NUMEROS,13 - 1986

EL RAZONAMIENTO EN MATEMATICAS

José Luis Gallego García
I.B. de Baza (Granada)

Francisco Linares Teruel
I.B. de Caravaca (Murcia)

Actualmente, todos los que nos dedicamos a la enseñanza estamos viviendo una situación especial de desánimo y desencanto general de los alumnos, lo que ocasiona al mismo tiempo una situación similar entre nosotros. Y se hace más notoria aún entre los que pretendemos enseñar Matemáticas, ya que las peculiaridades de esta asignatura hacen más dificultosa su comprensión, como es reconocido habitualmente.

Ante esta problemática, todos nos hemos trasladado alguna vez al pasado. Unos, recordando nuestro tiempo de alumnos de Bachillerato; otros, sus no muy lejanos años de profesores en los que nadie se extrañaba de que suspendieran en Matemáticas porcentajes astronómicos, por una razón muy sencilla : porque eso no ocurría.

Resulta muy difícil motivar al alumno porque los estímulos que podemos ofrecerles son notablemente menos sustanciosos que los exteriores que reciben de la sociedad actual. Estamos jugando indudablemente en clara desventaja.

Insistimos en que esta situación, general en la enseñanza, la sentimos los profesores de Matemáticas de forma especial. Para darse cuenta, basta ojear las actas finales de cualquier instituto de Bachillerato.

PECULIARIDADES DE LA MATEMATICA

Vamos a tratar de analizar esa serie de peculiaridades que hacen tan atragantable la Matemática entre nuestros alumnos.

En primer lugar,nos encontramos con que nuestra disciplina es una ciencia abstracta,sin relación aparente con la realidad.¿A quién se le podría ocurrir mantener una conversación sobre Matemáticas con los amigos o con la familia? Sin embargo,sí es frecuente hablar de temas históricos,de obras literarias,de fenómenos geológicos,...

Además,la Matemática es sistemática,organizada a partir de unos axiomas y a base de relaciones lógicas que hacen de ella una ciencia exigente y rigurosa. Este rigor crea en el alumno un vacío de subjetividad que producirá grandes efectos en aquellos que sean sentimentalmente muy emotivos.

Otra característica esencial es su grado de acumulatividad,lo que la diferencia de otras muchas asignaturas en las que hay capítulos que tienen mínima o nula relación con otros. Esta característica ocasiona uno de los grandes problemas con los que nos encontramos los profesores,y que casi siempre sale a flote cuando queremos justificar el fracaso de nuestra enseñanza. Solemos decir : "es que no tienen base". Efectivamente,es esta una gran dificultad que hemos de vencer,aunque queremos añadir que dicha falta de base,a la que tan a menudo nos referimos, no debe ser achacada,en la mayoría de los casos,a nuestros antecesores, sino,simplemente,al olvido,a la falta de síntesis global o a la forma en que han adquirido los conocimientos anteriores.

Por otro lado,también tiene nuestra materia otras características que la hacen agradable a algunos alumnos. Tal es,por ejemplo,la satisfacción que les produce la resolución de un problema,el haber creado algo. Para ellos,la Matemática no es una amenaza,sino un obstáculo a vencer.

RAZONAMIENTO Y CREACION

De todas formas,esas características especiales de las Matemáticas no justifican plenamente el que haya tal cantidad de alumnos re -

fractarios a ellas, a los que les cueste tanto esfuerzo entenderlas, ya que las Matemáticas, no lo olvidemos, se basan en reglas lógicas aceptadas por cualquier mente clara.

Parece sorprendente que no todos los alumnos puedan seguir un razonamiento matemático en una clase, y que aun los que pueden hacerlo encuentren una gran dificultad en ello. Creemos que esto es constatable por cualquier profesor. Y no hablamos de aprenderse de memoria todo un largo razonamiento, sino simplemente de ir entendiéndolo al ofrecérselo paso a paso. Es más, todos conocemos alumnos que razonarían bien ante un determinado problema que se les pudiese presentar en la vida y, sin embargo, son incapaces de seguir una larga demostración matemática, que no es más que una suma encadenada de razonamientos cortos semejantes a los que resuelven con facilidad.

