NUMEROS, 19 - 1989
S.C.P.M. "ISAAC NEWTON"

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD

JOSÉ ANGEL DORTA DÍAZ

E.U. DEL PROFESORADO DE EGB DE LA LAGUNA

INTRODUCCION

Me propongo como objetivo exponer algunas consideraciones y resultados que se han obtenido como consecuencia del estudio de la circunferencia unidad, centrada en el origen de un plano cartesiano. Algunos de ellos, son el resultado de reflexiones hechas en mis clases.

Sin más preámbulo, introduzcámonos en el tema empezando por reconocer mi simpatía por el "cuerpo de los números complejos"; muy en particular, desde el inicio de los estudios de Matemáticas me resultó atractivo el grupo:

$$(A , \cdot) = \left[\{ 1, i, -1, -i \}, \cdot \right]$$

Atractivo y, quizás, ..., inquietante. El hecho de poseer un elemento "imposible" ó "imaginario" como el i, cuyo cuadrado es además negativo (cosa sorprendente para aquellos que hasta ese momento sólo trabajábamos con números reales), unido a que su opuesto (?), $-i$, perteneciera de la misma forma al conjunto, terminó por despertar nuestra admiración y curiosidad.

Los interrogantes que en aquel entonces surgieron de forma natural con respecto a estos números "irreales" ó "sofisticados", fueron disipándose a medida que mi conocimiento del campo complejo fue avanzando; pero debo reconocer que cuestiones como las que expongo a continuación me llamaron poderosamente la atención desde el principio.

Si "i" es un número <u>imaginario</u>, ...

¿Tendrá representación gráfica?

¿Se podrá sumar con otros números?

¿Podremos restar, multiplicar, dividir con i ?

¿Tendrá raiz cuadrada? ¿Y raiz cúbica? ...¿Y raíz enésima?

¿Qué significado tendrán las expresiones: "opuesto de i ", "inverso de i ", ...?

¿Podremos hablar de $\operatorname{sen} i$, $\cos i$, $\operatorname{tg} i$, ... , $\operatorname{senh} i$, $\cosh i$, $\operatorname{tgh} i$, ... , i^2 , i^3 , ... , i^n , i^e , e^i , i^i , $Ln\, i$, ... ?

No se asuste el lector. No es objetivo de este trabajo hacer un tratado del campo complejo, pero debo dejar explicitado que aunque con i no podamos contar objetos, no podamos medir logitudes o superficies, no por ello deja de ser un <u>"número"</u> con el que pueden realizarse ciertas operaciones algebraicas —modernamente sabemos que para que un objeto matemático sea considerado <u>un número</u> no tiene necesariamente que representar algo (entiéndase contar, medir, ...).

Hoy reconocemos que la riqueza que encierra nuestro conspicuo elemento es mucho más abundante que la de cualquier número real negativo, por ejemplo. Estos números no poseen raíces de índice par, en contraposición con i, que posee dos raíces cuadradas, tres raíces cúbicas, ... , n raíces enésimas. Los reales negativos no tienen logaritmo, mientras que i tiene un número infinito de ellos. La expresión $\left(-7\right)^{\frac{7}{2}}$ carece de sentido en el campo real, sin embargo, $\left(i\right)^{\frac{7}{2}}$ e incluso $\left(i\right)^{\frac{i}{2}}$ tienen significado preciso en el campo complejo.

Podemos hacer extensible la comparación anterior a todos los elementos del cuerpo $(\mathbb{C}\ ,\ +\ ,\ \cdot)$ con respecto a los de $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ \cdot)$, y esa abundancia de resultados que nos ofrecen esos "extraños entes", con los que hoy se trabaja habitualmente, se la debemos sin duda alguna a personalidades como BOMBELLI (siglo XVI), cuya valentía al ser uno de los primeros matemáticos que se "atrevieron" a operar con "números imposibles" como $\sqrt{-7}$, debemos homenajear. Igualmente tenemos una deuda pendiente con el danés WESSEL (1789) y con el suizo JEAN-ROBERT ARGAND los cuales fueron pioneros en la representación geométrica de los números complejos, expresión esta debida a GAUSS (1832). Digamos por último que la notación $\sqrt{-1} = i$ la introdujo el suizo EULER alrededor del año 1750, y que fue el irlandés WILLIAM ROWAN HAMILTON (1835) quién establece una teoría completa de estos números, la cual se ha conservado hasta nuestros días.

Este trabajo lo inicio estableciendo algunas situaciones comparativas entre el conjunto formado por los infinitos elementos que conforman la circunferencia unidad (de radio 1) centrada en el origen y el subconjunto $\mathbb{A} = \{ 1, i, -1, -i \}$ del mismo; ello permitirá encontrar algunos resultados cuyo interés determinará la persona que lo lea.

Supongo al lector familiarizado con el cuerpo de los números complejos, a pesar de lo cual me permito recordar, esquemáticamente, algunas definiciones y propiedades elementales que serán utilizadas más adelante.

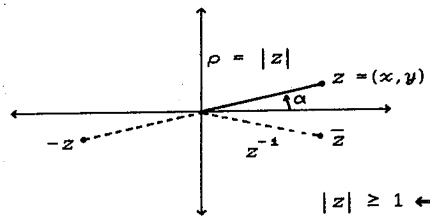
<u>Conjunto de los números complejos:</u> $\mathbb{C} = \{ (x, y) \ / \ x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \}$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo con las operaciones:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y$$



$$|z| \geq 1 \leftrightarrow |z^{-1}| \leq 1 \quad y \quad |z| \leq 1 \leftrightarrow |z^{-1}| \geq 1$$

NOMBRE	COMPLEJO	CONJUGADO
SIMBOLO	z	$\bar{z}$
PAR	$(x,y) = (Re(z),\ Im(z))$	$(x,\ -y)$
FORMA BINOMICA (Standar)	$x + iy$	$x - iy$
MODULO	$\rho = \|z\| = +\sqrt{x^2+y^2}$	$\|\bar{z}\| = \|z\| = \rho$
ARGUMENTO	$Arg(z) = \alpha = \alpha' + 2\pi k$ $\alpha' = arctg\ \frac{y}{x}\ ;\ 0 \leq \alpha' < 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$	$Arg(\bar{z}) = -\alpha$
FORMA TRIGONOMETR.	$\rho\ (\cos\alpha + i sen\ \alpha)$	$\rho \cdot (\cos\alpha - i sen\ \alpha) =$
FORMA EXPONENCIAL	$\rho \cdot e^{i\alpha}$	$\rho \cdot e^{-i\alpha}$

NOMBRE	INVERSO	OPUESTO
SIMBOLO	z^{-1}	$-z$
PAR	$\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$	$(-x,-y)$
FORMA BINOMICA (Standar)	$\frac{x}{x^2+y^2} - i\ \frac{y}{x^2+y^2}$	$-x - iy$
MODULO	$\|z^{-1}\| = \|z\|^{-1} = \frac{1}{\rho}$	$\|-z\| = \|z\| = \rho$
ARGUMENTO	$Arg(z^{-1}) = -\alpha$	$Arg(-z) = \alpha + \pi$
FORMA TRIGONOMETR.	$\frac{1}{\rho} \cdot (\cos\alpha - i sen\ \alpha)$	$\rho\ (\cos\ (\alpha+\pi) + i sen(\alpha+\pi)) =$ $-\rho\ (\cos\ \alpha + i sen\ \alpha)$
FORMA EXPONENCIAL	$\frac{1}{\rho} \cdot e^{-i\alpha}$	$\rho \cdot e^{i(\alpha+\pi)} = -\rho \cdot e^{i\alpha}$

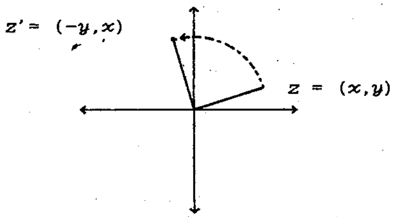
OPERADORES MULTIPLICATIVOS ELEMENTALES

a) EL OPERADOR i

El elemento i se define como un operador multiplicativo en $\mathbb{C}$, el cual no es más que una aplicación tal que a todo elemento de $\mathbb{C}$, z, le asocia como imagen el elemento $z \times i$ (leáse z por i) de $\mathbb{C}$.

