NUMEROS.18 - 1988

TEOREMA DE THALES

José Luis Gallego García
I.B. "Isaac Peral" - Cartagena
Francisco Linares Teruel
I.B. "Celia Viñas" - Almería

INTRODUCCION

De todos es sobradamente conocido que los métodos algebraicos de la geometría han relegado a un segundo plano a los métodos clásicos euclidianos de razonamiento. Sin embargo, pensamos que son estos los más apropiados para desarrollar la capacidad de razonamiento y despertar interés en el alumno, sobre todo en los niveles de enseñanza en los que nos desenvolvemos, en los que el alumno es capaz de efectuar y analizar paso a paso los razonamientos lógicos seguidos en una demostración geométrica.

A pesar de que el álgebra es la mejor colaboradora de la geometría, es conveniente a veces olvidarse de ella para introducirse en la geometría, pues los símbolos algebraicos son demasiado pobres semánticamente para ser entendidos por nuestros alumnos. Por ello, nos vamos a introducir en el mundo de la geometría clásica, en el que las simples figuras ya inspiran en el alumno un agradable sentido de simetría, de regularidad y de belleza, además de estimular en sumo grado su sentido de la intuición.

La geometría clásica se ha abandonado mucho en la enseñanza secundaria, y se da el caso de utilizar continuamente resultados geométricos que damos como evidentes, pero que nunca hemos planteado su demostración a nuestros alumnos. ¿Cuántas veces nos hemos basado para alguna demostración de un teorema en proposiciones como las que escuetamente expresamos a continuación y que utilizamos como dogmas de fe?:

-Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

-Dos ángulos correspondientes son iguales.

-Dos ángulos alternos-internos son iguales.

-Dos ángulos alternos-externos son iguales.

-La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.
-Enunciado del Teorema de Thales.
-La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado hasta el punto de tangencia.
-La amplitud del ángulo central de una circunferencia es igual a la del arco que abarca.
-La amplitud del ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud del arco que abarca.
-Enunciado del Teorema de Pitágoras.
-Las mediatrices, medianas, alturas y bisectrices de un triángulo son rectas concurrentes.
....

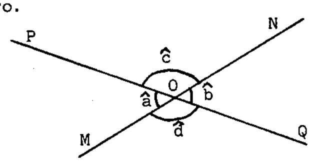
¡Qué pocas de estas proposiciones tomadas como ejemplo, por no decir ninguna, hemos demostrado a nuestros alumnos en alguna ocasión!.

En relación con este monográfico de **La proporcionalidad** nos vamos a limitar aquí a demostrar el archiconocido enunciado del **teorema de Thales.** Para ello, intentaremos basarnos en soportes lo más evidentes posibles, por lo que vamos a descender en ese "mundo de la evidencia" hasta un fondo más o menos profundo con la demostración previa de una serie de proposiciones que nos van a permitir, a la hora de demostrar el teorema de Thales, dogmatizar al mínimo y que no nos queden demasiados cabos sueltos.

ANGULOS OPUESTOS POR EL VERTICE

Son aquellos que, teniendo el mismo punto como vértice, los lados de uno son las semirrectas opuestas a los lados del otro.

En la figura adjunta, $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son dos ángulos opuestos por el vértice. Así mismo, también lo son los dos ángulos $\hat{c}$ y $\hat{d}$.



PROPOSICION.-Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Demostración: Sean los ángulos opuestos por el vértice, $\hat{a}$ y $\hat{b}$, de la figura.

-Considerando la recta $\overline{MN}$, $\hat{a}$ es el ángulo suplementario de $\hat{c}$.

-Considerando la recta $\overline{PQ}$, también $\hat{b}$ es el ángulo suplementario de $\hat{c}$.

Por lo tanto, $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son iguales por tener como ángulo suplementario de ambos el mismo ángulo $\hat{c}$, es decir, la amplitud de cada uno de ellos es $180^{o}-\hat{c}$.

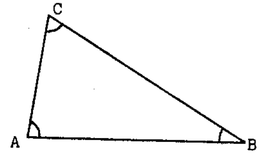
Del mismo modo se demuestra que los ángulos opuestos por el vértice, $\hat{c}$ y $\hat{d}$ son iguales.

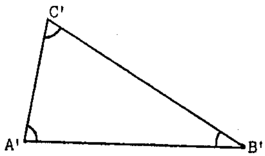
IGUALDAD DE TRIANGULOS

Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales sus lados y sus ángulos.

