

NUMEROS 18
1988

PROPORCIONALIDAD O RAZONAMIENTO PROPORCIONAL?

Joaquim Giménez

Universidad de Barcelona

OBJETIVO

Al hablar de proporción y proporcionalidad se unen muy diversos aspectos cotidianos, que podríamos representar mediante los siguientes títulos :

- De la antropología a la antropometría
- De la belleza a la simetría
- Del equilibrio a la equivalencia
- De la concordancia a la dependencia

En todos ellos se hace notar como se trata de un proceso que va de lo observacional a lo medible en los distintos ámbitos del quehacer humano. ¡Nada se aparta de la proporcionalidad en cuanto se acerca a lo medible!

Es importante observar hasta qué punto lo proporcional está en la reflexión más banal, incluso cómica, como esta tira de Mafalda.



ELEMENTOS DEL PROCESO PROPORCIONAL

Consideraremos como elementos de un proceso proporcional un conjunto de experiencias de clase (o no), en las cuales se va adquiriendo gradualmente un conocimiento más estricto, perfeccionado y matemática.

Lo que vamos a comentar aquí, lejos de ser un programa del tema, pretende ser una serie de reflexiones didácticas (metodológicas u observacionales), a las cuales debe añadirse la reflexión psicológica y social que sitúa a cada grupo de alumnos con características diferenciales que el maestro debe conocer.

Observamos, según un cierto orden de dificultad, los siguientes elementos del proceso :

.. PROCESOS VINCULADOS A LA PERCEPCIÓN

Debemos recordar que nuestra propia visión es proporcional, y así se considera todo lo que de ella surge. Tanto es así, que aun viendo las cosas "de lado", aparece la proporción respecto a planos paralelos a lo observado. Las características de proximidad o lejanía, por ejemplo, constituyen un caso suficientemente explícito de cómo "trabaja proporcionalmente" nuestra visión.

.. VINCULADOS A LA REPRESENTACIÓN

Cuando efectuamos dibujos, e incluso esculturas, de la realidad, que queremos que la reflejen, procuramos utilizar métodos proporcionales para hacernos comprender mejor, aun sin conocer y dominar las escalas.

.. FENÓMENOS EXPLICABLES MEDIANTE PROPORCIONES

Contemplamos aquí el conjunto de experiencias cotidianas en las cuales una buena observación permite reconocer elementos proporcionales: precios, velocidades, etc.

.. FENÓMENOS DIRECTAMENTE VINCULADOS A LA MEDIDA

Incluimos en este apartado las situaciones del proceso de aprendizaje en las que vamos alcanzando un dominio de la medida.

El caso de la longitud es el más patente, en cuanto pasamos de una medida en palmos a la convencional, considerando que 1 metro son

5 palmos, etc. También, el caso de las medidas indirectas de objetos o lugares inaccesibles.

.. FENÓMENOS VINCULADOS A DEPENDENCIAS FUNCIONALES

Ya en el plano de lo científico, y dentro de una dinámica típicamente escolar, consideramos las experiencias físicas, químicas, etc, que contienen relaciones de dependencia.

Una de las situaciones del 3er Ciclo de EGB: Al apretar un muelle, se ejerce una fuerza, que depende del material y de la distancia que se ha apretado. (Ley de Hooke).

.. PROCESO DE ABSTRACCIÓN : HACIA LO MULTIPLICATIVO

Llamamos así a esa última etapa en la que se descubre la similitud entre los diversos trabajos realizados. Ello se constata por la capacidad de aplicación (transferencia) a otras situaciones.

Lo multiplicativo es algo qué se desmarca de la adición (que sentimos el ímpetu de utilizar). Se descubre la proporción, en el sentido griego ; la equivalencia, en el sentido moderno.

Un elemento peculiar es observar-no sin dificultades-una estructura común entre los fenómenos y situaciones que envuelven lo proporcional (aditividad, constante, etc.). Se entrevé una reflexión teórica, se verbaliza esa relación, se asocia a un elemento gráfico (función lineal) y un elemento algebraico común (un mismo tipo de ecuación, $y=kx$), etc.

Todo este proceso se lleva a término en la escuela mediante un conjunto de trabajos, situaciones y reflexiones, que vamos a explicar atendiendo a su progresiva dificultad.

SECUENCIACIÓN DE SITUACIONES

Estas no deben interpretarse como situaciones que empiezan y terminan, que la segunda no debe hacerse sin haber hecho previamente la primera, etc.

La clasificación sirve sólo a la comprensión global de todo lo que se va a decir; procura ser exhaustiva, pero no hay espacio suficiente para explicarlo todo tal como lo haríamos en el aula.

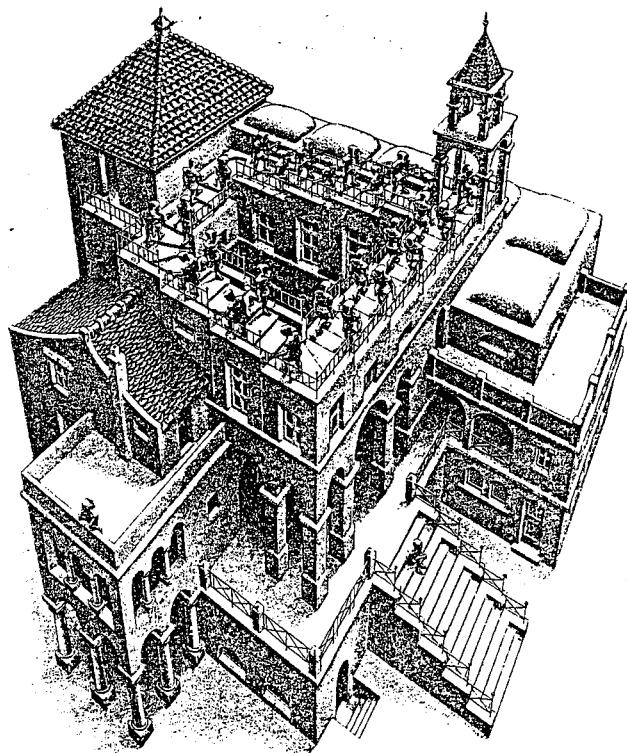
Trataremos las fases siguientes:

1. Ver la realidad sin transformación. 2. Aproximar. 3. Cuantificar-Medir. 4. Caracterizar funcionalmente. 5. Trabajo formal.

