NUMEROS. 19 - 1989
S.C.P.M. "ISAAC NEWTON"

POSIBILIDADES DIDACTICAS DE... UN PUZZLE DE ESTRELLA Y NAVETAS

MANUEL FERNÁNDEZ REYES

A Diego, en el inicio de su vida universitaria; y a David, que empieza el Bachillerato.

1.- INTRODUCCIÓN

Esta lección de Geometría ha sido preparada con un múltiple propósito:

* Con el soporte de un material de fácil eleboración, ayudar a descubrir relaciones interesantes entre figuras, expresarlas en lenguaje ordinario y demostrarlas formalmente.

* Aprovechar el interés que pueda despertar este proceso, para efectuar cálculos que, propuestos en frío, sin un objetivo atractivo, suelen resultar tediosos.

* Dar oportunidad de usar la regla y el compás, magníficos instrumentos de ayuda y refuerzo, generalmente poco utilizados en nuestras clases.

* Y, por último, utilizar problemas geométricos no rutinarios para hacer incursiones en campos diversos de la Matemática. En este trabajo, concretamente, pretendemos cubrir este objetivo tendiendo

puentes entre Geometría euclídea, Geometría analítica y Cálculo integral.

Está concebida para ser desarrollada antes de abordar el cálculo de áreas por integración, una vez que el alumno domine los conocimientos básicos de Analítica y de resolución de integrales sencillas. En definitiva, lo que proponemos a continuación quizás sirva de ejemplo de cómo organizar clases más dinámicas y con participación activa del alumnado.

2.- ÁREA DE LA ESTRELLA

Dado un cuadrado de lado ℓ, si se trazan en su interior arcos de radio $r = \ell / 2$, con centros en los vértices, resulta un cuadrilátero curvilíneo, con aspecto de *astroide*, que llamaremos *estrella* (fig. 1).

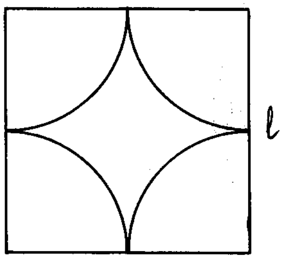


fig 1

Liberemos nuestra estrella y dispongamos convenientemente los triángulos mixtilíneos que la aprisionan. Así:

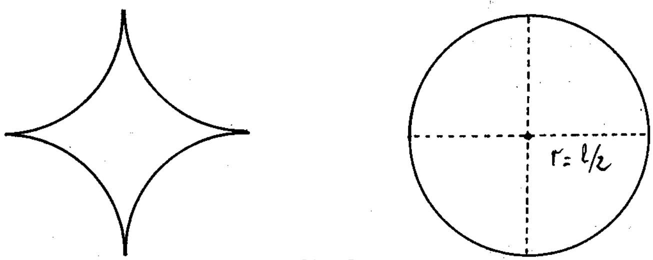


fig 2

Hemos descompuesto el cuadrado en una estrella y un círculo de radio $r = \ell / 2$. Por tanto:

El área $\mathcal{A}_e$ de la estrella es igual a la del cuadrado disminuida en la del círculo.

Esta igualdad nos va a permitir obtener una fórmula que nos dé $\mathcal{A}_e$ directamente, esto es, sólo en función de ℓ (o de r). Veámos:

$$\mathcal{A}_e = \ell^2 - \pi r^2 = \ldots = \boxed{\frac{\ell^2(4-\pi)}{4}} \qquad (1)$$

O bien:

$$\mathcal{A}_e = \frac{4r^2(4-\pi)}{4} = \boxed{r^2(4-\pi)} \qquad (2)$$

3.- LA NAVETA Y SU ÁREA

Se conoce con el nombre de *naveta* (cada uno de los recintos rayados de la fig. 3) la figura determinada por la intersección de dos arcos de radio $r = \ell / 2$, uno centrado en un vértice del cuadrado, y el otro con centro en el del círculo.

