dos problemas de la misma columna lo usual es hacer una resta [suma].

Otro tipo de problemas son los problemas de combinar. En estos problemas hay dos cantidades que unas veces se juntan y otras veces se separan. En unos casos conocemos cada una de estas dos cantidades, y lo que interesa es saber cuál es la cantidad total, mientras que en otros casos conocemos la cantidad total y una de las partes, siendo el problema averiguar la otra parte. La diferencia básica entre los problemas de transformar y los de combinar estriba en que en los primeros hay una modificación, una acción de cambio de tamaño de una cantidad, mientras que en los problemas de combinar no hay ninguna modificación, sino dos maneras de mirar esas cantidades (juntas o separadas), que no se transforman.

En la Figura Nº 4 presentamos un ejemplo de problema de combinar de suma y otro de resta. La variedad de problemas, en función de qué cantidad es desconocida, es análoga a la de los problemas de transformar, por lo que se podrían repetir aquí (y también para los dos tipos de problemas restantes) los comentarios hechos en el párrafo anterior.

El tercer tipo de problemas son los problemas de comparar. En estos problemas, que aparecen con bastante frecuencia, se plantean, por ejemplo, situaciones de competición: Un niño tiene una cantidad de objetos mayor que otro niño y se quiere averiguar cuántos objetos más tiene el primero que el segundo, o cuánto objetos menos tiene el segundo que el primero. A diferencia de los problemas de transformar, ahora no se modifica el tamaño de las cantidades que se manejan. Y a diferencia de los problemas de combinar, ahora no hay un total dividido explícitamente en dos partes. Estas diferencias quedan claramente reflejadas por los problemas de la Figura Nº 4.

Al leer los enunciados de los problemas de comparar de la figura 4 puede parecer que están equivocados: El hecho de que aparezca la palabra "más" en el enunciado de la columna de los problemas de restas y la palabra "menos" en el enunciado de la columna de los problemas de sumas podría llevarnos a pensar que están al revés. En realidad, lo que clasifica a estos dos problemas como de sumas o de restas es cómo los interpreta cada estudiante concreto. Así, un estudiante puede resolver el problema de la columna de sumas poniendo caramelos en el montón de Ana, hasta que haya tantos como en el de Juan, mientras que otro estudiante puede resolver el mismo problema cogiendo caramelos del montón de Juan hasta que queden tantos como en el de Ana. En el primer caso sería un problema de sumas y en el segundo caso sería un problema de restas.

Problemas de sumas	**Problemas de restas**
Transformar	
$3 + 5 = \square$ Juan tenía 3 manzanas. Ana le ha dado otras 5 manzanas. ¿Cuántas tiene Juan ahora?	$8 - 5 = \square$ Juan tenía 8 manzanas. Ana le ha cogido 5 manzanas. ¿Cuántas tiene Juan ahora?
$3 + \square = 8$ Juan tenía 3 manzanas. Ana le ha dado algunas más. Ahora Juan tiene 8 manzanas. ¿Cuántas le ha dado Ana?	$8 - \square = 3$ Juan tenía 8 manzanas. Ana le ha cogido varias. Ahora Juan tiene 3 manzanas. ¿Cuántas le ha cogido Ana?
$\square + 5 = 8$ Ana le ha dado 5 manzanas a Juan. Ahora Juan tiene 8 manzanas. ¿Cuántas tenía Juan al principio?	$\square - 5 = 3$ Ana le ha cogido 5 manzanas a Juan. Ahora Juan tiene 3 manzanas. ¿Cuántas tenía Juan al principio?
Combinar	
Juan tiene 3 caramelos de fresa y 5 caramelos de naranja. ¿Cuántos caramelos tiene Juan en total?	Juan tiene 8 caramelos. De ellos, 5 son de fresa y los demás son de naranja. ¿Cuántos caramelos de naranja tiene?
Comparar	
Juan tiene 8 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos menos tiene Ana que Juan?	Juan tiene 8 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos más tiene Juan que Ana?
Igualar	
Juan tiene 8 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos hay que darle a Ana para que tenga tantos como Juan?	Juan tiene 8 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos hay que cogerle a Juan para que tenga tantos como Ana?

Figura Nº 4. Ejemplos de problemas de sumas y restas

Se trata, no obstante, de una peculiaridad de este tipo de problemas, que desde el punto de vista de una clasificación formal son ambiguos, pero que para un profesor que está en su escuela con sus alumnos no es importante, porque lo que le importa en último término es que los niños entiendan estas situaciones y las resuelvan correctamente. Si planteamos, por ejemplo, el problema $3 + \square = 8$ los niños de los primeros cursos de primaria, que seguramente todavía están contando con los dedos de las manos, van a resolverlo contando con los dedos desde 3 hasta 8, por lo que han hecho una suma. Sin embargo, los niños de los cursos intermedios o superiores de la primaria, que ya dominan bien las operaciones, harán mentalmente la resta 8 - 3 = 5, porque son capaces de relacionar la suma y la resta, cosa que los niños más pequeños no saben hacer.

El cuarto tipo de problemas son los problemas de igualar. Son problemas en los cuales se presentan dos cantidades de objetos y se pide averiguar cuánto hace falta añadir a una para tener tantos objetos como en la otra, o cuánto hay que quitar de una para tener tantos como en la otra. Existe una clara relación entre los problemas de comparar y los de igualar (ver los ejemplos de la Figura Nº 4, pero, una vez más, la diferencia es de tipo semántico: en un caso se plantea una comparación, con lo cual no hay ninguna transformación de las cantidades. En el otro caso se plantea una acción de equilibrar las dos cantidades, por lo que sí se sugiere la realización de una modificación de una de dichas cantidades. Realmente, los problemas de igualar están integrados por una componente de comparar y otra componente de transformar.

Al presentar los ejemplos de los problemas de transformar, me referí a la existencia de tres enunciados posibles, pues estamos manejando tres números, de los cuales uno es desconocido y los otros dos son conocidos. Es realmente muy fácil cambiar los planteamientos dentro del mismo esquema de problema de manera que, conceptualmente, el problema siga siendo el mismo, pero haya que averiguar una cantidad distinta. Sólo he planteado esta variedad de enunciados en el caso de los problemas de transformar, pero se puede hacer lo mismo con los enunciados de los otros tres tipos de problemas. El único tipo que no tiene tres variantes de enunciados son los problemas de combinar. Si observamos el problema de combinar de sumas (figura 4), la operación que plantea es $3 + 5 = \square$. El enunciado del problema correspondiente a $3 + \square = 8$ es: *Juan tiene 3 caramelos de fresa y varios de naranja. En total, tiene 8 caramelos. ¿Cuántos caramelos de naranja tiene Juan?* Y el enunciado correspondiente a $\square + 5 = 8$ es: *Juan tiene varios caramelos de fresa y 5 de naranja. En total, tiene 8 caramelos. ¿Cuántos caramelos de naranja tiene Juan?* Pero, realmente, ambos enunciados son el mismo pues lo único que varía es el sabor de los caramelos, pero no la función de cada uno en la situación planteada.

En resumen, podemos ver que, desde el punto de vista algorítmico, la operación que se hace en todos los ejemplos de la figura 4 es la misma (5 + 3 = 8 ó 8 - 3 = 5) pero, desde el punto de vista semántico, cada tipo de problema es diferente de los demás, pues los problemas de combinar o de comparar presentan situaciones estáticas, mientras que los problemas de igualar o de transformar presentan situaciones dinámicas. Así pues, la componente conceptual que tienen los diferentes problemas para los niños es distinta, porque plantean actividades diferentes, es decir interpretaciones y significados diferentes de la misma operación. Por último, quiero señalar que está comprobado por infinidad de experiencias en todo el mundo que estos cuatro tipos de problemas presentan diversos grados de dificultad para los niños. El orden en el que los he presentado (transformar, combinar, comparar e igualar) se corresponde con un grado de dificultad creciente.

REFLEXIONES SOBRE EL PASO DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

El progreso que se produce en la enseñanza de los números y las operaciones aritméticas a lo largo de la primaria y secundaria tiene varias etapas importantes, como la aparición de las fracciones, los decimales o los números negativos. En todos éstos se siguen manejando conjuntos numéricos y los estudiantes permanecen en el mundo de los números concretos, pero llega un momento en el que surge una situación radicalmente diferente, en la que esos números concretos son sustituidos por las letras y se entra de lleno en el estudio del álgebra. En infinidad de países, entre ellos España, la toma de contacto con el álgebra se produce al final de la primaria y se completa en los primeros cursos de la secundaria, donde se utilizan todo tipo de expresiones algebraicas, ecuaciones, funciones, etc., es decir cuando los estudiantes tienen entre 12 y 16 años.

Para la Didáctica de las Matemáticas es un problema importante analizar cómo se produce ese paso de las expresiones y operaciones concretas a las abstractas, qué procesos siguen los estudiantes en sus razonamientos durante ese paso, qué dificultades o errores surgen en cada momento, cuáles son sus causas y, en último término, conseguir que los estudiantes entiendan con la menor dificultad posible el significado y la forma de manejar esas letras que aparecen en unas expresiones análogas a las que siempre han estado utilizando, pero que ya no están formadas sólo por números.

En primer lugar, los profesores deben ser conscientes de que, para sus alumnos, las letras de las expresiones algebraicas no significan siempre lo mismo. También deben tener siempre presente que la forma como los estudiantes interpretan una letra en una expresión algebraica muchas veces no coincide con la que el profesor pretende transmitirles. Voy a dedicar algunos párrafos a analizar esta dificultad de aprendizaje, centrándome en tres aspectos destacados: la comprensión de las letras, el significado del signo = y el aprendizaje de la resolución de ecuaciones.

Una investigación realizada en Inglaterra (Hart, 1981) es la primera que da una respuesta concreta y detallada al problema de la interpretación de las letras por los estudiantes. Desde entonces se han realizado numerosos estudios en diferentes contextos geográficos, socio-culturales, educativos, etc. cuyos resultados corroboran los obtenidos en dicha investigación. Podemos resumirlos diciendo que, al manejar expresiones algebraicas, los estudiantes perciben las letras con varios significados diferentes, que reflejan un progreso en su comprensión, hasta llegar finalmente a una comprensión matemáticamente correcta. Estos significados son:

1) Letras evaluadas. Presente sobre todo en los estudiantes que empiezan a tomar contacto con las letras, consiste en considerarlas como marcas de las posiciones de números concretos. Esta interpretación tiene mucho que ver con esos ejercicios de aritmética, tan frecuentes, en los que se pide poner el número apropiado dentro del cuadrado en expresiones como $3 + \square = 8$. Análogos suyos algebraicos pueden ser:

- ¿Cuánto vale a en $3 + a = 8$?
- ¿Cuál es el valor de $5a + 3$ si $a = 2$?