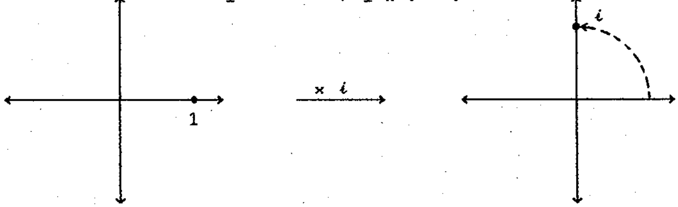
$$\begin{aligned} \times\, i \,:\, \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow z \times i = z' \\ (x,y) &\longrightarrow (x,y)\cdot(0,1) = (-y,x) = (x',y') \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de este operador estriba en que a todo elemento z de $\mathbb{C}$ le desplaza un cuarto de giro, 90°, desde su posición inicial, respecto del origen.



Si le aplicamos el operador "$\times\, i$" al elemento unidad de $\mathbb{C}$ $(1,0) \equiv 1$ (*), quedará:

$$1 \xrightarrow{\times\, i} 1 \times i = i$$



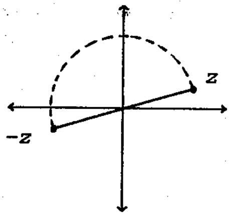
i ocupa la posición $(0,1)$ del plano cartesiano; de ahí procede la definición de la "unidad imaginaria": $i = (0,1) \in \mathbb{C}$.

(*) Los elementos de la forma "$(x,\ 0)$", $x \in \mathbb{R}$, se identifican con "x" en virtud del isomorfismo: $\left[\tilde{\mathbb{C}} = \{(x,0) \in \mathbb{C} \,/\, x \in \mathbb{R}\}\ ,\ +\ ,\ \cdot\right] \approx (\mathbb{R},+,\cdot)$. Recordemos que es $(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0) = x + iy$

Puede comprobarse sin dificultad que de la aplicación del operador "$\times i$" a i se obtiene $i^2 = -1$ y si se aplica a -1, se obtiene $-i$.

b) EL OPERADOR -1

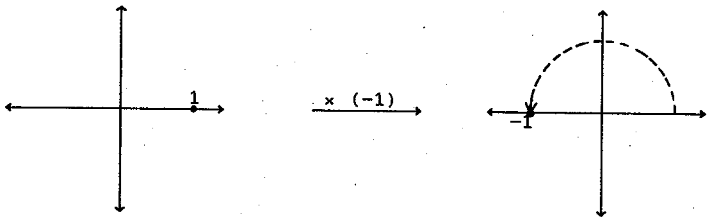
El elemento $-1 \in \mathbb{C}$ se puede definir, de la misma manera que i, el operador multiplicativo:



$$\times(-1):\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow z \times (-1) = -z$$
$$(x,y) \longrightarrow (x,y) \times (-1) = (-x,-y)$$

Se observa que la interpretación geométrica de este operador radica en que a todo elemento de $\mathbb{C}$ le produce un giro de 180°, desde su posición inicial, respecto del origen.

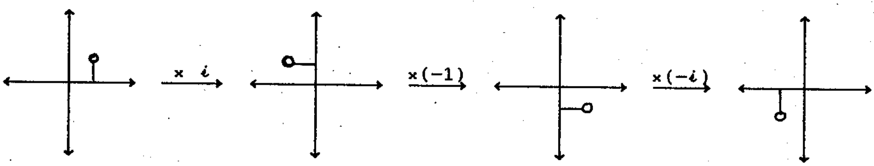
Obsérvese cómo actúa el operador "$\times(-1)$" en 1:



c) LOS OPERADORES $-i$ y 1

Los elementos $-i$ y 1 de $\mathbb{C}$ se definen análogamente, como operadores multiplicativos que giran 270° y 360°, respectivamente, respecto del origen.

Un ejercicio elemental podría ser comprobar las siguientes relaciones:



$$(x,y) \longrightarrow (-y,x) \longrightarrow (y,-x) \longrightarrow (-x,-y)$$
$$(1,3) \longrightarrow (-3,1) \longrightarrow (3,-1) \longrightarrow (-1,-3)$$

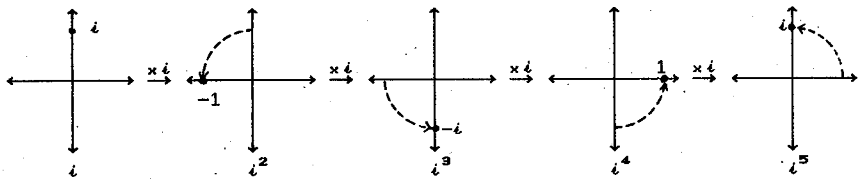
Mediante el proceder anterior, en el conjunto $\mathbb{A} = \{1, i, -1, -i\}$ el lector puede verificar que

$$\forall\ (z_1, z_2) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow z_1 \times z_2 \in \mathbb{A} \quad .$$

y construir la tabla de multiplicar:

$\times$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Es conocido que el par $(\mathbb{A}\ ,\ \cdot)$ es un grupo multiplicativo y además cíclico. Como se sabe, el hecho de ser cíclico indica que todo elemento de $\mathbb{A}$ puede escribirse como potencia entera de i (ó de $-i$) :

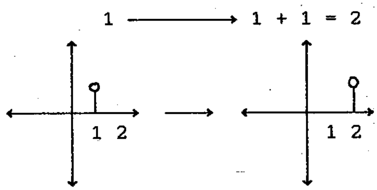


OPERADORES ADITIVOS O DE DESPLAZAMIENTO UNITARIO

En este apartado introduciremos cuatro operadores de desplazamiento unitario como sigue:

a) $+\ 1\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

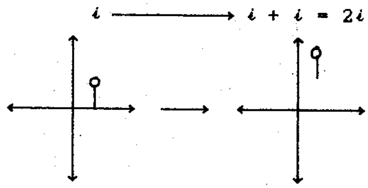
$\qquad\qquad z \longrightarrow z + 1$



"+ 1" indica que el elemento al que se le aplica queda trasladado una unidad hacia "la derecha".

b) $+\,i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longrightarrow z + i$



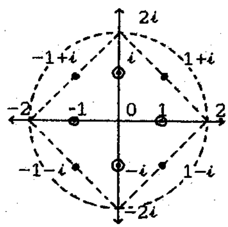
Aplicar "+ i" equivale a trasladar una unidad hacia "arriba".

c) $+\,(-1) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; aplicar "+ (−1)" equivale a trasladar una unidad hacia "la izquierda".

d) $+\,(-i) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; aplicar "+ ($-i$)" equivale la trasladar una unidad hacia "abajo".

