APORTES DE "UNA EMPRESA DOCENTE" AL IX CIAEM

PEDRO GÓMEZ
CRISTINA CARULLA
MAURICIO CASTRO
FELIPE FERNÁNDEZ
CRISTINA GÓMEZ
VILMA MESA
PATRICIA PERRY
PAOLA VALERO

una empresa docente

Bogotá, 1995

Julio de 1995

APORTES DE "UNA EMPRESA DOCENTE" AL IX CIAEM
Autores: Pedro Gómez, Cristina Carulla, Mauricio Castro, Felipe Fernández, Cristina Gómez, Vilma Mesa, Patricia Perry, Paola Valero.

Diseño carátula: una empresa docente®

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976 Tel. (57-1) 284-9911 ext. 2717. Fax: 284-1890
Servidor WWW: http: //ued. uniandes. edu.co
Bogotá. Colombia

ISBN
Impreso en Colombia

CONTENIDO

Introducción

Este volumen contiene los aportes del grupo de investigadores de "una empresa docente" a la IX Conferencia Interamericana de Educación Matemática, realizada en Santiago de Chile en agosto de 1995. Los artículos que se incluyen representan parcialmente los intereses y las realizaciones de este centro de investigación de la Universidad de los Andes durante los últimos años.

Los primeros dos capítulos, *La potenciación del sistema de educación matemática en Colombia* y *La interdisciplinareidad en la educación matemática: el caso de la ciencia política*, presentan una reflexión sobre la problemática actual de la educación matemática en Colombia, profundizando en su dimensión política y en la relación entre estas dos disciplinas.

El tercer capítulo, *Proyecto MEN-EMA: exploración de la problemática de las matemáticas escolares en colegios oficiales,* reporta acerca las investigaciones que hemos venido realizando en el área de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde un punto de vista institucional.

Se incluyen cinco capítulos *(Matemáticas, Ciencia, Sociedad. Una experiencia de innovación curricular; Un curso de matemáticas para ciencias sociales; El modelaje aplicado a la comprensión de problemas sociales; La clase: un espacio para la resolución de problemas;* y *Experiencias en el manejo del coeficiente de correlación de Pearson en un grupo de estadística)* que abordan y describen el trabajo de innovación curricular que, desde hace ocho años, hemos realizado en el área de las matemáticas como herramienta para el desarrollo de las capacidades necesarias en la resolución de problemas de las ciencias sociales.

Los últimos tres capítulos *(Calculadoras gráficas y pre-cálculo. Exploración de aspectos relacionados con la comprensión; Calculadoras gráficas y pre-cálculo: el impacto en las creencias del profesor; y Análisis a priori y a posteriori del funcionamiento de situaciones problemáticas en el salón de clase)* constituyen reportes parciales de un programa de investigación acerca de los efectos curriculares de la utilización calculadora gráfica en la enseñanza y el aprendizaje del pre-cálculo en el primer ciclo universitario.

Las siguientes entidades han apoyado financieramente la realización de estos proyectos: Universidad de los Andes, Fundación Corona, Colciencias, Ministerio de Educación Nacional, Fundación para el Avance de la Ciencia y la Tecnología del Banco de la República, Apple Computer, Texas Instruments, PLACEM y Fundación Santillana.

Pedro Gómez
Director "una empresa docente"
Julio de 1995

La potenciación del Sistema de Educación Matemática en Colombia

Pedro Gómez, Paola Valero – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

Se presenta la reflexión que "una empresa docente", centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes, está haciendo para abordar el problema de la baja calidad de la educación matemática en el país y la influencia que tal problema tiene en la capacitación adecuada de los ciudadanos que requiere Colombia en el Tercer Milenio. El análisis de las exigencias del entorno internacional y nacional sobre la formación del ciudadano, del papel que juega la educación y, en especial, la educación matemática en esta formación y las condiciones actuales del sistema de educación matemática en Colombia sugieren la necesidad de iniciar un proceso de potenciación del sistema. Este proceso de potenciación debería estar basado en la mejora de la capacidad del sistema para generar iniciativas innovadoras y para permitir que éstas surjan, se desarrollen y se multipliquen gracias a la apropiada capacitación de profesores y directivos y a la consolidación de la comunidad de educación matemática del país.

Introducción

El final del siglo XX presencia la concreción de dos tendencias mundiales que, tanto en los aspectos económicos como en los políticos, han logrado manifestarse en la mayoría de las naciones del mundo. Los procesos de internacionalización de la economía y de democratización de los regímenes políticos y de las sociedades ha alterado de manera sustancial no sólo el desempeño de cada uno de los países en el ámbito mundial, sino también la función de los estados nacionales frente a su población, e incluso, el papel de la población frente al mismo Estado. La ola mundial de recuperación y fortalecimiento de elementos como la sociedad civil muestra la importancia que en este nuevo contexto tienen los individuos como parte de una red social.

En Colombia los efectos de estas transformaciones mundiales no se han hecho esperar. Con la Constitución Política de 1991 se comenzó el tránsito, al menos en los marcos formales institucionales, de unas relaciones sociales, económicas y políticas anquilosadas hacia unas relaciones más dinámicas, donde el papel del ciudadano es preponderante. A diferencia del prototipo de ciudadano que necesitaba el país de la Constitución de 1886, el nuevo ciudadano debe ser una persona capacitada para ejercer sus funciones productivas de la manera más eficiente y competitiva posible; debe poseer la competencia suficiente para participar en los procesos políticos democráticos no sólo en el nivel nacional, sino también en los niveles locales y cotidianos; y debe tener y compartir valores como la tolerancia, el respeto y reconocimiento de las diferencias, el pluralismo y la paz.

Construir un país acorde con las tendencias mundiales actuales requiere formar ciudadanos competentes para ejercer sus funciones adecuadamente. La pregunta que surge es, ¿cómo lograr ese ciudadano?

La educación: clave para la formación del ciudadano

El sistema educativo se ha privilegiado como una de las herramientas más poderosas de la organización social para cumplir la función de la formación de los ciudadanos. En Colombia, la reforma educativa que se inició a raíz del cambio constitucional y que confluyó en la Ley 30 de 1992 que regula la educación superior, y la Ley 115 de 1994 que regula el servicio educativo nacional, marca el nuevo rumbo que debe tomar el sistema educativo para sustentar los procesos de cambio que se están llevando a cabo. Los puntos claves de esta reforma giran en torno a aspectos como la calidad[1] de la educación, la institución educativa en los procesos de descentralización del servicio educativo, el aprendizaje por encima de la enseñanza y la importancia de "potenciar"[2] las

1. El Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación, definió el término "calidad de la educación" como "el grado de cercanía entre el ideal humano de una sociedad dada y su expresión educativa. Más específicamente, se la considera como el grado de aproximación entre lo establecido en los fines del sistema educativo nacional y el logro de la población estudiantil". Para ser global y abarcar los fines de la educación, la medición de la calidad considera la dimensión académica y la no académica. "La dimensión académica de la calidad de la educación establece el grado de aproximación entre unos niveles de logro, considerados como *mínimos aceptables* en ciertas áreas curriculares, y los niveles de logro real de la población estudiantil. La dimensión que llamamos *no académica* de la calidad, intenta aproximarse a aquellos factores que el individuo requiere para su proceso de adaptación al contexto social, cultural y político del país, no incluidos en los programas curriculares de un área específica" MEN (1992), pp. 23-25.

2. La palabra *potenciar* significa crear un estado en un individuo, institución o sistema, que le permita autogenerar unas capacidades de acción para el logro efectivo de metas que se ha propuesto.

capacidades del educando por medio de una formación integral en los aspectos "físico, psíquico, intelectual, moral, espiritual, social, afectivo, ético, cívico y demás valores humanos" (Ley General, Art. 5).

Los lineamientos formales para la reforma educativa están determinados y son claros en cuanto a los objetivos que se pretende lograr. Sin embargo, todavía no son claras las acciones concretas que deben emprenderse para alcanzar estos fines. Desde el gobierno y también desde otras instituciones gubernamentales y muchas no gubernamentales existen algunas propuestas. En este artículo abordamos los que consideramos como puntos claves de la reforma educativa con miras a analizar algunas de las deficiencias más sentidas en una de las áreas que presenta más dificultades en la formación de los educandos: la educación matemática.

La educación matemática, central en la formación del ciudadano

Las matemáticas han tenido un gran peso en la formación de los ciudadanos de los Estados en todos los tiempos. Con mayor razón, en el nuevo contexto mundial se hace necesaria una formación matemática que permita al ciudadano apropiarse de las herramientas de pensamiento y comunicación que las matemáticas ofrece. Esta apropiación permitirá una participación más activa del ciudadano en los procesos de desarrollo económico, político y social del país.

La formación matemática para el desarrollo económico. El proceso de apertura económica de Colombia impone una presión muy grande sobre las capacidades productivas del sistema económico. Para lograr las metas de producción y crecimiento es necesario que se haga un uso más eficiente de los adelantos científicos y tecnológicos, y también que se califique a la mano de obra con la capacidad de maximizar su trabajo. Para ello, se requiere que el ciudadano colombiano tenga una mejor formación matemática que sirva no sólo de apoyo al desarrollo de la ciencia y la tecnología, sino que también permita la comprensión de los procesos productivos donde ellas están involucradas.

La formación matemática para la participación política. La Constitución Política de 1991 abre un nuevo espacio para que el ciudadano participe de una manera más activa en las decisiones y acciones que lo afectan. Este nuevo espacio no podrá ser utilizado si ese ciudadano no cuenta con una competencia democrática para juzgar las acciones de los gobernantes y su propia acción. La formación matemática contribuye en la formación de la competencia democrática de dos formas. Por una parte, la aplicación de las habilidades matemáticas permite modelar situaciones reales y matematizarlas para encontrar una solución viable a los problemas cotidianos que enfrenta el ciudadano. Por otro lado, la formación matemática y la misma capacidad de modelaje se asocia con una capacidad crítica del ciudadano para juzgar si las decisiones y acciones que toman sus dirigentes y él mismo son las mejores posibles. De aquí que las matemáticas doten al ciudadano con herramientas potentes para su participación política en los ámbitos nacionales y locales.

La formación matemática para los nuevos valores sociales. La formación matemática crítica construye en los estudiantes-ciudadanos una capacidad para actuar colectivamente en la resolución de problemas de la vida cotidiana. De esta manera puede desarrollar al máximo sus capacidades individuales para establecer relaciones armónicas y cooperativas con los demás en el logro de metas colectivas. Así, se fomentan y se viven los valores del diálogo, el pluralismo, el respeto y la paz.

La educación matemática es factor central en la formación del colombiano del próximo milenio. ¿Dónde y cómo se construye esta formación matemática?

EL SISTEMA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA HOY Y EN EL FUTURO

En los apartados anteriores se presentaron algunos puntos centrales que sustentan la necesidad de una formación matemática adecuada para la construcción del ciudadano del Tercer Milenio. Ahora es pertinente entrar a abordar con mayor precisión qué se entiende por “sistema de educación matemática”, cuáles son sus grandes deficiencias y cómo podrían cubrirse para lograr una formación matemática adecuada para los ciudadanos.

El sistema de educación matemática hace referencia al conjunto de elementos relevantes que, por sus interrelaciones, intervienen en la calidad de la formación matemática que puede adquirir un estudiante. Un sistema de tal naturaleza tiene tres niveles: uno macro o social donde intervienen los factores sociales, políticos, económicos y culturales que definen las visiones, valores y tradiciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y también las necesidades y expectativas de la formación matemática de los ciudadanos; un nivel intermedio en el que se ubica la institución educativa como espacio donde se encuentran elementos como las concepciones institucionales acerca del profesor, el estudiante y las matemáticas como saber cultural y saber a enseñar; y un nivel micro o didáctico donde se relacionan el profesor con sus conocimientos y creencias, y el estudiante en la construcción del conocimiento matemático, a través del desarrollo de un currículo.

Los elementos culturales, políticos, económicos y sociales definen las características del entorno del sistema educativo en el área de las matemáticas. Estas características se manifiestan en las direcciones que toma la política educativa del gobierno y en la manera como se llevan a la práctica, a través de su influencia en las instituciones educativas. Allí se presentan una serie de concreciones de esas líneas sociales, las cuales se expresan en el diseño de un currículo que no sólo abarca la organización de los contenidos de la enseñanza, sino las posiciones ideológicas de la institución sobre lo que son las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, el perfil del profesor y del estudiante. Este currículo se desarrolla en la relación didáctica que se entabla entre el profesor y el estudiante en la construcción del conocimiento matemático cuando se manifiestan los objetivos a lograr, los principios de evaluación, la metodología de enseñanza y la organización del contenido.

El problema de la calidad de la formación matemática de los estudiantes-ciudadanos depende del tipo de influencia de cada uno de los elementos de los niveles social e institucional en el diseño de un currículo que pueda ser desarrollado por el profesor, a través de una práctica docente de calidad. Y lograr que el sistema produzca diferentes resultados de calidad depende de la potencia con que el sistema pueda generar y multiplicar dichos resultados a partir de iniciativas innovadoras.

La situación del sistema colombiano de educación matemática dista de contar con las capacidades para potenciar sus acciones. Numerosos hechos así lo demuestran: la incipiencia de un apoyo más decidido de los diferentes actores del nivel social para la creación de una comunidad de educadores matemáticos, la falta de conciencia institucional sobre el problema de las matemáticas escolares, la falta de adecuación de las matemáticas escolares frente a las necesidades de la población a la que van dirigidas, la poca preparación de la mayoría de los maestros tanto en los conocimientos matemáticos como en la didáctica misma, y la permanencia del fracaso de los estudiantes frente a las matemáticas.

Potenciación del sistema

Asumimos entonces una posición específica en relación con las características del Sistema Colombiano de Educación Matemática y con aquellos elementos y relaciones del sistema que pueden permitir un proceso eficiente de *potenciación del sistema*, dentro de un proceso de cambio.

La formación matemática se logra a través de la interacción del estudiante y el profesor alrededor del conocimiento matemático dentro del salón de clases. La calidad de esta formación depende directamente de la cantidad, la calidad y la permanencia de iniciativas innovadoras que transformen los esquemas tradicionales existentes, esquemas que no están produciendo los resultados deseados.

La potenciación del sistema será posible en la medida en que el proceso de cambio propuesto evolucione con base en la *innovación*[3]. Esto requiere que se logren en el futuro por lo menos dos condiciones:

- Aumentar la capacidad del sistema para *permitir* que surjan, se desarrollen y se multipliquen las iniciativas innovadoras
- Aumentar la capacidad del sistema para *generar* iniciativas innovadoras

Para satisfacer esta condiciones se hace necesario lograr cambios en cuatro elementos del sistema: la Comunidad Colombiana de Educación Matemática, las instituciones educativas, los profesores de matemáticas y los investigadores en educación matemática. En este sentido se requiere:

- Fortalecer la Comunidad de Educación Matemática Colombiana como espacio dentro del cual instituciones educativas, profesores e investigadores puedan interactuar, discutir, criticar y definir los objetivos y la dinámica del sistema
- Aumentar la capacidad de las instituciones educativas y de los profesores para generar y desarrollar propuestas de innovación curricular
- Vigorizar la capacidad de la Comunidad de Investigadores en Educación Matemática para apoyar este proceso

Las reflexiones anteriores delimitan unas áreas estratégicas para el desarrollo de la educación matemática en Colombia.

3. La innovación es un elemento central en la potenciación del sistema de educación matemática. Por esta relevancia merece una explicación detallada. En la historia de la disciplina de la educación matemática ha habido numerosas críticas al hecho de creer que la innovación por sí sola trae efectos positivos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Artigue, 1988). En este sentido, la "innovación compulsiva" no es el eje de la potenciación del sistema. Sin embargo, puede concebirse la innovación como un proceso consciente donde hay un proceso constante de investigación sobre los efectos de los productos innovativos. Esta "innovación reflexiva" sí es el pilar de procesos de cambio más estables y evaluables. A esa "innovación reflexiva" nos referimos en este documento.

