

LOS ABACOS VERTICAL Y PLANO EN LA DIDACTICA  
DE LA NUMERACION Y DE LAS OPERACIONES

Martín Socas Robayna

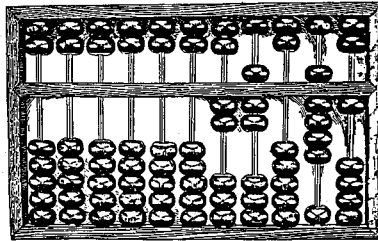
E.U. del Profesorado de E.G.B. de La Laguna

INTRODUCCION

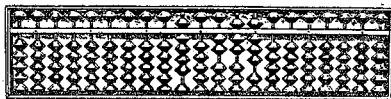
Los ábacos son antiguos instrumentos de cálculo, generalmente poco usados en nuestro país en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. El más antiguo, empleado por los griegos, era un tablero de madera donde, con un punzón, se podían trazar cifras o figuras.

En nuestros días, el uso del ábaco como calculadora es corriente en diferentes países del Extremo Oriente y en la Unión Soviética. Tres son las variantes más utilizadas :

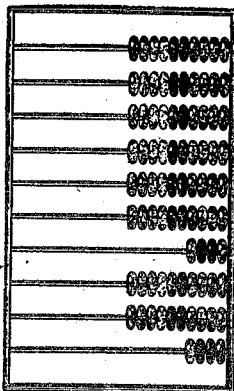
El *ábaco chino*, formado por cuentas o abalorios que se deslizan a lo largo de varillas. Cada varilla está dividida en dos por una barra horizontal, por debajo de la que hay cinco cuentas y, por encima, dos.



El *ábaco japonés* se diferencia del anterior en que la parte superior de cada varilla lleva una sola cuenta.



El *ábaco ruso* tiene varillas horizontales, la mayoría con diez cuentas. Las centrales son de distinto color, para indicar donde deben separarse. Las varillas de cuatro cuentas sirven para representar fracciones de rublo o kopek, ya que es un ábaco adaptado al sistema monetario ruso.



En este trabajo trataremos de tres tipos de ábaco ( de varillas, plano y de papel ) para utilizar en la escuela, más como recurso pedagógico que como instrumento de cálculo. Aquel aspecto es casi siempre desconocido u olvidado y, en general, poco empleado por el profesorado en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la numeración y las operaciones aritméticas.

Consideraremos primeramente aspectos generales de los objetivos a tratar, de los procesos de aprendizaje y de los recursos a emplear.

El número es un ente abstracto que proviene de la acción del niño con los objetos, y se agrega a éstos como una propiedad de las colecciones.

La construcción de los números mayores que diez se debe regir por el principio de agrupar. Como paso previo, se debe usar agrupamientos de cinco en cinco, de cuatro en cuatro, ..., para llegar, mediante el trabajo reiterado con los mismos, a la comprensión intuitiva del sistema decimal de numeración, como un sistema posicional donde los agrupamientos se realizan

de diez en diez.

Las operaciones con números naturales tienen un papel importante en el aprendizaje de las Matemáticas desde los primeros niveles de la EGB . Esta enseñanza debe tender más a una educación formativa que utilitaria. El alumno debe plantear una operación en la medida que comprenda lo que esa operación expresa, y debe calcular entendiendo el significado de cada operación. Debemos poner tanto énfasis en la comprensión de los conceptos como en el desarrollo de técnicas y habilidades de cálculo.

El estudiante debe seguir un proceso de aprendizaje que respete el paso de lo concreto a lo abstracto, cubriendo las etapas necesarias, según indican Bruner, Dienes, Van Hiele o Hart.

En definitiva, proponemos y concretamos aquí una enseñanza-aprendizaje del sistema de numeración decimal y de las operaciones básicas mediante pasos progresivos y razonados que, en las fases finales, le conducirán a la adquisición de los automatismos.