En una demostración matemática no es tan importante la memoria como puede parecer. No es una sencilla yuxtaposición de silogismos, sino que estos están colocados en un cierto orden, y éste es lo más importante del razonamiento. Si el alumno tiene la "intuición" de ese orden, de manera que de un vistazo pueda percibir el conjunto del razonamiento, ya puede estar tranquilo; aunque no posea una gran memoria, difícil será que se le olvide la demostración. El razonamiento mismo le irá conduciendo a través de ella; cada elemento de la demostración irá colocándose en su sitio y, sin hacer un esfuerzo especial, llegará al final.

Pues bien, ahí está la clave del buen alumno en Matemáticas; en esa "intuición" del orden matemático que, según nuestra experiencia al menos, pocos alumnos poseen. La mayoría no sólo carece de ese algo difícil de definir, sino que, por su escasa memoria además, es incapaz de entenderlas. Suelen recurrir entonces al tópico de todos conocido de que "el profesor no sabe explicar, no se le entiende". Por supuesto que pueden llevar parte de razón, pero no toda; esto no puede ser motivo absoluto y expiatorio de su incapacidad para comprender nuestra asignatura.

Otros tienen esa intuición en grado mínimo, pero están dotados de una memoria poco frecuente y de una gran capacidad de atención. Apren den los pasos de la demostración uno a uno y su gran capacidad memorística les permite unirlos. Están capacitados para entender las Matemáticas e, incluso, para aplicarlas en ocasiones; no obstante, son incapaces de crear nada. Son los clásicos alumnos que en un ejercicio teórico nos sorprenden gratamente, pero tienen muchas dificultades en el práctico.

Finalmente, habrá que hablar de los que poseen esa "intuición" en grado notable que, desgraciadamente, son muy pocos. Estos no sólo no tienen problemas de comprensión, sino que, aunque su memoria no sea extraordinaria, están en condiciones de crear con más o menos éxito según esa intuicón esté más o menos desarrollada.

Pero, veamos lo que es "crear" en Matemáticas. No es, desde luego, hacer combinaciones nuevas con entes matemáticos ya conocidos. Esto es algo que cualquiera estaría en condiciones de realizar y, además, la mayoría de esas combinaciones carecerían de interés. Crear es, precisamente, elegir las combinaciones útiles, que, indudablemente son minoría, y desechar el resto.

Sería absurdo pretender conseguir de nuestros alumnos creadores en Matemáticas, pero pensamos que sí deberíamos intentar potenciar esa intuición del orden matemático o, al menos, no bloquearla, como hacemos inconscientemente con bastante frecuencia. Cuántas veces dictamos unos ejercicios y, nada más acabar su enunciado, se los estamos resolviendo? Con todo nuestro buen ánimo de facilitar la comprensión, llegamos a desmenuzar magistralmente las demostraciones; se las damos tan digeridas, que el alumno no tiene oportunidad de ejercitar su máquina razonadora. Y así, llega a oxidársele y no estará en condiciones de resolver un problema que se le plantee en un examen, por muy sencillo que sea el razonamiento a aplicar. Y de nuevo, el tópico: "de este tipo de problemas no hemos hecho en clase". En parte tienen razón, porque les hemos hecho creer que las Matemáticas son así.

La Matemática no es, como otras ciencias, un conjunto de conocimientos que ha de saberse el alumno. Esto no le serviría de nada. La Matemática ha de ser una construcción personal vivida que le cree un sistema de pensamiento coherente. Es decir, la misión del profesor no es limitarse a dar clases magistrales para que el alumno las escuche atentamente y aprenda lo que está ya hecho. Es el alumno el que debe llevar la iniciativa, debe ir descubriendo la Matemática por si mismo, desde dentro, aunque, eso sí, guiado y dirigido en todo momento por el profesor. De esta forma, va poniendo en marcha su máquina crítica y potenciando esa intuición característica del buen matemático.