Areas estratégicas

Formación de las personas

Tanto profesores, como innovadores, investigadores y directivos juegan un papel trascendental dentro del proceso de potenciación del Sistema Colombiano de Educación Matemática. Los esfuerzos que se hagan en la capacitación de un núcleo de este gran conglomerado de personas debe buscar dos objetivos centrales:

- La construcción de una *actitud crítica* con conciencia social que le permita a la persona observar y analizar su práctica con el propósito de mejorarla para efectos de aportar a una mejor formación matemática del estudiante
- La construcción de una capacidad y responsabilidad *multiplicadora* que induzca a la persona a compartir sus experiencias, a aceptar la crítica de sus pares y mantener una actitud permanente de aporte al proceso de potenciación del sistema

Profesores, innovadores e investigadores en educación matemática se ubican en un espectro continuo que no admite esquemas de fraccionamiento particulares. El propósito es el de inducir, con el aporte de los investigadores, a que un número cada vez mayor de profesores se conviertan en innovadores en educación matemática que cumplan con las dos condiciones que se acaban de exponer. Los colegios como lugar donde se construye la formación matemática del individuo y las universidades como instituciones que deben apoyar a los colegios en sus procesos de cambio son elementos centrales de este proceso de formación de un núcleo innovador con capacidad multiplicadora.

Se identifican, entonces, tres áreas estratégicas desde la perspectiva de la capacitación de este núcleo innovador:

- La formación de innovadores en educación matemática a partir de profesores de matemáticas
- El apoyo a los investigadores y a las universidades en sus intenciones de aportar a los procesos de cambio dentro de los colegios
- El apoyo, a través de los directivos, a un conjunto de colegios líderes que marquen una pauta innovadora

Fortalecimiento de la comunidad

La potenciación del Sistema Colombiano de Educación Matemática no será posible a menos que exista un espacio dentro del cual las instituciones educativas, los profesores, los innovadores, los investigadores y los directivos puedan interactuar, compartir experiencias, discutir, criticar y definir los objetivos y la dinámica del sistema. En otras palabras, se hace necesario el fortalecimiento de la Comunidad Colombiana de Educación Matemática.

Dentro de esta dimensión de fortalecimiento de la comunidad a través de la creación de espacios de interacción, identificamos tres áreas estratégicas:

- La creación de medios de comunicación
- La creación de medios de información y auto-capacitación
- El aporte de otros recursos de infraestructura

Referencias bibliográficas

Cepeda, Manuel José (1992). *Los Derechos Fundamentales en la Constitución de 1991*. Bogotá: Editorial Temis.

Gómez, Pedro y Perry, Patricia (1994). *Proyecto MEN-EMA. Una investigación sobre la problemática de las matemáticas en los colegios oficiales del Distrito Capital*. Bogotá: "una empresa docente", disertación no publicada.

Huntington, Samuel P. (1993). Democracia y reforma económica. En *Ciencia Política*, II trimestre de 1993.

Mathews, David (1994). *Politics for People: Finding a Responsible Public Voice*. Chicago: University of Illinois Press.

Mellin-Olsen, Stieg (1991). *The politics of mathematics education*. Boston: D. Reidel Publishing Co.

MEN (1992). *SABER. Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación. Primeros resultados: Matemáticas y Lenguaje en la Básica Primaria*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Rico, L. (1991). *Los tetraedros del currículo. Diseño, desarrollo y evaluación del currículo*. Disertación no publicada, Universidad de Granada, Granada.

Romberg, Thomas. (1990). Características problemáticas del currículo de matemáticas. En *Educación*, # 294.

Skovsmose, Ole (1990). Mathematical education and democracy. *Educational studies in mathematics* 21.

Skovsmose, Ole (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. London: Kluwer Academic Publishers.

La interdisciplinariedad en la Educación Matemática: el caso de la Ciencia Política

Paola Valero – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

La "caída de los paradigmas" ha abierto el paso para la interdisciplinariedad en la producción de conocimiento. En la Educación Matemática se han abierto espacios diferentes al salón de clase, donde suceden fenómenos sociales que tocan el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La indagación de estos espacios ha requerido la vinculación de explicaciones provenientes de la Politología. En el contexto de una América Latina comprometida con la construcción de un modelo de internacionalización económica y democratización política, la dimensión política de la educación matemática cobra importancia y se constituye en un campo de estudio que permite indagar, pensar y actuar sobre problemas relacionados con la capacidad de formación de ciudadanos que tienen las matemáticas. La educación matemática, en este sentido, permite construir en los ciudadanos habilidades para participar de los procesos de desarrollo social, político, económico, científico y tecnológico. El aporte de la ciencia política puede verse en la aplicación de una categorías de pensamiento y de metodologías de investigación que permitan indagar problemáticas del conocimiento como un factor de "poder" tanto al nivel de la política educativa nacional, local o institucional, como a nivel de los mismos salones de clase donde se forma a los ciudadanos del Tercer Milenio.

La caída de los paradigmas

Desde mediados de los años sesenta el mundo ha vivido un proceso de cambio tanto en lo relacionado con el conocimiento, como con las realidades económicas, sociales y políticas. Por un lado, el derrumbe de los paradigmas modernos de conocimiento y la irrupción de las lógicas relativistas posmodernas ha generado un cambio en las posiciones epistemológicas, en la utilidad del conocimiento y en las maneras de producirlo (Vasco, 1990). De aquí que en todas las disciplinas se estén buscando nuevas metodologías y nuevos problemas de conocimiento. Por otro lado, en el último cuarto del siglo XX se ha venido desarrollando todo un proceso mundial de reforma económica basada en los parámetros neoliberales y en la internacionalización de las economías nacionales. Junto con éste, se encuentra el proceso de reforma política tendiente al logro de una democratización de los regímenes políticos y, en especial, de las sociedades (Huntington, 1993). Todas estas tendencias han conducido a que se presente en la actualidad una mayor convergencia entre las disciplinas científicas para abordar los problemas que en ese nuevo contexto se manifiestan. Así, en el contexto Latinoamericano hoy en día cobran importancia problemas como el papel de la educación para la preparación de los ciudadanos para afrontar los cambios democráticos y económicos, la función de los investigadores en la producción de conocimiento sobre la educación, y la utilidad del conocimiento en el diseño de estrategias educativas concretas para el fortalecimiento de comportamientos democráticos y productivos acordes a las exigencias de los nuevos tiempos.

Las tendencias actuales de la investigación en Educación Matemática

La Educación Matemática no ha sido ajena a estas transformaciones globales. En la comunidad internacional se ha venido realizando una discusión sobre las características de la investigación en esta disciplina, sus objetos de estudio, metodologías y alcances. En varias de las presentaciones realizadas en el ICMI de 1994 “What is Research in Mathematics Education and What Are its Results” se enfatizó la separación que en la actualidad se está viviendo del paradigma empírico-analítico y el tránsito hacia “enfoques de investigación más eclécticos, en los cuales las dimensiones lingüísticas, cultural y social, cada vez tienen más importancia” (Ellerton and Clements, 1994). Dentro de estas nuevas tendencias, se inscriben tanto reflexiones teóricas como investigaciones prácticas en temas como los aspectos culturales de las matemáticas (Alan Bishop y la “enculturación matemática”), la adecuación de los procesos de enseñanza y aprendizaje a las estructuras epistemológicas de grupos sociales y culturales determinados (D’Ambrossio y la “etnomatemática”), la aplicación de las habilidades matemáticas en el mejoramiento de procesos económicos productivos, y la dimensión política de la educación matemática (Mellin-Olsen, Ole Skovsmose).

Es evidente que la investigación en educación matemática desde esta perspectiva requiere de esfuerzos interdisciplinarios no sólo con psicólogos, como tradicionalmente se había hecho, sino también de la inclusión de investigadores de otras áreas como antropólogos, sociólogos, etnolingüistas y politólogos. La exclusividad de las matemáticas y de la Educación Matemática a los especialistas del tema, en cierto sentido, se ha roto para dar paso a una lógica más compleja y relativizada en la producción del conocimiento.

La dimensión política de la educación matemática

Con la "caída de los paradigmas" y la apertura para los espacios de investigación y de definición de problemáticas que se salen de los límites de los estudios cognitivos al interior de clase; y también gracias a la nueva realidad política, económica y social, la educación matemática ha comenzado a hablar de espacios mucho más amplios, donde se generan problemáticas asociadas con factores que no se consideraban como relevantes en las investigaciones anteriores. Justamente es en estos nuevos ámbitos donde, cada vez con mayor intensidad, la dimensión política de la educación matemática se hace evidente.

Varios investigadores (Thomas, 1992; Ellerton and Clements, 1994) han reconocido que la dimensión política de la educación matemática se mueve en dos niveles: por un lado el nivel social donde se concretizan relaciones de poder en torno al conocimiento matemático y al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y donde intervienen factores de lenguaje, género, raza, nivel socio-económico, acceso al conocimiento matemático asociado con el desarrollo científico y tecnológico; y por otro lado, el nivel de la política educativa gubernamental con respecto a la educación matemática.

Con respecto al primer nivel, la justificación de fondo para estudiar problemas asociados con tales factores se basa en la contribución de la educación matemática a la formación de estudiantes que deben asumir retos de acción concretos en las sociedades en que viven. Esa contribución se ve en (Gómez y Valero, 1995):

La formación matemática para el desarrollo económico. El manejo de habilidades y competencias matemáticas contribuye a la capacitación de mano de obra para las labores productivas en la medida en que permite hacer un uso más eficiente de los adelantos científicos y tecnológicos.

La formación matemática para la participación política. La educación matemática permite que los ciudadanos se apropi en de herramientas de pensamiento y de comunicación que son indispensables para el ejercicio de una competencia democrática. Esta se relaciona con la capacidad de los ciudadanos para juzgar las acciones de los gobernantes y su propia acción, y para encontrar una solución viable a los problemas cotidianos que enfrenta[1].

La formación matemática para los nuevos valores sociales. La formación matemática permite generar un proceso de participación colectiva en la construcción de conocimientos y en la aplicación de ellos a la resolución colectiva de problemas. En este proceso se viven valores como el diálogo, la tolerancia, el pluralismo, el respeto y la paz.

Con respecto al nivel de la política educativa, existen justificaciones que destacan la importancia de analizar los lineamientos generales de política educativa en matemáticas para comprender mejor las acciones concretas que se desarrollan para aplicarla. En este sentido, los argumentos que se dan tienen que ver con:

La utilidad de la educación matemática. Propuestas como la de Ernest (1991) señalan la relación existente entre posiciones ideológicas sobre la sociedad, la política, la educación y la formación de ciudadanos y posiciones epistemológicas sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y prácticas educativas al interior del salón de clase. La idea de que la concepción sobre los fines de la organización política y la producción económica se relacionan con una visión particular de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje hace pensar en la importancia de la concepción que tienen las personas que diseñan una política educativa y su influencia en el tipo de prácticas que de allí surjan. En este sentido, visiones ideológicas macro que aboguen por la obediencia y la imposición de la autoridad van a producir prácticas educativas autoritarias que poco permitan la apropiación del conocimiento matemático por parte de los estudiantes. Igualmente, una concepción pluralista y democrática va a abrir el paso para el desarrollo de prácticas educativas más incluyentes y democratizadoras del conocimiento matemático y de sus procesos de enseñanza y aprendizaje.

La descentralización educativa. También en muchos países, en especial en los de América Latina, los procesos de descentralización administrativa han reestructurado la organización nacional del servicio educativo, permitiendo una li-

1. Con respecto a la contribución de la educación matemática en la formación de capacidades democráticas en los miembros de la sociedad, los trabajos de Mellin-Olsen(1991) y de Skovsmose (1990; 1994) ofrecen una argumentación mucho más detallada que también considera las dificultades propias de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su organización curricular n propramas escolares. Estas dificultades tienen que ver con la dimensión de poder que encierra la posesión del conocimiento matemático y el status que se le ha dado dentro de las sociedades occidentales, y con la manifestaciones de tal poder al interior de los salones de clase.

bertad en la formulación de currículos a nivel local e incluso institucional. Para la educación matemática esto implica, por un lado, una oportunidad para la adecuación de currículos a las realidades sociales y culturales de los estudiantes, pero, por el otro, un esfuerzo en la preparación de instituciones educativas, planificadores y profesores de matemáticas para generar esos currículos y para aplicarlos dentro de sus escuelas. De aquí que haya una reflexión profunda sobre los aspectos sociales del currículo en matemáticas para lograr su adecuación a las lógicas locales descentralizadas dentro de las cuales tendrá que aplicarse.

La importancia del contexto institucional. También muchos estudios recientes (Webb and Romberg, 1994; Perry et al., 1995) han enfatizado la importancia de análisis de la problemática de las matemáticas al interior de las instituciones educativas, pues al interior deellas suceden una serie de relaciones que influyen en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Este ámbito exige una visión más global donde no sólo interviene la dimensión del profesor en el salón de clase, sino que también influyen otros factores como la organización social de la institución, las relaciones de poder al interior de ella, y la aplicación de lineamientos definidos por la política educativa nacional o local.

Estas razones, junto con las mencionadas anteriormente, resaltan la importancia de considerar espacios y problemas donde las relaciones de poder están presentes y ejercen una influencia grande en la manera como se realizan los procesos de la educación matemática.

El aporte de la Ciencia Política

La Ciencia Política tradicionalmente ha centrado su objeto de estudio en ámbitos macro sociales como son las relaciones de poder en el marco del Estado-nación o de las relaciones internacionales entre ellos. Sin embargo, también con la caída de los paradigmas, hay una tendencia hacia la consideración de las relaciones de poder dentro de lógicas y estructuras micro-sociales. En cualquiera de estos dos niveles, el macro o el micro social, la Ciencia Política puede encontrarse con los problemas de la Educación Matemática.

Con respecto al primero, las categorías del análisis politológico para los sistemas sociales o para la dialéctica de las luchas de grupos sociales o de clases pueden ayudar a comprender en profundidad los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas relacionados con dimensión política dentro de la política educativa. La introducción de un análisis que aborde el problema de la imposición de ideologías sobre las matemáticas desde la política educativa puede ser un primer paso para la comprensión del funcionamiento de la educación matemática al interior de las sociedades. En este momento de cambio y de reforma sería muy pertinente mirar, a este nivel de generalidad, cómo se conciben las matemáticas y cómo se concibe su enseñanza y aprendizaje en relación con la finalidad que tiene este tipo de conocimiento en la sociedad.

Con respecto a lo segundo, los estudios de micro-política, donde se hacen exploraciones a menor escala de problemáticas de poder dentro de diversos grupos sociales, ofrecen una visión política del "poder" del conocimiento matemático y de su enseñanza y aprendizaje frente a factores como el género, la raza, los niveles socio-económicos, entre otros. Dentro de esta misma lógica, los esfuerzos de la consolidación de procesos de democratización desde el ciudadano y la sociedad civil abren el paso hacia el estudio detallado de cómo se pueden proponer metodologías de enseñanza de las matemáticas que permitan al estudiante apropiarse de unas herramientas valiosas para su competencia democrática dentro de la sociedad. En este sentido, todavía hace falta explorar mucho más el aporte de la educación matemática a la capacidad de participación política de los ciudadanos.

La interdisciplinariedad hacia el futuro

Ya se han mostrado en los párrafos anteriores las áreas de estudio donde se encuentran Ciencia Política y Educación Matemática. Me parece de gran interés resaltar dos puntos claves de las relaciones interdisciplinarias hacia un futuro.

En primer lugar, los retos del contexto mundial recaen en gran medida en los educadores. La construcción, consolidación o reforma democrática en los países de América Latina depende de cómo se forme al ciudadano del mañana y al adulto de hoy. La manera como tradicionalmente y de forma casi generalizada se ha concebido y llevado a la práctica la educación matemática ha generado rupturas fuertes entre un conocimiento y habilidades matemáticas "inalcanzables" para muchos, y una necesidad de aplicar esos conocimientos en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Lo anterior junto al velo de autoritarismo que cubren a las matemáticas en el salón de clase generan relaciones violentas de exclusión, en esencia antidemocráticas. Las posibilidades de hacer una educación matemática "política" y democrática deben tomarse más a profundidad. Aquí, tanto politólogos como educadores matemáticos interesados por la formación de un ciudadano democrático tienen un compromiso y una responsabilidad.