Si llamamos $\mathbb{A}$ al conjunto formado por los cuatro operadores aditivos (omitiremos el símbolo "+"), se observa que coincide con el conjunto $\mathbb{A}$ del apartado anterior, en cuanto a la forma, admitiendo el convenio de suprimir "×" y "+". Procediendo así, el lector puede comprobar que:

$$\forall\,(z_1, z_2) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A} \Rightarrow z_1 \times z_2 \notin \mathbb{A}$$
$$\forall\,(z_1, z_2) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A} \Rightarrow z_1 \times z_2 \in \mathbb{M} - \mathbb{A}\,,$$



donde es $\mathbb{M} = \{\, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;/\; x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge x^2 + y^2 \leq 2^2 \,\}$

Esta es la tabla de sumar:

+	1	i	−1	$-i$
1	2	$1+i$	0	$1-i$
i	$1+i$	$2i$	$i-1$	0
−1	0	$-1+i$	-2	$-1-i$
$-i$	$-i+1$	0	$-i-1$	$-2i$

Podemos considerar la suma como un caso especial de ley de composición externa definida en $\mathbb{A}$ de la siguiente forma:

$$+ : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{M} - \mathbb{A}$$
$$(z_1, z_2) \longrightarrow z_1 + z_2$$
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A} \Rightarrow \dot{\exists}\, z \in \mathbb{M} - \mathbb{A} \;/\; z = z_1 + z_2 \in \mathbb{M} - \mathbb{A}$$

Para concluir este segundo apartado <u>podemos</u> <u>afirmar</u>: El producto de dos elementos de $\mathbb{A}$ siempre está en $\mathbb{A}$; por el contrario, la suma de dos elementos de $\mathbb{A}$ nunca está en $\mathbb{A}$ (resultado este que será utilizado posteriormente).

LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD

De la misma forma que en el Universo existe un ordenamiento perfecto, donde ciertas estructuras se repiten, como el movimiento el movimiento de los planetas, la sucesión de los días y las noches, el ciclo de los seres vivos, ... :

¿Guardarán los elementos de la circunferencia unidad secretos descifrables?

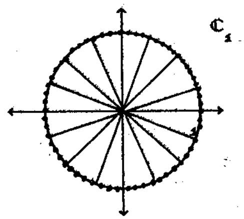
¿Poseerán alguna estructura ordenada?

¿Qué propiedades verificarán?

¿Existirá alguna relación entre el conjunto finito $\mathbb{A}$ y este conjunto infinito?

Para dar respuesta a estas preguntas empezaremos por definir nuestra circunferencia:

$$\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| = 1\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;/\; x^2 + y^2 = 1\} =$$
$$= \{z \in \mathbb{C} \;/\; z = e^{i\,Arg(z)}\}$$



Algunas propiedades elementales de $\mathbb{C}_1$ son:

1) $\forall\, z \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow -z \in \mathbb{C}_1$ (puesto que $|z| = |-z|$)

2) $\forall\, z \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow \overline{z} = z^{-1} \in \mathbb{C}_1$ (ya que en este caso $1 = |z| = |\overline{z}| = |z^{-1}| = |z|^{-1}$)

3) $\forall\ z \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow z^n \in \mathbb{C}_1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ (recuérdese que un complejo, producto de otros dos, tiene por módulo el producto de los módulos).

4) $\forall\ z \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{z} \in \mathbb{C}_1,\ k = 0, 1, \ldots, n-1.\ (\ |z_k| = 1^{1/n} = 1\ ),$ $\forall\ n = 0, 1, 2, \ldots$

5) $\forall\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1 \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2$

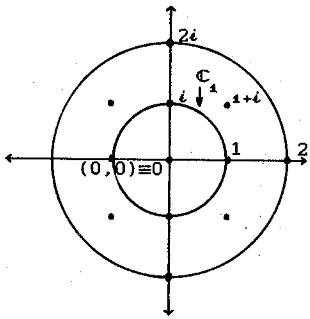
6) $\forall\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1$

PRIMERA PREGUNTA

Igual que sucedía en el caso del conjunto finito $\mathbb{A}$, si sumamos dos elementos arbitrarios de $\mathbb{C}_1$, el resultado ¿estará fuera, dentro, o sobre $\mathbb{C}_1$?

Haciendo uso de la propiedad 5 de $\mathbb{C}_1$, del gráfico adjunto y de nuestra intuición, podemos asegurar, en principio, que existen "muchos" pares de elementos de $\mathbb{C}_1$, tales que al sumar sus componentes, el complejo <u>suma</u> no pertenece a $\mathbb{C}_1$.

Será suficiente con fijar nuestra atención, por ejemplo, en los casos triviales:



a) $\forall\ z \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow z + (-z) = 0 \notin \mathbb{C}_1$

$(i + (-i) = 0)$

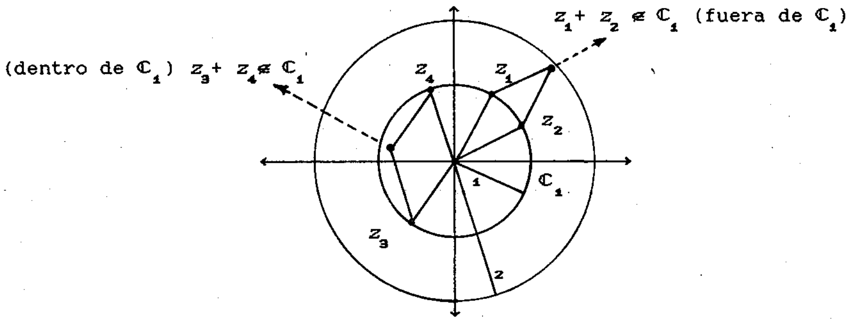
b) $\forall\ z \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow z + z = 2z \notin \mathbb{C}_1$

$(|2z| = 2|z| = 2;\ i+i = 2i \notin \mathbb{C}_1)$

El lector encontrará infinitos ejemplos.

Puede comprobarse, además, geométricamente.

Se sabe que la suma en $\mathbb{C}$ equivale a la suma en $\mathbb{V}_2$, en virtud del isomorfismo que existe entre los espacios vectoriales $(\mathbb{C}, +, \cdot\ ; \mathbb{R})$ y $(\mathbb{V}_2, +, \cdot\ ; \mathbb{R})$ y no es más que aplicar la conocida regla del paralelogramo.



Resolvamos nuestro problema de forma general. Para ello demos respuesta a las tres cuestiones siguientes:

Fijado un $z_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{C}_1$, encontrar todos los elementos $z = (x, y) \in \mathbb{C}_1$ tales que: a) $z_o + z$ esté dentro de $\mathbb{C}_1$; b) $z_o + z$ esté sobre $\mathbb{C}_1$; c) $z_o + z$ esté fuera de $\mathbb{C}_1$.

Se trata, en definitiva, de encontrar los subconjuntos de $\mathbb{C}_1$:

$$S_{z_o, I} = \{ (x, y) \in \mathbb{C}_1 \; / \; |(x, y) + (x_o, y_o)| < 1 \} \subset \mathbb{C}_1$$

$$S_{z_o, II} = \{ (x, y) \in \mathbb{C}_1 \; / \; |(x, y) + (x_o, y_o)| = 1 \} \subset \mathbb{C}_1$$

$$S_{z_o, III} = \{ (x, y) \in \mathbb{C}_1 \; / \; |(x, y) + (x_o, y_o)| > 1 \} \subset \mathbb{C}_1$$

Estas expresiones indican que la distancia del complejo suma al origen es menor, igual ó mayor que 1, respectivamente.

I) ¿Qué elementos forman el conjunto $S_{z_o, I}$?

Resolvamos la inecuación $|(x, y) + (x_o, y_o)| < 1$, equivalente a resolver $x_o \cdot x + y_o \cdot y < -\frac{1}{2}$

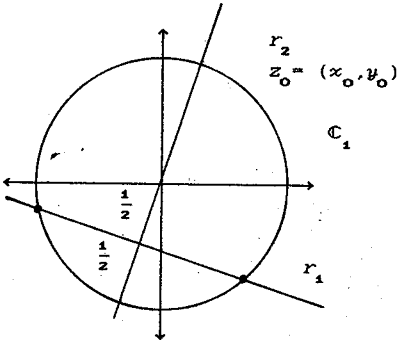
Considerando la ecuación asociada a nuestra inecuación, es decir, la ecuación de la recta $x_o \cdot x + y_o \cdot y + \frac{1}{2} = 0$, se observa que es perpendicular a la recta que pasa el punto (x_o, y_o) y por el origen.