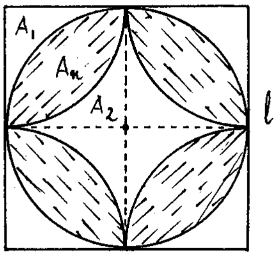


fig.3

¿Cómo son las áreas de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$? Parecen iguales, ¿no? Cortando por la línea sobrepunteada y superponiendo $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, se afirma esta creencia. Pero, no nos fiemos; estudiemos matemáticamente la cuestión:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_1 = (\ell / 2)^2 - \dfrac{\pi r^2}{4} = \dfrac{4\ell^2 - \pi \ell^2}{16} = \dfrac{\ell^2(4-\pi)}{16} \\ \mathcal{A}_2 = \dfrac{\ell^2(4-\pi)}{16} \quad \text{(cuarto de estrella)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2} \qquad (3)$$

Resumiendo:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \boxed{\frac{\ell^2(4-\pi)}{16} = \frac{r^2(4-\pi)}{4}} \qquad (4)$$

Es evidente que:

El área de la naveta es la diferencia entre la del cuadrado de lado ℓ / 2 y la suma de las áreas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$.

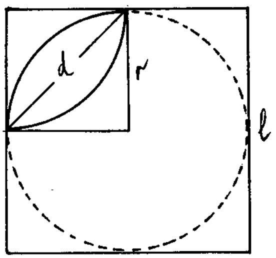
Teniendo en cuenta la igualdad (3), resulta:

$$\mathcal{A}_n = (\ \ell\ /\ 2\ )^2 - \frac{2\ell^2(4-\pi)}{16} = \ldots = \boxed{\frac{\ell^2(\pi-2)}{8}} \qquad (5)$$

Si queremos $\mathcal{A}_n$ en función del radio r, basta sustituir en (5) ℓ por $2r$. Se obtiene:

$$\boxed{\mathcal{A}_n = \frac{r^2(\pi-2)}{2}} \qquad (6)$$

Por último, es conveniente disponer de una fórmula para el cálculo directo del área de una naveta conocido su eje mayor d. Vamos a deducirla:



$$r^2 + r^2 = d^2 \Rightarrow r^2 = d^2\ /\ 2$$

Sustituyendo en (6), se tiene:

$$\mathcal{A}_n = \frac{(d^2\ /\ 2)\ (\pi-2)}{2} = \boxed{\frac{d^2(\pi-2)}{4}} \qquad (7)$$

fig. 4

4.- UNA FÓRMULA PARA EL ÁREA DE UNA CÚPULA

Llamaremos *cúpula* a la curva que resulta al cruzar dos navetas según las diagonales de un cuadrado (fig. 5) y eliminar ciertos recintos. La superficie punteada en la figura 6 es una *cúpula*.

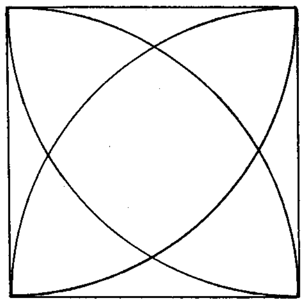


fig. 5

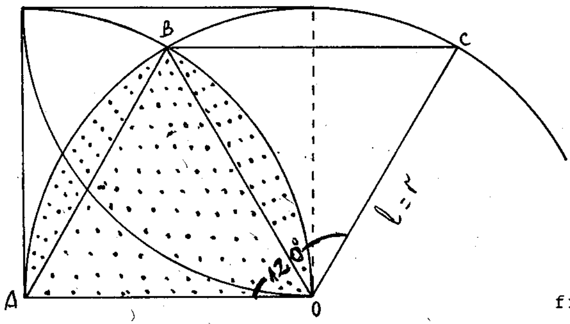


fig. 6

Por construcción, los triángulos $\mathcal{ABO}$ y $\mathcal{OBC}$ son equiláteros y congruentes. Su lado es el del cuadrado, ℓ . El área de uno de ellos es $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Como puede observarse, el sector circular $\mathcal{OAC}$ es un tercio del círculo. Por tanto, su área es $\frac{\pi\ell^2}{3}$.

Como los segmentos circulares que delimitan los arcos $\mathcal{AB}$ y $\mathcal{BC}$ tienen la misma superficie, fácil es ver que:

El área de la cúpula es la de un tercio de círculo, menos la de uno de los triángulos.

$$\mathcal{A}_c = \frac{\pi\ell^2}{3} - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{\ell^2(\ 4\pi - 3\sqrt{3}\ )}{12}} \qquad (8)$$

5.- ¿QUÉ SUPERFICIE ABARCAN DOS NAVETAS EN CRUZ?