En segundo lugar, la interdisciplinariedad requiere que se traspasen las barreras y recelos entre las disciplinas. Por un lado, los científicos sociales deberían superar su "fobia" alas matemáticas para poder abordar los problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y por otro lado, los matemáticos y educadores matemáticos deberían romper su "complejo de superioridad" frente a los aportes de las disciplinas sociales a la construcción de sus saberes. El reto, hacia el futuro, es la creación de una comunidad académica verdaderamente interesada por ver, desde distintas disciplinas y perspectivas, el problema donde ellas se interrelacionan.

Bibliografía

Bishop, A. (1988). *Mathematical enculturation*. Dordretch: Kluwer.

D'Ambrossio, U. (1985). Ethmomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1).

Ellerton, N. and M.C. Clements (1994). *The reshaping of Mathematics Education Research*. Background paper for presentation at The ICMI Study 94 "What is Research in Mathematics Education and What Are its Results?, May 8-11 at the University of Maryland.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Gómez, P. y Valero, P. (1995). La potenciación del Sistema de Educación Matemática en Colombia. Bogotá: "una empresa docente".

Huntington, S. (1993). "Democracia y reforma económica". En *Ciencia Política*, II trimestre de 1993.

Mathews, D. (1994). *Politics for People: Finding a Responsible Public Voice*. Chicago:University of Illinois Press.

Mellin-Olsen, S. (1991). *The politics of mathematics education*. Boston: D. Reidel Publishing Co.

Perry, P, Gómez, P. y Valero, P. (1995). El Sistema Institucional de Educación Matemática. Una aproximación a la problemática de las matemáticas escolares. Bogotá: "una empresa docente".

Romberg, T. (1990). "Características problemáticas del currículo de matemáticas". En *Educación*, # 294.

Skovsmose, O. (1990). "Mathematical education and democracy". *Educational studies in mathematics* 21.

_____________(1994). Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education. London: Kluwer Academic Publishers.

Thomas, J. (1992). Politics of mathematics education in Australia. In B. Atweh & J. Watson (eds.). *Research in Mathematics Education in Australasia 1988-1991*. Brisbane: Mathematics Education Research Group in Australasia.

Vasco, C. (1990). "Tres estilos de trabajo en las ciencias sociales" (Comentarios a prpósito del artículo 'Conocimiento e interés' de Jurgen Habermas). En *Documentos ocasionales* No. 54. Bogotá: CINEP, septiembre de 1990.

Webb, N., Romberg, T. (eds.) (1994). *Reforming Mathematics Education in America's Cities: The Urban Mathematics Collaborative Project*. New York: Teachers College Press.

PROYECTO MEN-EMA: EXPLORACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES EN COLEGIOS OFICIALES DE BOGOTÁ

Patricia Perry, Pedro Gómez, Paola Valero – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

Sobre la base del supuesto precientífico, pero intuitivamente plausible, de que hay mucho que mejorar en este campo, el Proyecto MEN-EMA fue un estudio exploratorio con dos dimensiones, una de investigación y otra de acción. Por un lado, se propuso generar conocimiento con respecto a cómo se presenta la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el bachillerato de colegios oficiales y a la forma como podría dinamizarse la situación para lograr un cambio sustantivo que tienda a mejorar la calidad de la educación matemática. Por otro lado, se propuso generar un espacio que propiciara la relación con la problemática y la influencia sobre ella. Tuvo en cuenta aspectos institucionales; participaron diez colegios oficiales de Bogotá y de cada uno de ellos, el rector, el jefe del Departamento de Matemáticas y dos profesores de matemáticas.

La investigación se abordó desde el paradigma crítico y se emplearon el enfoque sistémico, como herramienta conceptual para abordar la problemática de estudio, y la investigación-acción como herramienta metodológica.

Como resultado se tiene un modelo de los elementos del problema y de las relaciones entre ellos. Este indica que la activación del rector del colegio en calidad de líder y facilitador permite potenciar el liderazgo del jefe del Departamento de Matemáticas, quien, a su vez, puede generar una dinámica de compromiso con la construcción y enriquecimiento de la cultura profesional al interior del grupo de profesores. Estos, por su lado, tienen la oportunidad de reflexionar sobre sus visiones de las matemáticas y su didáctica, y así enriquecer su práctica. También se obtiene la definición de un esquema innovador de desarrollo profesional para profesores y directivos en torno al problema de las matemáticas escolares.

INTRODUCCIÓN

El estudio que aquí se presenta es la fase preliminar de un proyecto de investigación y desarrollo (Proyecto PRIME) planeado a ocho años con el propósito final de conformar y consolidar una red compuesta por instituciones de educación superior y colegios del país, que tenga como objetivo central la mejora de la calidad de la educación matemática mediante un proceso de cambio dentro del sistema curricular que involucre a la institución y a las personas que hacen parte de ella.

El Proyecto MEN-EMA fue realizado entre enero de 1994 y junio de 1995 por "una empresa docente", centro de investigación de la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia[1]. Se desarrolló en dos etapas. Durante la primera –entre enero y noviembre– se llevó a cabo una experiencia de desarrollo profesional con directivos y profesores de los colegios participantes, experiencia por medio de la cual los investigadores exploraron el problema de estudio e influyeron sobre él. La segunda etapa se dedicó a la consolidación de los resultados de la experiencia. En un proceso de reflexión y discusión sistemática mediante la elaboración de textos escritos, los investigadores encontraron nuevas formas de conceptualizar, organizar y presentar los resultados (Gómez & Perry, 1994).

Aquí se presenta una breve descripción del Proyecto y de sus resultados. Se incluyen los siguientes aspectos: la delimitación del problema de estudio junto con los objetivos que se propuso; el enfoque sistémico como marco conceptual que guió la investigación; el marco y el diseño metodológico del estudio; los resultados del mismo; y unas conclusiones.

EL PROBLEMA

Los temas de la efectividad de la enseñanza de las matemáticas y sus resultados escolares se han abordado desde varias áreas de la investigación educativa y bajo diversos paradigmas (Schatz & Grouws, 1992). Con la evolución de los conceptos de enseñanza y aprendizaje se ha llegado a comprender que la enseñanza efectiva depende significativamente de los contextos en los que el profesor trabaja. En particular, de la organización y las prácticas instauradas en el colegio y el departamento al que pertenece dentro del mismo (McLaughlin et al., 1990). Los estudios que siguen las directrices de investigación conocidas como efectos escolares y colegios efectivos se han enfocado en aquellas condiciones del clima del colegio asociadas con resultados deseables en el estu-

1. La investigación fue financiada por la Fundación Corona y el Ministerio de Educación Nacional.

diante. Más recientes son las investigaciones encaminadas a examinar la incidencia del contexto escolar sobre los roles que asume el profesor y sobre la disposición hacia prácticas tales como la colegialidad, la toma de decisiones y su propio desarrollo profesional. En esta línea, sobresale Rosenholtz (1991) porque, además de examinar variables que afectan la vida escolar, centra su atención en la relación entre tales variables.

Existe en Colombia una problemática alrededor de la calidad de la formación matemática que se da a los estudiantes en los colegios. Tal problemática se manifiesta en indicadores como la alta mortalidad académica y la deserción escolar. Pero, cabe insistir, éstos son sólo indicadores: la naturaleza del problema es mucho más profunda. Es compleja (son muchos los elementos y las relaciones que intervienen; hay influencias internas y externas, algunas de ellas no se pueden controlar y el cambio de otras requiere de procesos largos y difíciles.) Es diversa (características tales como el estilo de dirección, la forma de comunicación, la concepción de las matemáticas a nivel institucional, etc., establecen diferencias significativas en el clima del colegio y en los resultados de los alumnos). Es dinámica (los problemas varían cuantitativa o cualitativamente a través del tiempo, dependiendo de cambios que se operan en las instituciones, o en las reglamentaciones programáticas generales, o en las influencias externas). En fin, en el problema de las matemáticas escolares intervienen muchos más elementos que los problemas parciales que involucran inmediatamente a estudiantes y profesores. Por tanto, vale la pena detenerse en un examen más detallado de lo que sucede en la institución educativa; mirarla como el espacio donde encarnan las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para dar cuenta de las razones por las cuales los estudiantes presentan tales deficiencias en su formación matemática.

Para comenzar a abordar el problema de la deficiente calidad del aprendizaje de las matemáticas en colegios oficiales de Bogotá, el Proyecto MEN-EMA se propuso iniciar un proceso de conocimiento y comprensión de la problemática de la enseñanza de las matemáticas y también, interactuar con tal problemática. El problema del Proyecto, definió dos líneas de trabajo:

- Una investigativa, cuyo objetivo fue explorar la problemática de las matemáticas escolares en el bachillerato de colegios oficiales de Bogotá, desde una perspectiva institucional
- Otra de acción, cuyo objetivo fue diseñar y aplicar estrategias replicables que permitan atacar positivamente tal problemática

Marco conceptual

Conocer y comprender el problema de la deficiente calidad de las matemáticas escolares desde la perspectiva del colegio implica abordar un problema social complejo y dinámico. El enfoque sistémico representa una herramienta de pensamiento útil para capturar lo esencial de esa realidad social en un modelo que revele los actores o elementos que realizan acciones, el sentido y contenido mismo de tales acciones, y los efectos que pueden ocurrir al alterar una relación existente (Artigue, 1988).

El enfoque sistémico parte del supuesto de que es posible *delimitar* el sistema en cuanto a lo que se considera *interno* al mismo. Además, considera que un sistema particular hace parte de otros sistemas más globales con los cuales se relaciona mediante dos flujos: el de influencias del exterior hacia el interior del sistema y el de respuestas del sistema hacia el exterior.

El enfoque sistémico basa su posición en tres principios acerca de cómo es posible *modelar* la complejidad y el dinamismo de un sistema. Todo sistema está compuesto de *elementos* y *relaciones* entre ellos, y ambos –elementos y relaciones– junto con las influencias externas condicionan la *evolución* del sistema en el tiempo. El enfoque permite la simplificación al imponerse como propósito la selección de un número *reducido* de elementos y relaciones pertenecientes al sistema. El éxito del enfoque depende del acierto en la selección de elementos y relaciones en el sentido de que ellos realmente determinen la mayor proporción posible del dinamismo del sistema.

Puesto que interesa comprender la dinámica de evolución del sistema en el tiempo es necesario introducir el concepto de *estado* de un sistema como representación de la globalidad de los valores que los elementos y relaciones asumen en un momento dado. Se dice entonces que un sistema ha alcanzado un estado de *equilibrio estable* (i.e., es homeostático) si a pequeñas perturbaciones del sistema, éste regresa, después de un tiempo, al estado en el que se encontraba antes de la perturbación; el sistema se encuentra en estado de *tránsito evolutivo* si en un instante dado y durante un cierto tiempo, no se encuentra en estado de equilibrio.

El enfoque sistémico es una herramienta potente porque permite producir un marco conceptual para describir el estado inicial del sistema, la forma como éste es perturbado, el estado de evolución producido y el estado final del sistema. Por otra parte, permite que el investigador explicite su posición ideológica al admitir que se describa el estado ideal del sistema. Finalmente, permite conjeturar acerca de las características estructurales del sistema, y por consiguiente, acerca de aquellas perturbaciones que pueden inducir al sistema a asumir estados de equilibrio cercanos al estado ideal propuesto.

MARCO METODOLÓGICO

El estudio se realizó desde el paradigma crítico. Romberg (1992) señala que el supuesto básico de esta posición es que “el ser humano, mediante el pensamiento y la acción puede mejorar el mundo social en el que vive”. Naturalmente, esta posición tiene implicaciones que marcaron la investigación. Por ejemplo, el problema de estudio no es teórico sino vivencial; el diseño no fue construido en su totalidad previamente a la investigación; tampoco fue fijo, más bien se fue construyendo en sus detalles a medida que iba avanzando la investigación, teniendo en cuenta la situación que se vivía. La información se recogió a través de la interacción con los participantes en la experiencia. También ellos se involucraron parcialmente en el análisis de la información.

La investigación-acción se empleó en dos niveles para lograr los objetivos propuestos: en la investigación de “una empresa docente” sobre la problemática de las matemáticas escolares dentro de las instituciones educativas y en la estrategia de desarrollo profesional para directivos docentes y profesores. En cuanto a la primera, la metodología de investigación-acción permitió generar un espacio de contacto con algunos de los actores más importantes de la problemática para conocerlos e interactuar con ellos. En este espacio, los investigadores fueron construyendo simultáneamente tanto una conceptualización de la manera como se relacionaban esos actores al interior de sus instituciones educativas con respecto a la educación matemática, como una estrategia para abordar su desarrollo profesional. Así, el proyecto de investigación de “una empresa docente” consistió en explorar la problemática y realizar una primera aproximación conceptual a ella.

Con respecto a lo segundo, utilizamos la investigación-acción como estrategia para que directivos y profesores abordaran e investigaran, desde su realidad escolar la problemática de las matemáticas. El rector y el coordinador del grupo de profesores de matemáticas de cada colegio realizaron una investigación-acción desde el punto de vista de su cargo directivo. Por su parte, los profesores usaron la investigación-acción para realizar el diseño y desarrollo curricular de un tema específico de matemáticas.

Con este doble uso de la investigación-acción se generó una dinámica de planeación, discusión y análisis al interior del grupo de investigadores principales sobre la manera como se presenta la problemática que se abordó.

RESULTADOS

Como resultados del estudio se tienen: un modelo del sistema involucrado en la problemática; la descripción del modelo en su estado ideal; el diseño de una estrategia de interacción con profesores y directivos, estrategia que busca crear oportunidades y espacios para que los participantes puedan comprender mejor la problemática de las matemáticas en sus colegios y puedan influir sobre ella; la descripción de los estados inicial y final del sistema para los colegios participantes teniendo como referencia el inicio y el final del estudio; la identificación y descripción de las condiciones estructurales sobre las cuales influyó la estrategia de interacción. A continuación se presentan de manera breve los resultados (Perry, P., Gómez, P., Valero, P., 1995).

Un modelo del sistema

El Sistema Institucional de la Educación Matemática (SIEM) hace parte de un sistema más global, el Sistema de Educación Matemática (SEM), el cual presenta tres niveles: un *nivel macro* o *social*, donde intervienen los factores sociales, políticos, económicos y culturales que definen las visiones, valores y tradiciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y también las necesidades y expectativas de la formación matemática de los ciudadanos; un *nivel intermedio*, en el que se ubica la institución educativa como espacio donde se encuentran elementos como las concepciones institucionales acerca del profesor, el estudiante y las matemáticas como saber cultural y saber a enseñar; y un *nivel micro* o *didáctico*, donde se relacionan el profesor con sus conocimientos y creencias, y el estudiante en la construcción del conocimiento matemático, en el proceso de desarrollo de un currículo (Rico, 1991).

Cada uno de los elementos de todo este Sistema de Educación Matemática puede a su vez mirarse como un subsistema con elementos e interrelaciones propias. Para observar la problemática de las matemáticas escolares al interior de los colegios, es pertinente pensar en un sistema que modele el nivel intermedio del gran Sistema de Educación Matemática, y que resalte los elementos y las relaciones entre ellos al interior de ese nivel.

La institución escolar es una organización compleja que tiene fundamentalmente dos funciones. Una, es preservar y mejorar la sociedad misma mediante la transmisión de aspectos y valores predominantes en la cultura de la que hace parte la escuela. La otra, guiar la educación de los jóvenes de la comunidad a la que pertenece, lo cual se refiere a la formación integral que ellos requieren para lograr su propia realización como seres humanos y para ser agentes capaces de cambio en la sociedad en la que vivirán cuando sean adultos (Novak, 1990; Romberg, 1991; Kemmis, 1992).