En efecto: $y = \dfrac{-x_0}{y_0}\, x - \dfrac{1}{2\, y_0} \equiv r_1$ (recta asociada)

$y = \dfrac{y_0}{x_0}\, x \equiv r_2$ (recta que pasa por $(0,0)$ y por (x_0, y_0))

La perpendicularidad de r_1 y r_2 se sigue del hecho que sus pendientes son opuestas e inversas simultáneamente.

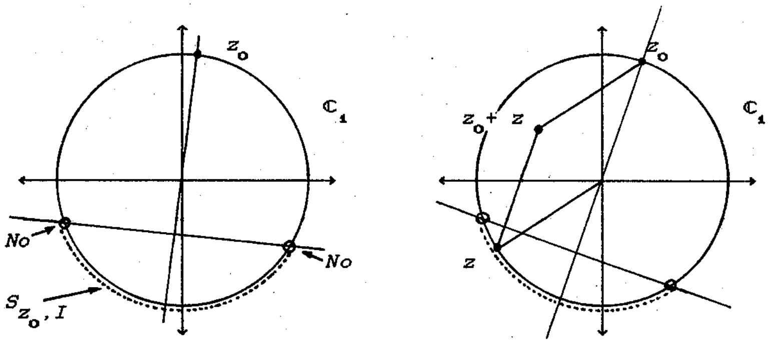
Mediante unos cálculos sencillos, el lector puede comprobar que la distancia del origen al punto de intersección de r_1 y r_2 es igual a 1/2.



Nuestro objetivo es resolver la inecuación $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y < -\frac{1}{2}$ donde (x_0, y_0) es un punto fijo y (x, y) un punto variable, ambos de $\mathbb{C}_1$. Por tratarse de una inecuación del tipo $ax + by + c < 0$, tiene como solución una de las partes en que la recta asociada, $ax + by + c = 0$, divide al plano. Al no verificar el punto $(0, 0)$ la inecuación $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y < -\frac{1}{2}$, la solución de la misma será la parte del plano (semiplano) en la que el origen no está. <u>Deducimos, por todo ello, que la intersección de ese semiplano con $\mathbb{C}_1$ será el subconjunto $S_{z_0, I}$ buscado</u>.

$S_{z_0, I} =$

$= \{(x, y) \in \mathbb{C}_1 /\ x_0 x + y_0 y < -\frac{1}{2} \wedge x^2 + y^2 = 1 \wedge (x_0, y_0) \in \mathbb{C}_1 \text{ es fijo}\} \subset \mathbb{C}_1$

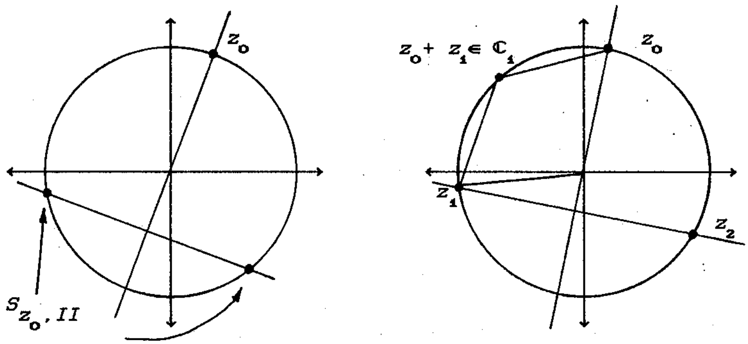


<u>Al sumar z_o con cualquier elemento de $S_{z_o,I}$, la suma está "dentro" de $\mathbb{C}_1$"</u>.

Mediante razonamientos parecidos al efectuado, podemos deducir que $S_{z_o,II} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{C}_1 / \ x_o x + y_o y = -\frac{1}{2} \ \wedge x^2 + y^2 = 1 \wedge (x_o,y_o) \in \mathbb{C}_1 \text{es fijo}\} \subset \mathbb{C}_1$

que graficamente significa:

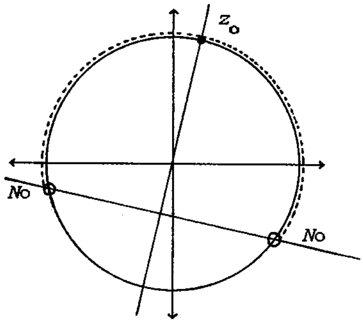


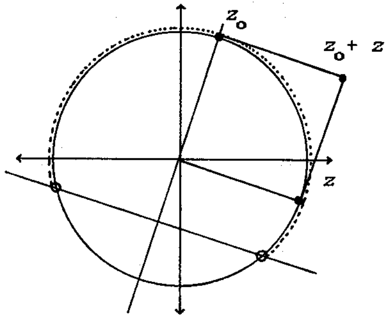
y que

$S_{z_o,III} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{C}_1 / \ x_o x + y_o y > -\frac{1}{2} \ \wedge x^2 + y^2 = 1 \wedge (x_o,y_o) \in \mathbb{C}_1 \text{es fijo}\} \subset \mathbb{C}_1$

que gráficamente significa:





Los resultados anteriores podemos reunirlos en las tres proposiciones siguientes:

Proposición 1

Fijado un $z_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{C}_1$, existen dos y sólo dos elementos de $\mathbb{C}_1$, z_1 y z_2, tales que $z_o + z_1 \in \mathbb{C}_1$ y $z_o + z_2 \in \mathbb{C}_1$, verificándose además que z_o, z_1 y z_2 están situados en los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas.

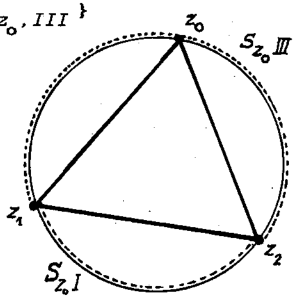
Proposición 2

Para todo elemento z_o de la circunferencia unidad, existe una partición de la misma de tres elementos:

$$F_{z_o}(\mathbb{C}_1) = \{ S_{z_o,I}, S_{z_o,II}, S_{z_o,III} \}$$

tal que , siendo $z \in \mathbb{C}_1$

$$z_o + z_1 \text{ está } \begin{cases} \text{dentro de } \mathbb{C}_1, \text{ si } z \in S_{z_o,I} \\ \text{sobre } \mathbb{C}_1, \text{ si } z \in S_{z_o,II} \\ \text{fuera de } \mathbb{C}_1, \text{ si } z \in S_{z_o,III} \end{cases}$$



Proposición 3

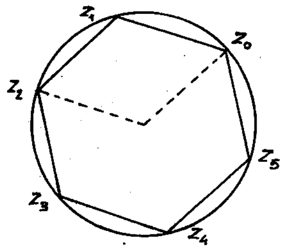
Inscribiendo cualquier exágono en la circunferencia unidad, un elemento de $\mathbb{C}_1$ situado en un vértice intermedio de otros dos, es siempre suma algebraica de éstos.

$z_0 = z_1 + z_5$

$z_1 = z_0 + z_2$

$z_2 = z_1 + z_3$

etc.



Podemos, por tanto, responder a nuestra pregunta: ¿Estará fuera, dentro ó sobre $\mathbb{C}_1$ la suma de los elementos de $\mathbb{C}_1$? :

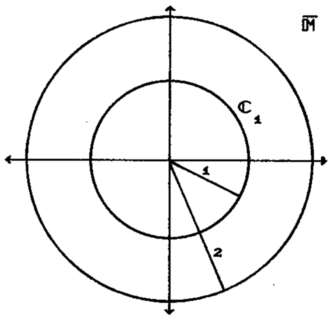
Existen infinitos pares de elementos de $\mathbb{C}_1$ tales que: a) su suma está dentro de $\mathbb{C}_1$; b) su suma está sobre $\mathbb{C}_1$; c) su suma está fuera de $\mathbb{C}_1$.