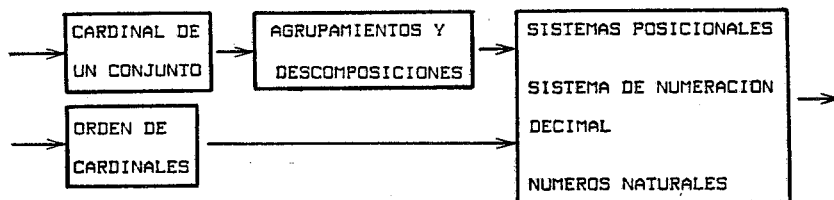
Las etapas de aprendizaje que seguiremos son las señaladas por Bruner :

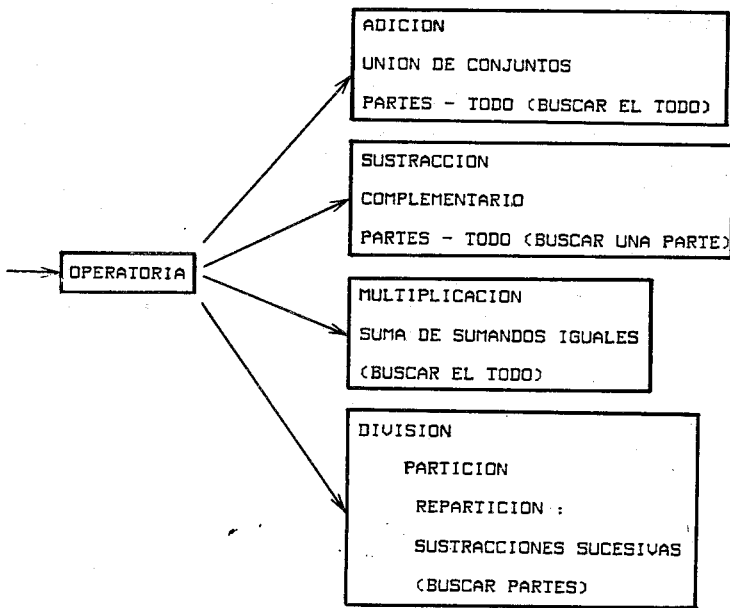
Primera: Activa o manipulativa, etapa experimental con objetos reales y acciones manipulables.

Segunda: Icónica o gráfica, en la que la acción manipulativa se traslada a un lenguaje gráfico.

Tercera: Simbólica, donde la acción se expresa con signos y símbolos matemáticos.

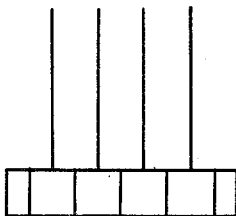
El proceso lógico-didáctico a seguir se recoge, a modo de ejemplo, en el siguiente ordinograma (se omite la fase prenumérica) :





Describiremos a continuación el material a emplear :

El ábaco de varillas consta de una base de madera atravesada por cuatro o siete varillas metálicas que sobresalen de ella unos veinte centímetros, un número suficiente de bolas perforadas que entran con facilidad en las varillas y unas plantillas o etiquetas colocadas en la parte frontal. Estas son tiras de cartulina plastificada que hacen referencia al orden de unidades. Se presentan cinco modelos diferentes en los agrupamientos de diez, con cuatro o siete ordenes de unidades. En el gráfico adjunto señalamos sólo cuatro de estos órdenes. En los agrupamientos diferentes de diez, se utilizarán, obviamente, cuatro etiquetas distintas.



