NUMEROS, 15 - 1986

¿CUAL ES LA BOLA DISTINTA?

Eloy Mata González
I.B. "Poeta Viana"

En el número 1 de la revista NUMEROS aparece un artículo titulado *BOLIGMO*, firmado por Emilio Quílez Royo, catedrático del I.B. de Hernani (Guipúzcoa), en el que narra una experiencia de investigación llevada a cabo con sus alumnos a lo largo de un curso. En palabras de Quílez la investigación surgió así : "A primeros de Noviembre, se nos descolgó Juan José con el problema de las 12 bolas: Tenemos 12 bolas, iguales en peso todas menos una, que no sabemos si pesa más o menos que las demás. Averiguar, en sólo tres pesadas, cuál es la bola diferente y si pesa más o menos que las demás".

El artículo es sugestivo, ya que nos muestra las posibilidades que existen para fomentar la capacidad de creación e investigación de los alumnos. Es más que probable que los alumnos que participaron en la experiencia entendieran cómo y por qué se elabora y formaliza una teoría matemática; quiero aprovechar estas líneas para felicitar a Emilio Quílez por ese trabajo.

Al terminar de leer el artículo me quedé intrigado. ¡El problema no fue resuelto! ¿Es tan difícil encontrar la solución?

A continuación expondré un método para resolver el caso de 12 bolas, y un estudio del problema general, para n bolas. Invito al lector a que pruebe con las 12 bolas antes de continuar la lectura; encontrará que las tres pesadas son bastante escurridizas. Este problema, como tantos otros en Matemáticas, aparece trivial una vez conocida la respuesta.

Sólo es posible evaluar su dificultad e interés intentando resolverlo.

CASO DE 12 BOLAS

Para indicar la disposición de las bolas en los platillos, el resultado de una pesada y la información obtenida de ella, utilizaremos las expresiones simbólicas que a continuación se explican.

Supongamos, por ejemplo, que en el platillo de la izquierda hay una bola que "puede que pese más", otra que es "normal" y una tercera que "puede que peso menos"; en el de la derecha, una que "puede que pese más", otra que "puede que pese menos" y una que "tanto puede pesar más como menos"

Fuera de la balanza, una bola que "puede que pese menos" y una que "tanto puede pesar más como menos".

El resto de las bolas son "normales"

Tal situación sería representada así: (+ 0 - / + - x) - x

En cuanto al resultado, la notación [+ -] indica que el contenido del platillo de la izquierda pesa más; la [- +], que es el de la derecha, y la [0 0] que existe equilibrio.

Por último, y como ejemplo, si escribimos (+, +, x, -) queremos decir que sabemos que existen " 2 bolas que pueden pesar más", "1 bola que puede pesar más o menos" , "1 bola que puede pesar menos" y que el resto son "normales".

Veamos cómo pueden efectuarse estas pesadas :

Disposición inicial : (x x x x / x x x x) x x x x

Caso A Resultado: [+ -] Información: (+,+,+,+,-,-,-,-)

2ª disposición : (+ + - / + + -) - -

a) Resultado: [+ -] Información: (+,+,-)

3ª disposición : (+ / +) -

Cualquiera que sea el resultado, se sigue la solución.

b) Resultado: [- +] Información: (-,+,+)

3ª disposición : (+ / +) -

Como en a), de esta tercera pesada se deduce la solución, cualquiera que sea el resultado obtenido.

c) Resultado: [0 0] Información: (-,-)

3ª disposición : (- / -)

La balanza tendrá que desequilibrarse y la solución será inmediata.

<u>Caso B</u> Resultado: [- +]

El proceso es análogo al anterior.

<u>Caso C</u> Resultado: [0 0] Información: (x,x,x,x)

2ª disposición : (x x / x 0) x

a) Resultado: [+ -] Información: (+,+,-)

3ª disposición : (+ / +) -

b) Resultado: [- +] Información: (-,-,+)

3ª disposición : (- / -) +

c) Resultado: [0 0] Información: (x)

3ª disposición : (x / 0)

La balanza tendrá que desequilibrarse y se sigue la solución.