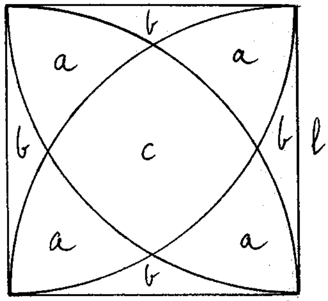


fig. 7

$$4a + 4b + c = \ell^2 \quad \text{(cuadrado)}$$

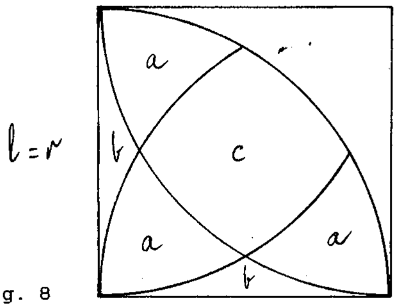


fig. 8

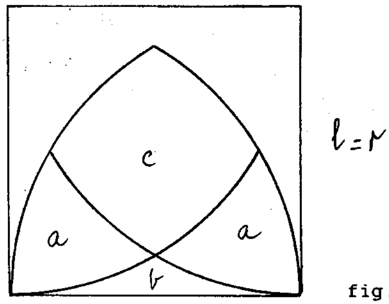


fig.9

$$3a + 2b + c = \pi\ell^2/4$$
(cuadrante)

$$2a + b + c = \frac{\ell^2(\,4\pi - 3\sqrt{3}\,)}{12}$$
(cúpula)

Resolviendo este sistema, resulta:

$$a = \ell^2(\,-1 + \pi\,/\,12 + \sqrt{3}\,/\,2\,)$$

$$b = \ell^2(\,1 - \pi\,/\,6 - \sqrt{3}\,/\,4\,)$$

$$c = \ell^2(\,1 + \pi\,/\,3 - \sqrt{3}\,)$$

Y el área buscada es:

$$a = 4a + c = \ldots = \boxed{\ell^2(\,-3 + 2\pi\,/\,3 + \sqrt{3}\,)} \qquad (9)$$

6.- EL HACHA DE DOBLE FILO.

Desde dos vértices opuestos de un cuadrado de lado ℓ, tracemos, en su interior, dos arcos de radio $r = \ell / 2$. A continuación, tracemos, con igual radio y centro en el del cuadrado, sendos arcos que unan los extremos de los anteriores. Daremos el nombre de *hacha de doble filo* al cuadrilátero curvilíneo resultante (fig. 10).

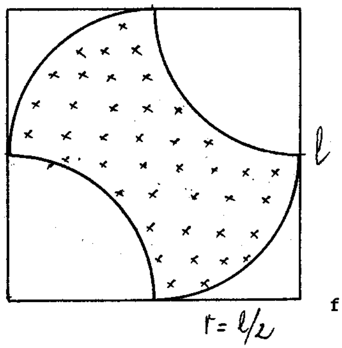


fig. 10

Completando la circunferencia a la que pertenecen los arcos-filo, se obtiene esta otra figura:

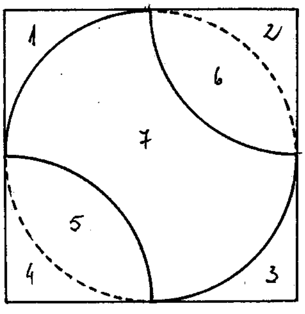


fig. 11

Despiecémosla, aislando el hacha y cortando por las líneas discontínuas, y veamos qué descubrimientos podemos hacer con este nuevo puzzle.

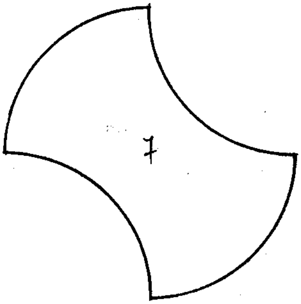


fig.12

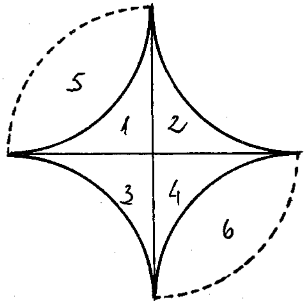


fig. 13

Como si de la mitosis celular se tratara, el cuadrado ha dado lugar a dos hachas gemelas. En otras palabras:

El área $\mathcal{A}_h$ del hacha es igual a la mitad de la del cuadrado.