De acuerdo con las disposiciones gubernamentales vigentes en Colombia, un establecimiento educativo es la unidad operativa más simple del sistema educativo y constituye un subsistema ubicado en un contexto determinado, con una orientación filosófica y unos objetivos definidos de acuerdo con las características de los alumnos. En cada institución escolar oficial existe una estructura administrativa interna integrada por las siguientes unidades: rectoría, coordinación académica, coordinación disciplinaria, departamentos académicos, servicios de bienestar, servicios de aprendizaje y servicios administrativos (Báez,1991).

De esa estructura así definida por el Ministerio de Educación Nacional, interesa resaltar el papel de algunos de los distintos elementos y relaciones que se encuentran asociados de manera más fuerte con la problemática de la enseñanza de las matemáticas al interior de la institución (ver Figura Nº 1). El modelo que se ha construido corresponde a una visión sobre lo que se considera importante en este problema. Si bien se establecen unos elementos y las relaciones entre ellos, el modelo que resulta es **un posible modelo** de los muchos que podrían delimitarse desde otras perspectivas.

En una institución educativa entran en relación las actividades, valores, concepciones y conocimientos que, por un lado, tienen los directivos docentes (rector y jefe del Departamento de Matemáticas) y las que, por otro lado, sostienen los profesores, tanto como miembros de un grupo que comparte una cultura profesional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como individuos en su salón de clase. Los directivos, dado su cargo, poseen un "poder" no sólo para ejecutar acciones, sino también para delegar responsabilidades y potenciar la actuación y toma de decisiones que los profesores puedan tener en su ejercicio docente. Los profesores, por su parte, cuentan con el marco de referencia que se establece al interior del grupo de profesores de matemáticas y que obedece a la manera como en ese grupo se tejen los significados y valores de la cultura profesional del grupo. Esta cultura hace referencia a las connotaciones que toman el diseño curricular, el desarrollo profesional y la colaboración entre los profesores que son miembros del grupo. A su vez, cada profesor interpreta ese marco de referencia y lo expresa en su práctica docente. En el ejercicio de la práctica docente intervienen las creencias del profesor sobre las matemáticas y su didáctica, sus conocimientos tanto de matemáticas como de la didáctica de ellas, y el compromiso del profesor con todas las responsabilidades que su trabajo conlleva.

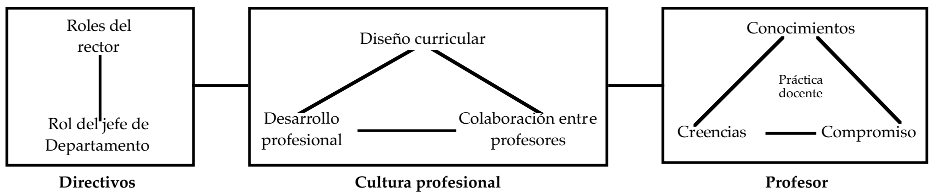


Figura Nº 1. Modelo del Sistema Institucional de la Educación Matemática

A continuación se presentan los significados de los elementos relevantes de este sistema y las relaciones estructurales, es decir, las relaciones directas y más fuertes entre ellos. Nótese que si bien la práctica docente es el factor en el cual se manifiestan los distintos elementos relevantes del profesor, ésta como tal no se considera como elemento del modelo que se pueda abordar ni sobre la cual se quiera influir directamente.

Roles del rector. Interesa considerar cómo asume el rector el papel de líder y de facilitador (Furtwengler, W. & Hurst, D., 1992). El *liderazgo del rector* hace referencia a su comprensión de la estructura y funcionamiento de la organización –en particular, a la comprensión del papel que juegan las personas en ella; a su habilidad para proyectar y planificar la evolución del colegio; y también se refiere a su habilidad para organizar y comprometer a personas y trabajo en las proyecciones que hace. El *rol de facilitador* hace referencia a la habilidad del rector para dejar que las personas sean líderes e incluso impulsarlas a que lo sean a través de la creación de condiciones propicias y la provisión de los recursos necesarios. La forma como el rector asume sus roles es, parcialmente, producto de sus ideas y creencias que se concretan en visiones acerca de la vida, de la educación y de las matemáticas.

Rol del jefe del Departamento. Se centra la atención en cómo el jefe asume su *rol de líder* (Furtwengler, W. & Hurst, D., 1992) del grupo de profesores de matemáticas. El liderazgo del jefe se refiere a la comprensión que éste tiene del funcionamiento de la organización en el área específica de las matemáticas y del papel que juega el Departamento dentro de la institución para contribuir al logro de las metas institucionales. Se refiere a la habilidad para proyectar y planificar la evolución de la organización en lo que toca con las matemáticas; a la habilidad para organizar, involucrar y comprometer a las personas y su trabajo en esas proyecciones. También se refiere a la habilidad para impulsar y consolidar la cultura profesional del grupo de profesores de matemáticas a través de impulsar la colaboración, el desarrollo profesional y el diseño curricular. La forma como el jefe asume el rol de líder depende en buena medida de factores internos, pero hay también factores externos que influyen en el liderazgo. Los factores internos se refieren a las ideas y creencias del jefe con respecto a diversos asuntos, las cuales se concretan en visiones acerca de las relaciones con las personas y acerca de las matemáticas.

Diseño curricular. De acuerdo con la propuesta de Romberg, el currículo es un "plan operativo de enseñanza que explica en detalle qué deben saber los alumnos de matemáticas, cómo deben alcanzar las metas curriculares identificadas, qué deben hacer los profesores para ayudarles a desarrollar sus conocimientos matemáticos y el contexto en el que tiene lugar el aprendizaje y la enseñanza" (Romberg, 1991, p. 324). El diseño curricular es la definición previa de este plan; es una construcción colectiva en la que intervienen tanto los lineamientos institucionales como los del grupo de profesores; el diseño curricular define el espacio compartido de valores, ideas, significados, conocimientos, y creencias acerca de lo que son las matemáticas, cómo se enseñan y cómo se aprenden; los métodos de enseñanza; y la organización, funcionamiento y finalidad del Departamento de Matemáticas.

Desarrollo profesional. Alude a las oportunidades que ofrece la institución para que los profesores aprendan e incrementen su conocimiento especializado tanto en matemáticas como en la didáctica de las mismas (Rosenholtz, 1991; Marcelo, 1987).

Colaboración entre profesores. Se define como la disposición y actitud que tienen los profesores hacia dar y pedir ayuda a sus colegas acerca de asuntos relacionados con la docencia de las matemáticas (Rosenholtz, 1991).

Creencias del profesor. Se refiere al sistema de creencias, concepciones, valores e ideologías del profesor con respecto a la naturaleza de las matemáticas, la naturaleza de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. También interesa considerar concepciones acerca de la educación, y en particular, de la educación matemática. Este sistema ejerce un gran impacto en la enseñanza de la materia en la medida en que influye en las decisiones del profesor sobre los contenidos que enseña, los énfasis que hace, los métodos que emplea para enseñar, las sugerencias que da a sus estudiantes acerca de la forma como deben estudiar (Thompson, 1992; Ernest, 1989).

Conocimientos del profesor. El profesor de matemáticas requiere tener conocimiento de matemáticas, de su aprendizaje y enseñanza, de las facultades cognitivas del ser humano, en general, y de sus estudiantes, en particular, y de la educación matemática como disciplina científica (Llinares, 1990).

Compromiso del profesor con su práctica docente. Se refiere a la disposición y actitud que tiene el profesor hacia su práctica docente, en términos de qué tanto se involucra, qué tanto le preocupa y, sobre todo, qué tanto le ocupa efectivamente. Se refleja en una serie de comportamientos, entre los cuales se pueden incluir el esfuerzo de investigación e innovación realizado por el profesor en su trabajo, la participación en los diversos asuntos relacionados con él, y el deseo e intención de continuar con su trabajo en el colegio.

La práctica docente es el ejercicio de la profesión de enseñar; incluye todo lo que el profesor hace o deja de hacer, junto con la forma de hacerlo, al relacionarse e interactuar con sus estudiantes, con sus colegas y con padres de familia, con respecto a lo que le compete como profesor. La práctica docente del profesor es un factor relevante del problema de estudio. Son varias las razones: es la manifestación concreta de los tres elementos considerados para el profesor, es donde confluye el impacto de la cultura profesional y el liderazgo de los directivos, y establece un nexo directo con los resultados escolares. Sin embargo, el Proyecto MEN-EMA **no** pretende observarla de manera directa. Por esta razón, tan sólo se dará la descripción del estado ideal que debería tener este factor, como consecuencia del estado de todos los otros elementos. No se describirá su estado al iniciar el Proyecto y tampoco, al terminarlo.

Estado ideal del modelo del SIEM

A continuación se presenta el valor que toman tanto los elementos del sistema como las relaciones entre ellos en un estado *ideal*. El término *ideal* se refiere al estado óptimo que, desde una visión particular, debería alcanzar el SIEM para lograr un funcionamiento adecuado que solucionara la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por ser ideal, este estado más que una realidad concreta que tenga que ser alcanzada por institución escolar alguna, es más bien un parámetro. Además, hay que aclarar nuevamente que este modelo ideal:

- Simplifica la complejidad de la realidad. Por lo tanto, **hace unas selecciones** sobre lo relevante

- Presenta tan sólo las relaciones estructurales entre los elementos; es decir, enfatiza las **relaciones directas** entre ellos
- Obedece a una posición particular sobre el *deber ser* del sistema, de tal manera que los elementos y relaciones entre ellos generen unos resultados específicos del sistema. Por esto, **no es único**

Roles del rector. El rector tiene una definición clara, concreta y detallada de la problemática de las matemáticas en su colegio. Es consciente de su participación en el problema. Tiene unas metas concretas en relación con esa problemática y también unas estrategias para lograrlas, y para hacer el control y la evaluación de lo que se realice. Es consciente de la importancia que tiene el Departamento de Matemáticas en su institución como ente encargado de coordinar el trabajo docente de los profesores de matemáticas y de promover y fomentar el profesionalismo[2] en ellos. Por esto establece una relación directa con el jefe del Departamento y lo apoya para que desarrolle sus habilidades de líder.

El liderazgo del rector se relaciona directamente con el liderazgo del jefe del Departamento de Matemáticas. El liderazgo implica una serie de habilidades que es posible adquirir a través de una formación sobre la marcha y de un ambiente propicio. El jefe del grupo de matemáticas no tiene, necesariamente, una formación en dirección y administración y puede no tener una visión suficientemente amplia de la importancia de su cargo; por tanto, el desarrollo de su liderazgo puede depender, en gran medida, del ambiente institucional que se genere en torno a ese aspecto. En efecto, el liderazgo del jefe del Departamento es una expresión del liderazgo del rector en el área específica de las matemáticas. Por esa razón, el liderazgo del rector determina, en gran medida, al liderazgo del jefe; la definición, las características, el papel dentro de la organización y, lo que es más importante, la concreción del liderazgo del jefe en el grupo de profesores de matemáticas son un reflejo de cómo se define, se caracteriza y se concreta el liderazgo del rector en la institución.

El rector también tiene una influencia directa sobre el diseño curricular en la medida en que, debido a su rol de facilitador, abre los espacios de comunicación entre el grupo de profesores y la institución (Marcelo, 1987). Con esta comunicación se hacen explícitos los lineamientos de la institución en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro de un plan operativo global institucional. De esta manera se pueden formular mucho más precisamente los pormenores del currículo en el área de las matemáticas, dentro de una coherencia con los planes institucionales. También incide porque impulsa y permite el

2. El profesionalismo hace referencia a una forma de trabajar colegiada, un desarrollo profesional permanente y la consolidación de una cultura de la enseñanza de las matemáticas (Romberg, 1988; Noddings, 1992).

liderazgo tanto del jefe del Departamento de Matemáticas como de los profesores en lo que toca con el diseño curricular.

Rol del jefe del Departamento. El jefe del Departamento de Matemáticas reconoce la importancia de su cargo dentro de la institución y por tanto, asume responsable, seria y creativamente su liderazgo.

El liderazgo del jefe se relaciona directamente con los roles que asume el rector en la medida en que aquél se constituye en el vínculo que establece contacto entre el grupo de profesores y el rector: la parte académica con la parte directiva del colegio. Gracias a este nexo, el jefe contribuye a la imagen que el rector tiene de la problemática de las matemáticas en la institución.

También se relaciona ese liderazgo con la cultura profesional de los profesores de matemáticas puesto que en sus manos está plantear, proponer y ensayar actividades que se pueden institucionalizar (Staub, 1981; Rosenholtz, 1991; Romberg, 1988; Webb et al., 1994). Es consciente de la necesidad de promover y fomentar el comportamiento profesional del grupo de profesores que coordina, y actúa coherentemente con ello: se ocupa de buscar actividades que contribuyan a cuestionar y enriquecer el conocimiento especializado de los profesores; busca estrategias para promover el trabajo en equipo y la colaboración entre ellos; emplea estrategias adecuadas para motivar e involucrar a sus colegas en esas actividades; construye buenas relaciones con ellos; y propicia el empleo de ese conocimiento especializado en la toma de decisiones que hace el Departamento en asuntos didácticos.

Diseño curricular. Este elemento influye en el conocimiento del profesor ya que, al entrar en contacto con el ambiente donde se diseña el currículo y tener un papel participativo en este proceso, el profesor puede ampliar y modificar su información tanto sobre los temas matemáticos como sobre sus aspectos didácticos. Que el diseño curricular sea una actividad colectiva, en la que se involucran los directivos (especialmente el jefe del Departamento) y los profesores, tanto en su dimensión individual como en su dimensión colectiva de pertenencia a un grupo, posibilita el enriquecimiento del conocimiento del profesor.

Esta labor colectiva influye de manera directa el desempeño del profesor en su práctica docente debido a que las acciones concretas que realiza el profesor en su salón de clase se enmarcan claramente dentro de los lineamientos institucionales del Departamento de Matemáticas. El no contar con un plan operativo institucional y no compartir una forma de llevarlo a cabo obliga al profesor a realizar su trabajo aislado del trabajo de los demás. De esa manera, el profesor llega a creer que sus problemas y sus dificultades en relación con su trabajo docente son únicos y esto le genera incertidumbre que no tiene forma de resolver, siendo su práctica docente la que se ve afectada directamente (Rico, 1990, 1991; Rosenholtz, 1991).

Desarrollo profesional. La frecuencia, la intensidad y el tipo de actividades que ofrezca la institución para que los profesores continúen un proceso de formación, junto con la forma como se organizan y se dirigen tales actividades influyen en las creencias y conocimientos del profesor. Las reuniones de coordinación son el espacio natural para el desarrollo profesional; en esas reuniones se realizan actividades interesantes para los profesores, que responden a las necesidades de su práctica, pero que les exige leer, consultar, ensayar, compartir con los colegas, y contrastar sus experiencias y creencias sobre los contenidos de la enseñanza, sobre cómo se enseñan y sobre cómo se aprenden las matemáticas. Como resultado de este intercambio puede darse una modificación tanto en los conocimientos como en las creencias del profesor (Clarke, 1994).

De igual forma, el desarrollo profesional influye en el diseño curricular en la medida en que abre el espacio para que haya una institucionalización de un ambiente de experimentación.

Colaboración entre profesores. La colaboración entre profesores se relaciona directamente con el diseño curricular porque aquélla genera un ambiente de trabajo colectivo donde se reconoce que los profesores no lo saben todo y que existen preguntas interesantes, relativas bien a las matemáticas o bien a la pedagogía, que pueden ser motivo de consulta y de investigación. Los profesores la viven de manera natural sin sentir que esa situación hace mella en su autoestima (Little, 1982; Romberg, 1988; Rico, 1990). Además, el hecho de que exista dentro de la institución un ambiente de trabajo propicio para el intercambio grupal influye de forma directa en el compromiso del profesor con su práctica docente, ya que se desarrolla una mayor consciencia de la responsabilidad de cada profesor tanto con su labor al interior del salón de clase, como dentro del grupo de profesores del cual es miembro.