En estas fases, queremos ver un proceso coincidente con las primeras etapas de la elaboración científica : observación → medida → ley, es decir, notar cómo sin un razonamiento proporcional, no se completa un razonamiento científico; y hablar de proporcionalidad no se comprende sin hacerlo de medida.

Contemplaremos las acciones que comporta cada fase, los elementos pedagógicos y conceptuales, algunos materiales y ejemplos, las dificultades generales observadas y las representaciones más usuales.

Al final de este apartado incluiremos un cuadro donde se verán comparativamente las distintas fases.



Ascenso y descenso, de M. C. Escher

1. VER LA REALIDAD SIN TRANSFORMACIÓN

Caracteriza este tipo de situaciones la capacidad que tenemos de observar lo real de nuestro entorno y reproducirlo, representarlo, sustituirlo por elementos más próximos; pasar, en ocasiones, de lo grande que ocurre a nuestro lado, a lo pequeño y dominable de una hoja de papel, una fotografía, etc.

Nuestros alumnos más pequeños deben, pues, encontrar posibilidades de observar. Ello implica dedicarle tiempo, forzar situaciones mediante juegos visuales, excursiones, exposiciones murales, etc.

Deben observar :

- Las nociones de proximidad y lejanía (pre-proporcionales)
- Reproducciones de espacios amplios donde se observe la conservación de las nociones derecha/izquierda, arriba/abajo, grande/pequeño, ancho/estrecho, doble/mitad.
- Reproducciones de objetos sencillos (inicio a la escala) y el código simbólico que ello representa.
- El uso cada vez más profundizado de líneas de escala gráfica, rectilíneas o no, donde se reproducen situaciones proporcionales.
- El conocimiento de proporciones simples observadas en un universo alcanzable manipulativamente (objetos de una mesa, juegos, etc.)

Disponemos de multitud de ejemplos. Entre ellos:

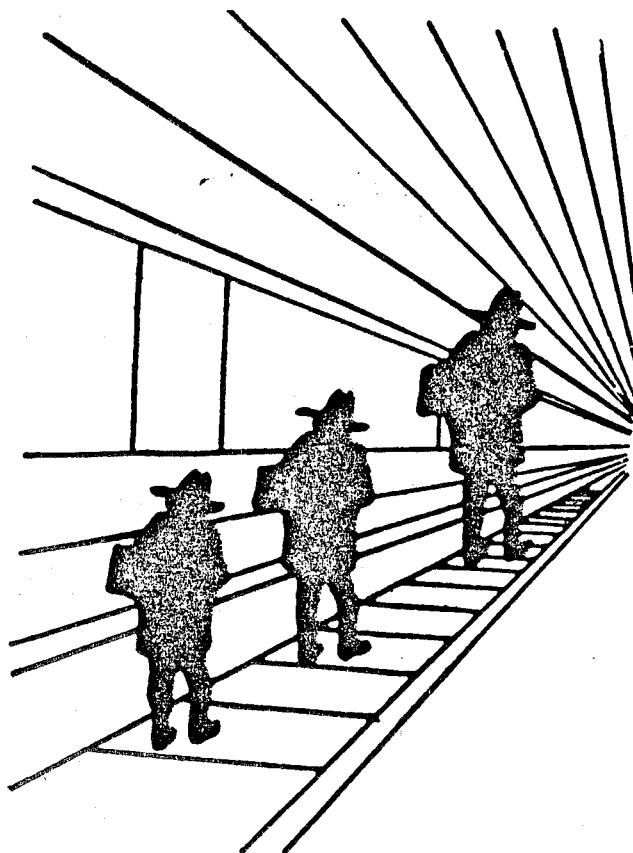
- . Observaciones con espejos que permitan ver la relación 1 a 1 con uno mismo, o la cerca/lejos frente a otros objetos o personas. Incluso, verse más pequeño cuanto más lejos se esté, etc.
- . A partir de fotografías y observaciones directas, notar las diferencias de tamaño según la colocación del observador (fotógrafo).
- . Notar como se deforma la realidad mediante espejos cóncavos, el gran angular, las ilusiones ópticas, etc.
- . Copiando cenefas a distintas escalas de papel cuadriculado, hacer observar cómo se conserva la forma, la cadencia, el dibujo, aunque cambie el tamaño. Y, a partir de ahí, introducir los frisos y rosas.
- . Utilizando patrones, cual modistas, reproducir un traje u -

otro objeto. Por ejemplo, las casitas de cartulina; no sólo los desarrollos planos de cuerpos geométricos.

Con juegos de intercambio de cromos, monedas, etc., darse cuenta de relaciones simples del tipo 1 a 2, 1 a 4, 2 a 3, 2 a 5.

Las representaciones se basan en líneas numéricas, escalas y formas simbólicas escritas 2 por cada 5, etc.

Debemos considerar las dificultades del paso de la realidad tridimensional al plano y las que provienen del trabajo con fracciones.



2. APROXIMAR

Implica un proceso más estricto, que cuantifica la observación y contempla primeramente las acciones de comparación y tanteo.

Es importante considerar también las situaciones típicamente numéricas que acompañan siempre la aproximación: estimar y redondear. Y acciones como "acercar", en el sentido de ver las cosas más de cerca sin deformarlas, y "agudizar", esto es, profundizar diferenciando las cosas - que realmente son de la misma forma y las que no, que indican el paso importante para clasificar según dichas aproximaciones.

Aspectos importantes de este proceso son :

- Estudio de las medidas arbitrarias, que va permitir el uso de la aproximación con ellas (palmo, pie, cordel, etc.)

- Dominio de la visión, que afina los puntos de vista que dan una u otra aproximación.

- Trabajo sobre situaciones de compraventa, que aproxima la visión comercial (dinero).

- Estudio de mezclas como proporciones, tan usual en el lenguaje cotidiano.

- Análisis perfeccionado de la noción de equilibrio y de las consecuencias que de ello se derivan (peso). Expresiones como "menos peso", "muy", "poco", son difíciles de afinar cuantificando.