GRUPOS DE MIL	GRUPOS DE CIEN	GRUPOS DE DIEZ	SUELTAS
------------------	-------------------	-------------------	---------

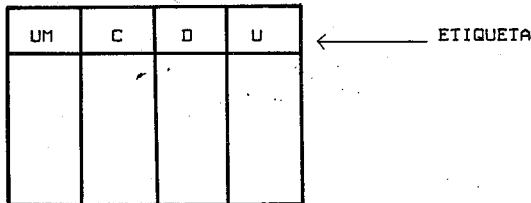


1.000	100	10	1
-------	-----	----	---

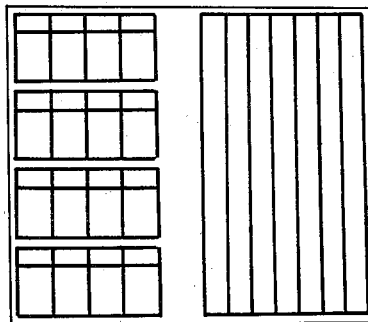
UM	C	D	U
----	---	---	---

<sup>3</sup> 10	<sup>2</sup> 10	<sup>1</sup> 10	<sup>0</sup> 10
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

El ábaco plano consiste en una cartulina con varias líneas verticales paralelas, que delimitan los órdenes de unidades, de derecha a izquierda, y una horizontal por encima de la cual se colocan etiquetas análogas a las descritas. Son necesarias, además, fichas de diferentes colores.



Por último, el ábaco de papel es una hoja de tamaño folio que en la parte izquierda reproduce cuatro ábacos planos y, en la derecha, lleva siete bandas de trazado vertical.



Utilizando la misma denominación de Papy para el minicomputador, llamaremos *formaciones* a las disposiciones que permiten leer correctamente un número en el ábaco, es decir, representar un número con el me

menor número posible de fichas. En consecuencia, la única regla, si estamos en el país del diez, es que diez fichas en una casilla equivalen a una ficha en la casilla siguiente.

La utilización de estos ábacos, con una regla que depende del tipo de agrupamiento, nos va a permitir diseñar un proceso de aprendizaje coherente en la enseñanza de la numeración y las operaciones. Presentaremos las actividades a realizar bajo los siguientes tópicos :

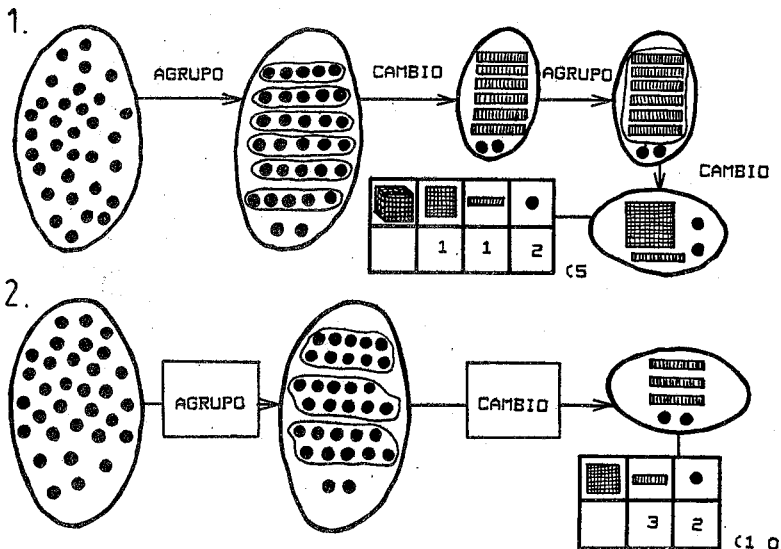
- . Agrupamientos
- . Ordenación y comparación
- . Operaciones con números naturales.

### AGRUPAMIENTOS

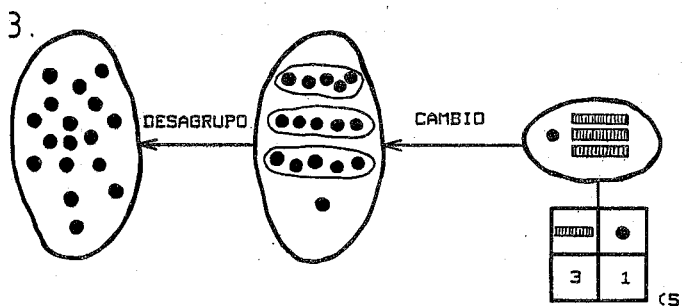
La realización de agrupamientos de cinco, cuatro o seis, utilizando referenciales del medio, permite la comprensión del sistema de numeración decimal como agrupamientos de diez en diez.