Creencias de profesor. En la tipología que presenta Ernest (1989) se incluyen cinco tipos que pretenden caracterizar a los profesores de matemáticas según sus ideas y creencias con respecto a la naturaleza de las matemáticas, los objetivos de la educación matemática, el modelo de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. Tales tipos corresponden al profesor entrenador, al tecnólogo, al humanista, al progresista y al crítico. En la realidad es muy difícil ubicar con precisión a un determinado profesor en cualquiera de esos tipos, lo más probable es que su práctica docente refleje una tendencia de sus creencias a un cierto tipo, pero también refleje creencias que lo ubican parcialmente en otros tipos.

La ideología que sustenta el Proyecto MEN-EMA con respecto a la naturaleza de las matemáticas, a los objetivos de la educación matemática, al modelo de la enseñanza de las matemáticas y al modelo del aprendizaje de las mismas se acerca mucho a las características que da Ernest al profesor crítico. Las matemáticas son un conjunto de conocimientos construidos socialmente, susceptibles de cambio. El objetivo de la educación matemática es el desarrollo del potencial individual con miras al cambio social. La enseñanza debe hacerse a través de la discusión, la investigación y el cuestionamiento. El aprendizaje es la internalización de construcciones sociales de las matemáticas lograda mediante la resolución de problemas de la vida diaria.

Aunque todo lo que se haga en el Proyecto estará iluminado por las ideas mencionadas anteriormente y se pretende que los cambios que genere el Proyecto, sean, en buena medida, cambios en las creencias de los actores del sistema, no es razonable establecer el estado ideal de las creencias del profesor; más bien, se puede hablar del estado ideal de la actitud del profesor hacia sus propias creencias. Por ejemplo, es deseable que el profesor tenga una consciencia de cuál es su visión –ideas y creencias– de la naturaleza de las matemáticas, del objetivo de la educación matemática, del modelo de la enseñanza y del modelo del aprendizaje de las matemáticas. Es deseable que busque la coherencia entre la visión que sostiene y su práctica docente. También es deseable que conozca, comprenda, critique y tome postura ante otras posibles visiones acerca de los temas de interés para el estudio. Finalmente, es deseable que asuma una postura apropiada que permita el cuestionamiento de la propia visión y conlleve a un cambio voluntario con respecto a lo que el sujeto decida que debe cambiar.

Las creencias del profesor influyen de manera importante en la práctica docente de dos formas principalmente. Primero, de las creencias depende el comportamiento que el profesor adopte con respecto a las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje; así, los comportamientos van a favorecer un tipo especial de prácticas que, para el profesor, son las deseables (Clark y Peterson, 1986; Cooney, 1988; Dougherty, 1990). Segundo, la conciencia sobre el hecho de tener unas creencias personales y sobre la existencia de otras alternativas abre la posibilidad de un auto-cuestionamiento. Esta reflexión hace posible el mejoramiento de la práctica docente pues induce al cambio (Thompson, 1994, 1992; Ernest, 1991).

Conocimientos del profesor. No es razonable esperar que un profesor tenga un conocimiento especializado ilímite, y, en todo caso, es bien difícil definir qué tanto conocimiento con relación a un determinado tema es suficiente y necesario para la enseñanza del mismo. Sin embargo, sí es deseable que el profesor adopte como propia una actitud autocrítica que lo lleve a juzgar la calidad y cantidad del conocimiento tanto matemático como pedagógico que posee en relación con lo que debe enseñar. También es deseable que asuma como propia una actitud de búsqueda de soluciones a las posibles deficiencias que encuentre. Por otro lado, es deseable que el profesor se ocupe, de manera natural, de su actualización permanente mediante el contacto con la disciplina en la que se inscribe su trabajo profesional (Llinares et al., 1990).

El conocimiento del profesor sobre las matemáticas, su didáctica y la disciplina de la educación matemática también influye en su práctica docente pues es la base para todas las decisiones que toma en el desarrollo del currículo.

Compromiso del profesor con su práctica docente. El compromiso del profesor con su práctica docente es tal que hace todo esfuerzo que considere necesario para lograr el aprendizaje de sus alumnos. El compromiso lo hace involucrarse en proyectos de investigación en el salón de clase, donde puede dar soluciones innovadoras a los problemas de aprendizaje de sus estudiantes y puede evaluar el conjunto de su práctica (Rosenholtz, 1991).

Además, comprende que es miembro del grupo de profesores de la institución y que su participación activa en la construcción de la cultura profesional de dicho grupo es importante. Esto significa que el compromiso retroalimenta la colaboración entre profesores puesto que ejerce sobre ella una influencia directa.

El compromiso del profesor con su práctica influye en ella pues genera una reflexión constante sobre lo que se hace y cómo se puede mejorar, lo cual se concreta en una acción tendiente a la superación de las deficiencias detectadas.

Práctica docente. De la descripción de los puntos anteriores, se desprende el estado ideal que debería tener una práctica docente de calidad. Una tal práctica es:

- Centrada en el estudiante y sus necesidades
- Reflexiva y consciente
- Investigativa
- Innovadora y capaz de asumir riesgos
- Participativa y colaboradora dentro de una cultura profesional institucional

Diseño de la estrategia de interacción con profesores y directivos

Se seleccionaron diez colegios oficiales de Bogotá. En tal selección se tuvo en cuenta, fundamentalmente, la opinión que los investigadores principales se formaron, a través de una entrevista, acerca de la intensidad del posible compromiso del rector con el Proyecto.

Se conformaron dos grupos de trabajo, el de los directivos-docentes y el de los profesores de matemáticas. El primero estuvo constituido por el rector y el jefe del Departamento de Matemáticas[3] de cada uno de los diez colegios participantes en el Proyecto. El segundo estuvo constituido por dos profesores de cada uno de los colegios participantes en el Proyecto. En ambos grupos participaron también dos investigadores de "una empresa docente"; fueron los coordinadores de las actividades realizadas.

Directivos y profesores en sus respectivos grupos vivieron la experiencia de realizar una investigación-acción. Los directivos de cada institución identificaron un aspecto relacionado con la problemática de las matemáticas en su colegio, aspecto sobre el cual tuvieran injerencia y quisieran incidir. Para ese aspecto planificaron una acción específica tendiente a lograr un cambio, la llevaron a cabo, la observaron y determinaron los efectos que ella tuvo sobre el aspecto en cuestión. Los profesores de cada institución –de manera individual o en grupo– seleccionaron un tema de alguno de los cursos que tenían a su cargo, tema que pudieran tratar en máximo tres horas de clase y cuya enseñanza quisieran mejorar en algún aspecto. Para dicho tema realizaron el correspondiente diseño y desarrollo curricular. Al terminar el proyecto, tanto profesores como directivos-docentes participaron en la presentación de resultados y en la producción de artículos.

El esquema de trabajo con los directivos incluyó ocho reuniones, cada una de cuatro horas, en días sábados, distribuidas a lo largo de los nueve meses que duró el Proyecto. Además, dispusieron de cierto tiempo para desarrollar la investigación y para asistir a entrevistas personales con los coordinadores del Proyecto.

El esquema de trabajo con los profesores incluyó tres seminarios, de veinte horas semanales cada uno, a lo largo de los nueve meses de duración del Proyecto. El horario de esas reuniones coincidió con la jornada de trabajo en el colegio al que representaban[4], situación que obligó a la institución participante a reorganizar su funcionamiento durante esas tres semanas para permitir la ausencia de sus dos profesores. Adicionalmente, cada profesor dispuso de veinte horas de su jornada laboral para compartir reflexiones con sus colegas, completar el trabajo iniciado en los seminarios, y para asistir a entrevistas personales con los coordinadores de Proyecto.

La metodología de trabajo en ambos grupos incluyó trabajo individual, trabajo en grupos, puesta en común, presentaciones, exposiciones. Se dio a los par-

3. O quien fuera el coordinador de los profesores de matemáticas en la institución.
4. Todos los colegios participantes fueron de Jornada de la tarde, excepto uno.

ticipantes unas pocas herramientas conceptuales para su trabajo; para los directivos: aspectos relacionados con la investigación-acción, un concepto amplio de currículo, aspectos de la organización social de la escuela; para los profesores, aspectos relacionados con la investigación-acción, un concepto amplio de currículo, algunos modelos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y aspectos relacionados con la enseñanza del álgebra.

En las reuniones realizadas con ambos grupos de trabajo se abrió un espacio en el que los participantes pudieron compartir sus ideas, discutir, dar y recibir ayuda; se generó un ambiente de reflexión, de toma de conciencia acerca de los problemas y sobre todo, de la propia responsabilidad en ellos y de las posibilidades que tiene cada responsable con relación a las soluciones.

Los estados inicial y final del modelo en los colegios participantes

Se presenta una descripción de los valores que asumen los elementos del modelo en dos momentos: al iniciar y al terminar el Proyecto MEN-EMA.

Estado inicial

Roles del rector. El rector tiene dificultades para diseñar y liderar la realización de proyectos que lleguen a feliz término en un tiempo determinado; participa de una costumbre inveterada de hacer cosas impuestas desde el exterior sin que, necesariamente, tengan sentido real para su institución. Tiene una idea muy vaga acerca del problema de las matemáticas en su colegio; no reconoce claramente la incidencia de aspectos institucionales en él y no ve cuál puede ser su responsabilidad en el mismo, es decir, no percibe de qué manera sus funciones administrativas puedan afectar la problemática en cuestión. No da suficiente importancia a las funciones académicas del Departamento de Matemáticas. Apoya el desarrollo profesional a través de esquemas tales como conferencias y asistencia a cursos de capacitación; pero no cree que los mismos profesores puedan hacer su desarrollo profesional como parte de su actividad en el colegio, con el apoyo de la institución –en términos de tiempo, de un ambiente propicio, y de otros recursos.

Rol del jefe del Departamento de Matemáticas. El jefe no es consciente del rol de líder que puede y debe asumir en el grupo de profesores que coordina. Establece relación con el rector desde el punto de vista administrativo, pero no desde el punto de vista académico. No influye en el desarrollo profesional ni en la colaboración entre profesores; para poder hacerlo tendría que liderar esos procesos y eso no hace parte de lo que considera sus funciones. Estas, más bien, tienen que ver con la coordinación de aspectos del diseño y desarrollo curricular de las matemáticas en la institución. Por razón de las relaciones que establece con sus colegas, en algunos casos, el jefe del Departamento influye negativamente el compromiso de los colegas en la realización de lo que se proyecta hacer.

Diseño curricular. En términos generales, no existe un plan operativo propio de la institución en el área de las matemáticas; en relación con objetivos a lograr, metodologías de enseñanza y formas de evaluación no hay suficiente conocimiento, ni claridad, ni consenso en el grupo de profesores. Mucho menos hay conciencia en el grupo de profesores de los valores, ideas y creencias que sostienen los diferentes miembros acerca de lo que son las matemáticas, cómo se aprenden y cómo se enseñan, ni tampoco hay claridad de cuáles pueden ser las creencias y valores que comparten o que quieren compartir.

Desarrollo profesional. Tanto profesores como directivos están acostumbrados a esquemas de capacitación en los que la enseñanza y el aprendizaje se caracterizan por la transmisión y recepción de una serie de conocimientos. El desarrollo profesional se hace a través de cursos que influyen en el conocimiento del profesor pues proporcionan información sobre temas de las matemáticas o de su didáctica, pero no tienen la capacidad de incidir realmente en la potenciación del conocimiento para las aplicaciones que de él pueda hacer el profesor. Por la forma como se percibe el desarrollo profesional –como una actividad personal, por fuera de los intereses de la institución, que requiere de la interacción con alguien externo al grupo de profesores– éste no necesariamente sirve al diseño y desarrollo curricular de las matemáticas en la institución. El desarrollo profesional, tal como se concibe y se realiza en los colegios, influye negativamente en las creencias de los profesores pues son vivencias que reafirman posiciones no innovadoras de lo que son las matemáticas, cómo se aprenden y cómo se enseñan.

Colaboración entre profesores. En general, no existe la colaboración entre los profesores. La organización de los horarios de trabajo de los profesores son, en gran medida, un obstáculo para que ellos encuentren oportunidades de dar o pedir ayuda a sus colegas. En algunos casos, el rector ve este obstáculo como una ventaja para lograr que los profesores aprovechen el tiempo de trabajo de la mejor manera.

Creencias del profesor. Los profesores no eran conscientes de tener una visión sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Tampoco se imaginaban que existieran conjuntos alternativos de visiones sobre estos aspectos. A pesar de que ellos no fueran conscientes de sus visiones, sí se puede decir que dentro de la tipología que presenta Ernest (1991) no es evidente que se ubiquen en la posición del profesor crítico.

Conocimientos del profesor. Si bien no se puede hablar del estado inicial de los conocimiento matemáticos de los profesores, sí se notaron sus deficiencias en lo relacionado con el conocimiento sobre la didáctica de las matemáticas y sobre la disciplina de la educación matemática. Con respecto a lo primero, los profesores han desarrollado un conocimiento didáctico por medio de su práctica, es decir, poseen un conocimiento práctico. Pero éste es deficiente porque no ha sido confrontado con un conocimiento proveniente o bien de la interacción con otros profesores, o de la contrastación de la práctica con la teoría de la didáctica de las matemáticas. Esto evidencia las deficiencias del conocimiento de los profesores con respecto a la disciplina de la educación matemática.

Compromiso del profesor con la práctica docente. Dado que se entiende por práctica docente todo aquello que el profesor hace y deja de hacer dentro y fuera del salón de clase en relación con su trabajo, el compromiso de los profesores con el Proyecto MEN-EMA es un reflejo de su compromiso con aquella. Los profesores llegaron a trabajar en el Proyecto a sabiendas de que no recibirían ninguna bonificación, ni económica ni en créditos, por su labor. Ellos buscaban una solución a sus dificultades. A pesar de haberse encontrado con un esquema que no satisfacía en un primer momento sus expectativas, la mayoría de los profesores trabajó de manera intensa, incluso más de lo que se pedía, y asistió a casi todas las reuniones de trabajo.

Estado final

Roles del rector. Casi todos los rectores (70%) concluyeron el proyecto de investigación-acción. En algunos casos (50%) el rector ha ampliado su conocimiento acerca de un aspecto específico de la problemática de las matemáticas en su colegio, y se cuestionó acerca de su responsabilidad en ella. Es más consciente del significado y el propósito del desarrollo profesional de los profesores para la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En algunos colegios (60%), el rector influye positivamente en la colaboración ente los profesores: los motiva y los induce a trabajar conjuntamente. El rector aporta a la mejora de las reuniones de coordinación en algunos casos. En algunos colegios (60%), el rector comienza a tener participación en las prácticas docentes de los profesores y manifiesta preocupación por ellas y por los códigos y las costumbres que rigen estas prácticas desde el punto de vista institucional. Influye de manera positiva en el compromiso del profesor con su trabajo.

Rol del jefe del Departamento de Matemáticas. El jefe no ha establecido aún una relación con el rector desde el punto de vista académico. Su actitud continúa siendo pasiva y no presenta características de líder y representante de los profesores ante el rector. No influye aún en la colaboración entre profesores. Su papel dentro de las reuniones de coordinación y como líder del grupo es débil. Reconoce como una de sus responsabilidades principales la construcción de una propuesta institucional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Acepta que sus responsabilidades no son únicamente administrativas. En algunos colegios (40%), el jefe comienza a tener una influencia positiva en el compromiso de algunos profesores con su trabajo.

Diseño curricular. Quienes participaron en el Proyecto vislumbraron la existencia de la educación matemática como disciplina joven que maneja conceptos y teorías que ayudan a explicar las dificultades que se presentan en el salón de clase.

Desarrollo profesional. Todos los actores reconocen la importancia de participar en esquemas de capacitación que tengan significado para el diseño y desarrollo curricular de la institución. Los profesores son conscientes de que los esquemas de capacitación influyen de diversas maneras en su conocimiento didáctico. El esquema de capacitación utilizado en el Proyecto MEN-EMA influyó positivamente en el conocimiento didáctico del profesor y generó en él un cuestionamiento en relación con sus visiones acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

Colaboración entre profesores. La colaboración entre los profesores comienza a generar resultados desde el punto de vista de la cultura institucional en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La colaboración entre los profesores genera compromiso por parte de ellos hacia su actividad profesional. El compromiso generado gracias a la experiencia induce a los profesores a trabajar conjuntamente.