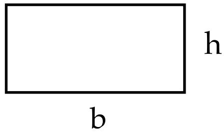
La reacción lógica de los estudiantes es pensar que el cuadradito de $3 + \square = 8$ ha sido sustituido por la letra de $3 + a = 8$, pero que el ejercicio sigue siendo el mismo, por lo que transfieren el significado del cuadradito a la letra. Por lo tanto, a la letra no se le da el significado de número genérico ni de variable, sino de marca que indica la posición de un número específico.

2) Letras ignoradas. Cuando se empiezan a plantear otros tipos de problemas que originan expresiones algebraicas más complejas, el significado anterior tiende a desaparecer. Entonces los estudiantes pueden llegar a una situación de uso de las letras sin dotarlas de ningún significado, o de ignorancia total de las mismas cuando transforman las expresiones algebraicas. Esta interpretación suele estar fomentada por ejercicios en los cuales se plantean operaciones que se pueden resolver sin utilizar realmente las letras. Por ejemplo:

- Si $x + y = 42$, entonces $x + y + 6 = \ldots$
- Si $3x + 10 = 5x + 4$, entonces $3x + 2y + 10 = \ldots$

Para resolver correctamente estos ejercicios, los estudiantes sólo deben reconocer que hay que sumar la misma cantidad a ambos lados del signo =, por lo que deben sumar 6 al 42 y deben añadir + $2y$ en el término de la derecha. Aquí, las letras son simplemente unos objetos que no tienen por qué significar nada en particular y que no hay que manipular en absoluto. Es una comprensión de las letras muy poco útil y que hay que evitar en lo posible, para lo cual es recomendable no plantear ejercicios como los anteriores.

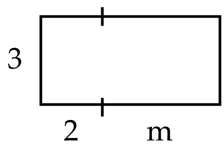
3) Letras como objetos. Esta interpretación consiste en considerar las letras como una abreviatura del nombre de un objeto, o como el objeto mismo. Por ejemplo:



- Calcular el área del rectángulo de la figura.
- Simplificar la expresión: $2x + 3y + 4x - y$.

Para estos estudiantes, en el primer ejemplo las letras representan los lados del rectángulo y la expresión resultante ($A = b \text{ x } h$) no es más que una forma abreviada de escribir que “el área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura”. En el segundo ejemplo, las letras son unos objetos en sí mismas, que los estudiantes manejan, agrupando por una parte todos los términos que llevan la x y por otra parte todos los que llevan la y. Por lo tanto, ahora la x y la y no tienen ningún significado concreto. Esta interpretación de las letras como objetos ya empieza a ser útil para formar el concepto matemático, pues permite a los estudiantes manejar determinadas expresiones algebraicas comprendiendo qué significa el ejercicio propuesto y qué tienen que hacer.

4) Letras como incógnitas específicas. En este caso, una letra representa un número particular pero desconocido y los estudiantes pueden operar directamente con ella. Veamos unos ejemplos:



- Calcular el perímetro del rectángulo de la figura.
- Calcular el perímetro de un polígono de n lados si cada lado mide 2 cm.

Es importante diferenciar la primera interpretación (letras evaluadas) de ésta. En el primer caso, las letras representan números concretos, determinados, que pueden o deben colocarse en la posición de las letras, mientras que ahora las letras representan números indeterminados. En los ejemplos del primer caso, las letras tenían sólo un valor posible, mientras que, en los ejemplos anteriores, m puede ser cualquier longitud y n puede ser cualquier número natural. Por lo tanto, estos estudiantes entienden que para cada letra hay un conjunto (finito o infinito) de números, cualquiera de los cuales puede ponerse en el lugar de la letra.

Los dos ejemplos anteriores son bastante parecidos, si bien el segundo de ellos es más abstracto ya que un polígono de n lados no se puede dibujar, sino que habría que dibujar un polígono de una cantidad concreta de lados, lo cual particularizaría el problema. Por el contrario, en el primer ejemplo sí se puede dibujar la longitud m, la cual, por supuesto, toma un valor concreto en el dibujo, pero este valor no tiene importancia porque no se mide para calcular el resultado. Entonces, el tipo de problemas del primer ejemplo generalmente es más fácil de interpretar y resolver por los estudiantes que el segundo.

5) Letras como números generalizados. Ahora las letras pueden representar varios valores numéricos desconocidos y no sólo uno. Por ejemplo:

- Calcular los valores de n para los que se verifica que $3n + 1 < 19$.

A diferencia de los casos anteriores, en particular el 4, en los que una letra se interpretaba como sustituta de un número (aunque a veces eran varios los números que se podían utilizar), ahora una letra se entiende como sustituta de un conjunto de números, de manera que la letra no es una abreviatura del número, sino del propio conjunto.

6) Letras como variables. Este es el significado matemático estándar, donde las letras representan conjuntos indeterminados de números, de manera que hay una relación concreta entre los diferentes conjuntos que aparecen en la misma expresión algebraica. Por ejemplo:

- ¿Qué es mayor, $2 + n$ ó $2n$?
- El área de un rectángulo es de 24 cm^2. ¿Cuánto miden sus lados?

Naturalmente, también son ejemplos de esta interpretación las funciones en sus formas habituales de $y = f(x)$, $f(x,y) = c$, etc.

Los dos ejemplos anteriores presentan dos formas diferentes de aparecer las variables: una sola variable o varias variables relacionadas. La idea de variable se ve más claramente al manejar expresiones o problemas con varias variables, porque en ellos se aprecia el hecho de que se puede modificar libremente cualquiera de las variables pero, al dar un valor concreto a una de ellas, los valores de las demás variables quedan determinados (o por lo menos limitados). En el tipo de problemas del primer ejemplo esto es más difícil de reconocer porque, al haber una sola variable, su significado se puede confundir con el de letras como números generalizados, ya que los estudiantes pueden resolver el problema dándole a n los valores que quieran y comparando las dos expresiones.

El planteamiento y el análisis didáctico de estas distinciones de los significados que los estudiantes dan a las letras ha hecho avanzar mucho el trabajo de los profesores en la enseñanza del álgebra, pues les ha permitido comprender mejor por qué sus alumnos contestaban de la manera que lo hacían. El objetivo de esta clasificación no es sugerir a los profesores que presenten a sus alumnos todos estos significados para que los aprendan, pues los profesores tienen que ofrecer a los estudiantes sólo los significados matemáticamente correctos. Pero si, cuando un estudiante contesta de una determinada manera, el profesor puede identificar esa respuesta con uno de los tipos mencionados, entonces sabe cómo tiene que entender la respuesta y qué puede hacer para que mejore la comprensión de sus alumnos, ya que la manera de abordar a un estudiante que dé respuestas del primer tipo es muy diferente a como tratar a otro cuyas respuestas correspondan, por ejemplo, al cuarto tipo.

Si las letras son uno de los elementos básicos del álgebra, las ecuaciones son otro de ellos. En el aprendizaje de la resolución de ecuaciones, el signo = juega un papel central para la correcta comprensión de qué es resolver una ecuación y qué manipulaciones se pueden realizar con las ecuaciones para llegar a la solución.

En un párrafo anterior me refería a la tendencia de los estudiantes a generalizar a las variables, en las expresiones algebraicas, el significado de los huecos en las expresiones aritméticas. Esta tendencia es más acusada en lo referente al signo =, ya que éste aparece en las expresiones aritméticas desde el primer momento, por lo que los niños conocen perfectamente su significado en el contexto aritmético y, cuando aparecen las expresiones algebraicas, lo natural es pensar que el signo = sigue significando lo mismo.

En las expresiones aritméticas, lo usual es que aparezcan una o varias operaciones a un lado del signo = (generalmente a la izquierda) y en el otro lado tenga que aparecer el resultado de esas operaciones. Entonces, el primer significado que los estudiantes le suelen dar al signo igual en el álgebra es este mismo: El signo = enlaza una serie de operaciones aritméticas con su resultado. Por lo tanto, los estudiantes van a interpretar de la misma manera la expresión aritmética $5 + 7 = 12$ que la expresión algebraica $3x + 4 = 25$, pero van a tener dificultades serias para interpretar expresiones como $3x + 4 = 7x - 5$, porque aquí el signo = no puede ejercer ese papel de enlazar las operaciones con su resultado.

Un segundo significado que tiene el signo = para los estudiantes es el de conectar dos expresiones en las que se deben realizar acciones similares: Lo que se haga a un lado del signo = se debe hacer también al otro lado. Esta interpretación suele proceder de la enseñanza en la cual los primeros contactos con el álgebra son transformaciones de ecuaciones para su resolución, para lo cual a los estudiantes se les enseñan reglas como que "lo que está sumando pasa restando", "si se resta una cantidad en un lado, hay que restar la misma cantidad en el otro lado", etc. En esta comprensión algorítmica, el signo igual tiene la misión de distinguir las dos partes con las cuales hay que hacer la transformación, es decir de barrera o de marca de separación, no la de indicar una equivalencia.

Por último, el tercer significado que le atribuyen los estudiantes al signo = es el significado correcto de equivalencia entre dos expresiones algebraicas.

Con el primero de estos tres significados se plantea la ruptura con la aritmética, pues, como indicaba antes, es el que da lugar a algunas situaciones en las que sí se pueden resolver las ecuaciones aplicando los conocimientos de aritmética que tienen los estudiantes y a otras situaciones en las que las ecuaciones no se pueden resolver con esos conocimientos. Hemos visto que el problema surge porque los estudiantes manejan expresiones algebraicas que tienen la misma forma que otras expresiones aritméticas conocidas, por lo que transfieren el significado y los métodos aritméticos al álgebra. Aprovechando esta forma de proceder de los estudiantes, se puede hacer que éstos trabajen con expresiones aritméticas análogas a las expresiones algebraicas complejas que no pueden resolver mediante su experiencia previa. Por ejemplo, los niños están muy acostumbrados a expresiones como $2 \times 6 = 12$, formadas por una operación indicada y su resultado. Podemos trabajar con pares de expresiones de esta clase que dan el mismo resultado y escribirlas enlazadas. En los ejemplos siguientes se puede apreciar el proceso de transformación:

$2 \times 6 = 12 = 5 + 7$	$5 \times 4 - 11 = 9 = 3 \times 4 - 3$
$2 \times 6 = 5 + 7$	$5 \times 4 - 11 = 3 \times 4 - 3$
$2 \times \square = 5 + 7$	$5 \times \square - 11 = 3 \times \square - 1$
$2x = 5 + 7$	$5x - 11 = 3x - 1$

En los primeros pasos se están manejando expresiones aritméticas, pero transformándolas para que el signo = pase a tener el significado que interesa en álgebra. En particular, el signo = adquiere el significado de equivalencia entre dos operaciones diferentes pero con el mismo resultado. En el último paso, ya se ha producido el paso al álgebra y a las ecuaciones, en las que el signo = tiene el significado correcto. Lo que es importante para facilitar la comprensión por los estudiantes es que este significado no viene inducido por el trabajo que se pueda haber hecho con las ecuaciones sino por el trabajo con las expresiones aritméticas.