- Estudio del dibujo más efectivo de la realidad : los planos y patrones a escala. Relaciones de cuantificación (longitud), que inciden en la comprensión de la relativización de grande/pequeño, empinado/liso, cerca/lejos. Se prepara así el trabajo de medida a escala.

- Aproximaciones a la comprensión del tiempo (escalas temporales gráficas, visualización del tiempo:- relojes). Comprensión de expresiones relativas como mucho antes/después, hace bastante/poco tiempo, lapsus largo/corto, temprano/tarde. Y, con ellas, las respectivas cuantificaciones, apoyadas sobre representaciones.

- Conocimiento de situaciones en que interviene el azar (probabilísticas) y su aproximación. Comparación de situaciones probabilísticas.

ticas. Llegar a establecer niveles de probabilidad.

Todo ello se realiza en el aula mediante situaciones vivenciales surgidas de los propios alumnos.

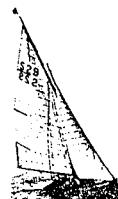


*¿Cuáles son auténticas
ampliaciones?*

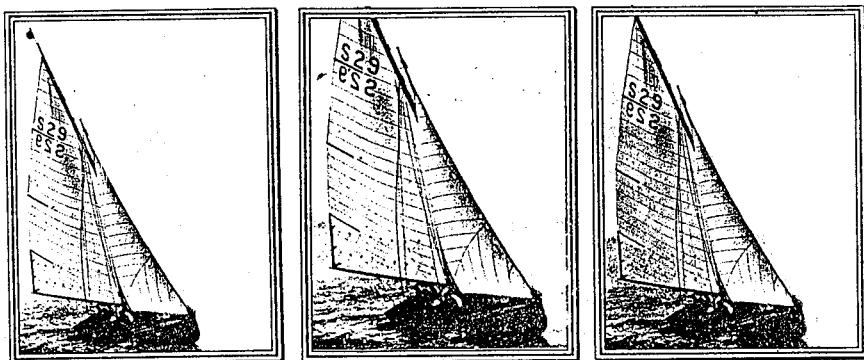


*School Mathematic Project
Cambridge Univ. Press, 1984*

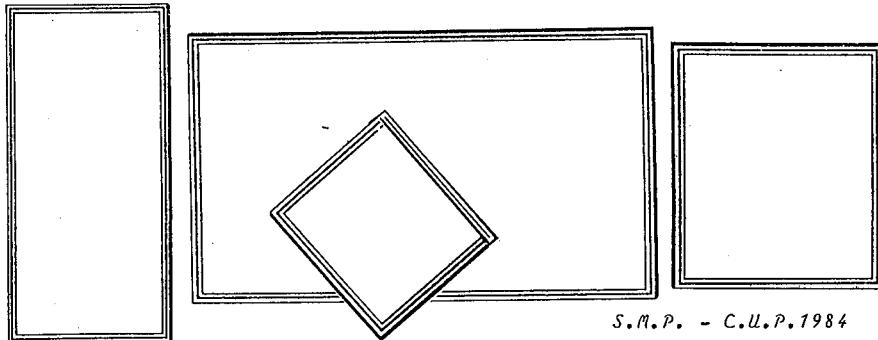
He aquí una fotografía del barco del padre de Julia. Julia le pide al fotógrafo una ampliación del tamaño del recuadro.



Después de diversos intentos, el fotógrafo le dice que el tamaño que quiere no es el adecuado, que ninguna ampliación le va bien.



¡Ayuda a Julia! Aquí tienes cuatro papeles. Sólo uno de ellos es el correcto para hacer la ampliación. ¿Cuál? ¿Por qué?



S.M.P. - C.U.P. 1984

Damos a continuación ejemplos de actividades relativas al proceso de aproximación :

. Uso de cuadros estadísticos que muestren la cuantificación de comparaciones sobre precios, número de tiendas de uno y otro tipo, etc.

. Provocar juegos de intercambio que comprendan situaciones más ventajosas (3 cada 1 respecto de 2 cada 1), desproporciones de mezclas (3 de sal y 1 de pimienta, contra 2 de sal y 1 de pimienta) y se puedan efectuar aproximaciones en una situación. Un ejemplo poco utilizado es este: "En una receta para 4 personas dice: Poner 2 cucharadas de leva dura por cada litro de agua. ¿Qué ocurriría si fuera para 8?" La proporción sería la misma, aunque el número de cucharadas y la cantidad de agua fuera doble.

. Dominio de las balanzas normal y matemática, que permite visualizar el principio de la palanca y el dadme un punto de apoyo y levantaré el mundo, de Arquímedes, base de la balanza romana.

. Juegos con líquidos - que deben hacerse más allá del Preesco lar -, procurando que se visualicen relaciones volumétricas (complicadas de por sí) mediante recipientes con la misma capacidad y distinta forma, la misma base y altura diferente. Uso y asociación real de fracciones - respecto al litro (botellas, latas de refrescos, etc).

. Realizar esquemas temporales en gráficos. Representar el tiempo en longitud (cinta de cassette), peso (reloj de arena), capacidad (clepsidra), superficie(calendario), para poder situar en esos esquemas sucesos conocidos y poder comparar sus duraciones.

. Aprender a usar instrumentos arbitrarios de medida (cordel, hoja de papel, palmo, etc) para, posteriormente, usar la regla, el transportador de ángulos, el pie de rey; realizar y comparar escalas de mapas y signos convencionales de uso común que implican proporcionalidad (flechas - con la velocidad del viento, señal de % en las pendientes de carretera, etc).

. Situaciones probabilísticas : juegos con dados, cartas, etc.

. Cuidar la aproximación en el sistema de numeración. Es de destacar la importancia de este análisis para la estimación de resultados.

La gran dificultad de esta fase es la comprensión de la arbitrariedad de la escala de medida y lo poco que se trabaja la noción de aproximación en situaciones cotidianas. Se suele reducir el quehacer escolar a la mecanización de cambios de medida, sin darse cuenta que dicho ejercicio es necesario para una buena aproximación, pero dentro de un contexto siempre real. Como ya se ha insinuado, otra gran dificultad proviene del poco uso de la escala temporal.