CASO DE n BOLAS

Observación 1 .- Nos encontramos con una información inicial del tipo (x,......,x) y tenemos que llegar a una final, bien del tipo(+), bien del (-). Se trata, por tanto, de ir eliminando los $2n$ signos (cada bola x tiene 2 signos) de la forma más rápida posible, hasta que sólo quede uno; es decir, hay que garantizar en cada pesada la eliminación del número de signos máximo.

Observación 2 .- En la información inicial, todas las bolas son x. Si la sucesión de resultados es de tipo "a" (balanza equilibrada), seguirán subsistiendo bolas x, y la información estará formada exclusivamente por los símbolos "x" y "0". Si aparece una pesada tipo "b" (balanza desequilibrada), desaparecen las "x", y la información estará constituida por "+" , "-" y "0". Debe tenerse en cuenta que, una vez que desaparecen las "x", no pueden volver a aparecer. Estudiaremos primeramente el primer caso.

Informaciones con "x"

Sea una distribución $(r_1 / r_2)\ r_3$, donde r_1, r_2 y r_3 indican el número de bolas "x" que hay, respectivamente, en el primer platillo, en el segundo y fuera de la balanza. No tiene que ser necesariamente $r_1=r_2$ ya que en la balanza puede haber también bolas "0".

Para que el razonamiento que sigue sea válido, es necesario suponer que disponemos al menos de una bola normal para completar la balanza, cuando $r_1 + r_2$ sea impar. Este supuesto indica implícitamente que tomaremos siempre $| r_1 - r_2| \leq 1$, lo que no quitará generalidad a las conclusiones. El caso inicial, que corresponde a la primera pesada, y en el que todavía no hay bolas normales, lo consideraremos al final del artículo.

¿Cuáles deben ser los valores r_1, r_2, r_3 *para garantizar que, cualquiera que sea el resultado, se va a eliminar el máximo de signos?*

Veamos :

Sean

$\delta = r_1 + r_2$, el nº de bolas con signo "x" que hay en la bal.

$k = r_1 + r_2 + r_3$, el total de bolas "x"

$k - \delta = r_3$, el nº de bolas "x" que están fuera de la balanza

Si el resultado es $a = [\ 0\ 0\ ]$, $y = 2\delta$ indica el número de signos eliminados. Si es $b_1 = [\ +\ -\ ]$ o $b_2 = [\ -\ +\ ]$, $y' = 2r_3 + \delta = 2(k - \delta) + \delta = 2k - \delta$, indica dicho número.

Para una información prefijada, k es constante y, tanto $y=2\delta$ como $y'=2k-\delta$, dependen exclusivamente de δ. Vamos, por tanto, a buscar el valor óptimo de δ, sin tener en cuenta los valores de r_1, r_2, r_3.

Como y es creciente e y' es decreciente, y desconocemos si el resultado es del tipo a o del b, el máximo de signos eliminados que puede garantizarse se obtendrá al ser $y=y'$:

$$2\delta = 2k - \delta \Rightarrow \delta = 2k/3$$

El resultado nos indica que el valor óptimo de δ se obtiene poniendo en la balanza los 2/3 del total de bolas x. Ahora bien, esto es sólo posible si k es múltiplo de 3, lo que nos obliga a hacer un estudio más detallado. Tendremos en cuenta que, dado que y es creciente e y' es decreciente, los valores óptimos de δ tendrán que ser:

$\delta = E(2k/3)$, o bien, $\delta = E(2k/3) + 1$ (E=parte entera), que son los valores enteros más próximos a $2k/3$.

Si tomamos $k=3z+1$ será:

$$\text{Para } \delta=E(2k/3)=2z \begin{cases} y=2\delta=4z \\ y'= 2k-\delta=2(3z+1)-2z=4z+2 \end{cases}$$

Garantía : $4z$ signos eliminados.

$$\text{Para } \delta=E(2k/3)+1=2z+1 \begin{cases} y=2\delta=4z+2 \\ y'= 2k-\delta=2(3z+1)-(2z+1+=4z+1 \end{cases}$$

Garantía : $4z+1$ signos eliminados.