Combinada con los dos aspectos que he comentado en los párrafos anteriores, se encuentra la problemática de lo que es propiamente aprender a resolver ecuaciones, es decir de comprender las razones de los sucesivos pasos de los algoritmos de resolución. Por supuesto, podemos enseñar a nuestros alumnos cómo resolver ecuaciones haciendo que memoricen las reglas de transformación y que resuelvan gran cantidad de ejercicios de cada tipo, pero es mucho mejor si, además, conseguimos que entiendan por qué funcionan como lo hacen esas reglas. Esta última forma de enseñar es a la que se tiende desde hace algunos años y en torno a la cual se han generado numerosas investigaciones cuyo objetivo común es determinar formas eficaces de aprendizaje comprensivo de los procesos de resolución de ecuaciones. Obsérvese que he escrito "aprendizaje comprensivo" y no "enseñanza comprensiva"; esto no hace más que poner el énfasis, una vez más, en la idea de que el elemento más importante del sistema educativo son los estudiantes y su actividad.

Sin embargo, con frecuencia, y de manera bastante independiente del método de enseñanza seguido, los profesores descubren que sus alumnos utilizan para resolver ecuaciones otras estrategias diferentes de las esperadas: El profesor espera que sus alumnos resuelvan las ecuaciones con los algoritmos que les está enseñando, pero ellos las resuelven utilizando los suyos personales, que han generado por sí mismos. Este es el caso de algunas de las estrategias de resolución de ecuaciones más frecuentes, que presento en los párrafos siguientes.

Se suele empezar la enseñanza de la resolución de ecuaciones planteando ecuaciones sencillas, como $5 + x = 8$. Con este tipo de ecuaciones se pretende que los estudiantes las relacionen con la aritmética y que transfieran conocimientos de aritmética. En este caso, la forma usual de proceder de los estudiantes que inician el aprendizaje del álgebra es <u>recordar resultados numéricos</u> para averiguar qué número va en vez de la x.

Otras veces, cuando la ecuación es un poco más compleja porque los estudiantes no tienen el dominio suficiente de las operaciones aritméticas, utilizan <u>técnicas de conteo</u>. Por ejemplo, en la ecuación $3x + 5 = 12$, muchas veces los estudiantes no realizan las transformaciones que el profesor espera (pasar el 5 al término de la derecha, etc.), sino que buscan la solución sustituyendo la incógnita por los valores 0, 1, 2, 3, … Esta forma de proceder está favorecida por las ecuaciones que se plantean cuando se empieza a trabajar en álgebra, cuyas soluciones generalmente son números enteros, lo cual facilita que los estudiantes puedan hacer ese tipo de cálculos.

Una estrategia bastante frecuente con ecuaciones como la anterior es la de <u>sustituir por tanteo</u> mediante una aproximación más o menos organizada. Es decir, se da a la x un valor y se calcula el término de la izquierda; si el resultado es menor que el término de la derecha, se le da otro valor más grande y si el resultado es mayor, se le da a la x otro valor más pequeño, y así sucesivamente, hasta encontrar el valor exacto.

Muchas veces los profesores no reconocen las estrategias anteriores porque se limitan a mirar si el resultado dado es correcto o no, sin prestar atención al recorrido realizado por el estudiante. Por otra parte, dicho recorrido suele no estar explícito, porque se trata de operaciones de cálculo mental y en la libreta sólo se escriben el enunciado y el resultado final. Para entender estos procesos, lo importante es hacer que los estudiantes expliquen cómo han hecho para resolver las ecuaciones, más que ver si el resultado es el número correcto o uno equivocado.

Otra estrategia, que frecuentemente aparece generada de forma autónoma por los estudiantes, consiste en interpretar una ecuación con una operación que se ha hecho y que luego se tiene que deshacer para llegar a los orígenes. En otras palabras, el estudiante debe trabajar hacia atrás desde la ecuación dada, interpretando cada operación que aparece en el enunciado como la inversa de otra, realizada previamente en el proceso hacia adelante. Veamos un ejemplo:

La ecuación $2x + 4 = 18$ significa que hay un número (x) que ha sido multiplicado por 2 y, después, al resultado se le ha sumado 4, siendo el valor final 18. Así pues, para resolver la ecuación, 1) se le quita 4 a 18, 2) se divide el resultado entre 2 y 3) el número que queda es el valor de x:

$$\begin{gathered} 2x + 4 = 18 \\ 18 - 4 = 14 \\ 14 \div 2 = 7 \\ x = 7 \end{gathered}$$

Es evidente que un estudiante que use esta estrategia está aplicando las reglas usuales de transposición de términos pero, realmente, no es éste el significado que le ha dado el estudiante a sus manipulaciones, sino el de realizar una secuencia de operaciones en el sentido contrario al de otra secuencia que se realizó previamente, cosa que no tiene nada que ver con el significado que nosotros le solemos dar a los hechos de transponer los términos o de realizar operaciones equivalentes a uno y otro lado del signo =.

En los cuatro casos anteriores, se trata de algoritmos que se pueden aplicar con comodidad a ecuaciones sencillas, en las que la incógnita sólo aparece en un término, pero que no son capaces de interpretar y resolver con eficacia otras ecuaciones con formas más complejas (aunque sigan siendo de primer grado). Las dos estrategias de resolución siguientes son válidas para cualquier ecuación y son las que los profesores de todo el mundo enseñan a sus alumnos como únicos métodos válidos para resolver ecuaciones.

Una de las reglas clásicas que se enseñan y que todos los estudiantes son inducidos a memorizar es la correspondiente a la transposición de términos, que induce a cambiar los términos de sitio, juntando a un lado del signo = todos los términos que contienen la incógnita y al otro lado todos los que no la contienen, para después simplificar y cambiar también de término el coeficiente de la x, aplicando siempre las reglas de que cuando un término está sumando debe pasar al otro lado del signo = restando, …

La otra regla clásica es la de realizar la misma operación a ambos lados del signo =, buscando siempre hacer la operación inversa de una que aparezca en la ecuación y siguiendo las mismas reglas que enunciaba en el párrafo anterior.

Un motivo por el que muchos estudiantes usan estas reglas de transformación de ecuaciones de forma incorrecta o no las utilizan en absoluto (o se resisten a hacerlo todo lo posible) es que no entienden su significado. Para resolver esta dificultad, a veces se trabaja con las ecuaciones en contextos físicos, en los cuales las ecuaciones se representan mediante estados de algún instrumento y las reglas de manipulación de términos corresponden a acciones realizadas sobre ese instrumento.

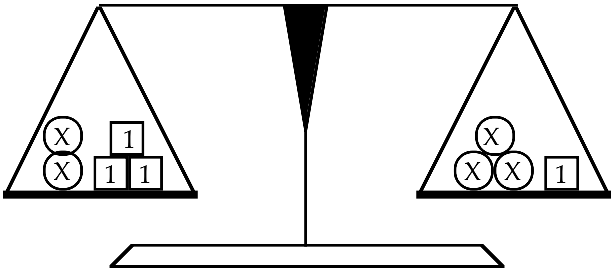


Figura Nº 5.

El contexto más común, que se puede ver con frecuencia en los libros de texto, es la representación mediante balanzas en equilibrio, donde cada brazo representa una de las expresiones a los lados del signo igual y las manipulaciones permitidas son únicamente aquellas que mantienen el equilibrio. Por ejemplo, la balanza de la Figura Nº 5 representa la ecuación $2x + 3 = 3x + 1$.

A veces se presenta a los estudiantes una balanza real, con piezas de diversos pesos que representan los términos de la ecuación, en la que los estudiantes ponen o quitan piezas hasta conseguir averiguar el valor de la pieza incógnita. Otras veces estas balanzas están solamente dibujadas en papel pero, en todo caso, la familiaridad de todos los estudiantes con dicho instrumento hace que puedan manejarlo y, lo que es más importante, darle un significado a las reglas de manejo abstracto de los términos. Un defecto de esta representación es la dificultad para manejar términos que estén restando.

Otro contexto en el que se pueden representar las ecuaciones es el contexto geométrico, en el cual un producto de dos factores es el área de un rectángulo. Por ejemplo, el producto $5x$ se representa mediante un rectángulo cuya base mide 5 y cuya altura mide x, o al revés. Esta forma de hacer álgebra es más antigua que el álgebra misma, porque ya en los **Elementos** de Euclides se encuentran problemas como éste (Proposición 4 del Libro II; en Euclides, 1991):

> Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

Si traducimos este enunciado a nuestra terminología actual (por “línea recta” hay que entender segmento), podemos escribirlo de la siguiente manera (Figura Nº 6): $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2A\Gamma x\ \Gamma B$. O también de esta forma más conocida: $(A\Gamma+\Gamma B)^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2A\Gamma x\ \Gamma B$.

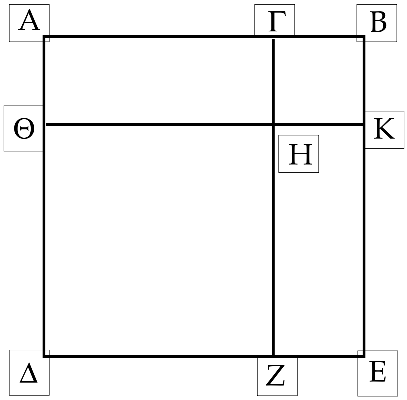


Figura Nº 6.

