HACIA UN CALCULO RAZONADO DE LA RAIZ CUADRADA

Fidela Velázquez Manuel y
Manolo Fernández Reyes ,
del EQUIPO AVΦA

INTRODUCCION

El tema de la raíz cuadrada es en uno de los que los profesores de cursos posteriores a aquel en que se introduce, solemos echar en falta la interiorización por los alumnos del significado de la operación. Frecuentemente dominan el mecanismo operatorio, mas no manejan con seguridad la noción de raíz como operación inversa de la potenciación.

La razón de ello está, posiblemente, en no haberse insistido suficientemente en dicha relación; en la premura por enseñar el algoritmo e, inmediatamente, proponer ejercicios y problemas de aplicación. Cabe preguntarse si el hecho de que un número considerable de alumnos resuelva estos últimos con relativa facilidad, no obedece, única y exclusivamente, a "que están en la lección de la raíz cuadrada". Sea como fuere, creemos que tal proceder por parte del profesorado es justo lo opuesto a la consideración de que en la enseñanza de la Matemática elemental, la manipulación, la progresiva aproximación al significado de una operación, ha de ser previa a la adquisición del mecanismo operatorio.

Por otro lado, las Matemáticas de estos niveles suelen tener un aspecto lúdico motivador del que otras disciplinas carecen o poseen en menor grado. Es nuestro deber aprovecharlo al máximo. La enseñanza de nuestra disciplina tiene que dejar de ser la mera exposición de una serie de reglas que el alumno debe aprender sin más.

OBJETIVOS DEL TEMA :

.. Llegar al concepto de raíz como operación inversa de la potenciación

.. Calcular raíces cuadradas por aproximación

.. Calcularlas mediante el algoritmo

.. Justificar el uso de la calculadora como medio de facilitar cálculos engorrosos

.. Aplicación a cuestiones matemáticas y de otras ciencias.

SUS CONTENIDOS :

. Cálculo de cuadrados de números naturales y decimales.

. Distinción de cuadrado y doble.

. Cálculo mental de raíces cuadradas de cuadrados perfectos.

. Cálculo, por aproximación, de raíces cuadradas de números naturales comprendidos entre 1 y 10.000, con determinación, en su caso, del resto.

. Idem hasta 100.000.

. Idem hasta 1000000.

. Cálculo algorítmico.

. Problemas de aplicación.

DESARROLLO

1. Proponer abundantes ejercicios de cálculo de cuadrados, procurando que lleguen a memorizar los correspondientes a los números naturales hasta 25, al menos.

2. Insistir en la distinción entre cuadrado y doble. En evitación de que esta diferencia no quede interiorizada por todos los chicos, es conveniente asegurarse mediante un ejercicio de control de este tipo :

. ¿Cuál es el cuadrado de 5?

. ¿Cuál es doble de 5?

. El cuadrado de 2´3 es ..... y el doble de 2´3 es .....

- El doble de 34 es 68.¿Cuánto vale su cuadrado?
- Calcula los dobles de 0'5 , 0'05 , 10 , 100 y 1000.
- Calcula los cuadrados de los números anteriores.
- ¿ Existe algún número cuyo cuadrado sea igual a su duplo?

3. Explicar el concepto de raíz cuadrada como operación inversa de la de elevar al cuadrado,utilizando números menores que 100 que sean cuadrados perfectos y haciendo la pregunta ¿qué número elevado al cuadrado da...? Conviene simbolizar las conclusiones así:

$$3^2 = 9 \Longrightarrow \sqrt[2]{9} = 3 ,$$

insistiendo en el significado del símbolo de implicación y no dejando de escribir el índice(ya habrá tiempo de sobreentenderlo y,si nunca se hiciera,mejor).

4. Pedir que confeccionen una tabla de los cuadrados de las decenas y primera centena($10^2, 20^2, \ldots\ldots, 100^2$). Una vez revisadas y advertidos de que deben tenerla siempre a mano,puede reproducirse en un mural.- En adelante nos referiremos a esta tabla con T-1.

5. Cálculo por aproximación de la raíz de números naturales hasta el 10.000 .- Mediante ejemplos,se les hace ver que existen dos posibilidades:

a) que la raíz sea exacta(números cuadrados perfectos)

b) que no lo sea

En el primer supuesto,el proceso a seguir es el siguiente:

1º)Determinación de la cifra de las unidades de la raíz.- Se hará ver que dicha cifra guarda relación con la cifra de las unidades del número propuesto:

Número	Raíz
0	0
1	1 ó 9
4	2 u 8
5	5
6	4 ó 6
9	3 ó 7

Es fundamental que los alumnos lleguen a ver con absoluta claridad la razón de esto. No debe mostrárseles la tabla anterior para evitar que traten de memorizarla.