La suma en $\mathbb{C}_1$ es una ley de composición externa del tipo:

$$+ : \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}$$
$$(z_1 , z_2) \longrightarrow z_1 + z_2$$

siendo $\overline{\mathbb{M}} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x^2 + y^2 \leq 2^2\}$

y $\mathbb{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$



SEGUNDA PREGUNTA

¿Si multiplicamos dos elementos cualesquiera de nuestra circunferencia unidad, el producto estará siempre sobre ella, tal como sucedía con los elementos de $\mathbb{A}$?

Ahora la contestación a esta pregunta no ofrece dificultad alguna y es, evidentemente, afirmativa.

TERCERA PREGUNTA

¿Tendrá estructura de grupo multiplicativo el par ($\mathbb{C}_1$, $\cdot$)? (($\mathbb{A}$,$\cdot$) lo es).

No ofrece dificultad contestar puesto que:

1) El producto es ley de composición interna en $\mathbb{C}_1$.

2) La asociatividad, al verificarse para todos los elementos de $\mathbb{C}$, se cumplirá en $\mathbb{C}_1$. (Igual ocurre con la conmutatividad)

3) $\exists\ 1 \equiv (1, 0) \in \mathbb{C}_1$ y $\forall\ z \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow 1 \cdot z = z \cdot 1 = z \in \mathbb{C}_1$

4) $\forall\ z \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow \exists\ z^{-1} \in \mathbb{C}_1$ y $z^{-1} \cdot z = z \cdot z^{-1} = 1$ (propiedad 2 de $\mathbb{C}_1$)

Por todo ello, ($\mathbb{C}_1$, $\cdot$) es un grupo multiplicativo.

Este grupo multiplicativo, ($\mathbb{C}_1$, $\cdot$), constituido por los infinitos elementos que conforman la circunferencia unidad, contiene una infinidad de subgrupos multiplicativos, los cuales tienen, a su vez, algún subgrupo multiplicativo.

¿Cuáles son esos subgrupos?

Recordemos que si $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, existen exactamente n números complejos distintos, z_k , $k = 0, 1, 2, \ldots , n-1$, llamados raíces enésimas de z, tales que $z_k^n = z$, $\forall\ k = 0, 1, 2, \ldots , n-1$. Estos z_k se encuentran en los vértices de un polígono regular de radio $|z|^{1/n}$, centrado en (0, 0) y vienen expresados de la siguiente forma:

$$z_k = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\,\frac{\alpha' + 2\pi k}{n}} \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots , n-1 \ ; \ \alpha + ' 2\pi k = Arg(z)$$

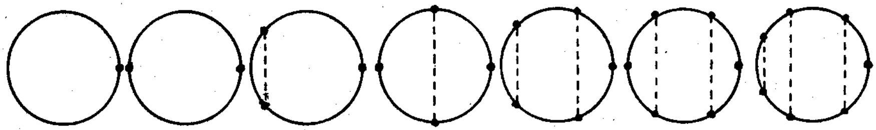
Si hallamos las raíces enésimas de $1 \equiv (1, 0) \in \mathbb{C}_1$ y las expresamos exponencialmente obtendremos el conjunto $\mathcal{R}_n(1)$, es decir,

$$\mathcal{R}_n(1) = \left\{ z_0 \ , \ z_1 \ , \ z_2 \ , \ \ldots \ , \ z_{n-1} \right\} =$$

$$\left\{ 1 = e^{i0} , \ e^{i\,\frac{2\pi}{n}} , \ e^{i\,\frac{4\pi}{n}} , \ \ldots , \ e^{i\,\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\} \subset \mathbb{C}_1$$

Nótese que $\mathcal{R}_n(1)$ es un subconjunto de $\mathbb{C}_1$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$, ya que $\forall\ z_k \in \mathcal{R}_n(1) \Rightarrow |z_k| = |z|^{1/n} = |1|^{1/n} = 1 \Rightarrow z_k \in \mathbb{C}_1$

Dando valores a n obtendremos:



$\mathcal{R}_1(1)$ $\mathcal{R}_2(1)$ $\mathcal{R}_3(1)$ $\mathcal{R}_4(1)$ $\mathcal{R}_5(1)$ $\mathcal{R}_6(1)$ $\mathcal{R}_7(1)$

Observando las gráficas anteriores y a nivel puramente intuitivo, podemos comprobar que todos los $\mathcal{R}_n(1)$ son subgrupos multiplicativos de $(\mathbb{C}_1, \cdot)$.

Además, se puede comprobar que:

a) $(\mathcal{R}_1(1),\cdot) \subset (\mathcal{R}_p(1),\cdot) \subset (\mathcal{R}_{2p}(1),\cdot) \subset (\mathcal{R}_{4p}(1),\cdot) \subset \ldots \subset$
$(\mathcal{R}_{p2^{m-1}}(1),\cdot)$ ... $p \in \mathbb{N}$ y p primo $(m = 1, 2, 3, \ldots)$

b) $(\mathcal{R}_1(1),\cdot) \subset (\mathcal{R}_n(1),\cdot) \subset (\mathcal{R}_{n^2}(1),\cdot) \subset (\mathcal{R}_{n^3}(1),\cdot) \subset \ldots \subset$
$(\mathcal{R}_{n^m}(1),\cdot)$ ..., $\forall\, (n, m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$

<u>Si tomamos al azar un $\mathcal{R}_n(1)$ existen dos alternativas:</u>

- Que n sea primo, en cuyo caso $(\mathcal{R}_n(1), \cdot)$ admite únicamente los subgrupos impropios $(\mathcal{R}_1(1), \cdot)$ y $(\mathcal{R}_n(1), \cdot)$.
- Que n sea compuesto. En este caso $(\mathcal{R}_n(1), \cdot)$ tiene tantos subgrupos como divisores tenga n.

Comprobar que, por ejemplo, $(\mathcal{R}_{16}(1),\cdot)$ tiene cinco subgrupos multiplicativos.

ESTUDIO DE LAS RAICES

Abordaremos a continuación la cuestión, ya clásica, de estudiar el producto y la suma de las raíces enésimas de la unidad, no sólo desde el punto de vista formal sino también a través de un planteamiento didáctico e intuitivo.

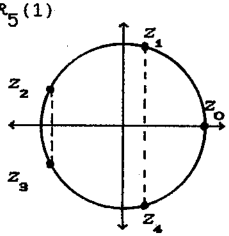
Extenderemos finalmente los resultados a las raíces enésimas de los elementos de $\mathbb{A}$, de los elementos de $\mathbb{C}_1$ y generalizaremos, por último, para los elementos arbitrarios del conjunto de los números complejos.

PRODUCTO DE LAS RAICES DE 1

Empezaremos por encontrar el producto de las raíces enésimas de 1 ciñéndonos a dos ejemplos sencillos: $\mathcal{R}_5(1)$ y $\mathcal{R}_6(1)$.