Todos los estudiantes del mundo han aprendido la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, pero para la mayoría de ellos se trata simplemente de un dato más, almacenado en la memoria pero carente de significado, porque nunca han visto un dibujo como el de la Figura Nº 6 ni han reflexionado sobre él. La memorización es un elemento necesario del aprendizaje de las Matemáticas, pero si, además de memorizar, los estudiantes captan el significado de la fórmula, podrán transferir este resultado a otras situaciones, por ejemplo a $(a + b)^3$, $(a + b + c)^2$, potencias de polinomios, etc., o, cuando les falle la memoria, tendrán un recurso alternativo para recordarla.

Expresiones como $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, etc. se pueden interpretar también mediante figuras parecidas a la anterior. Incluso si, en vez de dibujar en papel, se utilizan materiales manipulativos, es posible representar en 3 dimensiones (Figura Nº 7) expresiones cúbicas como $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

Esta forma de enseñanza del álgebra, particularizada a la interpretación geométrica de las ecuaciones de los tipos $ax + b = cx$ y $ax + b = cx + d$, se ha analizando con detalle en México por el equipo dirigido por E. Filloy y T. Rojano (ver Kieran, 1990), con la idea de introducir las ecuaciones y su forma de resolución a partir de problemas verbales en los cuales se puede hacer siempre una interpretación geométrica del enunciado, que al mismo tiempo sugiere la forma de resolver el problema. El siguiente enunciado es un ejemplo (Kieran, 1990):

> Una persona tiene un campo de A metros de ancho y x metros de largo. Esta persona compra un campo contiguo al anterior de B m^2 de área. Una segunda persona le propone intercambiar esta propiedad por otro campo próximo que tiene la misma área total y el mismo largo, pero con una forma mejor. ¿Cuál debe ser el largo de los campos para que el intercambio sea justo?

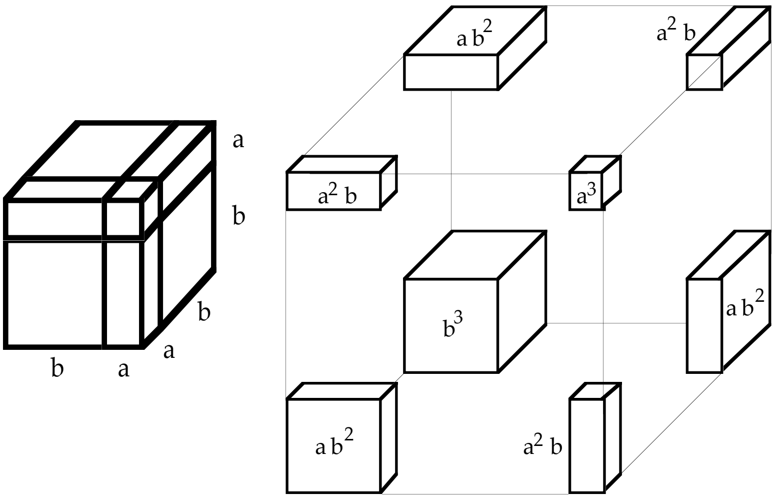


Figura Nº 7. Representación de $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

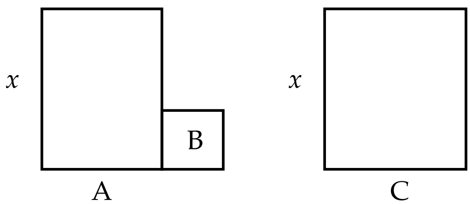


Figura Nº 8. Representación de $Ax + B = Cx$.

Al sustituir las letras A, B y C por números, se obtiene un enunciado concreto de este tipo. La solución se obtiene representando gráficamente el problema (Figura Nº 8). El trabajo de los estudiantes es ir transformando las diferentes partes del texto en elementos geométricos. En el ejemplo, la primera parte del enunciado habla de un campo del cual se conocen las dimensiones, mientras que después se habla de otro campo del cual se conoce el área. Si se eligen los coeficientes de las ecuaciones con cuidado, se puede sugerir a los estudiantes que utilicen papel cuadriculado, pues solamente el hecho de dibujar las figuras correspondientes lleva al resultado, mediante un proceso de descomposición y de comparación de áreas.

Este tipo de enunciado puede parecer un poco complicado y largo, pero observando los resultados de las investigaciones se ve que hay muchas situaciones diferentes, que van desde enunciados muy sencillos hasta otros complejos, como puede ser el anterior. Así pues, con este contexto se pretende ayudar a los estudiantes para que aprendan a entender qué son las ecuaciones y a darle un significado a su resolución.

REFERENCIAS

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En Lesh, R. y Landau, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 7-44). N. York, EE.UU: Academic Press.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV.* Madrid, España: Gredos.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics,* 11-16. Londres, G. Bretaña: John Murray.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En *Nesher, P. y Kilpatrick, J.* (Eds.). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* . (pp. 96-112). Cambridge, G. Bretaña: Cambridge University Press.

Platón (1970). *Menón*.Madrid, España: Instituto de Estudios Políticos.

¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría?

DRA. ADELA JAIME
UNIVERSIDAD DE VALENCIA

Este artículo se centra en el **Modelo de Van Hiele**, aunque también haremos al final algún comentario sobre algunas de las ideas aportadas por **Vinner** sobre la formación de conceptos en geometría.

Aquellos lectores que deseen ampliar esta presentación pueden encontrar las ideas principales en los siguientes textos: Para el modelo de Van Hiele, en castellano Jaime y Gutiérrez (1990) o Jaime (1993); en inglés, Crowley (1987) y Hoffer (1983). Asimismo, en Gutiérrez y Jaime (1989) se presenta una relación comentada de bibliografía general sobre este modelo. Para las ideas que comentamos de Vinner aconsejamos leer Hershkowitz (1990).

El hecho de seleccionar el modelo de Van Hiele como núcleo central de esta charla se debe a que existen diversas investigaciones y se han formulado varias explicaciones sobre cómo aprenden los niños y sobre cómo va evolucionando el pensamiento cuando los niños pasan a jóvenes y luego a adultos, pero, centrado en la geometría, el modelo más específico y que se ajusta más a las situaciones que se plantean en las aulas, cuando los alumnos están aprendiendo, es el que formuló Van Hiele.

Antes de exponer las características del modelo, querríamos provocar por un momento una reflexión sobre algunas situaciones que se producen con frecuencia en las clases. Pensemos cómo suelen responder los estudiantes de un mismo grado y de grados diferentes, qué espera el profesor y cómo reaccionaría éste ante las diversas contestaciones. En particular, hemos seleccionado un ejemplo de cada uno de los temas siguientes: Identificación de polígonos y demostraciones.

Identificación de polígonos. Presentamos una hoja con diversas figuras y les preguntamos a los alumnos cuáles son los triángulos, los círculos, los cuadrados y los rectángulos.

¿Los alumnos identificarían correctamente, o de la forma que ustedes esperan en ese momento, todas las figuras?

La experiencia muestra que son numerosos los estudiantes de los primeros grados (1°, 2°) que no reconocen como triángulos, por ejemplo, los que mostramos en la Figura Nº 1, pero sí incluyen triángulos equiláteros e isósceles colocados en la posición usual (un lado horizontal, que en los isósceles es el lado desigual). También se produce lo anterior a veces en grados

GUTIERREZ, A. Y JAIME, A., *GEOMETRÍA Y ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 23-43. © 1998. "UNA EMPRESA DOCENTE"

superiores, llegando, incluso en los grados 9, 10 y 11, a la identificación de la Figura Nº 2 como triángulo. Con los demás polígonos se presentan situaciones análogas.

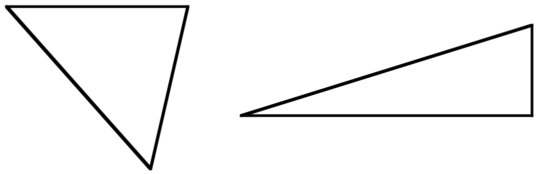


Figura Nº 1. No identificados como triángulos.

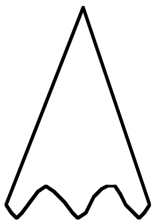


Figura Nº 2. Identificado como triángulo.

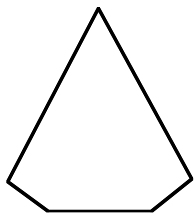


Figura Nº 3.

Si atendemos a las justificaciones que dan los estudiantes, nos encontramos con frecuencia con respuestas como ésta (referida al polígono de la Figura Nº 3):

"Sé que la figura es un triángulo porque lo he aprendido antes".

O bien, como las siguientes, para rectángulo: "Es con forma de rectángulo", "es más largo que un cuadrado", "es parecido a un cuadrado aplanado", "tiene cuatro lados, el de abajo y el de arriba iguales entre sí y los de los lados iguales entre sí, pero más cortos que los otros", "tiene lados paralelos dos a dos, dos más largos y dos más cortos".

Demostraciones. Cuando un profesor de Enseñanza Secundaria les pide a sus alumnos la demostración de que las diagonales de un rectángulo son iguales, lo que espera es una demostración formal.

El significado que posee la palabra "demostrar" para el profesor corresponde a un encadenamiento de propiedades, que se conocen de antemano o que se van obteniendo a partir de otras conocidas, hasta llegar al resultado que se desea. Una manera de abordar desde esa perspectiva el ejemplo que consideramos ahora consiste en la utilización de dos triángulos rectángulos, con los catetos respectivamente iguales (ver Figura Nº 4); aplicando el teorema de Pitágoras o criterios de semejanza de triángulos, las hipotenusas de los triángulos que corresponden a las diagonales del rectángulo son iguales.

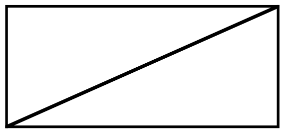


Figura Nº 4. .

Sin embargo, es muy frecuente que los estudiantes se limiten a medir las diagonales de uno o dos ejemplos concretos, dando así por concluida la demostración.

Esta interpretación de la "demostración" como verificación en uno o pocos casos se produce habitualmente, sea cual sea la propiedad propuesta, y no solamente en geometría, sino también en aritmética, álgebra y en cualquier otra rama de las matemáticas.

Para los comportamientos anteriores de los estudiantes, la actuación usual en el ámbito educativo es que el profesor califique con mala nota las respuestas que no se ajustan a lo que él pretende que contesten sus alumnos. Sin embargo, además de analizar la respuesta desde la perspectiva de un matemático, un buen profesor debería plantearse unas cuantas cuestiones, como: ¿Por qué no es correcta la respuesta?, ¿cuál es el fallo?, ¿no saben los alumnos realizar el trabajo propuesto?, ¿no conocen los conceptos o propiedades que hay que utilizar para llegar al resultado deseado?, ¿pueden entender el enunciado?