Ahora bien, vamos a ver un **criterio de igualdad de triángulos**, que utilizaremos más adelante, y que nos dice que **para que dos triángulos sean iguales es suficiente con que tengan iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a dicho lado.** En Efecto:

Sean los dos triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ de la figura, y supongamos que $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\hat{A}=\hat{A}'$ y $\hat{B}=\hat{B}'$.



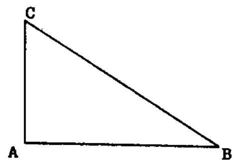


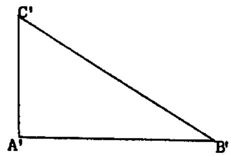
- Colocamos el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ sobre el $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, de forma que el lado $\overline{AB}$ coincida, ya que son iguales, con el lado $\overline{A'B'}$.
- Como $\hat{A}=\hat{A}'$, entonces el lado $\overline{AC}$ tomará la misma dirección que el lado $\overline{A'C'}$.
- Del mismo modo, como $\hat{B}=\hat{B}'$ el lado $\overline{BC}$ tomará la misma dirección que el lado $\overline{B'C'}$.
- Como consecuencia, el punto C se hallará a la vez en los lados $\overline{A'C'}$ y $\overline{B'C'}$, por lo que coincidirá con C'.

Luego los dos triángulos coinciden, es decir, tienen iguales sus tres lados y sus tres ángulos, y por lo tanto son iguales.

También nos será útil el **criterio de igualdad de triángulos rectángulos**, que nos dice que **para que dos triángulos rectángulos sean iguales es suficiente con que sea igual la hipotenusa y un ángulo agudo de cada uno de ellos.** Veamos su demostración:

Sean los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ rectángulos, y supongamos que $\overline{BC}=\overline{B'C'}$ y $\hat{B}=\hat{B}'$. Además, por ser dos triángulos rectángulos, se verifica que $\hat{A}=\hat{A}'=90^{\circ}$.





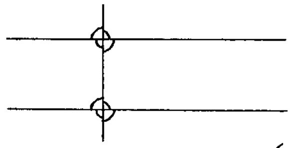
- Colocamos el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ sobre el $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, de modo que coincidan las hipotenusas $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$, ya que son iguales.
- Por ser $\hat{B}=\hat{B}'$, el lado $\overline{BA}$ seguirá la misma dirección del $\overline{B'A'}$.
- Las perpendiculares por $C \equiv C'$ cortarán al otro cateto en un mismo punto $A \equiv A'$.

Luego los triángulos coinciden y, por lo tanto, son iguales.

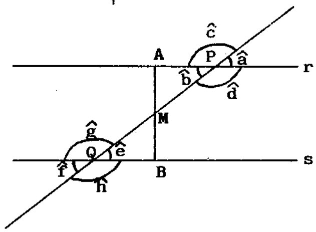
ANGULOS QUE DETERMINA UNA RECTA SECANTE A DOS PARALELAS

Dos rectas paralelas, al ser cortadas por una recta secante, determinan ocho ángulos. Veamos la relación que existe entre ellos, considerando los dos siguientes casos:

a) **La recta secante es perpendicular a ambas rectas:** En este caso, evidentemente, los ocho ángulos son rectos, y por consiguiente iguales.



b) **La recta secante no es perpendicular a las rectas:** Llamemos **r** y **s** a las rectas paralelas, **P** y **Q** a los puntos de intersección de la recta secante con las paralelas, y **M** al punto medio del segmento $\overline{PQ}$.



-Trazamos por M la recta perpendicular a **r**, y por lo tanto, también a **s**. Llamamos **A** y **B** a los puntos de intersección de dicha recta con las paralelas.

-Los triángulos **rectángulos** $\overset{\triangle}{MAP}$ y $\overset{\triangle}{MBQ}$ son iguales, puesto que tienen:

a) Igual hipotenusa, $\overline{MP}=\overline{MQ}$, por ser M el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

b) Igual ángulo agudo, el correspondiente al vértice común M, por ser ángulos opuestos por el vértice.

Como consecuencia de ser iguales los triángulos tenemos que $\widehat{APM}=\hat{b}=\hat{e}=\widehat{BQM}$ (ángulos **alternos-internos**). Además, como los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{f}$ son, respectivamente, opuestos por el vértice de $\hat{b}$ y $\hat{e}$, resulta que: $\hat{a}=\hat{b}$ y $\hat{e}=\hat{f}$. Luego, en definitiva: $\hat{a}=\hat{b}=\hat{e}=\hat{f}$.

Y como los ángulos $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{g}$ y $\hat{h}$ son suplementarios de cada uno de los anteriores, podemos también afirmar que: $\hat{c}=\hat{d}=\hat{g}=\hat{h}$.