2º)Haciendo uso de la T-1,determinar entre qué cuadrados se encuentra el número cuya raíz tratamos de calcular y,en consecuencia,entre qué números está la raíz. Por ejemplo,1024 está comprendido entre 30^2 y 40^2;por tanto,su raíz tiene que ser un número comprendido entre 30 y 40

Se precisa entonces de cuál de los extremos está más cerca.En nuestro ejemplo,es más próxima a 30.

3º)Conclusión-referida al ejemplo,para mayor brevedad- : Como la raíz buscada está más cerca de 30 que de 40,ha de terminar en la cifra más pequeña,esto es,en 2. Por lo tanto,la raíz de 1024 es 32.

4º)Se pedirá,finalmente,que se verifique el resultado obtenido.

En el caso de raíz inexacta,los pasos pueden ser:

1º)Se elige un número menor que 10000,que no sea cuadrado perfecto,y se intenta que los alumnos razonen por qué en este caso la tabla de terminaciones pierde su utilidad.

2º)Mediante la tabla T-1 acotamos entre qué decenas está la raíz y de cuál está más cerca.

3º)Por medio de tanteos,precisamos cuál es su cifra de unidades.

4º)Se resta el cuadrado del resultado,al radicando,para determinar el resto.

5º)De vez en cuando,exigir la verificación. Esto contribuye a la interiorización del concepto.

Ejemplo:

3888 está comprendido entre $3600 = 60^2$ y $4900 = 70^2$,por lo que su raíz cuadrada está entre 60 y 70. Como 3888 es más próximo a 3600 que a 4900,su raíz ha de ser menor que 65.¿Es 64? ¿Es 63? ... Veamos:

$64 \cdot 64 = 4096 > 3888$

$63 \cdot 63 = 3969 > 3888$

$62 \cdot 62 = 3844 < 3888$

En consecuencia, la raíz entera de 3888 es 62 y el resto es 44.

6. Raíz de números naturales comprendidos entre 10000 y 10^6.- Se construye la tabla de los cuadrados de las centenas desde 110 a 320 (T-2) y su correspondiente mural.

El procedimiento es el mismo que el descrito en 5, aunque en este caso resulta lento. Es este el momento en que puede introducirse la calculadora; no para el cálculo directo, sino para calcular cuadrados y agilizar así el proceso.

7. Sólo como ejemplo de generalización, el profesor puede realizar en la pizarra el cálculo de la raíz de un número comprendido entre 10^5 y 10^6 que no sea cuadrado perfecto y aproximar el resultado hasta las décimas.

8. Cálculo mediante el algoritmo

Recomendamos:

a) No cansar con cálculos de raíces de números grandes. Aparte de su poco uso en los problemas, supone una pérdida de tiempo, no aporta nada a la comprensión del algoritmo y resta posibilidades al uso de la calculadora.

b) De vez en cuando proponer ejercicios de este tipo : Eleva el número que quieras al cuadrado. Extrae la raíz cuadrada del resultado.

c) Insistir en los casos en que la raíz resulta con cero(s) intermedio(s). Lo dicho en b) facilita el preparar ejercicios al respecto

d) Hacerles ver que, en caso de raíz decimal inexacta, el resto es "aparente" e, incluso, enseñarles a calcular el verdadero.

e) Insistir en que comprueben si el número de cifras enteras de la raíz obtenida es igual al número de grupos de la parte entera del radicando. Esto evita que dejen de escribir la coma o la sitúen mal.

f) Limitar la aproximación a las décimas.

g) Proponer ejercicios en que el radicando esté expresado como producto (cociente) o suma (diferencia) de cuadrados. Es una buena oportunidad para explicar la distributividad o no distributividad de la radicación respecto a las otras operaciones.

h) En general, limitar la aproximación a las décimas.

i) Proponer varias veces a lo largo del curso el cálculo de las raíces de 2,3,5 y 7 y procurar que memoricen los resultados.

9. Uso de la calculadora

Una vez conseguido que los chicos tengan una idea clara del significado de la radicación cuadrada y dominen el algoritmo, hay que decidirse a que empleen la calculadora. Téngase en cuenta que, entre aplicar un algoritmo que nunca se justifica, y apretar un botón, no hay ninguna diferencia; tan mecánico es lo uno como lo otro. Y al que todavía se rasga las vestiduras cuando oye hablar de usar la calculadora, habría que decirle: Has explicado tú alguna vez a tus alumnos por qué la raíz cuadrada se calcula así?