En el ejercicio sobre identificación de polígonos que planteábamos antes, la forma de proceder para que el alumno mejore es totalmente distinta, por ejemplo, en las dos situaciones siguientes:

1) El error se debe a que el estudiante no recuerda lo que es un rectángulo, pero sí puede aplicar correctamente la definición, si se le proporciona.

2) No puede interpretar una definición y, aunque se le suministre, procede a identificar en función de las imágenes de rectángulos que tiene grabadas en la mente.

El primer caso se puede subsanar de prisa y sólo requiere la memorización de la definición correcta, mientras que en el segundo caso es preciso un período más largo, con instrucción adecuada para fomentar el progreso en la forma de razonar.

En el ejercicio que mostramos antes, referente a una demostración, también conviene investigar el origen del error: ¿saben los estudiantes lo que son las diagonales?, ¿comprenden el planteamiento general de la pregunta?, ¿la palabra demostrar posee la misma acepción para los alumnos que para el profesor?, ¿sienten los estudiantes la necesidad de llevar a cabo una demostración basada en propiedades que se van enlazando?

Desde la perspectiva del modelo de Van Hiele, la explicación de numerosas incongruencias y errores reiterados por parte de los estudiantes, incluso aunque éstos se esfuercen por actuar bien, se encuentra en una incomprensión entre profesor y alumnos, los cuales hablan y razonan en diversos “niveles”.

EL MODELO DE VAN HIELE

Este modelo surgió a raíz de los problemas cotidianos que se presentan en el aula de matemáticas. En concreto, los Van Hiele eran dos esposos holandeses, profesores de enseñanza secundaria, que reflexionaron sobre la situación que se les presentaba todos los años, relativa a que los alumnos no entendían la materia que les explicaban, aunque se la presentaran varias veces y de formas distintas, siendo el tipo de conflictos siempre los mismos; en ocasiones los alumnos no sabían seguir el proceso de resolución de un ejercicio y otras veces no entendían lo que el profesor les pedía, o no podían interpretar de la misma manera que el profesor las cuestiones y, en general, las matemáticas que se les presentaban.

A partir de la observación de lo que sucedía, los Van Hiele diseñaron un modelo que se conoce como “el modelo de Van Hiele”. Pierre Van Hiele fue el diseñador teórico del modelo, y su esposa, Dina Van Hiele, desarrolló una aplicación práctica del modelo con unas lecciones de geometría. Ambas presentaciones las llevaron a cabo en sus tesis doctorales, publicadas en 1957. Pero transcurrió bastante tiempo hasta que se produjo la difusión a gran escala de las ideas propuestas por los Van Hiele. Fue Wirszup quien, en 1976, dio la voz de alerta en Estados Unidos sobre su interés. Desde entonces éste se ha acrecentado de tal manera que, en la actualidad, casi todas las investigaciones sobre geometría, incluidas las de diseño curricular, lo tienen en cuenta.

Entre las contribuciones sobre la validez del modelo hay que destacar tres proyectos desarrollados en Estados Unidos de 1979 a 1982, puesto que se han tomado como base o punto de referencia de la práctica totalidad de los estudios posteriores. Son éstos los proyectos de Brooklyn (Fuys y otros, 1988), Chicago (Usiskin, 1982) y Oregon (Burger y Shaughnessy, 1990).

El modelo de Van Hiele incluye dos aspectos:

- Descriptivo, en cuanto que intenta explicar cómo razonan los estudiantes. Esto se hace a través de la definición de cinco "niveles de razonamiento".
- Prescriptivo, porque da unas pautas a seguir en la organización de la enseñanza para lograr que los estudiantes progresen en su forma de razonar. Esto se lleva a cabo mediante la consideración de cinco "fases de aprendizaje".

LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

Los niveles constituyen la aportación fundamental del modelo. Se establece que la forma como se conciben los conceptos geométricos (matemáticos) no es siempre la misma y varía cuando se va progresando en la comprensión de la geometría (de las matemáticas).

Hay cinco formas distintas de entender los conceptos son los "niveles de razonamiento" y el progreso siempre se produce desde el primero, y de manera ordenada, a través de los niveles siguientes.

Mostramos a continuación esquemáticamente las principales características de cada nivel, las cuales ampliaremos con posterioridad.

Primer nivel

La consideración de los conceptos es **global**. No se tienen en cuenta elementos ni propiedades.

Si nos centramos en el caso de los polígonos, tras entrar en contacto con ese mundo, la primera apreciación que se lleva a cabo para su identificación tiene lugar mediante una visión de conjunto; ello permite diferenciar triángulos, cuadrados, rectángulos, etc., pero sin hacer referencia a sus características matemáticas, tales como igualdad de lados, valor de los ángulos, paralelismo, etc. Al comenzar el aprendizaje, y por lo tanto seguro que en pre-escolar y los primeros grados de enseñanza primaria, es la forma usual de razonamiento de los niños.

Segundo nivel

La característica fundamental es que los conceptos se entienden y manejan a través de sus **elementos**.

Ello hace posible la identificación y generalización de propiedades como características del concepto en cuestión. Pero esas propiedades se utilizan de manera independiente, sin establecer relaciones entre ellas, o sea, no se tiene en cuenta que unas implican otras. El descubrimiento y la comprobación de propiedades se lleva a cabo mediante experimentación.

Por ejemplo, cuando se ve, identifica o emplea un cuadrado, se piensa en algo cuya frontera son cuatro líneas, las cuales poseen una serie de características, como ángulos rectos, igualdad de lados, paralelismo entre lados, con diagonales iguales, etc., pero no se aprecia, por ejemplo, que la igualdad de diagonales es consecuencia de la igualdad de ángulos.

Tercer nivel

La característica básica de este nivel consiste en el establecimiento de **relaciones** entre propiedades. Por ejemplo, se comprende que en el rectángulo existe una relación entre la igualdad de diagonales y la de ángulos.

Cuarto nivel

Está caracterizado por la comprensión y el empleo del **razonamiento formal**, aspiración de todo profesor para sus estudiantes de enseñanza secundaria. Esto es, se comprende y utiliza el engranaje existente en el mundo matemático, por el cual existen unas primeras propiedades –axiomas– a partir de las cuales se puede construir el edificio matemático, en el cual las reglas de juego consisten en la aplicación estricta y correcta, según las leyes de lógica, de propiedades ya verificadas para obtener nuevas propiedades.

Quinto nivel

Es posible manejar diversas geometrías, procedentes de **diferentes sistemas axiomáticos**.

A continuación ampliamos los cuatro primero niveles. No el quinto puesto que, salvo en algún caso aislado, sólo se desarrolla en estudiantes de la universidad, con una buena capacidad y preparación en geometría.

Pero antes de continuar con esta descripción, es importante destacar que los niveles no están asignados a una edad particular de los estudiantes. Algunos no superan nunca el segundo nivel, mientras que otros alcanzan el cuarto a los 14 ó 15 años. La enseñanza y la experiencia personal son un factor importante en el progreso del razonamiento.

Primer nivel

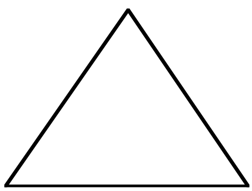


Figura Nº 5.

En la percepción global que se lleva a cabo en este nivel se pueden incluir atributos que no sean característicos del concepto en cuestión. Por ejemplo, si mostramos siempre triángulos, con un lado horizontal o triángulos equiláteros, puede que los alumnos no lleguen a reconocer como triángulos los no situados en esa posición o los de otro tipo. Esta limitación está fomentada por algunos profesores y por algunos libros de texto; por ejemplo, la figura 5 corresponde a la presentación que se hace en un libro de 2° grado para el concepto triángulo, en la que no se incluyen más dibujos que éste (del cual se dice que tiene 3 lados, 3 vértices y 3 ángulos, señalando cuáles son).

Otra característica es la percepción individual de las figuras; lo que se observa en una figura no se generaliza a todas las que son de esa misma clase.

También es frecuente que la consideración global del concepto no incluya propiedades fundamentales; de hecho, por lo general las justificaciones se basan en la percepción visual y hacen referencia a objetos reales o simplemente se menciona el nombre del concepto.

Así, alumnos de este nivel pueden considerar que los polígonos de la figura 6 son triángulos y, tanto en asignaciones válidas como incorrectas, explican las identificaciones realizadas de triángulos mediante expresiones como “se parece a …” o “tiene forma de …” un triángulo, o del estilo de: “es como un pico”, “tiene puntas”, Los estudiantes que identifican rectángulos suelen decir que “se parece a una puerta”, “tiene forma de rectángulo”, “se parece a un rectángulo”, Al describir otros polígonos se dan respuestas semejantes.

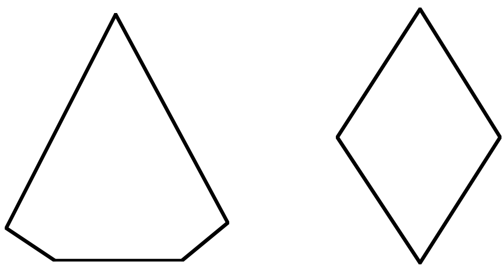


Figura Nº 6.

Segundo nivel

El razonamiento propio de este nivel incluye el descubrimiento y la generalización de propiedades a partir de la observación en unos pocos casos.

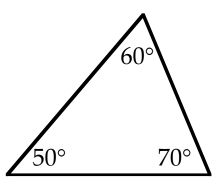


Figura Nº 7.

Esta forma de trabajo, consistente en la comprobación en pocos ejemplos, es lo que normalmente se entiende como "demostración" en este nivel. Por ello, si pedimos, por ejemplo, la demostración de la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, los estudiantes se limitarán a dibujar uno o dos triángulos y medir sus ángulos (ver Figura Nº 7); o bien dirán que en los triángulos los ángulos miden 60°, 60° y 60°, por lo que su suma es 180°. La situación que planteamos antes, al comienzo de esta exposición, sobre la demostración de la igualdad de las diagonales de un rectángulo mediante su medición en uno o dos ejemplos, corresponde a este nivel.

Para definir un concepto se proporciona una lista de propiedades, en la cual puede que se haya omitido alguna necesaria y/o que se hayan incluido más de las imprescindibles.

Figura Nº 8.