Tomemos primero las cinco raíces enésimas de 1 y multipliquémoslas:

$\mathcal{R}_5(1)$



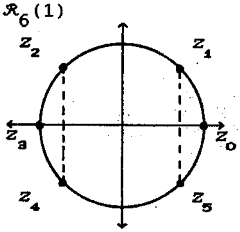
$$P = z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = z_0 \cdot \underbrace{(z_1 \cdot z_4)}_{1} \cdot \underbrace{(z_2 \cdot z_3)}_{1} = 1$$

$$z_1 \cdot z_4 = z_1 \cdot \overline{z}_1 = z_1 \cdot z_1^{-1} = 1$$

$$z_2 \cdot z_3 = z_2 \cdot \overline{z}_2 = z_2 \cdot z_2^{-1} = 1$$

Para el producto de las raíces sextas de 1 se tiene:

$\mathcal{R}_6(1)$



$$P = z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \; z_5 = \underbrace{(z_0 \cdot z_3)}_{-1} \cdot \underbrace{(z_1 \cdot z_5)}_{1} \cdot \underbrace{(z_2 \cdot z_4)}_{1} = -1$$

El lector puede demostrar fácilmente que, en general:

$$z_k \in \mathcal{R}_n(1) \Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} z_k = \begin{cases} 1 \text{ , si } n \text{ es impar} \\ -1 \text{ , si } n \text{ es par} \end{cases}$$

SUMA DE LAS RAICES DE 1

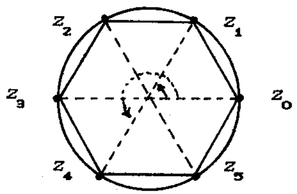
Veamos en primer lugar que <u>la opuesta de una raiz enésima de 1 es también una raiz enésima de 1</u>, es decir:

$$\forall \; z_k \in \mathcal{R}_n(1) \Rightarrow -z_k \in \mathcal{R}_n(1) \quad , \forall \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

a) En el caso de n par, efectivamente así es:

$$\forall\ z_k \in \mathcal{R}_n(1) \Rightarrow -z_k = z_{\frac{n}{2}+k} \in \mathcal{R}_n(1) \ ;$$

$$\forall\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n}{2} - 1.$$



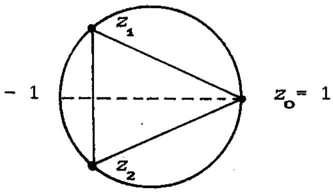
y esto es así porque $tg\ (\ Arg(z_k)\ ) = tg\ \dfrac{2\pi k}{n} = tg\left[\ \dfrac{2\pi k}{n}\ \right] =$

$= tg\ \dfrac{2\pi(\ \frac{n}{2} + k\ )}{n} = tg\ (\ Arg(z_{\frac{n}{2}+k})\ )$, de donde se deduce que $-z_k =$

$= z_{\frac{n}{2}+k}$ si n es par.

b) Si n es impar, basta un contraejemplo para poner de manifiesto que:

$$z_k \in \mathcal{R}_n(1) \Rightarrow -z_k \notin \mathcal{R}_n(1)\ ,\ \text{para algún } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

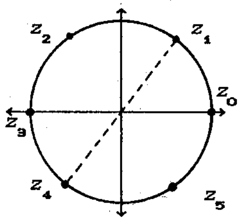


Esto es así en efecto, pues $\exists\ 1 \in \mathcal{R}_3(1)$ y, sin embargo, $-1 \notin \mathcal{R}_3(1)$.

Es más, puede probarse que <u>si n es impar, la opuesta de una raíz enésima de 1 nunca es raíz enésima de 1</u>.

Sumemos por fin las raíces de 1:

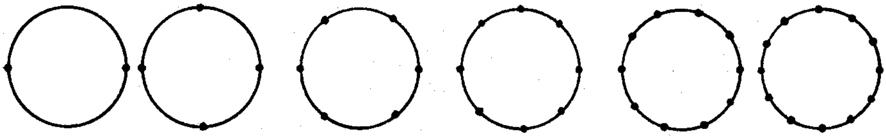
a) Para el caso de n <u>par</u> estudiemos el ejemplo de $\mathcal{R}_6(1)$



La suma de las raíces será:

$$S = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 =$$
$$= \underbrace{(z_0 + z_3)}_{0} + \underbrace{(z_1 + z_4)}_{0} + \underbrace{(\ z_2 + z_5)}_{0} = 0$$

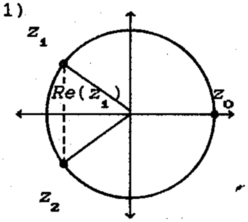
Fijando nuestra atención en las gráficas siguientes, se comprueba que si n es par, la suma de las raíces enésimas de 1 es cero.



$\mathcal{R}_2(1)$ $\mathcal{R}_4(1)$ $\mathcal{R}_6(1)$ $\mathcal{R}_8(1)$ $\mathcal{R}_{10}(1)$ $\mathcal{R}_{12}(1)$

b) En el caso de n <u>impar</u> estudiemos separadamente los ejemplos de $\mathcal{R}_3(1)$, $\mathcal{R}_5(1)$, $\mathcal{R}_7(1)$, ... y extraigamos conclusiones.

$\mathcal{R}_3(1)$

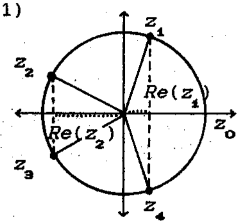


$$S = z_0 + z_1 + z_2 = z_0 + z_1 + \overline{z}_1 =$$
$$= 2\ Re(z_1) + z_0 = 0$$

El penúltimo miembro de la igualdad en cadena anterior es:

$$2 \cos \frac{2\pi}{3} + 1 = 1 + 2\ (-\ \frac{1}{2}\ ) = 0$$

$\mathcal{R}_5(1)$



$$S = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 =$$
$$= z_0 + (z_1 + z_4) + (z_2 + z_3) =$$
$$= z_0 + (z_1 + \overline{z}_1) + (z_2 + \overline{z}_2) =$$
$$= z_0 + 2\ Re(z_1) + 2\ Re(z_2) =$$
$$= 1 + 2 \left[\cos \frac{2\pi}{5} + \cos 2\ \frac{2\pi}{5}\right] =$$
$$= 1 + 2 \left[-\ \frac{1}{2}\right] = 0$$

En general, para $\mathcal{R}_n(1)$, siendo n impar, la suma de sus elementos será:

$$S = 1 + 2 \left[\cos \frac{2\pi}{n} + \cos 2\ \frac{2\pi}{n} + \cos 3\ \frac{2\pi}{n} + \ldots + \cos \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right] = 0$$

ya que la suma expresada entre paréntesis puede ser sustituida por $-\ \frac{1}{2}$

Dejamos para el lector la demostración de que la suma a la que se refiere el párrafo anterior es verdaderamente $-\ \frac{1}{2}$, para todo impar mayor o igual que 3. En los casos n = 3, 5, 7, ..., compruébese con calculadora.

En los textos de variable compleja, la demostración de que la suma de las raíces enésimas de 1 es cero, y que acabamos de ver "casi-intuitivamente", estudiando los distintos casos, está basada en la suma de los términos de una progresión geométrica.

Estos resultados que hemos obtenido, podemos expresarlos resumidos en el siguiente recuadro:

$$\boxed{z_k \in \mathcal{R}_n(1) \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \end{cases}}$$

CUARTA PREGUNTA

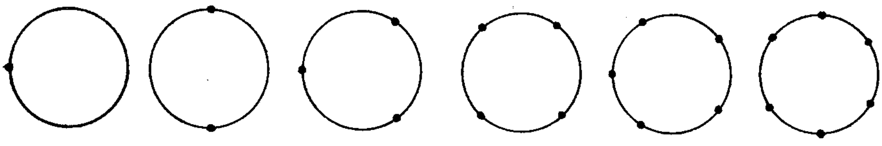
¿Podrán ser extendidas las conclusiones de los dos apartados anteriores a otros conjuntos de la forma $\mathcal{R}_n(z)$, siendo $z \in \mathbb{C}_1$?

En otras palabras: ¿ Cuál será el valor de la suma y del producto de las raíces enésimas de un número complejo del conjunto $\mathbb{A}$, del cojunto $\mathbb{C}_1$ y, en general del conjunto $\mathbb{C}^*$?