Las representaciones típicas de la aproximación son las acotaciones, las escalas de medidas, la introducción de la división y los materiales manipulativos que pueden usarse como representaciones.

3. CUANTIFICAR Y MEDIR

En este punto, debemos decir que nos encontramos en la fase crucial de los aprendizajes de proporción y medida, y es difícil distinguir dónde llega cada uno.

Observaremos las situaciones que se requieran para notar cómo en el proceso de medida aparece la cuantificación basada en lo proporcional. Dichas observaciones son propias del 3er Ciclo de EGB (11-14).

Se trata de ver la proporcionalidad en acciones como :

- Registrar datos y relacionarlos entre sí cuando sea preciso.
- Organizar datos de manera que podamos compararlos proporcionalmente.

- Tabular, ordenar y examinar dichos datos.

Procuraremos examinar fenómenos-físicos o no, pero siempre reales-en los que la medida nos plantea la proporción. Así, por ejemplo :

. Situaciones de proporción que refleja una simple observación(pasatiempos).

. Reproducción de la realidad (fotocopias, planos, relieves).

. Teorema de Thales y partición de un segmento en partes iguales (sombras del Sol).

. Medidas indirectas. Cálculo de alturas(métodos diversos).

. Propagación de la luz (fenómenos proporcionales en pantalla).

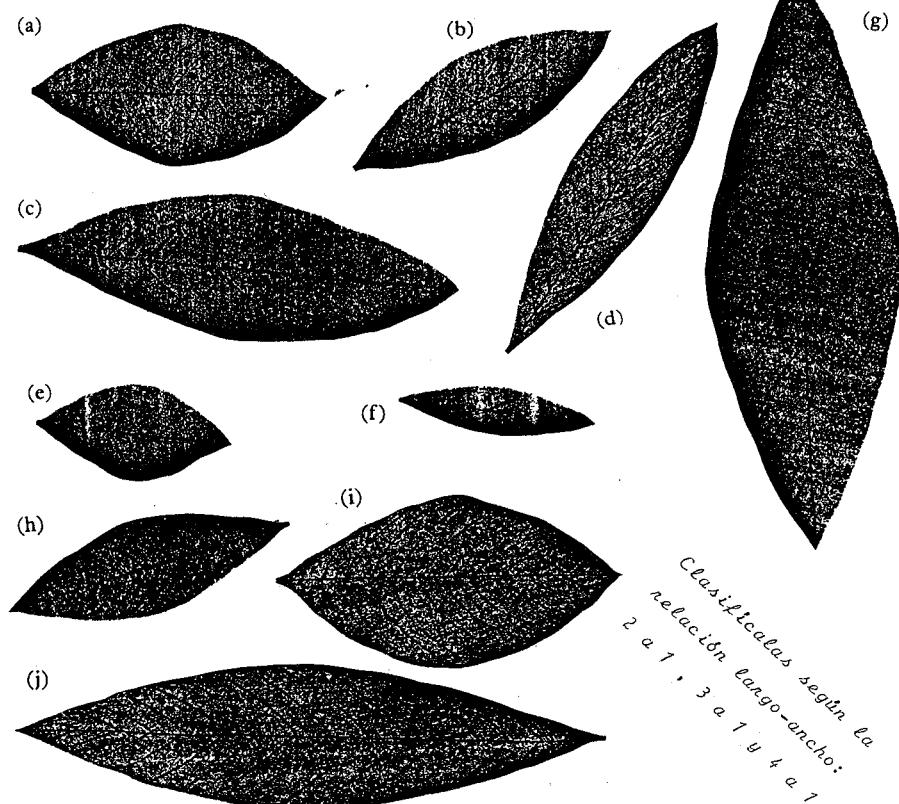
. Situaciones con porcentajes y cambios monetarios.

- Facturas, créditos e interés bancario.
- Mezclas, aleaciones y procesos de intercambio.
- Escalas que se utilizan en los oficios : puntos en imprenta y zapatería, pulgadas, nudos, etc.

Todo este trabajo debe realizarse mediante experiencias de la laboratorio, excursiones y análisis de situaciones problemáticas.

Sus dificultades provienen de las propias técnicas de medida y la imprecisión de los aparatos, así como del poco dominio de los camos numéricos y las operaciones.

Las representaciones surgen de las propias técnicas de tabulación : histogramas, tablas y métodos de representación proporcional, esca las gráficas y simbólicas (fracción y división).



4. CARACTERIZAR FUNCIONALMENTE

Corresponden a esta fase los procesos más complejos de la formación básica, y no se quedan únicamente en el estudio de la función lineal.

Implica el reconocimiento de acciones como :

- Proporcionar (efectuar algo proporcionado a la realidad).
- Buscar dependencias entre variables, entendiendo que una dependencia simple es la dependencia proporcional.
- Repartir proporcionalmente, que es un esfuerzo posterior.
- Identificar y distinguir fenómenos, proporcionales o no, como puntos culminantes del proceso funcional (clasificación de funciones) y de la medida.
- Interpolación, como aspecto práctico de gran utilidad para la interpretación de funciones no proporcionales.

Debemos considerar la reflexión sobre situaciones experimentales interdisciplinares como :

- . Relaciones físicas : Dependencias proporcionales en Mecánica.

Fórmulas.

- . Propiedades de las escalas. Problemas longitud-superficie.
- . Invariantes en las proporciones. Valor de la constante.
- . Relaciones dependientes en fenómenos sociales, biológicos,...
- . Observaciones de fenómenos y dependencias, proporcionales o no : eclipses, tamaño relativo de los cuerpos, brillo de estrellas,...

Las dificultades en esta fase son las típicas de la caracterización funcional.

Todo ello incidirá en el uso de representaciones de los tipos siguientes :

- Diagramas sectoriales (proporción realidad-ángulo).
- Gráficas cartesianas de representación funcional.
- Ecuaciones.
- Lenguaje algebraico en general.

5. RAZONAMIENTO FORMAL

Contempla los niveles de mayor abstracción, aunque algunos aspectos pueden ser considerados al tiempo que reflexiones anteriores.

