SECCION
DE
PROBLEMAS

UN PROBLEMA "GLOBALIZADOR"

Juan M. Linares Cáceres y
Justino A. González Pintado
Instituto Politécnico
Toledo

De todos es conocido el lamentable abandono que se hace en la enseñanza de la, en otra época, gloriosa Geometría. Sin entrar en la casuística de tal hecho, vamos a presentar una experiencia que pensamos tiene una riqueza múltiple. Por un lado, tiene como protagonista la Geometría; por otro, constituye un método de trabajo, de interconexión entre la teoría y la práctica, objetivo que debiera ser principal en la Formación Profesional. Finalmente, marca la evolución del alumno desde su formación básica hasta su preparación técnica.

Surge la experiencia durante una conversación informal en la que se nos propuso el siguiente curioso problema:

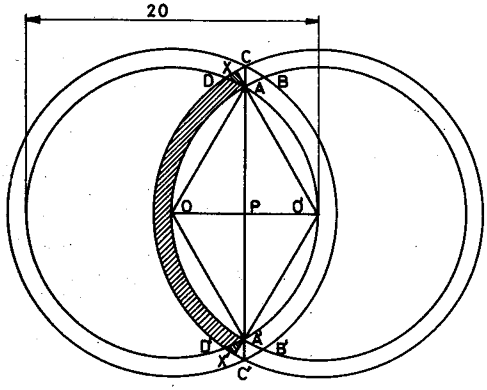
Un prado circular de 20m de diámetro es heredado por dos hermanos. Uno de ellos, poseedor de una cabra, desea conocer la longitud de la correa con que ha de atarla para que alcance a comer la hierba correspondiente a la mitad del área del prado.

Un alumno con fuerte preparación en Geometría abordará el problema por una vía muy distinta a la que seguirá otro con conocimientos de cálculo integral.

La resolución por el primer camino presenta una gran belleza y creatividad. Tiene la ventaja de ser accesible a un número mayor de alumnos de enseñanza media. Un inconveniente es que la solución que se obtiene es sólo aproximada.

La ventaja de la resolución por cálculo integral es que la solución es todo lo afinada que queramos o podamos. Además, permite utilizar un microordenador para resolver la ecuación trascendente que resulta. El inconveniente está en que es menor el número de alumnos en condiciones de resolverlo.

RESOLUCION GEOMETRICA



$O'A = O'A' = O'O = 10$

$OP = O'P = 10/2 = 5$

$AP = A'P = 10\sqrt{3}/2 = 8'666$

$\widehat{AO'A'} = 120^{o}$

S círculo $= 3'14 \cdot 10^2 = 314$

S come la cabra $= 157$

S rombo $AOA'O' = 8'666 \cdot 10 = 86'666$

S sector $AO'A' = 10^2 . 3'14 . 120 / 360 = 104'666$

S segm.circular AO' $(=O'A'=A'O=OA) = (104'666-86'666)/2 = 9$

S figura $O\overset{A}{\underset{A'}{\bigcirc}}O' = 86'666 + 4.9 = 122'666$

S rayada = $157 - 122'666 = 34'333$

Suponiendo que este valor sea un tercio de la superficie de la corona, resulta

S corona = 103

y, por tanto,

$$\text{Cuerda } O'X = \sqrt{\frac{\text{S círc.} + \text{S cor.}}{\pi}} = 11'521 \quad \text{(por defecto)}$$

Suponiendo las figuras ACD y $A'C'D'$ triángulos equiláteros cuya altura es

$AX = 11'521 - 10 = 1'521$

resulta para el valor de un lado

$AC = CD = DA = 1'521.2 \ / \ \sqrt{3} = 1'755$

y, entonces,

S $\widehat{ACD} \simeq 1'755.1'521 \ / \ 2 = 1'3338$

siendo

$\widehat{ACD} = \widehat{AXD} + \widehat{A'X'D'}$

Por tanto,

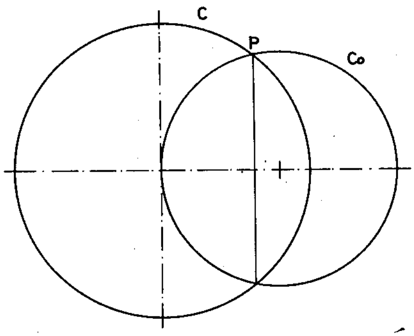
S $1/3$ cor. $= AXA'X' = 1'3338 + 34'333 = 35'666$

S cor. $= 35'666 \ . \ 3 = 106'998 \simeq 107$

y, finalmente,

$$\text{Cuerda } O'X = \sqrt{\frac{\text{S cir.} + \text{S cor.}}{\pi}} = 11'5762$$

RESOLUCION POR CALCULO INTEGRAL



C_o : circunf. contorno del prado

C : frontera de alcance de la cabra (de radio R , incógnita)

$C_o \equiv (10\ ,\ 0) \equiv (x-10)^2 - y^2 = 10^2 \equiv x^2 - y^2 - 20x = 0$

$C \equiv x^2 - y^2 - R^2 = 0$

Punto de intersección:

$R^2 - 20x = 0 \Longrightarrow x = R^2/20$ (abscisa de P)

Funciones circulares:

$$C_o \equiv y^2 = 20x - x^2 \Longrightarrow y = +\sqrt{20x - x^2}$$

$$C \equiv y^2 = R^2 - x^2 \Longrightarrow y = +\sqrt{R^2 - x^2}$$

Area integral:

$$S = \int_0^{R^2/20} \sqrt{20x-x^2}\ dx + \int_{R^2/20}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\ dx$$

Resueltas ambas integrales y, teniendo en cuenta que el área limitada por abscisa representa la cuarta parte (25π) del área de C_o , tenemos la siguiente ecuación trascendente:

$$1/2\left[R\ 20^2-R^2 - 10^2\ arc\ sen\ \frac{R^2-20^2}{20^2} - R^2\ arc\ sen\ R/20\right] + \frac{(200-R^2)\ \pi}{4} = 0$$

La solución se obtiene por aproximaciones sucesivas y es accesible a cualquier calculadora que tenga la función *arco seno*. Nosotros la hemos obtenido mediante un programa para el *Sinclaire ZX Spectrum*, resultando

$R = 11'596164$

Consideración final

Creemos que este tipo de problemas pertenece a los que son metodológicamente estimulantes por su enunciado sencillo, práctico, y que quizás esté dentro del campo de interés de alumnos de enseñanza media. Además, convenientemente programado, puede marcar la trayectoria que deben seguir en la adquisición de los conceptos matemáticos desde que se inician en la F.P.1 hasta que finalizan sus estudios de F.P.2.