Luego, en resumen podemos decir que al cortar una recta secante a dos paralelas:

1.-Los ángulos alternos-internos son iguales: $\hat{b}=\hat{e}$, $\hat{d}=\hat{g}$.

2.-Los ángulos alternos-externos son iguales: $\hat{a}=\hat{f}$, $\hat{c}=\hat{h}$.

3.-Los ángulos correspondientes también son iguales: $\hat{a}=\hat{e}$, $\hat{c}=\hat{g}$, $\hat{b}=\hat{f}$, $\hat{d}=\hat{h}$.

SUMA DE LOS ANGULOS DE UN TRIANGULO

Los tres ángulos de cualquier triángulo suman un ángulo llano, es decir, 180º.

Demostración:

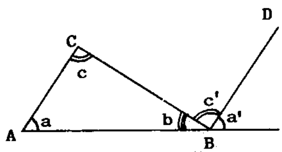
-Sea el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ y tracemos por B una paralela al lado $\overline{AC}$.

-Prolongamos el lado $\overline{AB}$. Resulta entonces que $\overline{BC}$ es una recta secante a dos paralelas, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

-Teniendo en cuenta lo visto anteriormente:

$\hat{c}=\hat{c}'$, por ser ángulos alternos-internos.

$\hat{a}=\hat{a}'$, por ser ángulos correspondientes.



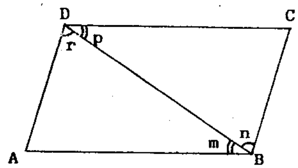
Luego, la suma $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}$ es igual a la suma $\hat{a}'+\hat{b}+\hat{c}'$, o sea, el ángulo llano correspondiente a la recta $\overline{AB}$.

PARALELOGRAMO

Es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

Propiedad: En un paralelogramo los lados opuestos son iguales.

Demostración: Sea el paralelogramo $ABCD$ y tracemos el segmento $\overline{DB}$. Se forman los triángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{BCD}$, que son iguales, ya que:



- Tienen el lado $\overline{BD}$ común.
- Tienen iguales los ángulos adyacentes al lado anterior: $\hat{m}=\hat{p}$ y $\hat{n}=\hat{r}$, por ser ángulos alternos-internos.

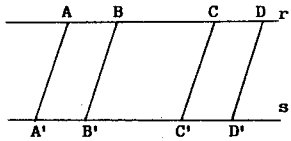
Luego, son iguales dichos triángulos en virtud de uno de los criterios de igualdad de triángulos demostrado anteriormente. Por lo tanto: $\overline{AB}=\overline{DC}$ y $\overline{AD}=\overline{BC}$.

TEOREMA

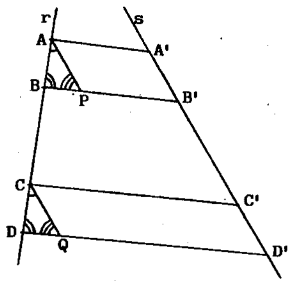
Si tenemos dos rectas en un plano y en una de ellas tomamos dos segmentos iguales, AB=CD, al trazar por los extremos de los segmentos rectas paralelas entre sí que corten a la otra recta determinarán en ella dos segmentos que también son iguales, A'B'=C'D'.

Demostración: Consideraremos dos casos:

a) Si las dos rectas **r** y **s** son paralelas y tomamos dos segmentos iguales en la recta r, AB=CD, los correspondientes al trazar rectas paralelas por los extremos también son iguales, por ser lados opuestos de paralelogramos. Es decir, AB=A'B' y CD=C'D'. Por lo tanto, A'B'=C'D'.



b) Si las dos rectas **r** y **s** no son paralelas trazaremos por los puntos A y C dos paralelas a la otra recta s, $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$.



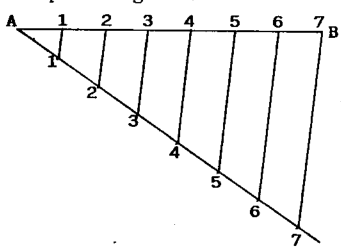
Los triángulos $\widehat{ABP}$ y $\widehat{CDQ}$ son iguales, puesto que:

- Tienen el lado $\overline{AB}$ igual al $\overline{CD}$.
- Tienen iguales los dos ángulos adyacentes al lado anterior, por ser ángulos correspondientes: $\widehat{BAP}=\widehat{DCQ}$, $\widehat{ABP}=\widehat{CDQ}$.

Como consecuencia de ser iguales los triángulos tenemos que: $\overline{BP}=\overline{DQ}$, $\overline{AP}=\overline{CQ}$, y por lo tanto, $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$ por ser lados opuestos de paralelogramos.