En el primer caso —omisión en la definición de una propiedad necesaria— es posible que, aunque no se verbalice explícitamente, sí se utilice la propiedad omitida. Por ejemplo, muchos estudiantes definen rectángulo como "paralelogramo con dos lados más largos que los otros dos", según lo cual deberían incluir casos como el de la Figura Nº 8, pero sin embargo saben que esos dibujos no corresponden a rectángulos porque sus ángulos no son rectos.

En el segundo caso —inclusión en la definición de más propiedades de las suficientes—, como los estudiantes de este nivel no se dan cuenta de la relación existente entre las propiedades, no saben cuándo es imprescindible incluir una propiedad y cuándo no hace falta. Es frecuente la idea de que una definición es mejor cuantas más propiedades conocidas se enuncien, por lo que estos estudiantes proporcionan listas de propiedades en las que incluyen todas las que recuerdan. Por ejemplo, una definición de rectángulo procedente de un estudiante de este nivel puede ser: "Paralelogramo con lados iguales dos a dos, ángulos rectos, dos diagonales iguales, dos ejes de simetría,..."

La ausencia de capacidad para relacionar las propiedades que definen un concepto con las que definen otro origina que las clasificaciones que se comprenden sean las disjuntas, no asimilándose plenamente las inclusivas o las que tienen intersecciones parciales.

Por ejemplo, se entiende perfectamente una clasificación de los triángulos en equiláteros, isósceles y escalenos cuando éstos se definen, respectivamente, como los triángulos con los tres lados iguales, dos lados iguales y uno desigual, y los tres lados desiguales (ver Figura Nº 9-a). Pero si los alumnos han aprendido anteriormente esta clasificación, no aceptarán, con sus consecuencias, una modificación de la definición de triángulo isósceles como triángulo *con al menos dos lados iguales*, con lo cual los equiláteros se convierten en un caso particular de los isósceles (ver Figura Nº 9-b).

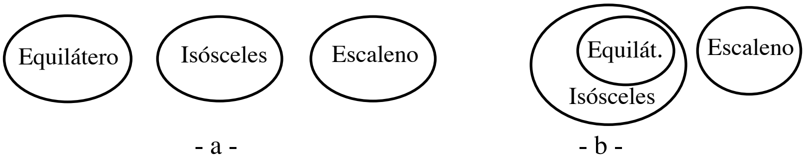


Figura Nº 9. Dos formas de definir y clasificar triángulos

Tercer nivel

La comprensión y la posibilidad de establecer relaciones tiene, entre otras, las consecuencias siguientes:

En las demostraciones el punto de partida suele ser la experimentación, pero se siente la necesidad de recurrir a alguna justificación general, basada en propiedades conocidas que conduzcan directamente al resultado; en particular, se pueden establecer y se buscan implicaciones simples entre resultados. Por ello, estos estudiantes son capaces de entender y reproducir una demostración formal, no compleja, cuando se les va explicando paso a paso, ya que entonces tan sólo deben comprender la conexión o implicación directa entre una situación y la siguiente.

Se comprenden y utilizan las definiciones con su sentido matemático, como conjunto mínimo, necesario y suficiente para definir un concepto; por eso ya no se da una lista muy larga de propiedades como definición y se intenta incluir todas las necesarias. También se aceptan definiciones nuevas de conceptos conocidos, aunque impliquen alguna variación sobre las características previas. Por ejemplo, si el estudiante conocía la definición del triángulo isósceles como "triángulo con dos lados iguales y uno desigual" y se le introduce una variación de ese concepto como triángulo que posee "al menos dos lados iguales", será capaz de emplear esta nueva definición.

Se comprenden y utilizan **clasificaciones no exclusivas**. Se establecen las relaciones entre los diversos conceptos a partir de sus definiciones. Por ejemplo, si se define rombo como cuadrilátero con todos sus lados iguales, los alumnos pueden comprender que todos los cuadrados son rombos, pero no todos los rombos son cuadrados.

Cuarto nivel

Se efectúan demostraciones formales, encadenando diversas implicaciones simples para llegar desde la hipótesis hasta la tesis.

El avance del cuarto nivel, respecto al tercero, en relación con las definiciones, consiste en la utilización de su equivalencia, esto es, los estudiantes de este nivel pueden admitir y demostrar si dos conjuntos de condiciones corresponden al mismo concepto. Por ejemplo, decir "cuadrilátero con sus diagonales iguales, perpendiculares y que se cortan en el punto medio" es lo mismo que decir "cuadrilátero con los cuatro lados iguales" y los estudiantes saben que, para afirmar esa igualdad, es preciso llevar a cabo la demostración de la doble implicación (Definición 1 -> Definición 2 y Definición 2 -> Definición 1).

PROPIEDADES DEL MODELO DE VAN HIELE

Hay unas cuantas características que es importante conocer para comprender mejor la propuesta realizada por los Van Hiele.

Secuencialidad en la adquisición de los niveles: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles de razonamiento. Por ejemplo, si un alumno ha adquirido el razonamiento de nivel tres, necesariamente tiene que haber superado los niveles dos y uno.

Especificidad del lenguaje: Cada nivel tiene un lenguaje propio. Esto tiene un sentido más amplio que las palabras empleadas para designar los elementos y las propiedades, puesto que incluye la interpretación que se le da a ciertos vocablos y expresiones. Por ejemplo, ya hicimos alusión anteriormente a la manera diferente de comprender la palabra "demostrar" en algunos niveles.

La utilización de lenguaje de distintos niveles entre dos personas (profesor-estudiante o entre estudiantes) conduce a una incomprensión porque cada uno le da su propia interpretación, que no coincide con la del otro.

Paso de un nivel al siguiente: La cuestión es: ¿Cómo se produce el cambio de un nivel al siguiente? ¿De forma brusca o paulatinamente?

La propuesta original de los Van Hiele se decantaba por el paso brusco, esto es, un individuo comienza razonando según las características del primer nivel y llega un momento en el que ve la geometría de otra manera, desde la perspectiva del segundo nivel; con los demás niveles el cambio sería análogo. Gráficamente podemos representar esta visión mediante una escalera, como la que se muestra en la Figura Nº 10.

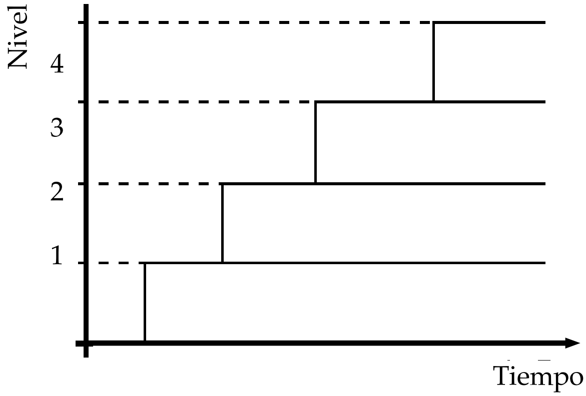


Figura Nº 10.

Sin embargo, las investigaciones que han analizado esa característica han mostrado que no sucede así, sino que hay un período durante el cual aparece razonamiento de dos niveles consecutivos. La gráfica que muestro da un visión de la forma como nosotros pensamos que se produce la transición, Jaime (1993).

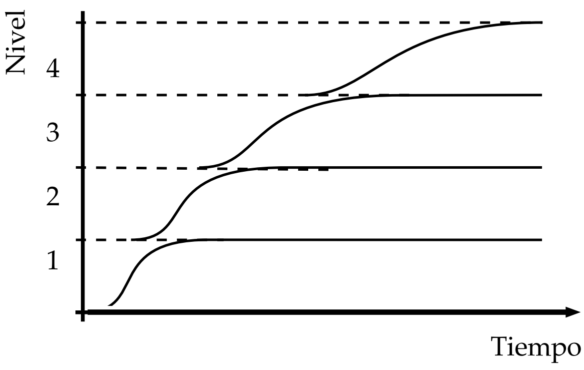


Figura Nº 11.

Globalidad o localidad: La globalidad supondría que una persona tiene el mismo nivel de razonamiento en todos los conceptos de geometría. Las investigaciones parecen indicar que eso no sucede, que el nivel de razonamiento es local, o sea que si un individuo razona a cierto nivel en un concepto, por ejemplo, "polígonos", es posible que razone a otros niveles en otro concepto, por ejemplo, "isometrías".

Instrucción: La adquisición de los sucesivos niveles no es un aspecto biológico, pues interviene en gran medida la instrucción recibida y la experiencia personal.

Por tanto, no existe una edad a la cual se alcance cada uno de los sucesivos niveles; de hecho, la mayor parte de los estudiantes no alcanzan el cuarto nivel a lo largo de toda su vida y algunos no superan el segundo.

Con la expresión “experiencia personal” queremos decir que la instrucción recibida en el aula no es la única que influye en la forma de comprender un concepto, pues también juegan un papel importante las situaciones ajenas a la vida escolar en las que el individuo se encuentra con el concepto a considerar o con otros relacionados.

LAS FASES DEL MODELO DE VAN HIELE

Una vez conocida la manera de evolucionar la forma de razonar, es importante para un profesor conocer cómo puede orientar sus clases para ayudar a sus alumnos a que progresen adecuadamente.

Van Hiele formula una propuesta, desde una perspectiva constructivista, en cuanto que incluye la idea de que el alumno participa activamente en la construcción de su conocimiento.

Para cada una de las cinco “fases de aprendizaje” que propone, Van Hiele indica cómo deben ser las actividades propuestas, la intervención del profesor, etc. para ayudar al estudiante a avanzar desde el nivel en el que se encuentra hasta el nivel siguiente.

Es importante tener en cuenta que el paso de un nivel al siguiente requiere tiempo, años incluso si los estudiantes no poseen todavía en ningún campo de la geometría el nivel para el que se están desarrollando las actividades en ese momento. Por tanto, no se puede pensar que una secuencia de actividades que recorra ordenadamente las fases asegurará la adquisición del nivel correspondiente en un período limitado de tiempo, aunque esté bien organizada, con suficientes actividades. Los estudiantes necesitan asimilar cada uno de los objetivos que se proponen, lo cual puede ser lento.

<u>Fase primera: Información</u> Su finalidad es la obtención de información recíproca profesor alumno. Por su parte, el profesor averigua qué saben los alumnos sobre el tema que se va a abordar y la forma de razonar que tienen. Por otra parte, los alumnos entran en contacto con el objetivo de ese nivel para ese concepto.

<u>Fase segunda: Orientación dirigida</u> - El profesor dirige a los alumnos para que éstos vayan descubriendo lo que va a constituir la esencia de ese nivel. Esta fase es una de las más potentes de toda la instrucción que permite llegar de un nivel a otro porque entonces es cuando los alumnos van a construir los elementos fundamentales del nivel.