### ETIQUETADO DE UNA COLECCIÓN EN UN PAÍS CUALQUIERA

Supongamos una colección con un número determinado de elementos, por ejemplo los niños de la clase, que representamos con círculos pequeños. Trataremos de etiquetar esta colección en dos países diferentes : el país del cinco y el país del diez.

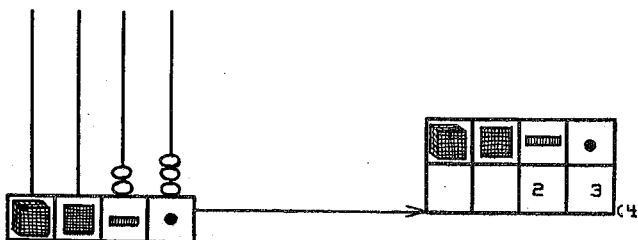
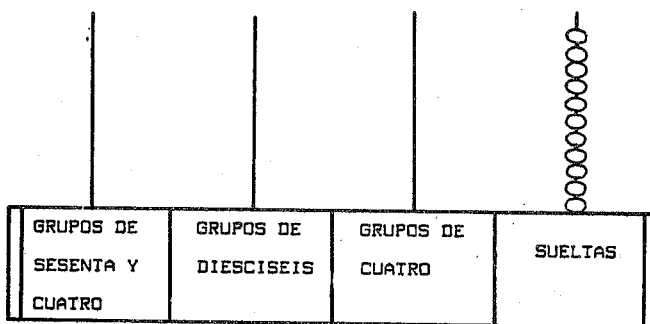


En este otro ejemplo se efectúa el proceso inverso, partiendo de la etiqueta.



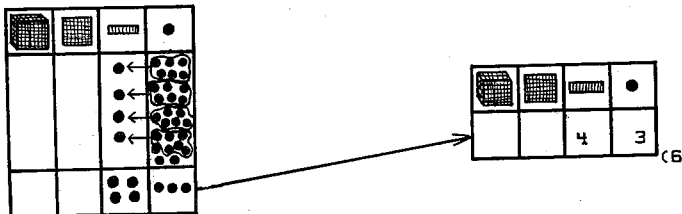
AGRUPAMIENTOS DE 4 EN 4 EN EL ÁBACO DE VARILLAS

Se coloca un número determinado de bolitas en la primera de las varillas, por ejemplo 11. Se realizan los agrupamientos colocando adecuadamente las bolitas en la varilla correspondiente.



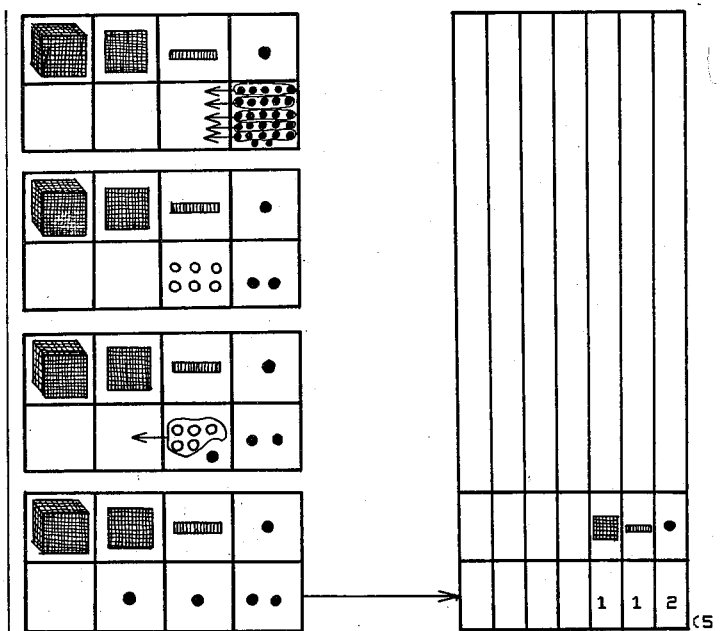
### AGRUPAMIENTOS DE 6 EN 6 EN EL ÁBACO PLANO

Se colocan fichas, por ejemplo 27, en el primer orden de unidades, y se realizan los agrupamientos haciendo los cambios correspondientes a cada orden de unidades.