Probemos matemáticamente esto.

De la figura 11 se desprende que:

Area del hacha = Area del círculo − Area de dos navetas

En consecuencia:

$$\mathcal{A}_h = \frac{\pi\ell^2}{4} - \frac{2\ell^2(\pi-2)}{8} = \dots = \frac{\ell^2[\,2\pi - 2(\pi-2)\,]}{8} = \boxed{\frac{\ell^2}{2}} \qquad (10)$$

Otra forma de comprobar experimentalmente que el *hacha es la mitad del cuadrado*, es disponer las piezas de la figura 13, dentro del cuadrado, como a continuación se indica:

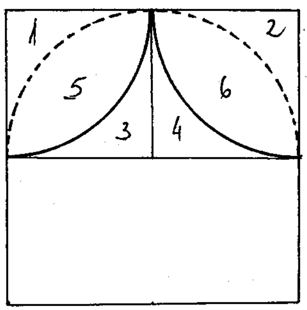


fig. 14

7.- EL PROBLEMA DEL ANCLA

Con centro en el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo isósceles (fig.15), se traza el arco $\mathcal{CB}$, de radio ℓ (igual a la longitud de los catetos) y extremos en los de la hipotenusa.

Luego, se trazan dos semicircunferencias cuyos diámetros sean los catetos y que corten a la hipotenusa.

En la especie de *ancla* resultante, vamos a demostrar que el área de la caña es igual a la de los brazos.

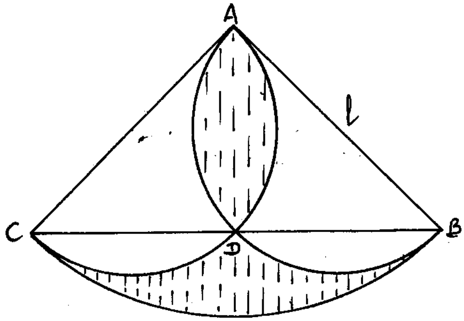


fig. 15

La caña es una naveta cuyo eje mayor, $\mathcal{AD}$, es la altura de la hipotenusa que, como se sabe, *es media proporcional entre los segmentos* $\mathcal{CD}$ *y* $\mathcal{DB}$ *que determina*. Según esto, es:

$$\mathcal{AD} = \sqrt{\mathcal{CD}\cdot\mathcal{DB}} = \sqrt{\mathcal{CB}\ /\ 2\cdot\mathcal{CB}\ /\ 2} = \frac{\sqrt{\ell^2+\ell^2}}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

Y aplicando la fórmula (7), el área de la caña es:

$$\mathcal{A}_c = \left[\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right]^2\cdot\frac{\pi-2}{4} = \frac{2\ell^2(\pi-2)}{16} = \boxed{\frac{\ell^2(\pi-2)}{8}} \qquad (11)$$

El área de los brazos se puede obtener restando a la del segmento circular de cuerda $\mathcal{CB} = \ell\cdot\sqrt{2}\ /\ 2$ y radio ℓ, la de dos seminavetas de ejes $\mathcal{CD}$ y $\mathcal{DB}$, siendo $\mathcal{CD} = \mathcal{DB} = \ell\cdot\sqrt{2}\ /\ 2$. Resulta:

$$\mathcal{A}_b = \frac{\ell^2(\pi-2)}{4} - \frac{\ell^2(\pi-2)}{8} = \boxed{\frac{\ell^2(\pi-2)}{8}} \qquad (12)$$

Queda, pues, demostrada la equivalencia de áreas.

8.- DE LA ESTRELLA A LA ASTROIDE.

LA FAMILIA DE LA ASTROIDE.