La dirección por parte del profesor no significa que éste le indique al estudiante cómo resolver el ejercicio, sino que debe planificar las situaciones que propone a sus alumnos para que ellos puedan establecer las características importantes, básicas del nivel.

Fase tercera: Explicitación - Su objetivo es que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas anteriormente y que consoliden el vocabulario propio del nivel.

Las actividades deben hacer que los estudiantes expresen, verbalmente o por escrito, lo que han descubierto anteriormente y se deben fomentar las discusiones entre los estudiantes y diálogos profesor-alumnos.

Fase cuarta: Orientación libre - Orientada a consolidar los aspectos básicos del nivel.

Las actividades deben permitir resolver situaciones nuevas con los conocimientos que se adquirieron previamente. No deben orientarse a la consecución de ningún objetivo básico de ese nivel, puesto que éstos ya se deben haber obtenido en la segunda fase. Son adecuadas situaciones abiertas, en las que el estudiante pueda explorar diversas posibilidades, pero siempre utilizando lo que aprendió anteriormente.

Fase quinta: Integración - Tiene como objetivo establecer y completar la red de relaciones objeto de ese nivel para el concepto que se trabaja.

El profesor debe proponer resúmenes de todo lo aprendido y exigir la memorización de los resultados fundamentales.

EJEMPLO

A continuación nos serviremos de la propiedad del valor de la suma de los ángulos de un triángulo para mostrar una forma adecuada de trabajo en cada uno de los cuatro primeros niveles.

En el primer nivel no tiene sentido desarrollarla porque los estudiantes no la comprenden.

Una forma de trabajo adecuada para el segundo nivel consiste en que los estudiantes recorten los tres ángulos de diversos triángulos y los peguen juntos, tal como mostramos en la Figura Nº 12. De esa manera observan que siempre se forma un ángulo llano y generalizan la propiedad. Para evitar errores en la colocación de los ángulos, resulta adecuado señalar, antes de recortar, dónde está el vértice de cada ángulo. Una variante de esto consiste en situar juntos los ángulos plegando dos de ellos junto al tercero, en vez de recortarlos.

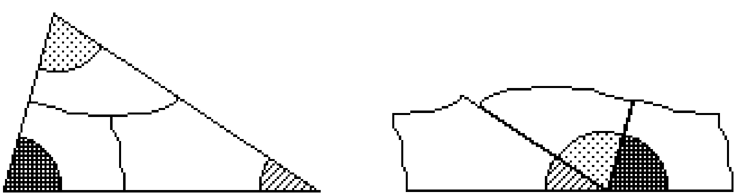


Figura Nº 12.

También se les pueden suministrar a los estudiantes diversas mallas de triángulos, de manera que los triángulos de cada trama sean iguales (ver Figura Nº 13). En cada malla, después de comprobar la igualdad de los triángulos, los alumnos pueden colorear todos los ángulos iguales con el mismo color. Así se aprecia que los tres ángulos del triángulo juntos forman un ángulo llano.

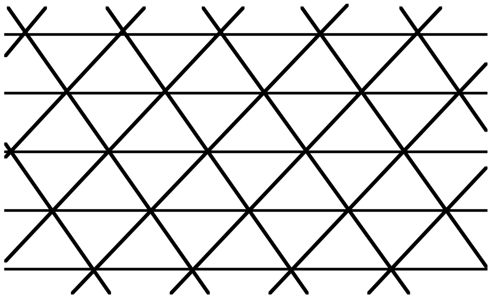


Figura Nº 13.

En el tercer nivel, si los estudiantes conocen la igualdad de ángulos que se forman al cortar dos rectas paralelas por otra, se les puede recordar esa propiedad, e incluso dársela por escrito, y proporcionarles un esquema de la demostración formal para que ellos expliquen los pasos implicados. En el ejemplo que muestro a continuación parto de la situación en la que los triángulos son acutángulos, con el fin de que los alumnos apliquen posteriormente esa demostración a situaciones análogas (triángulos rectángulos y obtusángulos), pero se podría proponer la demostración sin hacer esa distinción.

Ejercicio: Demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo acutángulo es 180°. Proporcionamos las dos indicaciones siguientes:

1) Dado cualquier triángulo acutángulo, hay que demostrar que A + B + C = 180° (ver Figura Nº 14-a). Para ello, se traza una recta paralela a uno de los lados, de manera que pase por el vértice opuesto (ver Figura Nº 14-b). Prolongamos los lados del triángulo que pasan por ese vértice (ver Figura Nº 14-c), con lo cual se forman unos ángulos.

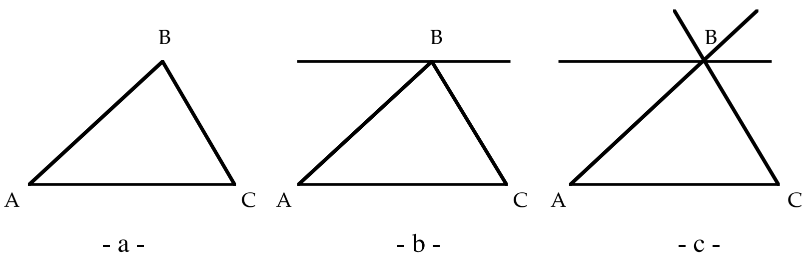


Figura Nº 14.

2) Recordemos la propiedad siguiente: Al cortar dos rectas paralelas por una transversal, todos los ángulos agudos son iguales entre sí y todos los obtusos son iguales entre sí. Sirviéndose de la propiedad anterior, justificar que A+B+C = 180°, una vez utilizando la Figura Nº 15 para buscar, junto al vértice B, un ángulo igual al A y justificar de nuevo esa igualdad utilizando la Figura Nº 16.

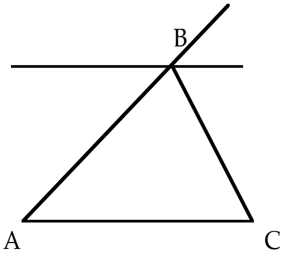


Figura Nº 15.

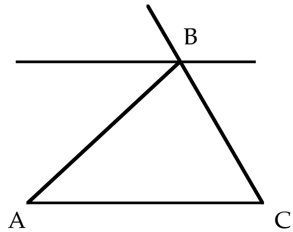


Figura Nº 16.

Una vez resuelto el ejercicio anterior, ver qué sucede con los triángulos rectángulos y con los obtusángulos. ¿La suma de sus ángulos es 180°? Justificar la respuesta.

En este último apartado no es válida una justificación basada en la memorización de la propiedad; hay que pedirle al estudiante un razonamiento análogo al empleado para los triángulos acutángulos.

En el cuarto nivel hay que exigirles a los alumnos una demostración formal, como, por ejemplo, la que hemos propuesto para el tercer nivel, pero siendo ahora los propios estudiantes los que la desarrollen. No obstante, estar en el cuarto nivel no supone tener las "ideas felices" que en ocasiones se requieren para llevar a cabo una demostración. En este caso concreto, se les puede indicar a los estudiantes que tracen la paralela a un lado del triángulo y que ellos completen la demostración.

VINNER Y LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS

Una de las aportaciones importantes de Vinner es su identificación de lo que es la imagen de un concepto (**concept image**) que posee cada individuo, frente al concepto.

El concepto es lo que se desprende de la definición matemática. Por ejemplo, un cuadrado es un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos. La definición matemática es la que define exactamente los cuadrados; o sea, a partir de la definición matemática se puede identificar exactamente qué figuras son cuadrados y qué figuras no son cuadrados.

Por otra parte, cuando a una persona se le presenta un concepto, esa persona se forma una idea de lo que es ese concepto, que no necesariamente

coincide por completo con el que se deriva de su definición. A esa visión particular es lo que se denomina la imagen del concepto que posee esa persona.

La imagen del concepto no consiste solamente en uno o varios dibujos almacenados en la mente, sino que, cuando la capacidad de la persona es suficientemente elevada, también incluye sus propiedades matemáticas, su relación con otras propiedades o conceptos, etc.

Cualquier ejemplo concreto de un concepto siempre posee las características de ese concepto junto con otras que no son necesarias para ese concepto. Siguiendo la terminología empleada por el grupo de investigadores en torno a Vinner, las designaremos como atributos relevantes y atributos irrelevantes, respectivamente. De manera más detallada, diremos que:

Atributo relevante es toda aquella característica que tiene que cumplir un caso necesariamente para ser un ejemplo de ese concepto. Por ejemplo, atributos relevantes de los cuadrados son: ser polígono, de cuatro lados, con todos sus lados iguales, todos sus ángulos rectos, diagonales iguales y perpendiculares, cuatro ejes de simetría, etc.

Los **atributos irrelevantes** son las características que no cumplen todos los casos de ese concepto; pueden cumplirlas muchos casos, pero no todos. Por ejemplo, para el concepto paralelogramo es irrelevante que los cuatro lados sean iguales o que todos sus ángulos sean rectos, puesto que no todos los paralelogramos cumplen esa propiedad.

En términos de atributos relevantes e irrelevantes,

En una definición sólo hay atributos relevantes. Se trata de un subconjunto mínimo de tales atributos, de manera que los demás se puedan obtener a partir de ellos. Por ejemplo, la definición de triángulo como “polígono de tres lados” implica que los triángulos tienen tres ángulos; ésta es una característica relevante, pero no es necesario especificarla en la definición, puesto que se deduce de las características indicadas en ella.

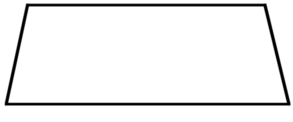


Figura Nº 17.

Los ejemplos poseen todos los atributos relevantes. Eso es lo que los caracteriza. Pero siempre van a poseer algunos atributos irrelevantes, puesto que cualquier situación concreta posee unas características propias, no inherentes al concepto. Por ejemplo, si mostramos la Figura Nº 17 como ejemplo de cuadrilátero, tiene dos lados paralelos entre sí y otros dos que no lo son entre sí, lo cual no cumplen todos los cuadriláteros, por lo que es una característica irrelevante para el concepto "cuadrilátero"; lo mismo sucede en esa figura con el hecho de que todos los ángulos son convexos, que los lados no paralelos son iguales, y con otras características.

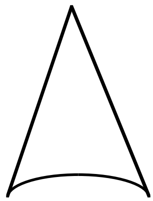


Figura Nº 18.