### AGRUPAMIENTOS DE 5 EN 5 EN EL ÁBACO-PAPEL

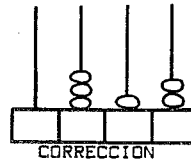
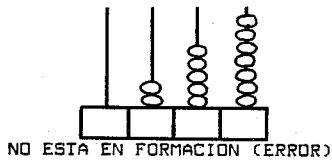
Se representan con círculos los elementos de la colección, por ejemplo 32, y se realizan los agrupamientos y cambios hasta obtener la escritura del número.



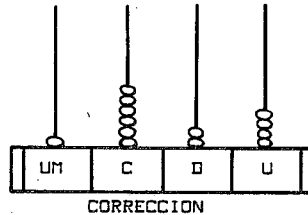
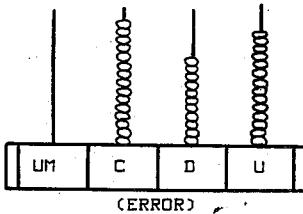


REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS QUE NO ESTÁN EN FORMACIÓN

*Pais del cinco*



*Pais del diez*



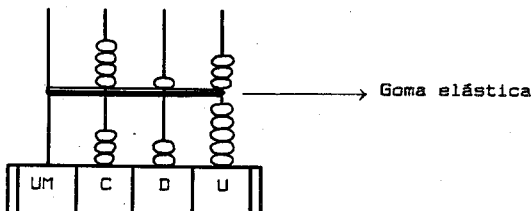
Estas actividades pueden ser trasladadas al ábaco plano y al de papel.

ORDENACION Y COMPARACION DE NUMEROS NATURALES

Al igual que en los ejemplos anteriores, podemos utilizar los tres tipos de ábaco descritos.

Una vez escritos los números en el ábaco, se procederá a comparar los órdenes de unidades, comenzando por la de orden mayor. Veamos algunos ejemplos:

En el ábaco de varillas, se puede utilizar goma elástica para la separación de los números. Se procede comparando primeramente las centenas; si fueran iguales, se compararían las decenas, etc.



En el ábaco plano se puede utilizar tapas de distintos colores para representar los diferentes números.

UM	C	D	U
	●●●●	●	●●●
	●●●●		●●

Y he aquí un ejemplo de comparación y ordenación de números en el ábaco de papel:

UM	C	D	U
	●●	●	●●
UM	C	D	U
	●●		●●
UM	C	D	U
	●●	●●●	●●
	●●	●●●	●●
UM	C	D	U
	●●	●	●
	●●	●	

				C	D	U
				5	1	3
				5	0	2
				4	6	4
				5	2	1

5 2 1 > 5 1 3 > 5 0 2 > 4 6 4



Transcripción al papel de lineado vertical

Nota.- En la etapa siguiente, el alumno dispone de un folio (ábac-papel) en el que, a la izquierda, se disponen las acciones a realizar y, a la derecha, el papel de lineado vertical. Sólo razones de ajuste de páginas justifica el que el proceso a seguir aparezca aquí como sigue.