Creencias del profesor. Los profesores tuvieron la oportunidad de darse cuenta de que tienen una visión sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y que existen otras. Este hecho inició en ellos un proceso de cuestionamiento.

Conocimientos del profesor. Los profesores, por medio de las actividades realizadas en el Proyecto, entraron en contacto con información sobre las matemáticas, su didáctica y la disciplina de la educación matemática.

Compromiso del profesor con su práctica docente. Los profesores se hicieron más conscientes de la responsabilidad y compromiso con su trabajo. Esto los dejó en un estado de incertidumbre frente a cómo seguir asumiendo ese compromiso en lo sucesivo.

Efectos de la estrategia de interacción con profesores y directivos

A continuación se presentan las razones por las cuales se considera que las actividades desarrolladas, como parte de la estrategia de interacción del Proyecto, tuvieron una influencia en algunos aspectos de los elementos del sistema produciendo las diferencias que ya se evidenciaron entre el estado inicial y el estado final del mismo.

Roles del rector. El rector logró una mejor comprensión del problema de las matemáticas en su colegio al tener que involucrarse en una actividad problemática que lo puso en contacto con la correspondiente realidad. El esquema de investigación-acción le permitió realizar y completar todas las etapas de definición, análisis y resolución de un problema, haciéndolo consciente de que es posible llevar a término proyectos que beneficien las institución. Finalmente, al tener que interactuar directamente con los profesores de matemáticas, el rector reconoció la importancia de su papel como líder y facilitador del grupo de personas a su cargo.

Rol del jefe del Departamento. Al tener que hacer explícito y formalizar sus actividades, el jefe del Departamento de Matemáticas reconoció y se hizo consciente de los diferentes roles que tanto él, como jefe, y el Departamento, como unidad de la institución, pueden jugar en la mejora de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de la matemáticas.

Colaboración entre profesores. Al tener que discutir sobre problemas de educación matemática y al disponer del espacio para compartir sus experiencias innovadoras, los profesores tomaron conciencia de la importancia de colaborar dentro de la institución con el propósito de mejorar su práctica docente.

Creencias del profesor. Los profesores recibieron información sobre temas de educación matemática, tuvieron la oportunidad de conocer las opiniones de sus colegas y encontraron el espacio para discutir y reflexionar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esto generó una cierta consciencia de que cada uno de ellos tiene una posición particular acerca de la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y de que existen visiones alternativas al respecto. Todo esto produjo en el profesor un estado de cuestionamiento.

Compromiso del profesor con su práctica docente. La existencia de un espacio para la innovación, la utilización del esquema de investigación-acción para el desarrollo de estas iniciativas y la toma de consciencia de que cada uno de ellos hace parte de una comunidad tanto al interior, como al exterior de su institución, fueron los factores que generaron y permitieron expresar por parte del profesor un mayor grado de compromiso, con los estudiantes, con la institución, con el proyecto y con su práctica docente.

CONCLUSIONES

El Proyecto MEN-EMA logró sus objetivos. Por un lado, permitió conocer y comprender con cierto nivel de detalle la problemática de las matemáticas en el bachillerato de diez colegios oficiales de Bogotá, desde una perspectiva institucional. En particular, fue posible formular hipótesis acerca de algunas relaciones entre los roles de los directivos y aspectos que tienen que ver con el grupo de profesores de matemáticas, como son el diseño curricular, la colaboración entre profesores y el desarrollo profesional de ellos. También, se obtuvo información acerca del conocimiento pedagógico y las creencias de los profesores en cuanto a la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de ellas.

Por otro lado, el Proyecto mostró que es posible iniciar un proceso de cambio al generar en los participantes una actitud de compromiso con la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje y una situación de cuestionamiento por parte de ellos con respecto a su propia práctica docente y administrativa. Mostró también, que es posible utilizar esquemas innovadores de desarrollo profesional que generen un ambiente dentro del cual las personas puedan progresar y sea posible influir en el sistema curricular de manera positiva.

Quedan, sin embargo, una serie de interrogantes que serán objeto de estudio de la primera fase del Proyecto PRIME.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1988). “Ingénierie didactique”. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, No. 3.

Báez, J. (compilador) (1991). *Legislación Educativa,* Vol. 1.

Clark, C.M. & Peterson, P.L. (1986). “Teachers´ Thought Processes”. En M.C. Wittrock (ed.), *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan.

Clarke, D. (1994). “Ten Key Principles from Research for the Professional Development of Mathematics Teachers”. En D. Aichele, & A. Coxford (eds.), *Professional Development for Teachers of Mathematics. 1994 Yearbook*. Reston, Va.: NCTM.

Cooney, T.J. (1980). “Research on Teaching and Teacher Education”. En Shumway (ed.) *Research in Mathematics Education*. Virginia: NCTM, Reston VA.

Ernest, P. (1989). “The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics” en Ernest, Paul (ed.) *Mathematics Teaching: The State of the Art*. Londres: The Falmer Press.

________ (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Furtwengler, W.J. & Hurst, D. (1992). *Leadership for School Quality -Personal Challenge, the Missing Factor*. Paper presentado en la Annual Meeting of the American Educational Research Association (San Francisco, CA, abril 20-24, 1992).

Gómez, P. & Perry, P. (1994). *Proyecto MEN-EMA. Una investigación sobre la problemática de las matemáticas en los colegios oficiales del Distrito Capital*. Informe final del proyecto.

Kemmis, S. & Mctaggart, R. (1992). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Editorial Laertes.

Little, J.W. (1982). Norms of collegiality and experimentation: Workplace conditions of school success. *American Educational Research Journal*, 19.

Llinares, S. & Sánchez, M. V. (1990). "El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas". En S. Llinares & M.V. Sánchez (ed.), *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla: Ediciones Alfar.

Marcelo, C. (1987). *El pensamiento del profesor*. Barcelona: CEAC

___________(1989). *Introducción a la formación del profesorado. Teoría y métodos*. España: Editorial Universidad de Sevilla.

McLaughlin, M.W. & Talbert, J.E. (1990). "The Contexts in Question: The Secondary School Workplace". En M.W. McLaughlin, J.E. Talbert & N. Bascia (eds.), *The Contexts of Teaching in Secondary Schools*. New York: Teachers College Press.

Noddings, Nel (1992). "Professionalization and Mathematics Teaching". En D. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Novak, J. (1990). *Teoría y práctica de la educación*. Madrid: Alianza Editorial.

Perry, P., Gómez, P. & Valero, P. (1995). *El Sistema Institucional de Educación Matemática. Una aproximación a la problemática de las matemáticas escolares*. Documento de trabajo.

Rico, L. (1990). "Diseño curricular en Educación Matemática: una perspectiva cultural". En S. Llinares& M.V. Sánchez (eds.) *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla: Ediciones Alfar.

Rico, L. (1991). *Los tetraedros del currículo. Diseño, desarrollo y evaluación del currículo*. Disertación no publicada. Granada: Universidad de Granada.

Romberg, T. (1988). "Can Teachers be Professionals?" en D. Grouws, T.J. Cooney & D. Jones (eds.), *Perspectives on Research on Effective Mathematics Teaching*. Vol. I, pp. 224-244. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

___________(1991). "Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas" en *Revista de Educación*, No. 294.

___________(1992). “Perspectives on Scholarship and Research Methods” en Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Rosenholtz, S.J. (1991). *Teachers' Workplace: The Social Organization of Schools*. New York: Teachers College Press.

Schatz, M. & Grouws, D. (1992). “Mathematics Teaching Practices and Their Effects”. En D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Staub, E. (1981). “Promoting positive behavior in schools, in other educational settings, and in the home”. En J. Harvey, W. Tackes & R. Kidd (eds.), *New directions in attribution research*, Vol. 3. hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thompson, A.G. (1992). “Teachers´ Beliefs and Conceptions: A synthesis of the Research”. En D. Grouws (ed.). *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM, New York: MacMillam.

Webb, N. & Romberg, T. (eds.) (1994). *Reforming Mathematics Education in America's Cities: The Urban Mathematics Collaborative Project*. New York: Teachers College Press.

MATEMÁTICAS, CIENCIA, SOCIEDAD. UNA EXPERIENCIA DE INNOVACIÓN CURRICULAR EN MATEMÁTICAS

Pedro Gómez – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

Matemáticas, Ciencia, Sociedad es el resultado de una innovación curricular desarrollada en la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia durante los últimos ocho años. Está basada en una visión de las matemáticas como construcción social sujeta al cambio y con un valor práctico y cultural. Tiene como objetivo la formulación de situaciones didácticas, basadas en algunos aspectos de las matemáticas, a través de las cuales el estudiante encuentre un espacio dentro del cual pueda desarrollar la capacidad de modelaje y de resolución de los problemas complejos de las ciencias sociales. Partiendo de una utilización de los sistemas formales como herramienta para el modelaje de situaciones reales, el curso integra aspectos del método científico, de la historia de las matemáticas y de las heurísticas de resolución de problemas en la búsqueda de su objetivo. Su metodología se basa en la construcción social del conocimiento a través de la discusión en clase. Esta experiencia ha mostrado que la consolidación de innovaciones curriculares es un proceso difícil como consecuencia del conflicto que ellas generan con las visiones tradicionales que el profesor, el estudiante y la institución tienen acerca de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

La innovación curricular es un factor central en el proceso de cambio que se debe buscar en educación matemática con el propósito de mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Ernest, 1994). Pero éste no es un proceso automático, ni evidente; se encuentra lleno de obstáculos que dificultan el logro de estos propósitos. En este artículo se describe una experiencia de innovación curricular en un curso de matemáticas en la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia y se hacen algunas reflexiones con respecto a este proceso de cambio.

Se trata del curso *Matemáticas, Ciencia, Sociedad*, conocido en la Universidad de los Andes como MatebásicaMática y que, en lo que sigue se identificará como *Matebásica*. Durante los últimos ocho años un grupo de investigadores de "una empresa docente" y de profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad han venido trabajando de manera continua en el diseño de un nuevo currículo que, partiendo de visiones específicas de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje y de las metas de la educación matemática, ha producido, llevado a la práctica y evaluado parcialmente un diseño curricular que, en muchos aspectos, es diferente de los diseños de los cursos de matemáticas que se dictan en la Universidad. Este es un diseño que busca utilizar algunos aspectos de las matemáticas para crear situaciones didácticas en las que los estudiantes desarrollen capacidades y destrezas que sean importantes desde el punto de vista de su cultura y de su utilidad práctica tanto en su actividad académica, como profesional.

Este artículo presenta la historia de la problemática que dio lugar a la innovación curricular, los principios sobre los que se basó el nuevo diseño, una breve descripción del diseño, la forma como este diseño ha evolucionado en el tiempo, los principales resultados que se han obtenido y algunas reflexiones en torno a la innovación curricular.

Esta es evidentemente una *reconstrucción racional* de los hechos (Lakatos, 1978) particularmente porque nuestra relación con la educación matemática ha evolucionado durante los ocho años en los que se ha desarrollado la innovación. Durante la primera parte del proceso nosotros no sabíamos de la existencia de la educación matemática como disciplina preocupada de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ha sido durante la segunda mitad del proceso que hemos reconocido que algunas de nuestras ideas e intuiciones iniciales se ubicaban dentro de algunas de las categorías, conceptos y metodologías propuestos por la disciplina. Es en este sentido que haremos un recuento de la historia que no puede ignorar estas categorías, aún si, en su momento, nosotros no las conocíamos.

PROBLEMA

La Universidad de las Andes es una universidad privada en Bogotá, Colombia. Desde su fundación, la Universidad ha considerado que las matemáticas son un factor destacado en la búsqueda de su ideal de ofrecer una *formación integral* al estudiante. Es así como todos los estudiantes de la Universidad (con la excepción de los estudiantes de filosofía) deben tomar al menos un curso de matemáticas en su carrera. *Matebásica* es el primero del ciclo de cursos de matemáticas que deben tomar los estudiantes de carreras llamadas de Ciencias Sociales (antropología, ciencia política, psicología, derecho, lenguas, artes y textiles).

Este ciclo de cursos matemáticas para ciencias sociales ha buscado desde su creación que los estudiantes tengan una cierta *capacidad estadística*. Con esos propósitos, el curso *01103*, predecesor de *Matebásica*, era principalmente un repaso del álgebra escolar, centrado en el manejo simbólico de un conjunto de reglas y procedimientos. Durante mucho tiempo existió un alto grado de insatisfacción por parte de los diversos actores involucrados en el curso. Los estudiantes no veían una relación entre el curso y las necesidades de su carrera, no comprendían la función, ni los propósitos del curso y tenían grandes dificultades para tener éxito en él. La Universidad, las facultades y los departamentos involucrados manifestaban preocupación por un alto nivel de mortalidad y deserción. Para el Departamento de Matemáticas el curso era, al menos parcialmente, un "problema" que se solucionaba de manera simplista seleccionando un texto estándar de repaso del álgebra escolar y asignando profesores que no estaban necesariamente motivados, ni preparados para enfrentar una situación motivacional y didáctica compleja. El resultado era entonces una alta mortalidad y deserción, una insatisfacción general y un aprendizaje esencialmente algorítmico de carácter simbólico que se olvidaba rápidamente y que aportaba poco a la formación matemática e integral del estudiante.

Para aproximarnos al problema nos propusimos ver el curso como un *producto* que debería satisfacer las necesidades de unos *clientes*. Los clientes eran los departamentos y las facultades cuyos estudiantes tomaban el curso. Se realizó entonces una serie de entrevistas con los directores (jefes y decanos) de estos departamentos y facultades. Estas entrevistas buscaban elucidar las razones por las cuales los estudiantes debían tomar estos cursos y las ideas que estas personas tenían acerca de lo que el curso debía ofrecer a los estudiantes. Para nuestra sorpresa, estas personas aceptaban pasivamente la existencia de un curso que había hecho parte del currículo desde hacía mucho tiempo, expresaban poco interés y manifestaban poco conocimiento sobre el papel que el curso debería jugar en la formación de los estudiantes. Solamente un elemento era claro: el estudio de las matemáticas debería aportar para que el estudiante "fuese más lógico".

¿Qué se quiere decir con que el estudiante "fuese más lógico"? Quienes hacían esta frase encontraban grandes dificultades para explicarla. No obstante, nosotros tomamos esta idea como punto de partida para nuestro trabajo e iniciamos un proceso de innovación curricular centrado en una visión de las matemáticas, de su enseñanza y aprendizaje como medios para el desarrollo de las capacidades del estudiante para resolver los problemas complejos de las ciencias sociales.

En ese momento, nosotros éramos un pequeño grupo de matemáticos preocupados por la fobia de algunos estudiantes hacia las matemáticas y por la formación integral de este estudiante y el papel que el aprendizaje de las matemáticas podía jugar en ella. No teníamos conocimiento de la existencia de la educación matemática como disciplina y basábamos nuestro trabajo en nuestra experiencia y en nuestro conocimiento intuitivo del problema.

DISEÑO DE UNA SOLUCIÓN

Matebásica no es un curso de matemáticas en el sentido de que no se pretende que el estudiante "sepa" más matemáticas una vez ha finalizado el curso. Las matemáticas son un medio para aportar a la búsqueda de objetivos relacionados tanto con la capacidad del estudiante para resolver problemas complejos, como son los problemas de las ciencias sociales, como con su visión acerca de la naturaleza y utilidad de las matemáticas y de su proceso de enseñanza y aprendizaje. Desde un comienzo, el curso partió de una visión de las matemáticas como disciplina con un valor práctico y cultural, que podía servir de base para la construcción de la capacidad de modelaje del estudiante. Las matemáticas son, en muchas ocasiones, más que un tema de estudio, un tema de investigación, reflexión y discusión.