Las acciones a desarrollar son :

Sintetizar, determinar las variables, utilizar la analogía, descubrir, analizar y aplicar los conocimientos.

Los elementos a tener en cuenta son :

- Comparación (cociente), conservación (constante), propiedad de aditividad (ley de Cauchy) y gráfica común.

- Las características especiales en las proporciones geométricas : estudio de la semejanza y de las proporciones especiales (áurea), proporciones en la imprenta ($\sqrt{2}$) y en las relaciones circulares (π).

Para presentarse debe introducirse el diálogo y el debate como forma idónea de suscitar una reflexión global :

- Desarrollo de situaciones diversas y comparación de ellas.
- Análisis de los puntos de identificación de lo proporcional respecto de lo que no lo es.

Las dificultades más importantes que aparecen se deben a las propias de la capacidad intelectiva; a la falta de presentación de situaciones, del modo indicado, en períodos anteriores a esta reflexión; al débil uso de la clasificación y a los problemas de expresión en general. Estos últimos hacen parecer, en muchas ocasiones, que los alumnos no han comprendido el proceso, cuando, en realidad, se trata de fallos de verbalización o representación.

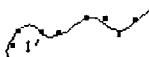
Las formas de representación de estas reflexiones son :

- Las correspondientes a las técnicas de expresión y comunicación (resumen, mural, audiovisual, etc.).
- El uso de la definición y su valor.
- El énfasis en los elementos fenomenológicos (uso y contexto de lo proporcional).

Presentamos a continuación un cuadro sinóptico de las diferentes fases estudiadas.

VER LA REALIDAD
SIN TRANSFORMAC.
(Proceso de observac.)

ACCIONES	ASPECTOS	ELEMENTOS	REPRESENTAC.
Representar	Proximidad/ lejanía	Observaciones con espejos	
Copiar	Conservaciones de la realidad	Fotografías	
Reproducir	Deformaciones	Deformaciones	
Observar	Uso de escalas	Ilusiones ópticas	
Sustituir	Líneales	Anamorfosis	1/2
Predicir	Situaciones sencillas	Copiar cenefas	2 por cada 5



APPROXIMACION
(Anotaniedad de
la u. de medida)

Comparar	Medidas arbitrarias	Cuantificaciones	$a > x > b$
Tantejar	Dominio de la visión	sobre precios	Escalas de
Redondear	Situaciones	Juegos de interc.	medida
Acercar	de compra-venta	Recetas	División
Ajudizar	Mezclas, equilibrio	Dominio de la balanza	Balanza
Clasificar	Dibujo de planos	Medida de líquidos	
	Azán	Esquemas temporales	
	Comprensión del tiempo	Otros instrumentos de medida	
		Juegos con dados.	+++++
		Cuerpo humano y sus proporc.	

CUANTIFICAC.
MEDIDA

Registrar	Simple observación	Pasatiempos	Aparatos de
Relacionar	Reproducción real	Fotocopias	medida
Organizar	Teor. de Thales y partic. de segmentos	Planos, relieve	Histogramas
Tabular	Medidas indirectas	Sombras del Sol	
Ordenar	Situaciones físicas	Cálculo de alturas	Tablas
Examinar	Porcentajes.	Propagac. de la luz	Créditos, facturas, cambios
Sistematizar	Tanto por uno.	Créditos, facturas, cambios	Escs. gráficas.
		Mezclas	Fracc.-divis.
		Intercambios	

CARACTERIZAR
FUNCIONALM.

Proporcionar	Relaciones físicas	Experiencias de	Grafs. sectoriales
Dependizan	Propiedades de las escalas	Mecánica, Eléctrica, ciudad y Astronomía	
Repant. prop.	Invariantes en proporcionalidad	Experiencias con planos	Grafs. cartesianas
Identifican	Dependencias	Sintetizar trabajos realizados	Ecuaciones
Distinguir		Estudios biológicos, sociales, etc.	Leng. algeb.
Interpolan			

RAZONAMIENTO
FORMATIVO
(Nivel de aplicación)

Determinar	Comparación de situaciones	Elaboración de conclusiones	Técnicas de expresión
Analogizan		Comparación	Definición
Descubrir		conservación	Resumen
Analizar		Aditividad, gráfica común	Fenomenología.
Aplicar	Sintetizar situaciones nuevas	Semejanza como caso particular	
		Propuestas interdisciplinares	

ELEMENTOS DIDACTICOS

Trataremos a continuación algunos índices y criterios generales que pueden permitir un mejor desarrollo del tema en las aulas. Se toman en cuenta independientemente del nivel de los alumnos.

1. CUESTIONES A TENER EN CUENTA

- . Presentar lo proporcional frente a lo que no lo es
- . Ver la diferenciación metodológica : multivariedad de situaciones
- . Multivariedad perceptual : cuidar de realizar representaciones distintas y trabajar suficientemente un intercambio entre ellas
- . Coherencia con una perspectiva psicológica (de lo concreto-a la capacidad de abstracción)
- . Coherencia sistemática, fenomenológica y epistemológica

2. EL VALOR DE LA CONSTANTE

Ya hemos mencionado el hecho de que, en distintas situaciones - proporcionales, la constante juega un papel importante, pues decide el valor y significado de la proporcionalidad en cada situación. Así, veremos distintos tipos de situaciones y el valor de lo que se mantiene en cada caso; es decir, lo que caracteriza la proporción. Lo observaremos en el siguiente cuadro, que esperamos sea suficientemente explícito :

ASPECTOS	VALOR DE LA CTE.	CONCEPTO
Sits. científics. en gral.	Reprod. de la realid.	Cuantif.-Escala
Sits. geométrics.	Reprod. de la realid.	Isometría
Sits. aritmétics.	Iguald. de forma	Escala
	Equidad	Repartos. Cociente
	Ley de const. del núm.	Sist. numeración
	Ley del intercambio	Proporc.-razón
	Mantenim. de la distri- butividad	
Sits. probabilisticos.	Igualdad de posibilids.	Probabilidad
" musicales	Armonía(mantener escala)	Proporción
" antropométr.	Equil.-Estét.(Leonardo)	Proporción
Medida	Ley Cauchy($f(x+y) = f(x) + f(y)$)	
Sits. funcionales.	Mantenim. de un esquema ($y = ax$)	Función lineal

¿QUE HACEMOS CON LA PROPORCIONALIDAD INVERSA?