Por tanto, para $k=3z+1$, ha de elegirse $\delta=2z+1$, con lo que se garantiza la eliminación de $4z+1$ signos y quedan sin eliminar un máximo de

$$2k-(4z+1) = 2k-(4.\frac{k-1}{3}+1) = \frac{6k-4k+4-3}{3} = \frac{2k+1}{3} \text{ signos}$$

Ejemplo : Caso C de las 12 bolas

$k=4=3.1+1$

$z=1$

$\delta=2z+1=3$ (Se ponen 3 bolas x en la balanza)

Quedan sin eliminar, un máximo de $(2k+1)/3 = 3$ signos

Consideremos ahora $k=3z+2$. Entonces:

$$\text{Para } \delta=E(2k/3)=2z+1 \begin{cases} y=2\delta=4z+2 \\ y'=2k-\delta=2(3z+2)-(2z+1)=4z+3 \end{cases}$$

Garantía : $4z+2$

$$\text{Para } \delta=E(2k/3)+1=2z+2 \begin{cases} y=2\delta=4z+2 \\ y'= 2k-\delta=2(3z+2)-(2z+2)=4z+2 \end{cases}$$

Garantía : $4z+2$

En consecuencia, para $k=3z+2$, da lo mismo elegir $\delta=2z+1$ que $\delta=2z+2$. Se garantiza en ambos casos la eliminación de $4z+2$ signos, y quedan sin eliminar un máximo de:

$2k-(4z+2)=2k-[4/3(k-2)+2]=(6k-4k+8-6)/3=(2k+2)/3$ signos.

En resumen, los valores óptimos de δ, para k prefijado, son:

	Para $k=3z$ es $\delta=2z$ y quedan $2k/3$ signos
Cuadro 1	" $k=3z+1$ es $\delta=2z+1$ y quedan $(2k+1)/3$ signos
	" $k=3z+2$ " $\delta=2z+2$ ó $\delta=2z+1$ y quedan $(2k+2)/3$ signos.

Dejemos por ahora las informaciones con "x" y pasemos a estudiar las

Informaciones sin "x"

Sea una distribución $(q_1+p_1 / q_2+p_2)\ q_3+p_3$ en la que p_1, p_2, p_3 simbolizan las bolas con signo positivo que hay, respectivamente, en el primer platillo, en el segundo y fuera; y q_1, q_2, q_3 hacen lo propio respecto a las de signo negativo.

Aquí no hay problema con el número de bolas que entra en la balanza, ya que a una información de este tipo se llega después de realizar alguna pesada según los criterios vistos para informaciones con "x", por lo que ya disponemos de bolas normales para completar la balanza.

Hagamos un estudio similar al del caso anterior :

Un resultado del tipo "a" elimina $y=q_1+p_1+q_2+p_2$ signos

" " " " "b_1" " $y'=q_1+p_2+q_3+p_3$ "

" " " " "b_2" " $y''=p_1+q_2+q_3+p_3$ "

Tomando $\alpha=p_1+q_2$, $\beta=q_1+p_2$ y C=total de signos, será

$q_3+p_3=C-(\alpha+\beta)$ y tendremos

$y=\alpha+\beta$

$y'=\beta-[C-(\alpha+\beta)]=C-\alpha$

$y''=\alpha+[C-(\alpha+\beta)]=C-\beta$

¿Cuál es el máximo garantizable?

y' e y'' son funciones de una variable, α y β, respectivamente, con relación a las cuales son funciones decrecientes.

La función y es creciente, tanto respecto a α como respecto a β.

