NUMEROS,14 - 1986

Notas de clase :

UN PROBLEMA CURIOSO PARA LA COMPRENSION DE LAS INDETERMINACIONES DEL TIPO $\infty - \infty$

Manuel Luis de Armas Cruz

Muchos alumnos de cursos posteriores al 2º de BUP tienen, a nivel de información, el conocimiento de los límites del tipo $\infty - \infty$. Saben que son indeterminados, pero, en principio, el concepto no está suficientemente integrado en su estructura racional. Para corregir esto, les sugiero la resolución del siguiente problema, que no recuerdo de dónde lo tomé o a quién se lo oí :

" Se dispone de una bolsa y un número ilimitado de boliches, en principio numerados a partir de 1. Cuando falta una hora para el final de la clase, se introducen en la bolsa las bolas numeradas del 1 al 10, y retiramos la 1. Cuando falta 1/2 h, se introducen las numeradas del 11 al 20 y retiramos la 2 . Cuando resta 1/3 h, se introducen las que van del 21 al 30 y se retira la 3 . Y así sucesivamente. Cuántas quedarán al final de la clase?

La primera contestación, normalmente después de un corto período de meditación, es : Habrá infinitas, profesor.

Y, al contestar yo que no, que lo piensen más, argumentan que si cada vez se introducen 9 bolas y el proceso se repite infinitas veces, tendrá que haber un número infinito de ellas al final de la clase.

Algunos, en medio de la discusión general que provoca este razonamiento, indican que no se puede llegar nunca al final de la clase, ya-que el proceso es infinito,lo que provoca risa en unos y estupefacción- en otros.

Aparentemente,el argumento que defiende un número infinito de bolas al final de la clase puede parecer correcto. No lo es,sin embargo, ya que la premisa "no importa cómo estén numeradas" no es cierta,lo que acarrea la falsedad del razonamiento.

No quedará ninguna,les digo entonces. Y les hago razonar así :

Hay que tener en cuenta que las bolas están numeradas,se introducen ordenadamente y se retiran según su número asociado. Por lo tanto, si quedase alguna en la bolsa al final de la clase,no quedaría sólo ella, sino todas las que llevaran números mayores que el suyo a partir de algún número n. Ahora bien,esa bola n-ésima habría sido retirada cuando faltara 1/n de hora para terminar la clase. En conclusión,no puede quedar ninguna.

Causo extrañeza. Algunos aceptan lo que les he dicho y rechazan el razonamiento que lleva a infinitas bolas. Otros insisten y dicen; ¿Cómo va a ser que se introduzcan infinitas veces nueve bolas en una bolsa y al final no quede ninguna?

Y respondo: Si se introducen infinitas bolas infinitas veces , al final habrá un número infinito; esto es así. Pero,el problema no dice eso,sino que "se introducen las bolas del 1 al 10 y se saca la 1; se introducen las del 11 al 20 y se retira la 2 ;.....

Pero,bueno,dice siempre alguno a punto de cabrearse,es lo mismo que se introduzcan nueve de cada vez,¿no?

Por lo visto,no,le contesto suavemente,ya que al final no queda ninguna,y si se introducen nueve,quedarían infinitas. Y añado:

Si quedaran infinitas,¿a partir de cuál quedarían?¿De la numerada un millón,por ejemplo? No; pues se sacaría en el mismo instante en que faltara una millonésima de hora para acabar la clase. Y cualquier bola que me digas quedaría en su momento fuera del saco,tío. Así que busca el fallo del razonamiento que lleva a "infinitas" bolas. Si lo encuen tras, te convencerás de que, como te digo, no puede quedar ninguna.

A lo que contesta, rápido: Vamos, que lo que dice usted es que, cuando el proceso se hace infinitas veces, no es lo mismo meter 10 bolas y sacar 1, que meter 9 bolas, pues, de una manera quedan infinitas, y de la otra, ninguna. ¿No es eso?

Lo que yo digo, respondo, es que la forma de meter y sacar las bolas influye de modo importante. Si metes 10 bolas y quitas 1 cada vez, y esto lo haces infinitas veces, puedes tener resultados diferentes si varías la forma de retirar las bolas. Por ejemplo, si cuando falta 1 hora para terminar la clase, introduces las bolas del 1 al 10 y retiras la 4ª; cuando falta 1/2 hora, introduces las que van del 11 al 20 y sacas la 5ª y así sucesivamente, es decir, si retiras a partir de la 4ª y no de la 1ª. Con el razonamiento anterior, quedarán, en este caso, 3 bolas. Podrías diseñar procesos parecidos para que al final te quedara el número de bolas que quisieras; incluso un número infinito.

¡Chiquito disparate, profe!

No tanto, no tanto. Fíjate bien : Tu razonamiento es equivalente a meter 10 bolas numeradas y sacar la primera de cada tanda, cada vez; pero, esta manera de meter y sacar, no es la que indica el enunciado del problema. Decir sólo " meter 10 y sacar 1", pongamos por caso, *no da la suficiente información* para determinar el resultado, esto es, conduce a una *indeterminación*.

En definitiva, concluyo, calcular el valor o resultado consiste en calcular un límite de la forma $\infty - \infty$, que nos lleva a una indeterminación. En este problema, salimos de ella especificando exactamente cómo se realiza el proceso. De todas formas, sigue pensando; mañana o dentro de unos días, me dirás a qué conclusión has llegado.