Debemos considerarla proporcionalidad, pues así es la historia, pero es preciso hacer las consideraciones siguientes :

• Se trata en situaciones claramente funcionales, dando por suspuesto que se conoce lo que es constante. Ejemplo: Tardo 5 h en ir de Valencia a Barcelona, a 70 km/h. ¿Cuánto tardaría si fuera a 140 km/h?

Se supone aquí constante el espacio.

• Se encuentra en situaciones cotidianas, pero, en realidad, no es más que una interpretación funcional inversa de un fenómeno proporcional, o aplicación de problemas de división. Ejemplo: Si tengo 400 ptas y la docena de huevos cuesta 100 ptas, ¿cuántas docenas puedo comprar? ¿Y si fueran a 200 ptas?

La situación proporcional directa es: nº de docenas \rightarrow prec. total.

• No es el único ejemplo de situaciones no proporcionales (directamente). La función del tipo $y = x + 2$ no es proporcional y no es inversa.

• Es, además, un ejemplo difícil y con una representación gráfica que no conviene al nombre de "inversa".

La función inversa (simétrica) de $y = 2x$ es $x = 2y$

• Con la imagen típica de que proporcionalidad inversa es aquella en que "a más corresponde menos y a menos corresponde más" se crea una confusión con la situación de función decreciente. Ejemplo: Dado un rectángulo de perímetro constante, ver la relación entre los posibles valores de los lados ($a + b = \text{cte}$).

No es proporcionalidad inversa, sino que es decreciente (cuando aumenta un lado, disminuye el otro, y al revés).

• Debe entenderse en una situación de contexto más amplio, donde se vea que, según lo que aparece constante, se trata de proporcionalidad directa o inversa. Ejemplos: La relación entre presión y fuerza, con una superficie constante (prop. directa), o la relación entre presión y superficie, ejerciendo una misma fuerza (prop. inversa).

CONCLUSIONES

Creemos que los estudios hasta ahora realizados sobre el tema y el reflejo de nuestras reflexiones, muestran que se debe tratar con mayor cuidado y no debe incluirse todo en un solo curso de EGB.

Más aún, no se trata de un tema, sino de un tipo de razonamiento.

El por qué debemos considerarlo así nos lo demuestran los propios alumnos, cuando observamos que, espontáneamente, en edades tempranas nos responden de forma aditiva, y sólo más tarde se actúa multiplicativamente.

Por otra parte, está comprobado hasta qué punto, en situaciones nuevas, este tipo de razonamiento no se adquiere con la edad o madurez psicológica. Es curiosamente cierto que alumnos universitarios reaccionan aditivamente ante situaciones proporcionales nuevas.

También es importante notar el daño que han hecho las frases - "de más a más", "de más a menos", ... Cuando en un mismo capítulo aparece la proporcionalidad directa y la inversa, y los problemas allí planteados tratan sólo de eso, no hay problema en la expresión; pero, ante un proceso amplio de resolución de problemas, ¿por qué reducirlos a esos dos tipos?

Incluso quedándonos sólo en el ámbito de las funciones de primer grado, eso no es cierto. De ahí que consideremos que en el contexto funcional, deben estudiarse y analizarse tipos de funciones : lineales o no, continuas o no, crecientes o no crecientes, etc. Por eso son dignas de tener en cuenta preguntas como la C. ALSINA(1979) : ¿Por qué el área del rectángulo es base por altura? O bien : ¿Qué funciones en R son distributivas respecto de la suma? ¿Por qué la medida debe conservar proporcionalmente propiedades análogas a la proporcionalidad?

¿Existiría proporcionalidad sin medida? ¿Por qué esa tendencia humana a la aditividad en un tiempo en que la rapidez parece que debería llevarnos a lo multiplicativo?

Creemos que en las páginas anteriores se han respondido algunas. Y, com apostilla final: proporcionalmente inversa: *Menos proporcionalidad como tema. MAS RAZONAMIENTO PROPORCIONAL!*

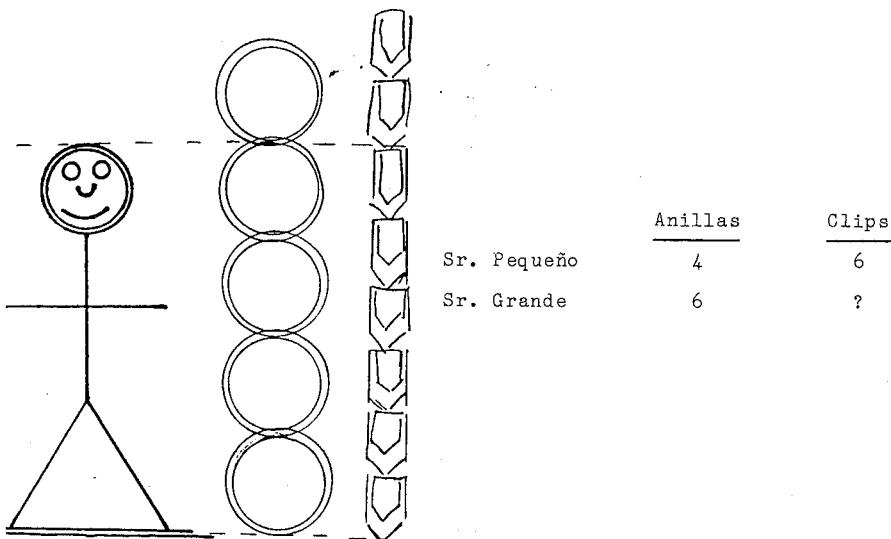
OTRAS EXPERIENCIAS POSIBLES

Nos referiremos, a modo de ejemplos, a las siguientes :

1. La estatura del Sr. Grande
2. Usando la probeta graduada
3. Medidas y proporciones del cuerpo humano
4. Prodigios de la fotocopiadora
5. La proporcionalidad animal
6. Curvas de nivel