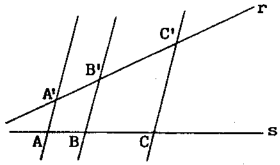
Este teorema, además de servirnos para demostrar el teorema de Thales, nos va a permitir la división de un segmento en n partes iguales.

Para ello, dado un segmento $\overline{AB}$ se traza una recta por un extremo del segmento formando un ángulo agudo con dicho segmento. Se toman n partes iguales cualesquiera y consecutivas a partir del mismo extremo. Finalmente se toma el último punto resultante de tomar las partes en la recta y se une con el otro extremo del segmento, para a continuación trazar paralelas desde los puntos de división de la recta.



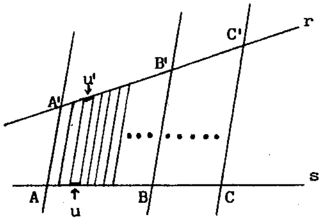
TEOREMA DE THALES

Si tenemos dos rectas r y s de un plano, tres rectas paralelas entre sí que corten a las anteriores determinan segmentos correspondientes proporcionales. Es decir: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ ó bien $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$.



Demostración:

Supongamos que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen una unidad común **u**, la cual está contenida p veces en AB y q veces en BC, siendo **p** y **q** números naturales. En ese caso: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{p.u}{q.u}=\frac{p}{q}$.



Si llevamos la unidad de medida común sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, y trazamos paralelas a $\overline{AA'}$ por los puntos de división, estas interceptarán p segmentos iguales en $\overline{A'B'}$ y q segmentos iguales en $\overline{B'C'}$, como consecuencia del teorema anterior. Además, serán todos ellos iguales entre sí y de amplitud **u'**. Luego: $\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{p.u'}{q.u'}=\frac{p}{q}$, y por lo tanto, $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$.

Esta igualdad será cierta cualquiera que sea la unidad de medida común que hayamos tomado.

Pero puede ocurrir que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ carezcan de una unidad de medida común, es decir, que sean inconmensurables el uno con el otro. En este caso, tomaremos como unidad de medida la p-ésima parte de $\overline{AB}$ que llamaremos u. Entonces, $\overline{AB}=p.u$. Ahora bien, $\overline{BC}$ no podrá contener un número natural de veces a u, ya que $\overline{BC}$ es inconmensurable con $\overline{AB}$, así que u estará contenida más de q veces y menos de q+1 veces en $\overline{BC}$, siendo q natural. Es decir: $q.u<\overline{BC}<(q+1).u$.

Y dividiendo dichas desigualdades entre $\overline{AB}=p.u$: $\frac{q.u}{p.u}<\frac{BC}{AB}<\frac{(q+1).u}{p.u} \Leftrightarrow \frac{q}{p}<\frac{BC}{AB}<\frac{q+1}{p}$.

LLevando ahora la unidad de medida u sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y trazando paralelas a $\overline{AA'}$ por lo puntos de división, tenemos del mismo modo que:

$$A'B'=p.u' \quad y \quad q.u'<B'C'<(q+1).u' \Longrightarrow \frac{q.u'}{p.u'}<\frac{B'C'}{A'B'}<\frac{(q+1).u'}{p.u'} \Longleftrightarrow \frac{q}{p}<\frac{B'C'}{A'B'}<\frac{q+1}{p} .$$

Como podemos tomar la unidad de medida u tan pequeña como queramos, es decir, que p podrá ser tan grande como se quiera. En el Límite cuando u tiende a cero, p tenderá a infinito y entonces la amplitud del intervalo en el que se encuentran ambas razones tenderá a cero, por lo que ambas razones serán iguales. O sea:

$$u \to 0 \Leftrightarrow p \to \infty \Longleftrightarrow \frac{q+1}{p}-\frac{q}{p}=\frac{1}{p} \to 0 \Longleftrightarrow \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'} .$$

Este teorema se puede evidentemente generalizar, considerando más de tres rectas paralelas.

BIBLIOGRAFIA

K. BOROCZKY y otros. Intuitive Geometry (1985). International Conference, Siófok.

V. COLLADO. Geometría Gráfica (1987).

E. HERNANDEZ. Algebra y Geometría (1987).

Geometría, Curso Superior. Ed. Bruño. (1978).

F. HURTADO y otros. Atlas de Matemáticas (1987).

N.I. LOBATCHEVSKI. La Théorie des Parallèles (1980).

L. MASCHERONI. Géométrie du compas (1980).

Y. SORTAIS. La Géométrie du triangle (1987).