El diseño inicial de la solución partió también de una visión del aprendizaje en el que se enfatizaba tanto el trabajo individual del estudiante por fuera del salón de clase, como el valor de la discusión en el salón de clase. Con este esquema, basado en la discusión, se buscaba que fuesen los mismos estudiantes quienes, al formular conjeturas, asumir posiciones y debatir alrededor de ellas, vivieran una experiencia que aportase a la construcción de un conocimiento, de unas capacidades y destrezas y de unas creencias y actitudes que estuviesen más acordes con sus necesidades académicas, profesionales y formativas.

Desde el punto de vista de la enseñanza, se otorgó gran libertad al profesor. Se esperaba que él construyera su propia aproximación a la búsqueda de los objetivos y que esta aproximación estuviese basada en sus conocimientos, sus propias visiones y su compromiso con los estudiantes y con el proyecto mismo.

El diseño curricular que existe en la actualidad es el producto de una serie de iteraciones semestrales de un proceso en el que nuevas ideas se llevaban a la práctica, se observaba su funcionamiento dentro del salón de clase, se reflexionaba y discutía sobre estos resultados y esa reflexión daba lugar a nuevas ideas que serían implantadas el siguiente semestre. A lo largo del proceso descubrimos que este esquema de trabajo compartía varias de las características de la investigación - acción en educación (Kemmis & McTaggart, 1988; Mcniff, 1992; Mason, 1994). En este esquema, que continua siendo utilizado en la actualidad, participan tanto estudiantes (quienes hacen críticas y proponen ideas) como la mayoría de los profesores quienes, en muchos casos, desarrollan pequeños proyectos que dan lugar a nuevas propuestas para el curso (Gómez, C., 1994a; Castro, 1994 a). Es así como, en algunas ocasiones (particularmente durante los primeros años del proyecto), el libro de texto, como expresión de estas actividades, cambió sustancialmente de un semestre a otro. Este proceso iterativo de planificación, acción, observación, reflexión y nueva planificación ha estado apoyado por la capacidad editorial de “una empresa docente” que ha permitido, con gran rapidez y eficiencia, producir nuevos materiales a medida que las ideas y las propuestas se diseñan y se llevan a la práctica (Gómez P., 1994).

DISEÑO CURRICULAR

A continuación se hace una descripción del estado actual del diseño curricular del curso. En primer lugar, se describen las etapas del proceso en cuanto a la relación que el grupo de trabajo ha tenido con la educación matemática. En seguida, se presentan los principios sobre los que se ha basado el diseño. Finalmente, se presenta un bosquejo de los objetivos, el contenido, la metodología y la evaluación del curso.

Diseño curricular y educación matemática

El diseño curricular ha pasado por tres etapas claramente diferenciadas en cuanto al papel que la educación matemática ha jugado en ellas. Hay una etapa inicial, de aproximadamente tres años, en la que quienes nos encontrábamos involucrados éramos ignorantes de la existencia de la educación matemática como disciplina y trabajábamos basados en nuestro entusiasmo y nuestras intuiciones. Una segunda etapa en la que iniciamos un contacto con la educación matemática y trabajamos basados en la experiencia que ya habíamos adquirido durante los años anteriores. Finalmente, una tercera etapa, en la que nos encontramos actualmente, que ha dado lugar a una mayor consolidación y conceptualización con base en nuestros conocimientos de algunas de las teorías y metodologías de la educación matemática.

Visiones

Se ha tenido una posición hacia las matemáticas como una construcción social abierta a la experimentación, a la formulación y contrastación de conjeturas y a la búsqueda de un consenso basado en la discusión. Veíamos que el aporte de la interacción entre el profesor y el estudiante alrededor del conocimiento matemático giraba alrededor de la *capacidad de modelaje*. Vemos el modelaje como punto de partida de la capacidad del estudiante para identificar, definir, analizar, simplificar y resolver problemas complejos. En este sentido, buscábamos crear espacios dentro de los cuales los estudiantes pudiesen desarrollar algunas de las capacidades que nosotros habíamos logrado en nuestra actividad académica como estudiantes de matemáticas. Veíamos las matemáticas como una herramienta para comprender el entorno y como un elemento importante de la cultura del individuo. No veíamos las matemáticas exclusivamente como un cuerpo de conceptos estructurados en el que es posible justificar plenamente las afirmaciones que se hacen, ni como un conjunto de reglas y procedimientos con los que se pueden resolver ejercicios matemáticos específicamente diseñados para esas reglas y procedimientos.

Desde hace algo más de tres años hemos reconocido que, desde un comienzo, asumimos una posición constructivista con respecto al aprendizaje de las matemáticas (Kilpatrick, 1987; Ernest, 1992). Esta posición se expresó en la importancia que le dimos a la discusión en el salón de clase y al papel que se asignó a la argumentación y a la búsqueda del consenso dentro de esta discusión. Buscábamos que el estudiante viviera una experiencia gracias a la cual pudiese desarrollar las destrezas y habilidades que hacían parte de los objetivos del curso. Por otra parte, hemos trabajado basados en una visión intuitiva de los procesos de comprensión que se encuentran involucrados en la construcción de este tipo de conocimiento matemático (Klaoudatos, 1994). Nos hemos preocupado poco (aún en la actualidad) por indagar juiciosamente acerca de los obstáculos y dificultades cognitivos que pueden estar involucrados en este tipo particular de aproximación a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, veíamos al estudiante como alguien que odiaba las matemáticas, que tenía una formación matemática deficiente y que estaba muy poco interesado por el tema. Esta visión ha evolucionado con el tiempo y la motivación del estudiante ha dejado de basarse en esquemas lúdicos para concentrarse tanto en la relación que el curso puede tener con las necesidades académicas y profesionales del estudiante, como en la participación del estudiante en los diversos aspectos curriculares del mismo (Valero, 1995 a).

Estas posiciones con respecto al estudiante y a su proceso de aprendizaje de las matemáticas se han expresado también en una posición con respecto al papel del profesor dentro del proceso de enseñanza. Dado que se busca que el estudiante viva una experiencia al relacionarse con el conocimiento matemático, el profesor ha jugado, en general, un papel de creador de situaciones dentro del salón de clase que den lugar a esta vivencia. De esta forma, el profesor, teniendo una gran libertad para diseñar estos espacios de acuerdo a sus visiones y capacidades, ha sido un guía, un facilitador y un moderador de una discusión en la que se valora la formulación de conjeturas, la diversidad de posiciones y las capacidades de comunicación dentro de un proceso de argumentación en la búsqueda de un consenso.

Objetivos

Los problemas de las ciencias sociales son problemas complejos. La solución de estos problemas requiere la construcción de modelos que permitan simplificar esa complejidad con el propósito de analizarla y evaluar alternativas de solución. La capacidad para caracterizar estos sistemas complejos, a través de sus principales elementos y relaciones en un modelo, es una capacidad que debe ser desarrollada por el individuo. *Matebásica* tiene como objetivo principal la formulación de situaciones didácticas, basadas en algunos aspectos de las matemáticas, a través de las cuales el estudiante encuentre un espacio dentro del cual pueda desarrollar estas capacidad de modelaje y resolución de problemas complejos.

Matebásica tiene otros objetivos complementarios. Se considera importante que estos estudiantes de ciencias sociales reconozcan y entren en contacto con algunos aspectos de la cultura científica y matemática. Es así como se busca que el estudiante se aproxime al método científico (de las ciencias naturales) y reflexione acerca de su papel en la resolución de problemas. También se pretende que el estudiante entre en contacto con algunos temas de la historia y la filosofía de las matemáticas como medio para reflexionar y discutir acerca de ellas. Finalmente, se hace énfasis en la estética como uno de los criterios de selección entre alternativas de solución a un problema.

Contenido

La estructura básica del contenido de *Matebásica* se ha mantenido a lo largo de la evolución del diseño curricular. Esta estructura está compuesta por cuatro dimensiones que hemos llamado sistemas formales, ciencia, números y acertijos.

Sistemas formales

El tema *sistemas formales* se encuentra en el centro de la estrategia para crear espacios dentro de los cuales el estudiante pueda desarrollar su capacidad de modelaje. Con este tema se busca que el estudiante trabaje con diversas “realidades" (sistemas de números, fractales, lenguaje, por ejemplo) que puedan ser modeladas parcialmente por sistemas formales sencillos, dentro de un proceso bi-direccional (del sistema formal a la realidad y viceversa) en el que se hace explícita la necesidad de identificar tanto el lenguaje formal, los axiomas y las "reglas de deducción" (o reglas de producción de teoremas) del sistema formal, como el esquema de interpretación y la manera como se puede definir una relación entre teoremas del sistema formal y elementos de la realidad.

Para iniciar este proceso, utilizamos una versión simplificada del *Acertijo de MU* (Hofstadter, 1979) dentro de un esquema lúdico que le permite al estudiante tener una comprensión inicial intuitiva de conceptos como axioma, regla de deducción, teorema y demostración, entre otros. Partiendo de este conocimiento inicial, trabajamos cada tema buscando que el estudiante perciba como, gracias a la definición de un lenguaje, de unos axiomas, de unas reglas de deducción y de un esquema de interpretación, es posible modelar partes de una "realidad". Es así como, por ejemplo, partiendo de ideas básicas de la gramática generativa (Chomsky, 1962) inducimos al estudiante a modelar parte del lenguaje natural (primero los sintagmas nominales, después los adjetivos y los artículos, para llegar a los sintagmas verbales).

Sistemas formales se basa en un supuesto de transferencia (Singley & Anderson, 1989): que el trabajo en diversos sistemas formales y su correspondiente modelización puede permitir al estudiante la identificación de aquello que es común a esos sistemas formales y sus correspondientes realidades. Esto es, que el estudiante puede percibir que en todos los casos él está modelando la realidad gracias a una herramienta que permite identificar los principales elementos y las principales relaciones entre ellos que caracterizan la "esencia" de la realidad en cuestión. Y es con base en la reflexión acerca de las características comunes de las experiencias que él ha vivido en estos temas, que introducimos una nueva herramienta para el modelaje de realidades y problemas mucho más complejos: las realidades y los problemas sociales. Esta aproximación se fundamenta en ideas básicas del *análisis sistémico* (Parsons, 1981). Con ella se busca que, dada una realidad social, un problema asociado a ella (por ejemplo, el narcotráfico en Colombia) y una serie de restricciones provenientes de esa realidad, el estudiante identifique un conjunto de alternativas posibles de solución y, gracias a la construcción de un modelo de la realidad, pueda evaluar la "bondad" de cada una de estas alternativas con respecto a los criterios de selección. Este esquema permite, entre otras cosas, que temas que en general inducen a discusiones bizantinas, puedan ser analizados de manera racional dentro de un espacio en el que las posiciones ideológicas de los participantes se hacen explícitas (Gómez P., 1991a, b; Gómez C. & Gómez P., 1992).

Finalmente, *sistemas formales* también nos permite crear un espacio dentro del cual el estudiante reformula su visión personal acerca de las matemáticas. Al inventar nuevos sistemas formales, demostrar teoremas dentro de ellos y buscar interpretar estos teoremas con el propósito de modelar una realidad, el estudiante no solamente vive explícitamente el aspecto formal de la actividad del matemático puro, sino que también experimenta aspectos de la actividad del matemático aplicado y del científico que utiliza las matemáticas.

Ciencia

Utilizamos la reflexión y la discusión acerca del método científico de las ciencias naturales con el propósito de apoyar el desarrollo de la capacidad del estudiante para resolver problemas. Con el tema *ciencia* no se busca que el estudiante tenga una mayor cantidad o profundidad de conocimientos científicos. Se pretende, más bien, diseñar situaciones en las que se reflexione acerca de la forma como la humanidad ha construido su comprensión acerca de su entorno y de ella misma, dentro de un proceso racional y metódico. Cada uno de los temas (la historia de la astronomía, de la física mecánica y relativista, de la bioquímica, por ejemplo) se mira como un *problema* al que la comunidad científica le ha dado solución y se busca reflexionar acerca del procedimiento utilizado (el método científico) y de los obstáculos y dificultades que la humanidad ha tenido para llegar a las teorías actuales. Trabajamos el tema *Ciencia* con base principalmente en lecturas de *Cosmos* (Sagan, 1987) y el *Ascenso del Hombre* (Bronowski, 1973).

Números

"Es posible argüir que […] la principal razón para la existencia de los matemáticos es para que resuelvan problemas y que ésto, por consiguiente, es en lo que realmente consisten las matemáticas: problemas y soluciones" (Halmos, P., 1980, p. 519, citado en Schoenfeld, A., 1992). El tema de números mira las matemáticas como un conjunto de problemas y soluciones y busca inducir a los estudiantes a la reflexión acerca de ellas a través de la lectura, la investigación y la discusión sobre algunos temas particulares relacionados con la historia de los sistemas de números. Partiendo de la historia de los números naturales, se llega a la reflexión acerca del concepto de infinito. Se busca que, de la misma forma que se insinuó para el tema *Ciencia*, con este tema los estudiantes puedan reflexionar y discutir acerca de la forma como los matemáticos (junto con los filósofos y los artistas, entre otros) se han aproximado a diversos problemas y han propuesto soluciones para ellos.

Acertijos

En este último tema se presentan problemas de diversos tipos (aritméticos, algebraicos, estadísticos, lógicos, verbales) para los que el estudiante no conoce un método estándar de solución (Castro, 1994 c). Se introduce entonces, de manera explícita, la reflexión acerca de la resolución de problemas y de las heurísticas, utilizando, ideas de Polya (1945) y Schoenfeld (92), entre otros.

Interacción de las dimensiones

Al comienzo del diseño, los temas se trataban de manera independiente en el curso. Sin embargo, a medida que la resolución de problemas, por un lado, y la preocupación por los aspectos culturales, por el otro, fueron consolidándose en el diseño, fue posible percibir e introducir explícitamente gran cantidad de conexiones entre estas cuatro dimensiones. Es así como, a partir de un momento dado, estas cuatro dimensiones se tratan simultáneamente a lo largo del semestre. Temas, por ejemplo, como el infinito, se convirtieron en temas transversales que pueden ser vistos y discutidos desde perspectivas diferentes pertenecientes a cada una de las dimensiones. Por otra parte, el trabajo continuo de profesores e investigadores ha dado lugar a que se disponga de más material del que se requiere para un semestre junto con un banco de problemas informático. De esta forma, cada semestre es posible, con base en los mismos objetivos, diseñar diferentes secuencias de contenido.

Metodología

Nuestras visiones acerca de las matemáticas y del aprendizaje, nos indujeron a una visión de la enseñanza que implicaba esquemas particulares del manejo de clase. Estos esquemas se diferenciaban, en la mayoría de los casos, de los esquemas tradicionales que se utilizan dentro de nuestra universidad. Hemos considerado la *discusión en el salón de clase* como el elemento central de la interacción entre los estudiantes y el profesor alrededor del conocimiento matemático. Hemos buscado que este esquema de discusión se base en la búsqueda de un consenso en el grupo. Este consenso se debe construir a partir de la formulación de posiciones y conjeturas diversas. Estas posiciones personales deben ser sustentadas racionalmente con base en la experimentación, la argumentación y la contrastación de las conjeturas.

Para que sea posible generar estos espacios de discusión, se espera que el estudiante haga un trabajo previo a la hora de clase que lo introduzca en el tema que será objeto de discusión y lo induzca a asumir una posición con respecto a éste. Para estos efectos, el estudiante conoce de antemano el trabajo que debe hacer en su casa. Este trabajo puede ser tanto de carácter individual y privado, como de colaboración con algunos compañeros.

El profesor juega obviamente un papel significativo en la creación y manejo de estos espacios de discusión. El debe asumir un papel de guía, moderador, incitador y facilitador de la discusión y debe hacer esfuerzos para evitar asumir el papel tradicional de transmisor de información. El debe buscar que la discusión se construya sobre una base racional en la que las posiciones que se propongan puedan ser contrastadas con base en argumentos suficientemente sólidos.

Es evidente que no es posible desarrollar todas las horas de clase alrededor de una discusión. Es así como también hay exposiciones del profesor, exposiciones de los estudiantes, trabajo individual y en grupos y momentos de *institucionalización* (Perrin-Glorian, 1994), entre otros.