1. LA ESTAURA DEL SR. GRANDE

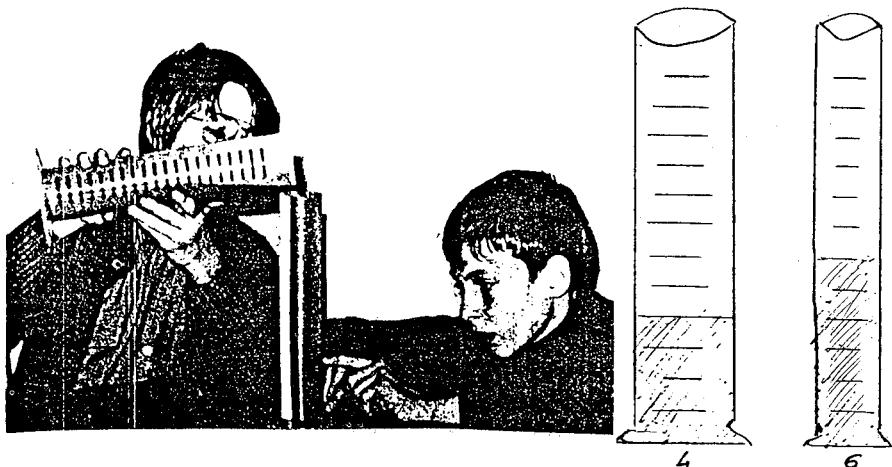
El Sr. Pequeño mide 4 anillas de altura. o bien, 6 clips. El Sr. Grande mide 6 anillas de altura. Observa el gráfico.



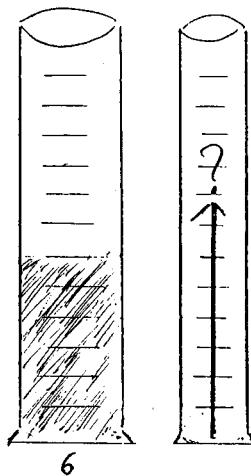
¿Son correctos estos razonamientos? :

- Como los clips son más pequeños, cabrán más que anillas.
- Como hay 2 clips más que anillas, habrá también 2 clips más en la medida del Sr. Grande. Por lo tanto, mide 8 clips.
- Como el Sr. Grande mide 2 anillas más que el Sr. Pequeño, medirá 2 clips más. Por lo tanto, mide 8 clips.

2. USANDO LA PROBETA GRADUADA



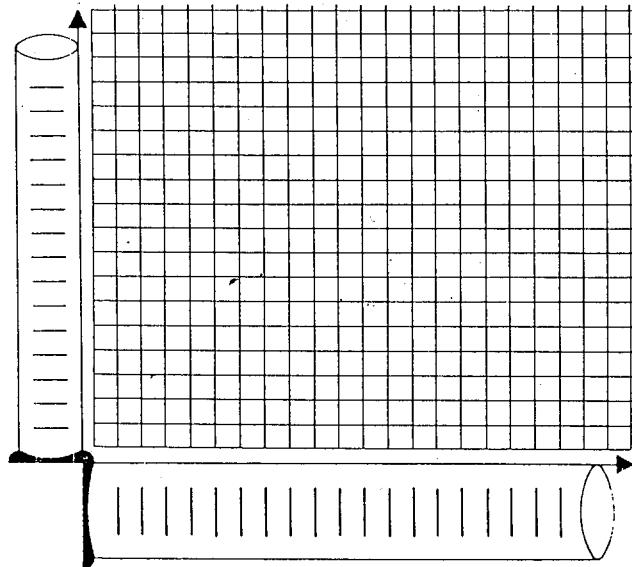
Vertemos agua coloreada en el tubo ancho y alcanza el nivel 4.
No sabemos hasta dónde llegará en el otro. La vaciamos y vemos que alcanza el nivel 6.



Si echamos agua hasta el nivel 6 del tubo ancho y la vaciamos luego en el estrecho, ¿qué nivel alcanzará en éste?

Repite la experiencia las veces necesarias, vertiendo diferentes cantidades de líquido. Llena la tabla siguiente y pasa luego los datos a la gráfica.

medida ancho	6					
medida estrecho						



Representa la situación anterior mediante un diagrama de flechas.

Haz una breve descripción del resultado de la experiencia, e indica por qué crees que sucede así.

Procura completar la siguiente tabla, de acuerdo con tus observaciones.

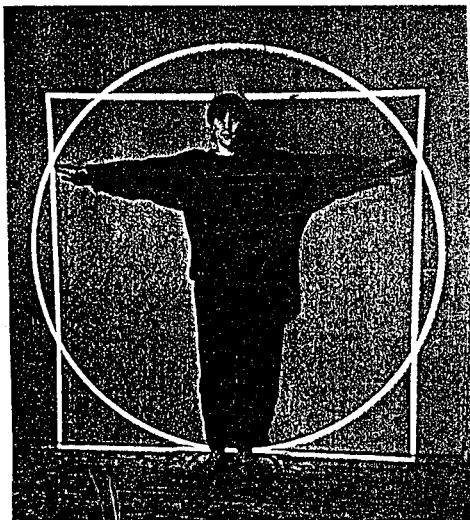
estrecho	10	24	40			120	1	
ancho								14

3. MEDIDAS Y PROPORCIONES DEL CUERPO HUMANO

Completa :

<i>palma</i>	=	<i>dedos</i>	<i>pie</i>	=	<i>palmas</i>
<i>palmo</i>	=	<i>dedos</i>	<i>palmo</i>	=	<i>palmas</i>
<i>codo</i>	=	<i>palmos</i>	<i>codo</i>	=	<i>dedos</i>
<i>pie</i>	=	<i>dedos</i>	<i>codo</i>	=	<i>palmas</i>
<i>estadio</i>	=	600 <i>pies</i>			

Fíjate en el esquema de Leonardo da Vinci. Anota las medidas - del cuadro para averiguar quiénes están bien proporcionados.



<i>Altura</i>	<i>Brazada</i>

Rellena esta tabla para cada una de las personas a las que me diste.

<i>Cara</i>						
<i>Nº veces cara en cuerpo</i>						
<i>Pie</i>						
<i>Ombigo-cuello</i>						

4. PRODIGIOS DE LA FOTOCOPIADORA

Las fotocopiadoras actuales permiten reducir, e incluso ampliar, cualquier gráfico, impreso, etc.