Si tenemos en cuenta, además, que las expresiones $z=\alpha+\beta$, $z=C-\alpha$ y

$z=C-\beta$, con C constante, pueden considerarse como planos en el espacio de tres dimensiones, concluimos que el punto de corte de los tres planos, si existe, corresponderá al óptimo buscado.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = C-\alpha \\ \alpha+\beta = C-\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha = C/3 \\ \beta = C/3\end{array}\right.$$

Para estos valores de α y β, garantizamos la eliminación de $y=\alpha+\beta=2C/3$ signos y nos quedaría por eliminar $C/3$.

Igual que ocurría con las informaciones con bolas x, habrá que hacer un estudio detallado para las informaciones en que $C/3$ no sea entero. Y habrá que tener en cuenta que en las proximidades de $(C/3\ ,\ C/3)$ hay 4 puntos posibles, ya que puede ser:

$\alpha= E(C/3)$ y $\alpha= E(C/3)+1$

$\beta= E(C/3)$ y $\beta= E(C/3)+1$

Si $C=3z+1$, será $E(C/3)=z$ y $E(C/3)+1=z+1$ y, entonces :

$$\alpha=\beta=z \left\{\begin{array}{l} y=\alpha+\beta=2z \\ y'=C-\alpha=3z+1-z=2z+1 \\ y''=C-\beta=3z+1-z=2z+1\end{array}\right.$$

Garantía : $2z$

$$\alpha=z+1\ ,\ \beta=z \left\{\begin{array}{l} y=\alpha+\beta=2z+1 \\ y'=C-\alpha=(3z+1)-(z+1)=2z \\ y''=C-\beta=(3z+1)-z=2z+1\end{array}\right.$$

Garantía : $2z$

$$\alpha=\beta=z+1 \left\{\begin{array}{l} y=2z+2 \\ y'=2z \\ y''=2z\end{array}\right.$$

Garantía : $2z$

$\alpha=z$, $\beta=z+1$ (Análogo a $\alpha=z+1$, $\beta=2z$ y, por tanto, igual garant.)

En consecuencia, para $C=3z+1$ se puede garantizar la eliminación de $2z$ signos, y quedarían sin eliminar un máximo de $C-2z=C-2/3(C-1)=$

$1/3(3C-2C+2)=1/3(C+2)$ signos. Sirve cualquier elección de α y β entre z y $z+1$.

Dejamos al lector el estudio del caso $C=3z+2$, en el que resulta, salvo para $\alpha=\beta=z$, una garantía de $2z+1$ y, por tanto, queda sin eliminar un máximo de $(C+1)/3$ signos.

En resumen, eligiendo α y β *adecuadamente en cada caso, los resultados óptimos garantizables son:*

Para	$C=3z$	quedan	$C/3$	signos	sin eliminar
"	$C=3z+1$	"	$(C+2)/3$	"	"
"	$C=3z+2$	"	$(C+1)/3$	"	"

Cuadro 2

Queda por aclarar la cuestión de si es posible elegir los α y β adecuados para cada caso, tenido en cuenta que vienen dados por $\alpha=p_1+q_2$ y $\beta=q_1+p_2$, y que tomando $p=p_1+p_2+p_3$ y $q=q_1+q_2+q_3$, son p y q valores prefijados. Esto es, se trata de ver si la elección adecuada de p_1, p_2, q_1 y q_2 es siempre factible. Aunque "a ojo" se observa que lo es - no hay más que tomar $q_1 \simeq q/3 \simeq q_2$ y $p_1 \simeq p/3 \simeq p_2$ -, vamos a hacer un estudio detallado que, además de demostración, pueda servir de guía para determinar, en un supuesto práctico, cuál debe ser la sucesión de pesadas a realizar. Veamos :

Caso 1

$p=3z''+1$, $q=3z'+2$ será $C=p+q=3(z'+z'')+3=3z$ $(z=z'+z''+1)$

Para $C=3z$ era $\alpha=\beta=z$, que se pueden obtener haciendo $p_1=z''+1$, $q_2=z'$, $p_2=z''$ y $q_1=z'+1$, ya que $\alpha=p_1+q_2=z'+z''+1=z$ y $\beta=p_2+q_1=z'+z''+1=z$