CASO DE $z = -1$

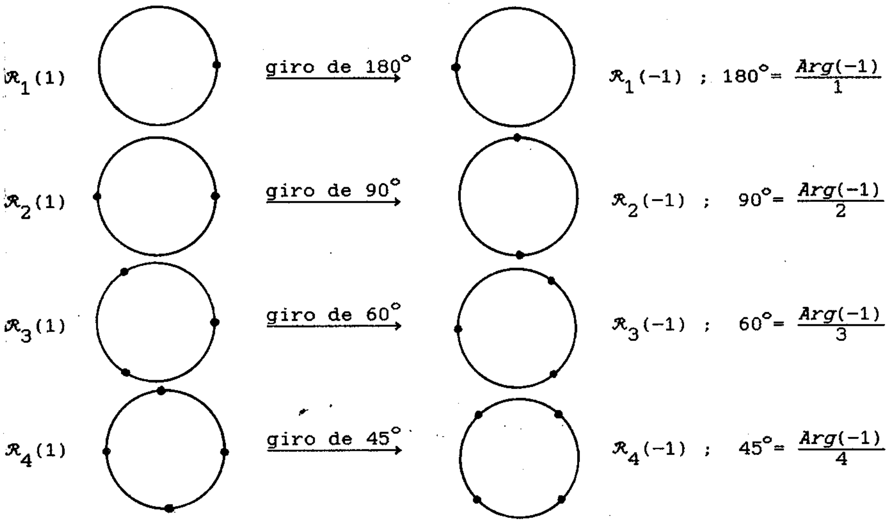
El conjunto de las raíces enésimas de -1 es:

$$\mathcal{R}_n(-1) = \left\{ e^{i\frac{\pi}{n}}, e^{i\frac{3\pi}{n}}, e^{i\frac{5\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\}$$



$\mathcal{R}_1(-1)$ $\mathcal{R}_2(-1)$ $\mathcal{R}_3(-1)$ $\mathcal{R}_4(-1)$ $\mathcal{R}_5(-1)$ $\mathcal{R}_6(-1)$

Observe el lector que las raíces enésimas de -1 pueden obtenerse, gráficamente, a partir de las raíces enésimas de 1:



etc.

Luego, para obtener las raíces enésimas de -1 a partir de las raíces de 1 se girará cada una de éstas un ángulo de amplitud igual a $\frac{Arg(-1)}{n} = \frac{180°}{n}$, respecto del origen.

PRODUCTO DE LAS RAICES DE -1

Analizando las gráficas de $\mathcal{R}_n(-1)$, para los diferentes valores de n, podemos resolver este apartado siguiendo un proceso análogo al que se realizó para $\mathcal{R}_n(1)$. Para evitar extendernos en exceso, abordaremos la cuestión en general.

Si tomamos todos los elementos de $\mathcal{R}_n(-1)$ y los multiplicamos, el producto será:

$$P = e^{i\frac{\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{5\pi}{n}} \cdot \ldots \cdot e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{n}\cdot\left[(1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1))\right]} = e^{i\cdot\pi\cdot n}$$

Así tendremos que $P = e^{i\cdot\pi\cdot n} = \begin{cases} -1, & \text{si } n \text{ es impar} \\ -(-1), & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

SUMA DE LAS RAICES DE -1

Si se desea analizar este punto desde una perspectiva gráfica e intuitiva, es conveniente dividirlo en dos partes:

<u>Caso de ser n par:</u> Observando detenidamente las gráficas, se comprueba fácilmente que la suma de los elementos de $\mathcal{R}_n(-1)$ es cero.

<u>Caso en que n sea impar:</u> Mediante unos cálculos elementales, el lector concluirá con nosotros que :

a) La suma de los elementos de $\mathcal{R}_3(-1)$ es:

$$-1 + 2\cdot\cos\frac{\pi}{3} = -1 + 2\cdot\frac{1}{2} = 0$$

b) La suma de los elementos de $\mathcal{R}_5(-1)$ es:

$$-1 + 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5} + \cos 3\cdot\frac{\pi}{5}\right) = -1 + 2\cdot\frac{1}{2} = 0$$

En general, la suma de los elementos de $\mathcal{R}_n(-1)$ es:

$$-1 + 2\cdot\left[\cos\frac{\pi}{n} + \cos 3\cdot\frac{\pi}{n} + \cos 5\cdot\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos\,(n-2)\cdot\frac{\pi}{n}\right] =$$

$$= -1 + 2\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Resumiendo tendremos:

$$\boxed{z_k \in \mathcal{R}_n(-1) \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \begin{cases} -1 \text{ , si } n \text{ es impar} \\ -(-1) \text{ , si } n \text{ es par} \end{cases} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \end{cases}}$$

<u>Pregunta al lector:</u>

¿Tendrá estructura de grupo multiplicativo el par $(\mathcal{R}_n(-1),\cdot)$? Contéstese estudiando la definición de $\mathcal{R}_n(-1)$ y sus gráficas, para cualquier valor de n. ¿Qué se podrá decir del par $(\mathcal{R}_n(-1),+)$?

Mediante razonamientos análogos a los ya vistos, se puede concluir, para el conjunto de las raíces enésimas de i , $\mathcal{R}_n(i)$, que:

$$\boxed{z_k \in \mathcal{R}_n(i) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \begin{cases} i \text{ , si } n \text{ es impar} \\ -i \text{ , si } n \text{ es par} \end{cases} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \end{cases}}$$

y para el conjunto de las raíces enésimas de $-i$, $\mathcal{R}_n(-i)$:

$$\boxed{z_k \in \mathcal{R}_n(-i) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \begin{cases} -i \text{ , si } n \text{ es impar} \\ i \text{ , si } n \text{ es par} \end{cases} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \end{cases}}$$

CASO DE $z \in \mathbb{C}_1$

En primer lugar, nos preguntamos si podrán obtenerse las raíces enésimas de un elemento arbitrario de la circunferencia unidad, a partir de las raíces enésimas de 1.

Veamos que así es.

Si $z \in \mathbb{C}_1 \Rightarrow |z| = 1$ y $\alpha = Arg(z) = \alpha' + 2\pi k$; con $k \in \mathbb{Z}$ y donde α', argumento principal de z , varía así: $0 \leq \alpha' < 2\pi$. Por ello, un elemento cualquiera de $\mathbb{C}_1$, z , vendrá expresado:

$$z = e^{i(\alpha' + 2\pi k)}$$

y en consecuencia, las raíces enésimas del mismo serán:

$$\mathcal{R}_n(z) = \left\{ e^{i\frac{\alpha'}{n}} , e^{i\frac{\alpha' + 2\pi}{n}} , e^{i\frac{\alpha' + 4\pi}{n}} , \ldots , e^{i\frac{\alpha' + (n-1)\cdot 2\pi}{n}} \right\}$$

Si recordamos que girar un elemento del plano un ángulo de amplitud β , respecto del origen, no es más que multiplicar aquel por otro elemento de módulo 1 y amplitud β ; es decir, por $e^{i\cdot\beta}$, se comprenderá que:

$$\begin{array}{rccccc} \mathcal{R}_n(1) = \Big\{ & e^{i\cdot 0}, & e^{i\frac{2\pi}{n}}, & e^{i\frac{4\pi}{n}}, & \dots, & e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} \Big\} \\ & g\Big\downarrow \frac{\alpha'}{n} & g\Big\downarrow \frac{\alpha'}{n} & g\Big\downarrow \frac{\alpha'}{n} & & g\Big\downarrow \frac{\alpha'}{n} \\ \mathcal{R}_n(z) = \Big\{ & e^{i\frac{\alpha'}{n}}, & e^{i\frac{\alpha'+2\pi}{n}}, & e^{i\frac{\alpha'+4\pi}{n}}, & \dots, & e^{i\frac{\alpha'+2(n-1)\pi}{n}} \Big\} \end{array}$$

de esta manera hemos obtenido las raíces de $z \in \mathbb{C}_1$, como consecuencia de haber aplicado un giro de amplitud $\frac{\alpha'}{n}$ (α' es el argumento principal de z) a las raíces enésimas de 1. Así por ejemplo, si a las raíces quintas de 1 les aplicamos un giro de amplitud $\frac{\alpha'}{5}$ habremos obtenido las raíces quintas de $z \in \mathbb{C}_1$ (α' es el argumento principal de z)

PRODUCTO DE LAS RAICES DE $z \in \mathbb{C}_1$

$$P = e^{\frac{i}{n}\cdot\left[(n\cdot\alpha' + 2\pi\cdot(1+2+3+\dots+(n-1))\right]} = e^{i\cdot(\alpha'+(n-1)\pi)}$$

Si n es impar, entonces $P = e^{i\cdot(\alpha'+t\cdot 2\pi)} = z \in \mathbb{C}_1$, $t \in \mathbb{Z}$

Si n es par, entonces $P = e^{i\cdot((\alpha'+t\cdot 2\pi)+\pi)} = -z \in \mathbb{C}_1$, $t \in \mathbb{Z}$

SUMA DE LAS RAICES DE $z \in \mathbb{C}_1$

$$S = \frac{e^{i\frac{\alpha'+2(n-1)\pi}{n}}\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}} - e^{i\frac{\alpha'}{n}}}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{i\left(\frac{\alpha'}{n}+2\pi\right)} - e^{i\frac{\alpha'}{n}}}{\text{Cte.}} = 0$$

observése que es $e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1 \neq 0$, para $n \geq 2$.