	①	C	D	U	
		3	5	8	+
			9	4	-
				12	
	②	C	D	U	
		3	15	8	+
			9	4	-
			15	2	
	③	C	D	U	
		13	5	8	+
			9	4	-
			5	2	
	④	C	D	U	
		3	5	8	+
			9	4	-
		4	5	2	

Etapa icónica

1. Representación en el ábaco-papel:

C	D	U
•	•••••	•••••
•	•••••	•••••
•	•••••	•••••

2. Ajustes en las unidades:

C	D	U
•	•••••	•••••
•	•••••	•••••
•	•••••	•••••

3. Ajustes en decenas:

C	D	U
•	•••••	••
•	•••••	••
•	•••••	••

4. Resultado final:

C	D	U
••	••••	••
••	••••	••

Transcripción al papel con bandas

		①	C	D	U	
			3	5	8	+
				9	4	-
					12	
		②	C	D	U	
			3	15	8	+
				9	4	-
					2	
		③	C	D	U	
			3	5	8	+
				9	4	-
				15	2	
		④	C	D	U	
			13	5	8	+
				9	4	-
			4	5	2	

### SUSTRACCION

Para representar el minuendo y el sustraendo en el ábaco plano, utilizaremos fichas de diferente color; para hacerlo en el ábaco-papel, - símbolos distintos.

Se trata de eliminar las fichas representantes del sustraendo, - siguiendo la siguiente regla : "Dos fichas de distinto color o representa das por símbolos diferentes en un mismo orden de unidades, se anulan"

Restar será interpretado como "desagrupar" para hacer efectiva - la regla anterior. Cuando todas las cifras del minuendo son mayores que -



## MULTIPLICACION Y DIVISION

La multiplicación es interpretada como una representación abreviada de una suma de sumandos iguales. Por ejemplo, para efectuar  $673 \cdot 3$  en el ábaco plano se representa tres veces con fichas el número 673, se juntan y se aplica la regla. Multiplicar en este sentido es equivalente a agrupar.

La división se puede explicar como una partición de un conjunto en subconjuntos de igual cardinal, y como una repartición. En ambos casos se puede resolver de forma numérica mediante restas sucesivas con igual sustraendo. Optamos por estudiarla como partición. Así, para calcular  $148 : 3$  en el ábaco plano, se forman grupos de tres en cada uno de los órdenes de unidades, desagrupando al orden inmediato inferior en los casos en que no es posible formar grupos.

$$673 \cdot 3 =$$

UM	C	D	U
	○○○ ○○○	○○○ ○○○ ○	○○○ ○○○ ○○○

UM	C	D	U
	○	○○○○○ ○○○○○ ○○○○○	○○○ ○○○ ○○○

UM	C	D	U
○	○○○○○ ○○○○○ ○○○○○	○	○○○ ○○○ ○○○

UM	C	D	U
○ ○		○	○○○ ○○○ ○○○

UM	C	D	U
	6	7	3
			3
			9
UM	C	D	U
	6	7	3
			3
		21	9
UM	C	D	U
	$\frac{2}{6}$	7	3
			3
	18	1	9
UM	C	D	U
	6	7	3
			3
2	0	1	9

148 : 3

- 1º) Representar 148. Formar grupos de tres empezando por las centenas. Como no se puede, transformarlas en decenas.
- 2º) Agrupar las decenas de tres en tres. Contar los grupos y escribirlos.
- 3º) Cambiar las decenas que no se pudo agrupar.
- 4º) Agrupar las unidades. Contar los grupos de tres y escribirlos.

UM	C	D	U
	○	○○○○ ○○○○ ○○○○	○○○○ ○○○○

UM	C	D	U
		○○○ ○○○ ○○○ ○○○ ○○○	○○○○ ○○○○

UM	C	D	U
		○○○ ○○○ ○○○ ○○○ ○○○	○○○○ ○○○○ ○○○○ ○○○○ ○○○○

UM	C	D	U
		○○○ ○○○ ○○○ ○○○	○○○○○ ○○○○○ ○○○○○ ○○○○○ ○○○

	C	D	U			
	1	4	8	3		
	C	D	U	C	D	U
-	1	4	8	3		
	1	2		C	D	U
		2			4	
	C	D	U			
-	1	4	8	3		
	1	2		C	D	U
		2	8		4	
	C	D	U			
-	1	4	8	3		
	1	2		C	D	U
		2	8		4	9
	-	2	7			
			1			