ALGUNOS TIPOS DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

No debe abusarse de los simples ejercicios de mecanización, sino que debe abundarse en los problemas de aplicación y no limitar estos al campo de la propia Matemática. Damos aquí algunos ejemplos, unos de nuestra cosecha y otros de los libros que se citan. No pretendemos, claro, que todos puedan ser propuestos en el nivel en que se inicia el tema.

1. Rellena la siguiente tabla:

x	$2.x$	x^2	$(x^2)^2$	$2.x^2$
2				
3				
5				
10				
100				

2. Los siguientes números son cuadrados perfectos. Calcula sus r.c. utilizando la tabla T-1. : 676 , 1156 ,6241.

3. Utilizando la T-1, determina las r.c. y los respectivos restos de 4325 y 9944. ¿Puedes saber, de entrada, en qué terminan las raíces?

4. Mediante la tabla T-2 y ayudándote si quieres con la calculadora, halla la r.c. de 107.807.

5. ¿Cuál es el resto que resulta al extraer la raíz a 160807?

6. Calcula, por medio del algoritmo, la raíz de 1364'3, aproximando hasta las décimas. ¿El resto es 269?

7. Juan calculó la r.c. de un número y obtuvo 3'8 y 0'07 de resto. ¿Cuál era el radicando?

8. Un alumno quiso averiguar si su cálculo de la r.c. de 625'32 era correcto y procedió así :

$$25'006^2 = 625'300036$$

$$625'300036 + 19'964 = 645'26436 \quad ,$$

es decir, no obtuvo 625'32. ¿Se equivocó al hallar la raíz? ¿Halló mal el resto?

9. Eleva los números 2'03 , 0'006 y 15'0306 al cuadrado. Calcula luego, mediante el algoritmo, las raíces cuadradas de los resultados obtenidos. Si en algún caso resulta cero en las décimas, aproxima hasta las centésimas. Comprueba tus cálculos con la calculadora. Ten en cuenta que como la máquina da muchas cifras, debes redondear.

10. Emplea la calculadora para determinar las r.c. de 126 , 505, 1053 , 4'36 , 1389'06 y 1.700.302'4. Redondea hasta las décimas o centésimas.

11. Si tienes calculadora, elabora en tu casa una tabla de las r.c. de los cincuenta primeros números naturales. Fíjate en estos ejemplos :

Nº	$\sqrt{\ }$
2	$1'4142136 \simeq 1'4$
10	$3'1622777 \simeq 3'2$

12. Indica si lo escrito junto a las flechas ↘ es verdadero (V) o falso (F). Ten en cuenta que lo que está detrás de las otras es cierto y que la misma expresión no puede dar dos resultados distintos :

$$2.(3+5) = \begin{array}{l} \nearrow 2.8 = 16 \\ \searrow 2.3 + 2.5 \end{array}$$

$$3.(6-4) = \begin{array}{l} \nearrow 3.2 = 6 \\ \searrow 3.6 - 3.4 \end{array}$$

$$(6+8):2 = \begin{array}{l} \nearrow 14 : 2 = 7 \\ \searrow 6:2 + 8:2 \end{array}$$

$$(24-14):10 = \begin{array}{l} \nearrow 10 : 10 = 1 \\ \searrow 24:10 - 14:10 \end{array}$$

$$(3+4)^2 = \begin{array}{l} \nearrow 7^2 = 49 \\ \searrow 3^2 + 4^2 \end{array}$$

$$(8-2)^2 = \begin{array}{l} \nearrow 6^2 = 36 \\ \searrow 8^2 - 2^2 \end{array}$$

$$(2 \,.\, 5)^2 = \begin{array}{l} \nearrow 10^2 = 100 \\ \searrow 2^2 \,.\, 5^2 \end{array}$$

$$(6:2)^2 = \begin{array}{l} \nearrow 3^2 = 9 \\ \searrow 6^2 : 2^2 \end{array}$$

Escribe ahora ES o NO ES en las líneas punteadas :

La multiplicación.....distributiva respecto a la adición

La multiplicación.....distributiva respecto a la sustracción.

La división.....distributiva(por la derecha) respecto a la suma.

La división.....distributiva(por la derecha)con relación a la resta.

La potenciación.....distributiva respecto a la suma.

La potenciación.....distributiva respecto a la sustracción.

La potenciación.....distributiva respecto a la multiplicación

La potenciación.....distributiva respecto a la división.