Caso 2

$p=3z''+1$, $q=3z'+1$ será $C=p+q=3(z'+z'')+2=3z+2$ $(z=z'+z'')$

Para $C=3z+2$ había varias posibilidades para α y β ; una de ellas era $\alpha=z+1$ y $\beta=z+1$, que pueden obtenerse haciendo $p_1=z''+1$, $q_2=z'$ $\alpha=z+1$; $p_2=z''$, $q_1=z'+1$ $\beta=z+1$

Caso 3

$p=3z''+1$, $q=3z'$ será $C=3(z'+z'')+1=3z+1$ $(z=z'+z'')$

Para $C=3z+1$ valían todos los casos ; por ejemplo, $p_1=z''$, $q_2=z'$ $\alpha=z$; $p_2=z''$, $q_2=z'$ $\beta=z$

Caso 4

$p=3z''$, $q=3z'$ será $C=3(z'+z'')=3z$ $(z=z'+z'')$

$p_1=p_2=z''$, $q_1=q_2=z'$ $\alpha=z$, $\beta=z$

Caso 5

$p=3z''$, $q=3z'+2$ será $C=3(z'+z'')+2=3z+2$ $(z=z'+z'')$

$p_1=z''+1$, $q_2=z'+1$ $\alpha=z+1$

$p_2=z'$, $q_1=z'+1$ $\beta=z+1$ Opción válida

Caso 6

$p=3z''+2$, $q=3z'+2$ será $C=3(z'+z''+1)+1=3z+1$ $(z=z'+z''+1)$

$p_1=z''+1$, $q_2=z'+1$ $\alpha=z+1$

$p_2=z''+1$, $q_1=z'+1$ $\beta=z+1$

Cada uno de los casos restantes es equivalente a alguno de los anteriores, sin más que cambiar p por q.

Obsérvese que todos los valores de α y β considerados se diferencian en una unidad como máximo, por lo que todas las distribuciones estudiadas son posibles, si se dispone de una bola normal adicional.

A continuación, vamos a unificar los resultados obtenidos para ambos tipos de información, con o sin x.

Informaciones intermedias de cualquier tipo

El caso "con x" puede estudiarse desde el mismo punto de vista que el otro. Basta para ello que, en vez de el número de bolas con signo, que llamamos k, consideremos el número de signos C=2k. Haciéndolo así, el cuadro 1 se transforma en :

Para $k=3z'$ es $C=6z'=3z$ y quedan $2k/3=C/3$ signos

Para $K=3z'+1$ es $C=6z'+2=3z+2$ y quedan $(2k+1)/3=(C+1)/3$ sign.

Para $k=3z'+2$ es $C=6z'+4=3z+1$ y quedan $(2k+2)/3=(C+2)/3$ sign.

Es decir, se obtiene el cuadro 2. Obsérvese que, para $k=3z'+1$, se obtiene $C=3z+2$

Podemos concluir, pues, que a los efectos que estamos estudiando, los dos tipos de informaciones son equivalentes. De ahora en adelante, sólo consideraremos las informaciones respecto al total de signos que tienen, sin tener en cuenta si estos van o no agrupados por parejas, que es es lo que ocurre con las x.

Del cuadro 2, válido para todas las informaciones en las que haya una bola normal, podemos deducir el

TEOREMA 1 .- Si es $3^{n-1} < c \leqslant 3^n$, con c y n enteros positivos, y c es el número de signos que tiene una información en la que haya alguna bola normal, serán necesarias y suficientes n pesadas para determinar cuál es la bola diferente y si pesa más o menos que el resto.

Demostración:

Empecemos por definir la función $f\colon A \longrightarrow N$, siendo $A=N-\{0,1\}$, tal que, para $c \in A$ sea $f(c)=E(c/3)$, si $c=\dot{3}$ y $f(c)=E(c/3)+1$ si $c\neq\dot{3}$.