Los contraejemplos no poseen todos los atributos relevantes. Pueden tener algunos, pero nunca todos. Por ejemplo, la Figura Nº 18 es válida como contraejemplo de triángulo porque no es un polígono.

En la tabla que mostramos a continuación aparece de manera esquemática lo que acabamos de decir:

	Atr. Relevantes	Atr. Irrelevantes
Ejemplo	Todos	(Algunos)
Contraejemplo	No todos	(Algunos)
Definición	Cjto. mínimo, sufic.	Ninguno

Cuando la calidad del razonamiento de un individuo no es suficientemente elevada, se pueden omitir atributos relevantes o incluir atributos irrelevantes en la caracterización de un concepto. Entre estos últimos son frecuentes los que poseen una fuerte influencia visual, tales como ciertas posiciones en los polígonos (ya mencionamos en el apartado dedicado al modelo de Van Hiele el hecho de que muchos estudiantes sólo reconocen triángulos o cuadrados cuando tienen algún lado horizontal). A medida que se progresa en el razonamiento, éste se hace más analítico y se emplea más la definición del concepto en cualquier tarea.

Para comprender un poco cómo evoluciona la imagen que se posee de un concepto, vamos a presentar una secuencia de ejemplos y contraejemplos. Es importante reflexionar sobre las modificaciones que se introducen mentalmente sobre lo que se abstrae tras la presentación de cada nuevo caso, como el concepto que se está mostrando.

En Hershkowitz, Bruckheimer, Vinner (1987) se puede ver una secuencia que utilizó este grupo de investigadores. Lo que presentamos en la figura 19 es una secuencia diseñada por nosotros. Llamaremos "Misterio" al concepto del cual presentamos ejemplos y contraejemplos. Para conseguir el fin deseado, hay que observar cada una de las figuras, sin mirar las siguientes, aunque sí las anteriores, tener en cuenta lo que se indica sobre si es o no es un "misterio" e ir explicando en cada caso lo que se entiende por "misterio".

A continuación mencionamos sólo algunos puntos de interés: hasta el caso 5, todos poseen dos lados opuestos paralelos, por lo que se podría pensar en que ello es una característica relevante; ello se desmiente en el caso 5. Hasta el caso 10 nunca se cruzan los lados, por lo que sucede algo análogo con esa característica. Hasta el caso 19 siempre uno de los lados era curvo y en el caso 20 se asegura la inclusión de cuadriláteros cóncavos como "misterio".

De cara a la enseñanza, y si tenemos en cuenta las ideas expuestas por van Hiele, la primera aproximación a los conceptos se lleva a cabo mediante una visión global, en la que los ejemplos presentados juegan un papel fundamental, puesto que sus características visuales son las que se tendrán en cuenta. Por tanto, la introducción de un concepto mediante ejemplos y contraejemplos es una forma adecuada. Hemos visto en la secuencia presentada anteriormente cómo se puede inducir a ideas equivocadas, a la inclusión como relevantes de atributos que no lo son (paralelismo de lados, un lado curvo, etc.), si no se presenta una selección adecuada de ejemplos y contraejemplos. A medida que se incrementa la capacidad de análisis, los estudiantes pueden verbalizar las propiedades, comparar las condiciones consideradas como necesarias con las que presenta una figura y, finalmente, proporcionar una definición matemática.

Un análisis en términos de atributos relevantes e irrelevantes le permite con frecuencia al profesor diseñar una secuencia adecuada de ejemplos y contraejemplos, bien como presentación del concepto o, en un nivel más avanzado, para obtener las características fundamentales y las superfluas. Como ejemplo de ello hemos elegido un concepto muy simple: Triángulo.

Triángulo = Polígono + tiene tres lados.

Polígono = Línea poligonal + simple + cerrada.

Línea poligonal = Segmentos + unidos por sus extremos.

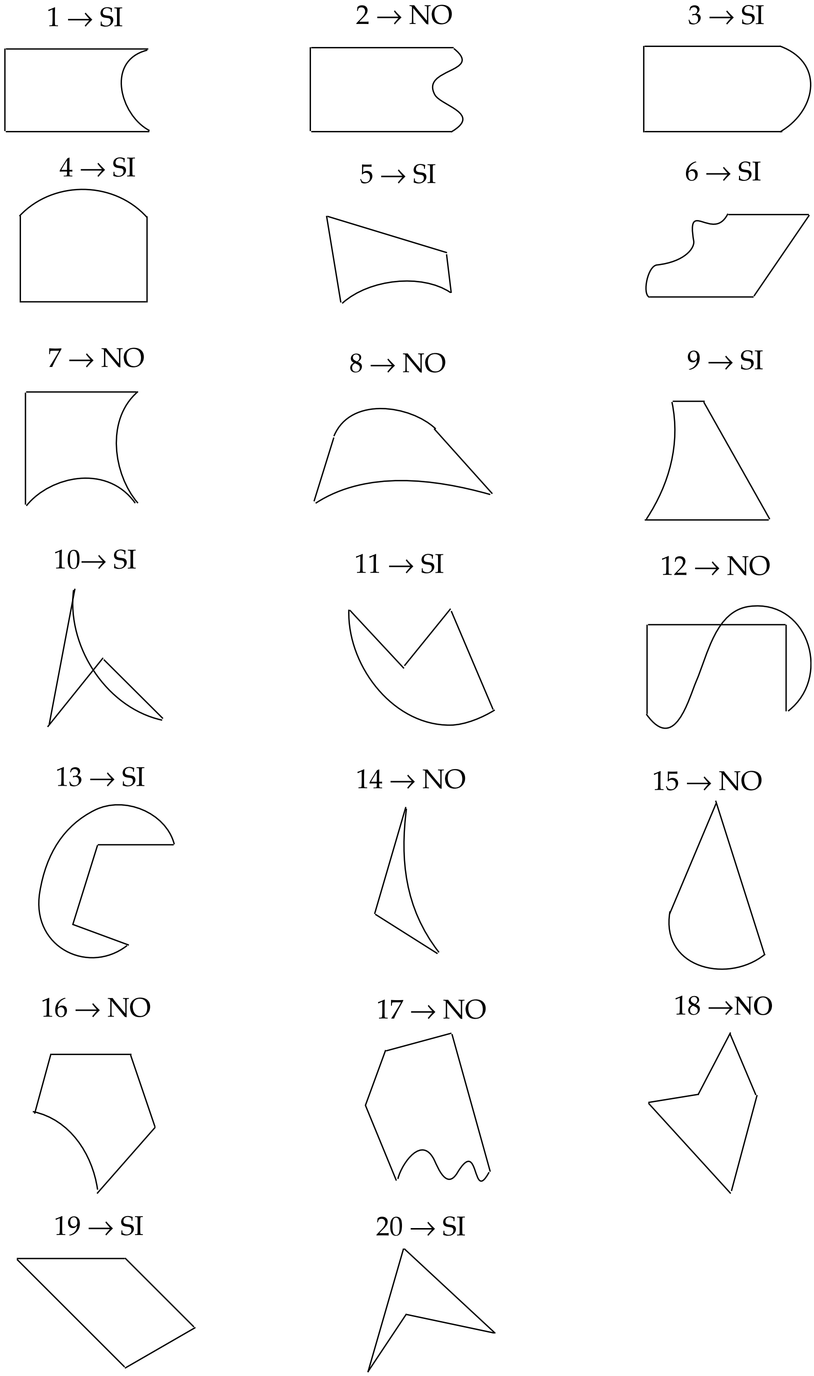

1 → SI
2 → NO
3 → SI
4 → SI
5 → SI
6 → SI
7 → NO
8 → NO
9 → SI
10→ SI
11 → SI
12 → NO
13 → SI
14 → NO
15 → NO
16 → NO
17 → NO
18 →NO
19 → SI
20 → SI

Figura Nº 19.

Para los contraejemplos hay que negar al menos un atributo relevante (segmentos, unidos por sus extremos, simple, de tres lados). Además, la experiencia muestra algunos casos concretos que conviene incluir como contraejemplos, en particular, cuadriláteros cóncavos o rombos. En la figura 20 presentamos algunos contraejemplos.

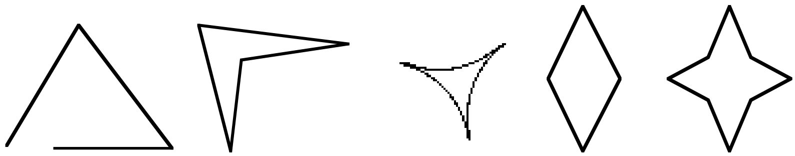


Figura Nº 20.

Respecto a los ejemplos, hay que evitar que algún atributo irrelevante figure en todos ellos, pues eso conduciría a su consideración como relevante. La experiencia nos suministra información sobre cuáles son los atributos irrelevantes que conviene tener en cuenta porque con frecuencia se toman como relevantes. En este caso conviene incluir triángulos con y sin algún lado horizontal, con diversas inclinaciones y de diversas clases según sus lados y sus ángulos.

No obstante, una secuencia de ejemplos y contraejemplos no cierra nunca el concepto, pero sí es importante un buen diseño para la inclusión de casos correctos en la imagen mental de un individuo que tiene escaso poder analítico (primeros niveles de Van Hiele).

REFERENCIAS

Burger, W.F., Shaughnessy, J.M. (1990). *Assessing children's intellectual growth in geometry* (final report). Corvallis: Oregon State University.

Crowley, M.L. (1987). The Van Hiele Model of the development of geometric thought. En *N.C.T.M. Learning and teaching geometry, K-12* (1987 Yearbook) (pp. 1-16) Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph n° 3). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gutiérrez, A., Jaime, A. (1989). Bibliografía sobre el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. *Enseñanza de las Ciencias, 7* (1), 89-95.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. En *N.C.T.M.* pp. 222-235.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. En *Lesh, R.; Landau, M. (1983): Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 205-227) New York: Academic Press.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). Valencia: Universidad de Valencia.

Jaime, A., Gutiérrez, A. (1990 b). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele. En Llinares, S., Sánchez, M.V., *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384) (colección "Ciencias de la Educación" n° 4). Sevilla: Alfar.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. Columbus: ERIC.

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)* (tesis doctoral). Utrecht:Universidad de Utrecht. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School* (tesis doctoral). Utrecht: Universidad de Utrecht. (Traducción al inglés en *Fuys; Geddes; Tischler (1984),* pp. 1-206).

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. En Martin, J.L., Bradbard, D.A., *Space and geometry (*pp. 75-97) Columbus: ERIC.