13. Averigua respecto a qué operaciones es distributiva la radicación. Trabaja con índice 2.

14. Escribe = o $\neq$:

$\sqrt{a^2 + b^2} \quad \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ $\qquad$ $\sqrt{a^2 \,.\, b^2} \quad \sqrt{a^2} \,.\, \sqrt{b^2}$

$\sqrt{a^2 - b^2} \quad \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$ $\qquad$ $\sqrt{a^2 : b^2} \quad \sqrt{a^2} : \sqrt{b^2}$

14. Si el radicando es una suma indicada.¿da igual "hallar la raíz de la suma" que "calcular la de cada sumando y luego sumar"?

15. Un estudiante dijo : "La hipotenusa es igual a la suma de las raíces cuadradas de los cuadrados de los catetos". ¿Se hubiera enfadado Pitágoras si hubiese podido oirlo?

16. El cuadrado de la suma de dos números naturales consecuti vos y menores que 8 es 61.¿De qué números se trata?

17. Varios amigos cazaron 289 conejos. Uno de ellos no cazó ninguno,pero cada uno de los otros cazó tantas piezas como el número de buenos cazadores.¿Cuántos fueron de cacería?

18. Se denomina "media aritmética"de dos números al valor de su semisuma. Se llama "media geométrica" a lo que vale la raíz cuadrada de su producto. Según esto,calcula la M.A. y la M.G. de 16 y 25. Los dos cálculos puedes hacerlos mentalmente;inténtalo antes de liarte a hacer operaciones.

19. El griego HERON descubrió una manera de calcular el área de un triángulo si se conoce la medida de los tres lados. Así:

$$A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

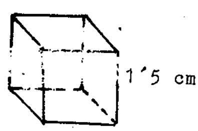
donde p representa el semiperímetro y a,b,c las medidas de los lados.

Pues bien,verifica que el área de un triángulo que tiene de lados 12 cm , 15 cm y 18 cm es 89'3 cm^2

20. En cualquier ortoedro,"el cuadrado de una diagonal vale lo mismo que la suma de los cuadrados de las tres dimensiones"(Teorema de Pitágoras en el espacio). Con esto puedes resolver el siguiente problema:

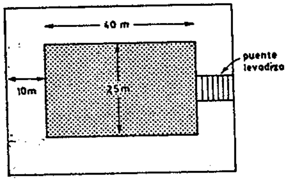
En una caja con forma de ortoedro se quiere guardar una barra. Las medidas interiores de la caja son 30 cm , 20 cm y 10 cm. Cuál es el largo máximo que puede tener la barra,si queremos tapar la caja después de meter la barra?

21. Calcula la diagonal de este cubo y la de la cara del fondo Si no fuiste capaz de resolver el problema anterior,es posible que éste te dé la pista.



22. El acceso al castillo (Mariano Mataix - El discreto encanto de las Matemáticas):

Un castillo,rodeado de su correspondiente foso,tiene las dimen siones que se indican en la figura:



Durante una tormenta el puente levadizo fue arrancado,quedando aislado el castillo por el foso que lo rodea. El propietarrio,tratando de entrar,disponía tan sólo de dos tablones de 9´8 m de largo cada - uno. No disponiendo de clavos con que unirlos,resultaban demasiado cortos para pasar el foso. Al fin,discurrió un sistema. ¿ Cuál fue? (Nota.-Disponiendo los dos tablones de una determinada manera,consiguió tender un puente de 14´14 m ,suficiente para cubrir el foso. Tienes que descubrir cuál fue esa disposición y demostrar que alcanzó los 14´14 m)

23. Para calcular el tiempo que tarda un objeto en caer desde una determinada altura,se procede así: 1º) se duplica la altura ; 2º) se divide el resultado entre 10,que es un valor aproximado de la aceleración de gravedad y 3º) se calcula la raíz cuadrada del valor obtenido

Según esto,calcula el tiempo en los siguientes casos:

a) Una pelota que cae desde un edificio de 50 m.

b) Una piedra de 20 kg que cae desde 150 m.

Nota.-El tiempo se mide en segundos.

Otra.-Es conveniente advertir a los chicos que este cálculo - es aproximado.

24. Con los boliches que tiene un niño,forma un cuadrado de - 9 filas y 9 columnas y le sobran 15¿ Cuántos tiene? ¿ Cuántos le faltan para hacer un cuadrado de 10 filas y 10 columnas?

25. Uno de los motores que inventó Manuel Pujol,fue el silencioso,cuyo combustible era el agua. Desarrollaba una fuerza igual a la raíz cuadrada de su capacidad en mililitros. ¿ Sabrías qué fuerza desarrollaría uno de estos motores con una capacidad de 324 mililitros? (Azimut, 6º - Anaya)

Sociedad "ISAAC NEWTON"