Veamos algunas de las propiedades de f(c):

Comparando con el cuadro 2, vemos que la función definida representa lo que allí denominábamos "signos sin eliminar" (Téngase en cuenta que la C de antes y la minúscula que usamos ahora, por ser más propio de la notación de funciones, tienen el mismo significado).

Es inmediato deducir de la definición de f, que se trata de una función creciente $\left((c<c' \Longrightarrow f(c)\leqslant f(c')\right)$ y que, además, si c es múltiplo de 3 y $c < c'$, entonces es $f(c) < f(c')$. Según esto, para $3^{n-1} < c \leqslant 3^n$, será

$$f(3^{n-1}) < f(c) \leqslant f(3^n) \quad ; \quad 3^{n-2} < f(c) \leqslant 3^{n-1}$$

En consecuencia, podemos concluir que si $c > 1$ es el número de signos de una información en la que existe alguna bola normal, y es tal que $3^{n-1} < c \leqslant 3^n$, $n\varepsilon Z^+$, se cumple :

a) Por definición de f, el mejor resultado garantizable es que el número de signos que queden sin eliminar al hacer una pesada coincida con f(c).

b) $3^{n-2} < f(c) \leqslant 3^{n-1}$, según acabamos de ver.

1. Son suficientes n pesadas, ya que, llamando f^{n-1} a "f compuesta consigo misma n-1 veces", del apartado b) se sigue que:

Para $3^{n-1} < c \leqslant 3^n$ será $3^0 < f^{n-1}(c) \leqslant 3^1$

Tendríamos $f^{n-1}(c)=2$, o bien, $f^{n-1}(c)=3$ y, con una pesada más, será $f^n(c)=1$

2. Son necesarias n pesadas. En efecto:

Supongamos una sucesión de n-1 pesadas que conducen a la solución del problema, y sean h_1 , h_2 , ..., h_{n-1} las funciones que tie nen como imágenes el número de signos que puede garantizarse que queda-sin eliminar al ir efectuando tales pesadas, es decir,

$h_{n-1}(h_{n-2}(\ldots\ldots(h_1(c))\ldots\ldots)) = 1$

Ahora bien, según el apartado a), es $f(c) \leqslant h_1(c)$. Por ser f creciente, es $f(f(c)) \leqslant f(h_1(c))$ y, teniendo en cuenta de nuevo a), tendremos $f(h_1(c)) \leqslant h_2(h_1(c))$. En conclusión: $f^2(c) \leqslant h_2(h_1(c))$.

Siguiendo este esquema, llegaríamos a

$f^{n-1}(c) \leqslant h_{n-1}(h_{n-2}(\ldots\ldots(h_1(c)) = 1$, lo cual es imposible, ya que tiene que ser

$f^{n-1}(c) = 2$, o bien , $f^{n-1}(c) = 3$

<u>Informaciones iniciales</u>

Son aquellas en las que hay k bolas "x" y ninguna normal. El número de signos será c=2k y, entonces, la condición $3^{n-1} < c \leqslant 3^n$ (1) puede ser modificada así:

$$3^{n-1} < 2k \leqslant 3^n \Longrightarrow 3^{n-1} / 2 < k \leqslant 3^n / 2$$

Como k es entero y 3^n es impar, resulta

$$3^{n-1} / 2 - 0'5 < 3^{n-1} / 2 < k \leqslant 3^n / 2 - 0'5 \Longrightarrow$$

$$3^{n-1} / 2 - 0'5 < k \leqslant 3^n / 2 - 0'5 \Longrightarrow$$

$$(3^{n-1} - 1)/2 < k \leqslant (3^n - 1)/2 \qquad (2) ,$$

siendo equivalentes las condiciones (1) y (2).

Consideremos ahora el efecto de no disponer de bolas normales. En la deducción del cuadro 1, hecho para las informaciones con "x", permitíamos el caso r_1+r_2 impar, pero ahora nos vemos obligados a establecer $r_1=r_2$, por lo que $\delta=r_1+r_2$ es par.