LA ETAPA SIMBÓLICA

Papel con bandas

Papel liso

ADICION

3 5 8 + 9 4 =

C	D	U	
1	1	8	+
3	5	8	
	9	4	-
4	5	2	

$$\begin{array}{r} 358 + \\ 94 = \\ \hline 452 \end{array}$$

SUSTRACCION

3 1 2 - 5 4 =

C	D	U	
2	10	12	-
<del>3</del>	<del>1</del>	<del>2</del>	
	5	4	-
2	5	8	

$$\begin{array}{r} 312 - \\ 54 = \\ \hline 258 \end{array}$$

MULTIPLICACION

6 7 3 x 3 =

	C	D	U	
	2	7	3	x
	6			
			3	-
2	0	1	9	

$$\begin{array}{r} 673 \times \\ 3 = \\ \hline 2019 \end{array}$$

DIVISION

1 4 7 : 3 =

	C	D	U			
	1	4	7	3		
-	1	2		C	D	U
		2	7		4	9
	-	2	7			
			0			

$$\begin{array}{r} 147 \overline{) 3} \\ 27 \quad 49 \end{array}$$

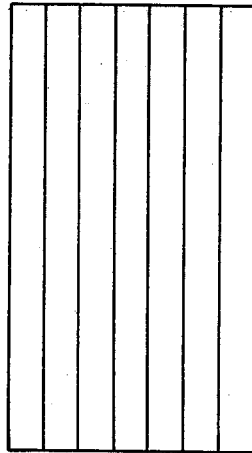
Hemos mostrado algunas de las posibilidades de los ábacos considerados en la enseñanza del sistema decimal de numeración y las operaciones básicas. La generalización a los números decimales y al sistema métrico decimal es fácil. Los recursos a emplear serían los mismos, salvo que entonces habría siete órdenes de unidades. Sirva de muestra el modelo adjunto de ábaco de papel.

UM	C	D	U	d	c	m

Km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

Kg	hg	dag	g	dg	cg	mg



#### A MODO DE CONCLUSION

Uno de los principales objetivos de la enseñanza de la Matemática en los primeros años es desarrollar la capacidad para la realización de operaciones aritméticas y el uso inteligente de los números y el sistema de numeración decimal. No es menos cierto que con relativa frecuencia se produce en los niños enormes dificultades en el aprendizaje de la aritmética. La causa principal de estas anomalías se origina, en la mayoría de los casos, por un planteamiento incorrecto o complejo del sistema de numeración decimal y de las operaciones.

El aprendizaje de las cuatro operaciones con números naturales implica, no sólo un claro dominio de los procedimientos operatorios, sino también el conocimiento de la naturaleza y estructura del sistema de numeración decimal. Un proceso de enseñanza-aprendizaje correcto de estos conceptos aritméticos necesita, en primer lugar, conocer los aspectos numéri-

cos básicos comunes a todos los procesos operatorios. Diferentes investigaciones han puesto de manifiesto que una de las principales causas de este fracaso en las operaciones aritméticas es el desconocimiento de tales aspectos generales, revelado por respuestas inadecuadas, lentitud operativa, uso de procedimientos indirectos, empleo de recursos, como el de contar, para asegurar la exactitud de la operación, etc.

Siendo conscientes, por otra parte, de que son posibles otras clase de errores y deficiencias que pueden determinar o contribuir a una ineptitud específica o general para la aritmética, entendemos que el proceso de enseñanza-aprendizaje diseñado con ayuda de los ábacos, puede colaborar en gran medida al conocimiento de los aspectos numéricos básicos comunes en los procesos operatorios, desarrollando la capacidad para entender el sistema de numeración decimal y la realización de las operaciones aritméticas.

#### BIBLIOGRAFÍA

- BRUECKNER y BOND : Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje - Rialp, Madrid, 11<sup>a</sup> ed., 1986
- SMITH, D.E. : History of Mathematics - Vol. II - Dover, New York, 1958