Por supuesto que esta labor del profesor no es nada fácil, en especial para el que no es matemático y, careciendo de un interés personal en la materia, no puede permitirse el lujo de perder los pocos apoyos que ha procurado encontrar en un terreno que no le es familiar.

Habrá ocasiones en las que los alumnos no respondan inmediatamente al planteamiento de una cuestión, pero esto no debe preocuparnos. Suele suceder que cuando se piensa sobre una cuestión matemática no se consigue nada de momento, pero el trabajo no resulta estéril, puesto que puede dar lugar a una inspiración súbita que se produce después. A veces pasamos horas sin encontrar la solución de un problema y, en el momento más inesperado y en el sitio más insospechado, surge la idea feliz que nos la da.

Hay veces que se producen razonamientos curiosos por parte de los alumnos, aunque no siempre acertados, que nos sorprenden, bien porque no era ahí donde tratábamos de llevarlos; bien porque a nosotros no se nos habría ocurrido ese razonamiento en ese preciso instante. Veamos algunos ejemplos :

Estamos en segundo curso de B.U.P. y proponemos que nos digan cuál es el extremo superior del intervalo abierto $(2,7)$ de números reales. Enseguida aparecen varias respuestas a favor del 7, haciéndoseles entonces notar que en este caso el extremo superior no pertenece al conjunto. Se produce luego una nueva respuesta por parte de un alumno: "el $6,\widehat{9}$ es un elemento del conjunto y no hay ningún otro mayor que él". Indudablemente está equivocado, aunque el razonamiento haya sido un tanto lógico, puesto que el número racional periódico puro $6,\widehat{9}$ no tiene sentido al no haber una fracción cuyo desarrollo decimal sea ese. Si lo pasamos a expresión fraccionaria nos encontramos con que $6,\widehat{9} = 7$ que, evidentemente no pertenece al conjunto.

Proponemos luego que nos digan cuál es el primer elemento de dicho intervalo. Las primeras voces apuntan normalmente el 2. Se les inca que 2 no pertenece al conjunto y, por tanto, no puede ser primer elemento. Intervienen ahora cabezas no muy agudas apostando por el $2,1$ y se les hace caer en la cuenta de que $2,01$ es elemento del intervalo y menor que $2,1$. En ese momento hay un alumno que realiza un razonamiento muy *sui géneris* y lanza el $2,\widehat{0}1$, sin observar que si el 0 es una cifra periódica no ha lugar a colocar después el 1, esto es, que la expresión no define un número. Pese a estar equivocado, este razonamiento revela gran ingenio y capacidad razonadora.

Otro ejemplo se refiere al problema de Aquiles y la tortuga.- Leemos en un libro de 1º de B.U.P. el ejercicio de una rana que salta indefinidamente, formando las longitudes de sus saltos una progresión geométrica decreciente de razón $1/2$. Si el primer salto es de 2 m, qué camino recorrerá? Resolviendo el ejercicio obtenemos una longitud de 4 m. Un alumno dice no entenderlo porque, razona, si la rana salta indefinidamente, al alcanzar los 4 m seguirá saltando y los rebasará. No ha entendido que el número obtenido al aplicar la fórmula de la suma de los innitos términos de una progresión geométrica decreciente es el correspondiente a la suma límite y que ese número nunca se alcanza. Pero lo importante, creemos, es que piensen...aunque lo hagan mal.