En el segundo apartado aludíamos al parecido del cuadrilátero curvilíneo (*estrella*) resultante en el interior del cuadrado base de nuestro puzzle, con una de las hipocicloides, la denominada *astroide*. Antes de establecer la diferencia entre una y otra, recordemos algunas definiciones de interés:

Se llaman curvas *epicicloidales* a las engendradas por un punto de una curva, o de su plano, al rodar, sin deslizar, sobre otra curva. La curva generatriz se suele denominar "ruleta"; la fija, "base de la ruleta".

Si ambas son circunferencias, y la ruleta se desplaza por el interior de la base, la curva generada es una *hipocicloide* ; si lo hace por el exterior, recibe el nombre de *epicicloide* .

Si es $\mathcal{R}$ el radio de la circunferencia base y r el de la ruleta, y si es $\mathcal{R} = 4r$, se genera la HIPOCICLOIDE DE 4 RETROCESOS O ASTROIDE.

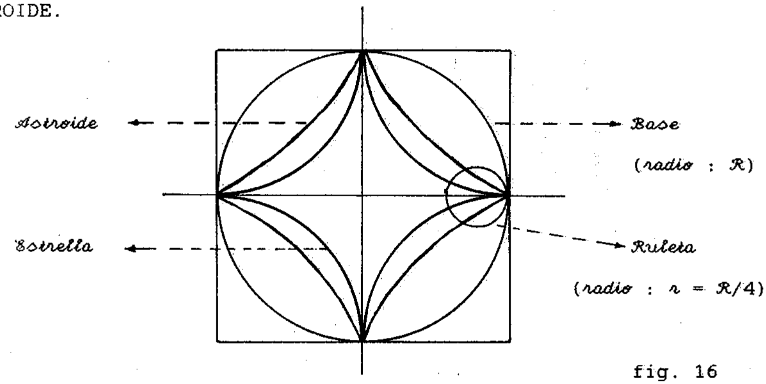


fig. 16

TRAZADO GEOMETRICO DE LA ASTROIDE.

La astroide puede también considerarse generada *por la trayectoria de un segmento rectilíneo de longitud constante $\mathcal{R}$, igual al radio de la circunferencia base, cuyos extremos se desplazan sobre los ejes de coordenadas.*

Esta interpretación nos permite trazar por puntos dicha curva, sin tener que recurrir a su ecuación. A tal efecto, haremos uso de un sencillo procedimiento -cuya justificación puede verse, por ejemplo, en A. DONEDDU, Analyse et Géométrie différentiale, Dunod, París, 1970, pg. 394- , que consiste en lo siguiente:

1° Considerando el segmento generador en una posición cualquiera, se determina el cuarto vértice $\mathcal{V}$ del rectángulo del que dicho segmento es diagonal.

2° Se traza la perpendicular al segmento por $\mathcal{V}$. El pie de esta perpendicular es un punto de la astroide.

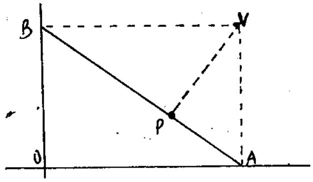


fig. 17

La figura siguiente muestra la obtención de algunos puntos de un arco de la astroide engendrada por un segmento de 5 unidades. Como la astroide es simétrica respecto a ambos ejes, a partir del arco trazado pueden obtenerse los otros tres que la cierran.

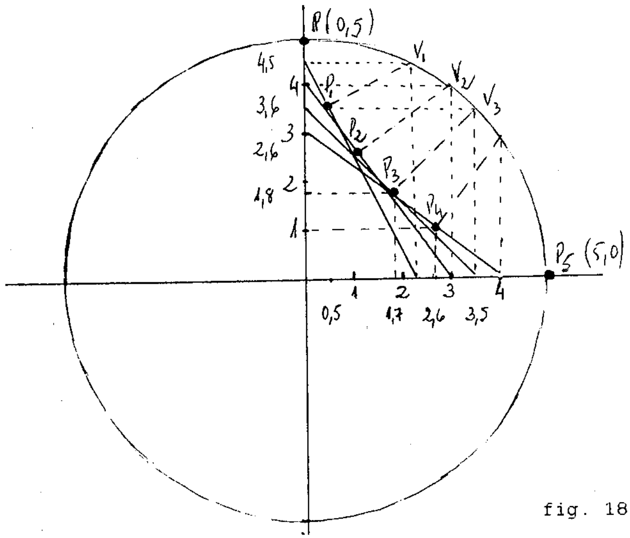


fig. 18

DETERMINACION ANALITICA DE PUNTOS

Para dar cumplimiento a uno de nuestros objetivos, el de *aprovechar un problema o cuestión para hacer incursiones en campos diversos de la Matemática*, lo que consideramos altamente formativo, vamos a utilizar aquí nociones básicas de Geometría Analítica para valorar los puntos de la astroide anteriormente localizados.