Para las tres posibles formas k=3z+1 , k=3z y k=3z+2, tomábamos, respectivamente, $\delta=2z+1$; $\delta=2z$; $\delta=2z+2$ ó $\delta=2z+1$, para garantizar la eliminación del máximo número de signos. Deducimos de ello que, si la información inicial es del tipo k=3z+1, no podemos elegir δ impar, y tendremos que tomar $\delta=2z$, que era el otro posible valor de δ para este caso, y que sólo garantizaba eliminar 4z signos, no 4z+1.

Esto nos obliga a revisar la condición (2), ya que, según ella, el máximo k que puede resolverse con n pesadas, $k=(3^n-1)/2$, es del tipo -

$k=3z+1$. En efecto, puede comprobarse fácilmente que : $k=3z+1=(3^n-1)/2$ da lugar a $3^{n-1}=2z+1$, que es entero; y por el contrario, de las posibilidades $k=3z=(3^n-1)/2$ y $k=3z+2=(3^n-1)/2$, resultan valores no enteros para 3^{n-1}.

Según lo visto, para $k=(3^{n-1})/2 = 3z+1$ había que tomar $\delta=2z$, que garantiza la eliminación de $4z$ signos. Quedarán sin eliminar:

$g=2k-4z=2k-4(k-1)3=(2k+4)/3$ signos.

Como es $k=(3^{n-1})/2$, será:

$$g=\frac{2(3^{n-1})/2+4}{3} = (3^n-1+4)/3 = 3^{n-1}+1$$

Ahora bien, $g=3^{n-1}+1$ es tal que $3^{n-1} < g < 3^n$, por lo que, según el teorema 1, necesitaremos n pesadas más : Para una información inicial con $k=(3^n-1)/2$, necesitamos realmente n+1 pesadas.

Este es, por ejemplo, el caso de $k=4$, que puede resolverse en 2 pesadas, si se dispone de una quinta bola normal, pero que requiere 3 pesadas, si sólo tenemos las cuatro bolas "x".

Para otros valores de k próximos por defecto a $(3^n-1)/2$, no se presenta ya la necesidad de utilizar n+1 pesadas, ya que

$k=(3^n-1)/2 - 1 = 3z$ y $k=(3^n-1)/2 - 2 = 3z-1=3z'+2$ son situaciones en las que se elegía δ par, y $k=(3^n-1)/2 - 3$ queda demasiado lejos de $(3^n-1)/2$, pudiendo resolverse en n pesadas.

En efecto, si es $k=(3^n-1)/2 - 3 = 3z'+1$, será $\delta=2z'$ y, según acabamos de ver, quedan sin eliminar $g=(2k+4)/3$ signos.

$$g=(2k+4)/3 = \frac{(2(3^n-1)/2 - 3) + 4}{3} = (3^n-1-6+4)/3 = 3^{n-1} - 2/3$$

y será $3^{n-2} < g \leqslant 3^{n-1}$ que, según el teorema 1, se resuelve con n-1 pesadas.

Por tanto, queda demostrado el

TEOREMA 2 .- Si es $(3^{n-1}-1)/2 \leqslant k < (3^n-1)/2$ *, siendo* n *y* k *enteros y positivos y* k *el total de bolas que tiene una información inicial, serán necesarias y suficientes* n *pesadas para determinar cuál es la bola distinta y si pesa más o menos que el resto.*

Consideraciones finales

A "grosso modo", y sin entrar en detalles, puede afirmarse que:

a) en este tipo de problemas, lo que importa es el número total de signos que haya; no importa si van agrupados por parejas (bolas "x"), ni si se trata de signos "+" o "-" : 15 bolas en las que una puede pesar más, equivalen a 7 u 8 en las que una puede pesar más o menos.

b) las pesadas óptimas son aquellas en las que el número de signos queda repartido en tres cantidades lo más parecidas posible : una en el primer platillo, otra en el segundo y otra fuera de la balanza.