QUINCE SEGUNDOS DESPUÉS, Y GRACIAS A LA TELECOPIADORA,



MUR LERON (LILLE, FRANCIA) QUIERE MANDAR A LA CENTRAL DE PITTSBURGH (PENSILVANIA, U.S.A.) COPIA AMPLIADA DEL PROYECTO DE REFORMA DE LA FABRICA.

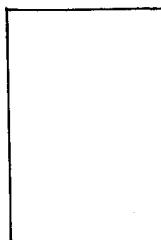
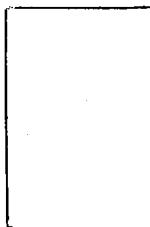
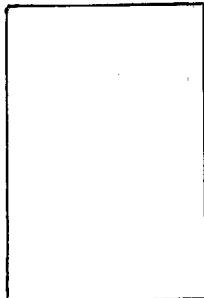


Lo más curioso es que la reducción se teclea mediante un número. 100 significa dejarlo igual. 70 quiere decir que el original se reduce a la mitad de su superficie. Por qué?

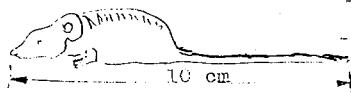
Cuestiones :

• ¿Qué número debemos pulsar para obtener una tercera parte del tamaño original?

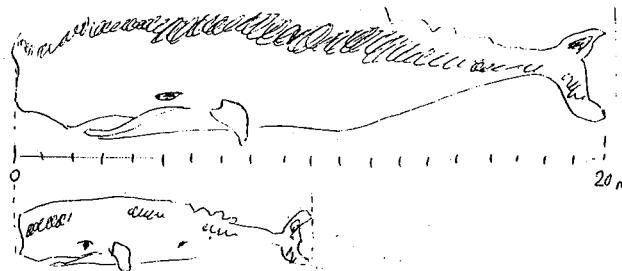
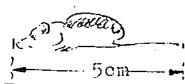
• Observa las tres reducciones del cuadro. Averigua qué número se tecleó en la máquina para obtener cada una de ellas.



5. LA PROPORCIONALIDAD ANIMAL

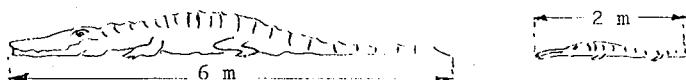


¿Cuántas veces ha crecido el natoñcillo en longitud?



La horca adulta es aproximadamente..... de la joven.

La horca joven es de la adulta.



¿En qué proporción ha aumentado el largo del cocodrilo?

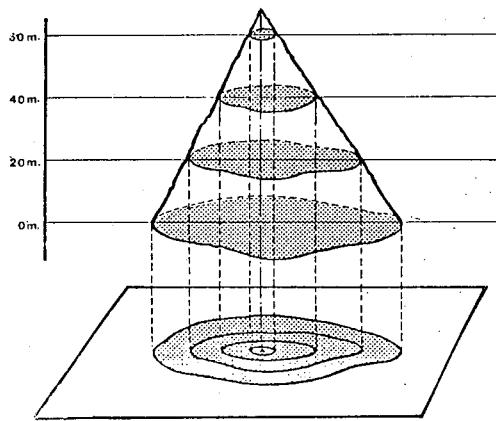


El conejo adulto ha aumentado su peso.

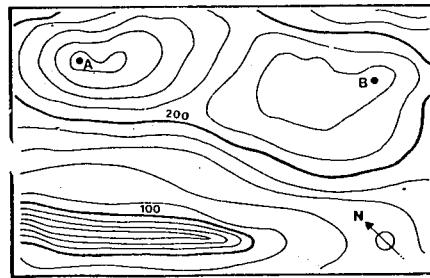
El conejo joven pesa..... de su peso adulto.

¿Qué sucede con el peso de los osos?

6. CURVAS DE NIVEL



El dibujo representa la silueta de una montaña. En su parte inferior aparece la representación llamada CURVAS DE NIVEL.



En esta figura se representan dos cimas de montaña.

Si las curvas de nivel se han dibujado cada 20 m, ¿qué altura tienen las cimas?

¿Dónde se encuentra la pendiente más pronunciada?

REFERENCIAS PRINCIPALES

OBRAS GENERALES BÁSICAS

Freudenthal,H. (1983) - Didactical phaenomenology of maths education - Reidel - Dordrecht (Holanda)

Suárez y otros (1978) - La función lineal - Fundación Limmat - Zurich

ASPECTOS PSICOPEDAGÓGICOS

Karplus,Pulos,Stage (1983) - Proportional Reasoning of Early - adolescents in Acquisition of mathematical concepts and processes - Acad. Press - New York

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

Almato,Fortuny y otros (1986) - La proporcionalidad - Publ. - Univ. Politécnica - Catalunya,Barcelona.

Prog. IOWO (1985) - Shadows and depth - Dordrecht (Holanda)

School Mathematic Project - Cambridge University Press,1984

Azcárate,C.,Berini,M.,Corberó,R.,Deuloseu,C. y Lladó,C.- Proporcionalidad geométrica - Min. Educ. y Ciencia.

TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN

Fortuny y otros (1986) - Els preconceptes de la proporcionalitat - Publ. Univ. Politécnica - Catalunya,Barcelona

Karplus,R. y otros (1983) - Early adolescents proportional reasoning on rate problems - Educational Studies in Mathematics - Vol.14, nº 3,pp.219-233 - Dordrecht (Holanda)

Karplus,Adi,Lawson (1980) - Intellectual development beyond - elementary school. Proportional,probabilistic and correctional reasoning - School science and mathematics - Vol.80,pp. 673-683

Ricco,G (1982) Les premières acquisition de la notion de fonction linéaire chez l'enfant du 7 a 11 ans - Educational Studies in Mathematics - Vol.13,nº 3,pp.289-327 - Dordrecht (Holanda)

Streefland,L. (1984-85) - Search for the roots of ratio...I and II - Educational studies in mathematics - Vol.15-16 - Dordrecht(Holanda)