1° Empezaremos por calcular las ordenadas de los vértices V_1, V_2, ... de los rectángulos determinados por las posiciones A_1B_1, A_2B_2, ... del segmento generador (fig. 18):

V_1: $y = \sqrt{5^2 - 2,25^2} = \sqrt{19,9375} \cong 4,5 = 9/2$

V_2: $y = 4$ (terna pitagórica 3, 4, 5)

V_3: $y = \sqrt{5^2 - 3,5^2} = \sqrt{12,75} \cong 3,6 = 18/5$

V_4: $y = 3$

2° Coordenadas de P_1:

Ecuación de la recta que corta a los ejes en $A_1(9/4, 0)$ y $B_1(0, 9/2)$:

$$\frac{x}{9/4} + \frac{y}{9/2} = 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow y = -2x + 9/2$$

Ecuación de su perpendicular por $V_1(9/4, 9/2)$:

$$y - 9/2 = 1/2\ (x - 9/4) \Rightarrow \ldots \Rightarrow y = 1/2\ x + 27/8$$

Resolviendo el sistema, se obtiene el punto P_1 de intersección de ambas rectas. Resulta: $P_1(9/20 \cong 0,5\ ,\ 36/10 = 3,6)$

3° Con este mismo proceso, obtenemos:

$P_2(\cong 1\ ,\ \cong 2,6)$

$P_3(\cong 1,7\ ,\ \cong 1,8)$

$P_4(\cong 2,6\ ,\ \cong 1)$

ECUACION DE LA ASTROIDE

A) *Forma paramétrica*

Como se sabe, es conveniente en ocasiones expresar los puntos de una curva en función de una tercera variable denominada "parámetro". Se obtienen así las "ecuaciones paramétricas" de la curva en cuestión. Las correspondientes a la astroide, que no es el caso demostrar aquí, son:

$$(13) \quad \begin{cases} x = \mathcal{R}\cdot \cos^3 \phi \\ y = \mathcal{R}\cdot \operatorname{sen}^3 \phi \end{cases} \qquad (0 \le \phi \le 2\pi)$$

ϕ es el parámetro

$\mathcal{R}$ es el radio de la circunferencia base o la longitud del segmento generador.

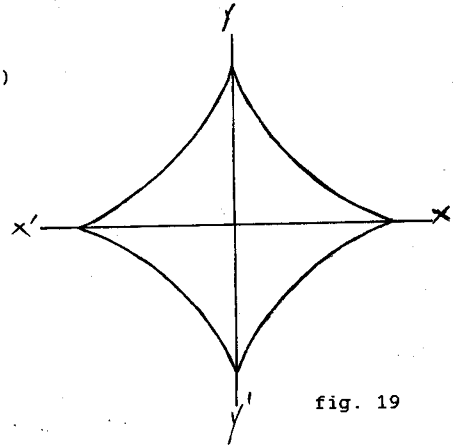


fig. 19

B) *Forma cartesiana*

El siguiente proceso transforma las ecuaciones paramétricas en ecuación cartesiana :

$$\left.\begin{array}{l} x = \mathcal{R}\cdot \cos^3 \phi \\ y = \mathcal{R}\cdot \operatorname{sen}^3 \phi \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} x^{2/3} = \mathcal{R}^{2/3}\cdot \cos^2 \phi \\ y^{2/3} = \mathcal{R}^{2/3}\cdot \operatorname{sen}^2 \phi \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = \mathcal{R}^{2/3}} \qquad (14)$$

(1) Elevando a 2/3 los dos miembros de ambas ecuaciones.

(2) Sumando miembro a miembro.