Resumiendo estos resultados, para $z \in \mathbb{C}_1$ y $n \geq 2$, se tiene:

$$\boxed{z_k \in \mathcal{R}_n(z) \rightarrow \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} z_k = \begin{cases} z \text{ , si } n \text{ es impar} \\ -z \text{ , si } n \text{ es par} \end{cases} \\ \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \end{cases}}$$

El lector puede tratar de responder a las preguntas: ¿ Podrá ser en algún caso $(\mathcal{R}_n(z)\ ,\ \cdot\ )$ un grupo multiplicativo, si es $z \in \mathbb{C}_1$? ¿ Y podrá ser $(\mathcal{R}_n(z)\ ,\ +\ )$ un grupo aditivo ?

CASO GENERAL : $z \in \mathbb{C}^*$

<u>Proposición 4</u>

Dado cualquier número complejo distinto de cero, $z = |z| \cdot e^{i\cdot(\alpha' + 2\pi k)}$, $z \in \mathbb{C}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, sus raíces enésimas, $z_k = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\,\frac{\alpha' + 2\pi k}{n}}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-1$; podrán obtenerse a partir de las raíces enésimas de la unidad sin más que aplicar sucesivamente, a éstas, una homotecia de centro el origen y razón $|z|^{1/n}$ y un giro de centro el origen y amplitud $Arg(z)/\ n$.

Demostración:

Sea $z \in \mathbb{C}^*$ y z_k sus raíces enésimas tal como indica el enunciado de la proposición. Veamos que si a los elementos de $\mathcal{R}_n(z)$ les aplicamos el producto de las transformaciones:

$$h_{0,|z|^{1/n}}: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ w & \longrightarrow & |z|^{1/n}\cdot w \end{array} \quad \text{y} \quad g_{0,\frac{\alpha}{n}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ w & \longrightarrow & e^{i\,\frac{\alpha}{n}}\cdot w \end{array}$$

obtendremos los elementos del conjunto $\mathcal{R}_n(z)$.

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\begin{array}{l} z_0 = e^{i\,0} \\ z_1 = e^{i\,\frac{2\pi}{n}} \\ \vdots \\ z_{n-1} = e^{i\,\frac{2\pi(n-1)}{n}} \end{array}} &
\begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{h} \\ \\ \xrightarrow{h} \end{array} &
\begin{array}{l} |z|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\,0} \\ |z|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\,\frac{2\pi}{n}} \\ \vdots \\ |z|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\,\frac{2\pi(n-1)}{n}} \end{array} &
\begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{g} \\ \\ \xrightarrow{g} \end{array} &
\boxed{\begin{array}{l} |z|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\,\frac{\alpha'}{n}} = z'_0 \\ |z|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\,\frac{\alpha' + 2\pi}{n}} = z'_1 \\ \vdots \\ |z|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\,\frac{\alpha' + (n-1)2\pi}{n}} = z'_{n-1} \end{array}} \\
\| & & & & \| \\
\mathcal{R}_n(1) & & & & \mathcal{R}_n(z)
\end{array}$$

Proposición 5

El producto de las raíces enésimas de un número complejo arbitrario, distinto del cero, z , es el propio z , si n es impar, y $-z$, si n es par.

Demostración:

Tomemos todos los $z_k \in \mathcal{R}_n(z)$ y multipliquémoslos:

$$P = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\alpha'}{n}} \cdot |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\alpha'+2\pi}{n}} \cdot \ldots \cdot |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\alpha'+(n-1)2\pi}{n}} =$$

$$= \left(|z|^{\frac{1}{n}}\right)^n \cdot e^{\frac{i}{n}\left[n\,\alpha' + 2\pi(1+2+\ldots+(n-1))\right]} = |z| \cdot e^{i\,(\alpha'+(n-1)2\pi)} =$$

$$= \begin{cases} |z| \cdot e^{i\,(\alpha'+2\pi t)} = z \text{ , si } n \text{ es impar} \\ |z| \cdot e^{i\,((\alpha'+2\pi t)+\pi)} = -z \text{ , si } n \text{ es par} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{Z})$$

Proposición 6

La suma de las raíces enésimas de un número complejo cualquiera, $z \in \mathbb{C}^*$, es cero.

Demostración:

Al sumar todos los $z_k \in \mathcal{R}_n(z)$, $z \in \mathbb{C}^*$, se tiene:

$$S = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\alpha'}{n}} + |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\alpha'+2\pi}{n}} + \ldots + |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\alpha'+(n-1)2\pi}{n}} =$$

$$= |z|^{\frac{1}{n}} \left[e^{i\frac{\alpha'}{n}} + e^{i\frac{\alpha'+2\pi}{n}} + \ldots + e^{i\frac{\alpha'+(n-1)2\pi}{n}} \right] = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot 0 = 0$$

y esto es así pues la expresión entre paréntesis es la suma de las raíces en el caso $z \in \mathbb{C}_1$, que es cero.

Los resultados que explicitan las proposiciones 5 y 6 se reúnen en el siguiente cuadro resumen:

$$\boxed{\begin{array}{l} z \in \mathbb{C}^* \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \begin{cases} z \text{ , si } n \text{ es impar} \\ -z \text{ , si } n \text{ es par} \end{cases} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \end{cases} \\ \text{donde es } z_k \in \mathcal{R}_n(z) \text{ y } n \geq 2 \end{array}}$$

Al igual que se propuso para el caso de $\mathbb{C}_1$, el lector puede tratar de responder a las siguientes cuestiones:

¿Podrá ser en algún caso $(\mathcal{R}_n(z) , \cdot)$ un grupo multiplicativo, siendo $z \in \mathbb{C}^*$? ¿ Para qué valores de n y z ? ¿Y ser grupo aditivo $(\mathcal{R}_n(z) , +)$?

EPÍLOGO

Lo que se ha pretendido con el presente trabajo es mostrar una pequeña parte de la riqueza intrínseca que guarda una figura tan sencilla como la circunferencia. Nos hemos apoyado, para su desarrollo, en el campo complejo, pero igualmente se pudo haber abordado desde otro punto de vista y persiguiendo otros objetivos.

Uno de los objetivos, que pretendo haber alcanzado, es utilizar el método inductivo en el estudio de las raíces enésimas de los números complejos. Obsérvese que se pudo comenzar el mismo partiendo de las proposiciones finales, para más adelante particularizar y profundizar en los diversos casos. <u>Lo que se hizo fue partir de elementos notables de la circunferencia unidad e ir subiendo peldaños en la escalera de la generalización</u>. Pienso que el planteamiento seguido es más enriquecedor y didáctico, pues permite, siguiendo procesos análogos, intentar pequeñas investigaciones como la que se ha presentado.

Quiero hacer notar que en la literatura que habitualmente se utiliza para el estudio del campo complejo, no he encontrado un análisis exhaustivo de las raíces enésimas de los complejos, y de ahí mi inquietud por el tema.