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas

II Congreso Internacional sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas

LOS PARADIGMAS DE ENSEÑANZA/APRENDIZAJE Y LA INVESTIGACIÓN EN LA DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS Y DE LAS MATEMÁTICAS

Valencia 23 a 25 de septiembre de 1987

PROPUESTAS DE COMUNICACIÓN

Quienes deseen presentar comunicaciones deben enviar, junto al boletín de preinscripción, un resumen amplio de las mismas, con una extensión máxima de tres páginas dina-4, mecanografiadas a doble espacio, con márgenes de dos centímetros y que incluya:

— Título.
— Autores y lugar de trabajo.
— Planteamiento del problema, con una especial atención a la fundamentación teórica. Presentación, si ha lugar, de las hipótesis de trabajo y del diseño experimental.
— Selección de referencias bibliográficas (atendiendo a las normas para el envío de originales a *Enseñanza de las Ciencias*).

PROPUESTAS DE TALLERES

Aquellos colectivos que deseen dirigir un taller habrán de remitir un resumen de los objetivos, fundamentación, descripción de las actividades a realizar por los asistentes, etc. con una extensión máxima de tres páginas dina-4, mecanografiadas a doble espacio, con márgenes de dos centímetros.

La directriz fundamental del Congreso seguirá siendo, como en la primera edición, contribuir al intercambio de experiencias entre quienes están comprometidos en el desarrollo de la investigación en la didáctica de las ciencias y de las matemáticas y facilitar el conocimiento de las líneas de investigación prioritarias, tanto en nuestro país como en la comunidad internacional. A tal efecto esperamos contar con la participación de algunos de los grupos internacionales más relevantes.

Por otra parte, atendiendo a una opinión ampliamente compartida entre los asistentes al primer congreso, esta segunda edición estará presidida por una orientación general que, sin excluir ninguna línea de investigación, haga posible un intercambio más eficaz. Este es el sentido del título dado al congreso: *Los paradigmas de enseñanza/aprendizaje y la investigación en la didáctica de las ciencias y de las matemáticas.* Con ello se pretende que la fundamentación teórica permita situar la investigación realizada en un determinado marco teórico, resaltando su contribución al desarrollo de un paradigma de enseñanza/aprendizaje. Los trabajos presentados podrán así contribuir, desde distintos ángulos, a un debate enriquecedor y a la clarificación de los paradigmas que orientan, a menudo implícitamente, la investigación didáctica y la enseñanza misma. No se trata, pues, de imponer un único tema, sino de proponer una orientación común consistente en un esfuerzo de fundamentación teórica.

AVANCE DE PROGRAMA

De acuerdo con los objetivos que acabamos de señalar se ha previsto:

— Sesiones plenarias, a cargo de especialistas internacionales, sobre la contribución de distintas líneas de investigación a la constitución de un cuerpo teórico de conocimientos en los campos de la didáctica de las ciencias y de las matemáticas.
— Sesiones simultáneas para la presentación y discusión de trabajos inéditos de investigación, agrupados temáticamente.
— Talleres, concebidos como sesiones de trabajo, destinados a mostrar líneas de investigación en marcha y, fundamentalmente, las implicaciones de la investigación al trabajo en la clase.

PREINSCRIPCIÓN

La preinscripción habrá de realizarse antes del 30 de enero de 1987, enviando el boletín que se adjunta a:

Enseñanza de las Ciencias
ICE. Universitat Autònoma de Barcelona.
Bellaterra (Barcelona)

Para garantizar la posibilidad de intercambios efectivos y evitar la masificación el número de plazas habrá de ser limitado.

INSCRIPCIÓN DEFINITIVA

La inscripción definitiva deberá realizarse antes del 15 de mayo de 1987, mediante el pago de los derechos de inscripción. Estos derechos han sido fijados, atendiendo a los costes de organización y a las ayudas previstas, en 10.000 ptas. (8.000 para los subscriptores de *Enseñanza de las Ciencias*).

42