En otras ocasiones, los alumnos inquietos nos ponen en un "aprieto" en cosas sencillas, pero que no nos habíamos planteado. Veamos uno de estos casos:

Al tratar en 3º la fórmula del coseno de una diferencia de ángulos, la aplicamos al caso de $15 = 60-45$, obteniendo $\cos 15 = (\sqrt{2}+\sqrt{6})/4$. Y, cuando llegamos a la fórmula del ángulo mitad, la aplicamos al mismo ángulo y obtenemos $\cos 15 = (\sqrt{2+\sqrt{3}})/2$. Nos hacen notar que "los resultados no coinciden". Al asegurarles que han de ser necesariamente iguales, son ellos mismos los que lo demuestran, basándose en la propiedad

si $a>0$ y $b>0$, entonces $a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b$

Por último, nos vamos a referir al caso en que el raciocinio del alumno percibe alguna incongruencia en los libros de texto; como en lo que sigue:

La propiedad fundamental del cálculo con radicales viene expresada por

$$\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[np]{A^{mp}}$$

Pues bien, en el ejemplo $\sqrt[3]{8} = \sqrt[6]{8^2}$ que les ponemos, aprecian que, mientras el primer radical corresponde al número real 2, el segundo corresponde, además, al -2, luego esos dos radicales no pueden ser iguales, salvo que el libro haga hincapié - y casi ninguno lo hace - en que el radical se considera siempre positivo.

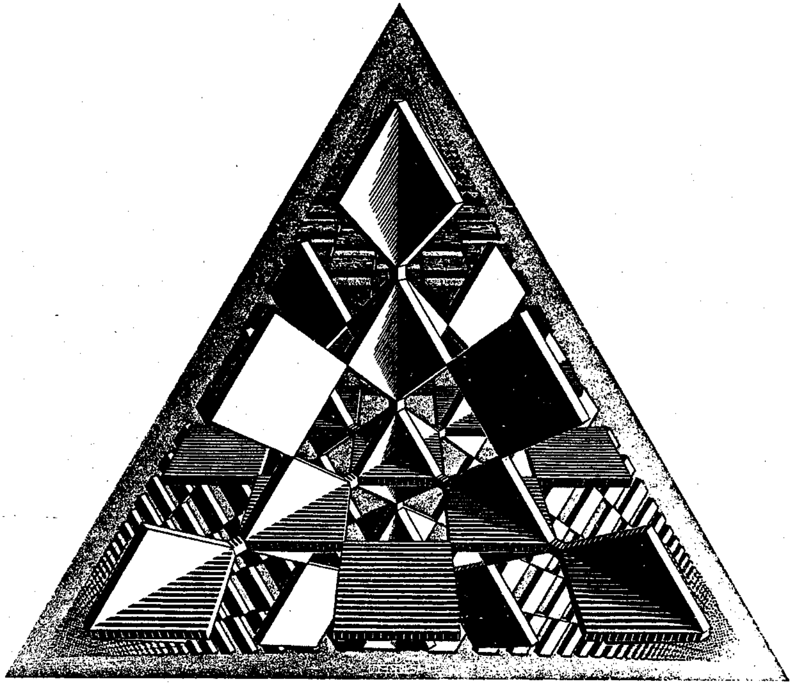
Al realizar ejercicios, suelen advertir también que si se aplica la propiedad anterior de este modo

$$\sqrt[2]{6} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt[4]{(-6)^2} = \sqrt[2]{-6}$$

llegamos, evidentemente, a una contradicción, lo que hace pensar que tampoco es aplicable cuando $A<0$.

Bibliografía

G.POLYA - Matemáticas y razonamiento plausible-Ed.Tecnos, 1966
R.COURANT y H.ROBBINS- Qué es la Matemática?-Ed.Aguilar, 1971
H.POINCARE - La ciencia y la hipótesis -Ed.Espasa-Calpe, 1963
H.POINCARE - Ciencia y método -Ed.Espasa-Calpe-1963
H.POINCARE - El valor de la ciencia-Ed.Espasa-Calpe, 1963
P.PUIG - La Matemática y su enseñanza actual-M.E.C., 1960
P.PUIG - Didáctica matemática heurística- 1956
J.PIAGET - La enseñanza de las Matemáticas-Ed.Aguilar, 1968
R.C.ABLEWHITE - Las Matemáticas y los menos dotados-Ed.Morata 1971
K.LOVELL - Didáctica de las Matemáticas-Ed.Morata, 1969



36. Drie snijdende vlakken - Three intersecting planes - Drei sich schneidende Flächen - Intersection de trois plans

ESCHER