Como ejemplo de empleo de las ecuaciones paramétricas, calculemos las coordenadas del punto medio del arco superior derecho de nuestra astroide (fig. 18) , esto es, el correspondiente a un valor del parámetro de 45°:

$$\left.\begin{array}{l} \phi = 45^\circ \\ \mathcal{R} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 5\cdot \cos^3 45 = 5\ (\sqrt{2}\ /\ 2)^3 = 5\cdot\sqrt{2}\ /\ 4 \cong 1{,}8 \\ y = 5\cdot \operatorname{sen}^3 45 = 5\ (\sqrt{2}\ /\ 2)^3 = 5\cdot\sqrt{2}\ /\ 4 \cong 1{,}8 \end{array}$$

Y, por último, para no dejar fuera de juego a la ecuación cartesiana, verifiquemos que estos valores la satisfacen:

$$\left.\begin{array}{l} x = 5\cdot\sqrt{2} \;/\; 4 = y \\ \mathcal{R} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = 2\cdot(5\sqrt{2} \;/\; 4)^{2/3} = \ldots = \sqrt[3]{5^2}$$

Y también: $\mathcal{R}^{2/3} = 5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

9.- AREA DE LA ASTROIDE. DIFERENCIA CON LA ESTRELLA.

En llegando aquí, es preciso echar mano del Cálculo Integral, y abandonar el camino intuitivo hasta ahora seguido. Consideramos que merece la pena hacerlo, para rematar un ejemplo de cómo estructurar la presentación de cuestiones diversas partiendo de un tema sencillo y manipulable.

Para determinar el área $\mathcal{A}_a$ de la astroide, consideraremos sólo la variación del parámetro ϕ en el intervalo de 0 a π / 2. Basta luego multiplicar por 4. Veamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \mathcal{R}\cdot \cos^3\phi \Rightarrow dx = -3\,\mathcal{R}\cos^2\phi \,\text{sen}\,\phi\, d\phi \\ y = \mathcal{R}\cdot \text{sen}^3\phi \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi = 0 \Rightarrow x = \mathcal{R} \\ \phi = \pi \;/\; 2 \Rightarrow x = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\mathcal{A}_a \;/\; 4 = \int_0^{\mathcal{R}} y\, dx = \int_{\pi/2}^{0} \mathcal{R}\,\text{sen}^3\phi\,(-3\,\mathcal{R}\cos^2\phi\,\text{sen}\,\phi)\,d\phi =$$

$$-3\,\mathcal{R}^2 \int_{\pi/2}^{0} \text{sen}^4\phi\,\cos^2\phi\,d\phi =$$

$$-3\,\mathcal{R}^2 \left[\phi \;/\; 16 - (\text{sen}\,4\phi) \;/\; 64 - (\text{sen}^3\,2\phi) \;/\; 48\right]_{\pi/2}^{0} =$$

$$-3\,\mathcal{R}^2\,(-\pi \;/\; 32) = 3\,\mathcal{R}^2\,\pi \;/\; 32 \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_a = 3 \;/\; 8\,\pi\,\mathcal{R}^2} \qquad (15)$$

Esto es:

"*El área de la astroide es los* 3 / 8 *del área del círculo base*".

Por último, *¿cuál es la diferencia entre las áreas de la astroide y la estrella, referidas ambas a un mismo círculo?* . En otras palabras, *¿qué superficie queda entre las dos curvas?* :

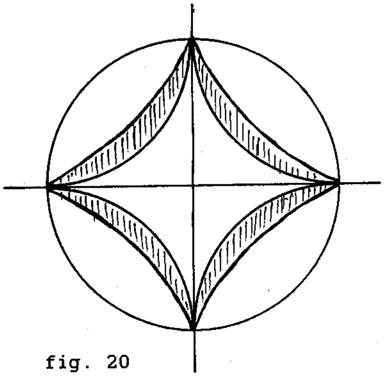


fig. 20

$$\mathcal{A} = 3 / 8 \pi \mathcal{R}^2 - \mathcal{R}^2 (4 - \pi) =$$

$$(3 \pi \mathcal{R}^2 - 32 \mathcal{R}^2 + 8 \pi \mathcal{R}^2) / 8 =$$

$$\boxed{\mathcal{R}^2 (11 \pi - 32) / 8} \qquad (16)$$