Se ha desarrollado un conjunto de programas de computador que apoyan algunos de los aspectos relacionados con la dimensión *sistemas formales*. Estos programas, los *Didactigramas matemáticos* (Gómez P. & Gómez C., 1990; Gómez, P., 1993) le permiten al estudiante trabajar en el medio informático algunos de estos temas, dentro de un espacio en el que, además de aprovechar las potencialidades del computador para simplificar algunas de las actividades mecánicas que se encuentran involucradas, se delimita la problemática particular y se utilizan múltiples sistemas de representación de una manera dinámica difícil de lograr con el lápiz y el papel.

Evaluación

La evaluación juega en la actualidad un papel central en el diseño curricular. Sin embargo, al comienzo del proceso no éramos conscientes de la importancia de este elemento dentro del funcionamiento del sistema curricular (Rico, 1990). Partimos, en todo caso, de unos principios básicos relacionados con la evaluación. Los esquemas de evaluación y valoración sirven para generar el sustrato de las discusiones (inducen al estudiante a hacer un trabajo que da lugar a las discusiones en el salón de clase). El estudiante se valora por su trabajo y compromiso, más que por unas calificaciones en unas pruebas específicas, de tal forma que, con el complemento de una nota apreciativa, se tiene en cuenta la heterogeneidad de los estudiantes. La evaluación no se utiliza exclusivamente para clasificar a los estudiantes con propósitos de promoción. Ella es más un medio de comunicación a través del cual los estudiantes le informan al profesor acerca de sus dificultades e intereses y el profesor informa a los estudiantes acerca de lo que él considera importante. En este sentido, la evaluación (tanto formal –pruebas escritas que pueden ser valoradas–, como informal –en la interacción en salón de clase–) aporta a la construcción del *contrato didáctico* (Brousseau, 1986).

Se utilizan diversos esquemas formales de trabajo. Las *tareas* juegan un papel central en la preparación que el estudiante hace de los temas que serán discutidos posteriormente en el salón de clase (Castro, 1994 b). Los estudiantes adoptan diversas posturas con respecto a las tareas. Por un lado, rechazan la obligación de hacer un trabajo diario y, por el otro, reconocen la importancia y la utilidad de hacerlo. Algunos profesores han introducido un esquema de tareas semanales más complejas. Los *quices* son pequeñas pruebas escritas (veinte minutos) que se realizan semanalmente (Valero, 1995 b). Los quices permiten que se dé una comunicación directa entre el profesor y los estudiantes. Los *trabajos de investigación* son un esquema que ha aportado al curso. Cada estudiante pertenece a un grupo que debe realizar una investigación sobre un tema particular. El grupo debe presentar un reporte escrito y hacer una presentación oral. Ellos tienen además la responsabilidad de diseñar y manejar toda la interacción durante la hora de clase. Este trabajo de investigación se realiza con la colaboración del profesor quien se reune varias veces con el grupo durante el período de preparación del trabajo. Los estudiantes hacen investigación y viven, al menos parcialmente, una experiencia de resolución de problemas de este tipo. Se realizan también pequeños trabajos en grupo (talleres) durante la hora de clase, tres o cuatro exámenes parciales durante el semestre y un examen final. Tanto los parciales, como el final tienen una característica común: son un conjunto de problemas para los cuales los estudiantes no conocen una estrategia de solución, que requieren tomar decisiones y que no tienen una única solución, ni una única forma de resolverlos.

PROCESO, DIFICULTADES Y DEFICIENCIAS

El diseño curricular que se acaba de describir es el producto del trabajo de una gran cantidad de personas en el que, como ya se mencionó, se ha utilizado una versión intuitiva de los esquemas de la investigación - acción dentro del marco de un paradigma crítico de la investigación en educación (Kilpatrick, 1995). Sin embargo, la metodología de trabajo ha adolecido de dos grandes deficiencias con respecto a lo que debiera ser una indagación metódica dentro de un proceso de innovación curricular: la evaluación y la difusión.

Evaluación

El diseño ha sido evaluado de manera continua durante los ocho años de trabajo. Se han utilizado múltiples esquemas para realizar esta evaluación. Por una parte, y como elemento de la metodología de investigación - acción, la puesta en práctica de las diversas ideas y propuestas que han ido construyendo el diseño han sido evaluadas y discutidas por los profesores y los investigadores a medida que ellas se han realizado. No obstante, en este momento es evidente que éstas han sido evaluaciones intuitivas que no han partido de marcos conceptuales sólidos y que no han utilizado esquemas suficientemente apropiados de recolección y análisis de la información. La complejidad de las situaciones a evaluar, el deficiente conocimiento de las teorías y las metodologías de la investigación en educación matemática y la limitación de recursos (financieros y de tiempo) han sido algunas de las causas de esta deficiencia.

Los estudiantes han participado activamente en la evaluación del diseño y el desarrollo curricular del curso. Desde un comienzo se instituyó la realización de dos contactos directos por semestre del coordinador con los estudiantes de cada una de las secciones del curso. En estos contactos se han utilizado encuestas, ensayos abiertos y discusiones personales. Por otra parte, el coordinador realiza visitas periódicas a los profesores dentro de su clase y, en algunas ocasiones, se hacen grabaciones de video que son discutidas posteriormente con el profesor.

Se han hecho también evaluaciones más formales. El Departamento de Matemáticas realiza una encuesta adicional que "califica" el curso de acuerdo a una serie de aspectos curriculares. Por nuestra parte, nosotros hemos realizado algunos proyectos de evaluación (Mesa, 1993; Cardona, 1992). No obstante, tenemos la sensación de que no sabemos con suficiente objetividad la medida en la que el trabajo que se realiza con los estudiantes logra los objetivos que se ha impuesto. Esto puede ser debido, adicionalmente a las razones ya expuestas, a la formulación de unos objetivos demasiado generales y abstractos que no dan lugar a una evaluación objetiva y sistemática.

Difusión

Además de la publicación del libro de texto (Gómez P., 1993), de la guía del profesor (Gómez P., 1990b), de un documento descriptivo del proyecto ("una empresa docente", 1993), de los *Didactigramas matemáticos* (Gómez P., 1993) y de dos libros adicionales producto de la experiencia (Gómez P., 1991b; Gómez P. & Gómez C., 1992) el proyecto ha sido presentado, de manera parcial, en diversos foros nacionales e internacionales (Gómez P., 1990a, 1991a; Gómez C. & Gómez P., 1992; Gómez C., 1994a, 1994b; Castro, 1994 a, b, c, d). Y aunque, en este sentido, el proyecto ha estado abierto a la crítica, tenemos la sensación de que, por razón de nuestra ignorancia de la existencia de la comunidad de educación matemática y de nuestras propias restricciones –investigativas y de recursos–, el proyecto no ha sido objeto de tanta crítica como habría sido deseable.

RESULTADOS

Ya hemos mencionado la dificultad que hemos tenido para diseñar y realizar evaluaciones objetivas y sistemáticas del diseño curricular. Por esta razón, presentamos a continuación algunas de las sensaciones que el grupo de investigación ha percibido, a lo largo de la duración del proyecto, con respecto a sus principales efectos tanto al interior del curso como por fuera de él.

El curso ha tenido consecuencias evidentes en la visión que, tanto estudiantes, como profesores y directivos de la Universidad tienen acerca de la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Ya no es posible afirmar que hay una única manera de ver y enseñar las matemáticas en la Universidad de los Andes. Los estudiantes hacen patente esta percepción cuando comparan este curso con aquellos que cursaron en la escuela secundaria. Los profesores corroboran nuestras intuiciones al expresar sus dificultades para adaptarse a otro tipo de conocimiento matemático y a formas diferentes de ver el problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este cambio es también patente en los directivos de la Universidad, tanto cuando valoran el trabajo hecho, como cuando expresan sus críticas.

El curso se ha tenido convertido en un espacio de formación de profesores de matemáticas en el que se ha logrado que profesores experimentados y jóvenes se cuestionen acerca de sus creencias y actitudes y reflexionen acerca de su propia práctica (Gómez C., 1994a; Castro, 1994). Hemos recibido múltiples propuestas para la utilización del diseño curricular en otras instituciones educativas. Hemos sido muy cautelosos en nuestra reacción a esta demanda. La experiencia que hemos tenido dentro de la Universidad de los Andes ha validado una serie de conjeturas que resultan evidentes una vez se hacen explícitas. El diseño curricular por sí solo no puede ser la solución a los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las personas y las instituciones son reacias al cambio, particularmente cuando este cambio afecta sus creencias y su práctica. Es así como hemos identificado una serie de obstáculos y dificultades en la realización del proyecto.

Obstáculos y dificultades

La innovación genera obstáculos. El curso difiere sustancialmente de los otros cursos de matemáticas dentro de la Universidad. Las matemáticas se miran desde otra perspectiva que implica maneras diferentes de aproximarse al aprendizaje y a la enseñanza. Pero tanto estudiantes, como profesores y directivos están acostumbrados, conocen, saben manejar y esperan un curso basado en esquemas tradicionales.

Consideramos que el profesor es el eje central de esta problemática. El curso impone unas exigencias sobre el nuevo profesor que se encuentran muy alejadas de su conocimiento matemático y didáctico, de sus creencias acerca de las matemáticas, del aprendizaje y de la enseñanza, de su propia experiencia docente y de su disponibilidad de tiempo (Artigue, en prensa). Por esta razón, dedicamos gran parte de nuestro esfuerzo a la capacitación de profesores, actividad en la que tenemos relativo éxito.

El éxito lo logramos en algunos profesores jóvenes que están dispuestos a tomar el curso como un reto, a invertir gran cantidad de tiempo y a cuestionarse y reflexionar acerca de sus visiones y de su práctica. Este esfuerzo lo hacemos utilizando múltiples estrategias que se basan todas ellas en la propia experiencia que el profesor vive al dictar el curso. Fomentamos la discusión y la reflexión sobre estas experiencias en los espacios de coordinación. Inducimos a los profesores a desarrollar pequeños proyectos de innovación curricular para el curso y los apoyamos en sus deseos de profundizar en su conocimiento de la educación matemática. Buscamos, ante todo, que el profesor se sienta partícipe del proyecto global y que perciba que hace parte de un grupo de profesionales que continua trabajando en la búsqueda de unos objetivos específicos. Pero, como ya se mencionó, esto no se logra en todos los casos. Muchos profesores no tienen el tiempo necesario (mucho mayor que el requerido por un curso tradicional). Por otra parte, una vez que han vivido la experiencia, algunos de ellos prefieren apoyarse en ella para dictar otros cursos o trabajar en otras instituciones.

La actitud del estudiante es otro de los puntos que han dificultado el proceso. El estudiante espera un curso de matemáticas similar a los que ya conoce y para los que ha desarrollado estrategias que le permiten tener relativo éxito. Se genera entonces un conflicto en el que el estudiante considera que el curso no tienen la suficiente profundidad puesto que no se acomoda a sus propias creencias acerca de la naturaleza, la utilidad, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Por otra parte, hemos tenido dificultades en lograr que el estudiante perciba la relación de este curso con su carrera académica y profesional. Esta es una situación natural dado que éste es un curso de primer semestre y, por lo tanto, el estudiante no conoce todavía las exigencias de su carrera.

Nuestra relación con el Departamento de Matemáticas también ha sido difícil. Aunque, en un comienzo, se nos permitió experimentar con plena libertad (producto tal vez de la poca importancia que se le daba al curso), en la actualidad, cuando hemos pretendido adaptar algunas de las experiencias a otros cursos de mayor importancia para el Departamento, la reacción no ha sido la misma. Y, aunque el mismo Departamento ha adoptado algunos de nuestros esquemas y propuestas en otros cursos, es evidente que existe, de nuevo, un conflicto de creencias y actitudes acerca de qué son las matemáticas, cómo se aprenden y cómo se deben o se pueden enseñar. Consideramos que esta es una actitud más o menos natural consecuencia de un cierto desprecio, por parte del matemático puro, hacia la educación matemática como disciplina.

Por otra parte, el entorno (colegios y otras universidades) ha reaccionado positivamente a esta propuesta. El libro de texto, los programas de computador y la guía del profesor se utilizan de diversas formas en muchas instituciones educativas. En la mayoría de los casos estos materiales complementan los diseños curriculares ya establecidos. Nosotros hemos sido reacios a que se utilice la totalidad del diseño curricular como parte de los programas de estas instituciones.

Beneficios

El proyecto ha generado múltiples beneficios para "una empresa docente". Este centro de investigación en educación matemática se creó con base en este proyecto. Fue gracias a él que tuvimos la oportunidad construir un espacio de trabajo en el que ha sido posible proponer, experimentar y evaluar nuestras ideas acerca de la enseñanza de las matemáticas y, de esta forma, desarrollar una intuición inicial acerca de la problemática de la educación matemática. Con base en esta experiencia, hemos desarrollado, de manera natural, el interés por conocer y utilizar algunas de las teorías y metodologías de esta disciplina. Tuvimos suerte puesto que la Universidad y el Departamento de Matemáticas no impidieron la realización de estos experimentos aún si ellos entraban en conflicto con las visiones más tradicionales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

CONCLUSIONES

Innovación curricular

Matebásica nos ha dejado una serie de enseñanzas relacionadas con el proceso de innovación curricular en matemáticas. Para que una innovación curricular (que vaya más allá de la realización de pequeños cambios en un currículo establecido) pueda surgir y consolidarse es necesario que ella haga parte de un proceso de cambio de carácter general. Pero tanto las personas, como las instituciones son reacias al cambio. Y, aunque las críticas y las discusiones que se dan a este respecto pueden estar centradas en cuestiones aparentemente menores, la realidad es que el conflicto se da a un nivel más profundo: el de las creencias. Innovaciones curriculares como *Matebásica* se basan en visiones poco tradicionales de la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza, de su aprendizaje y de las metas de la educación matemática. Estas visiones son diferentes precisamente en el sentido de que entran en conflicto con las visiones de la mayoría de los actores involucrados. Este conflicto gira alrededor de cinco ejes: el grupo innovador, los profesores, los estudiantes, la institución y el entorno.

En muchos casos es posible que el grupo innovador no sea consciente de que su trabajo está sustentado por nuevas visiones. Esto implica, como fue nuestro caso durante un buen tiempo, que el grupo no comprenda (y, por consiguiente, no sepa cómo manejar) las dificultades y los obstáculos que encuentra en el proceso de cambio que quiere establecer. Una vez que el grupo innovador identifica que buena parte del conflicto proviene de una diferencia en las visiones, le es posible comprender las dificultades, aunque no necesariamente resolverlas.

Al ser el responsable del desarrollo de la innovación curricular dentro del salón de clase, el profesor es una pieza central de la problemática de la innovación curricular. El profesor podrá manejar con éxito su interacción con el estudiante alrededor del conocimiento matemático solamente cuando las decisiones que él toma en el salón de clase sean producto de visiones personales coherentes con las visiones que dieron lugar a la innovación. Pero el cambio de visiones es un proceso muy lento y, en muchas ocasiones, doloroso del que, en el mediano plazo, sólo se puede esperar la generación de un estado de cuestionamiento por parte del profesor (Thompson, 1992).

La reacción del estudiante al nuevo diseño curricular resulta particularmente difícil de manejar especialmente si este problema debe ser manejado por un profesor que también se encuentra en conflicto con este diseño y con las visiones que lo sustentan. El estudiante tiene muchos años de experiencia con un cierto tipo de matemáticas y con una cierta forma de aprenderlas y esta experiencia ha generado en él un sistema particular de creencias (Schoenfeld, 1992). El contacto con otras formas de hacer las cosas genera una situación de incertidumbre en el estudiante y, en muchas ocasiones, una actitud negativa hacia el curso. El éxito en el manejo de esta situación depende de manera muy directa del profesor y de la forma como él aporta a la construcción de un contrato didáctico apropiado.

La interacción con los matemáticos puros pertenecientes a la institución es de otro tipo. Ellos perciben claramente que el diseño y el desarrollo curricular de la innovación es diferente de lo que ellos hacen en sus clases. Con base en su experiencia docente y en su conocimiento de las matemáticas, algunos de ellos pueden construir argumentos críticos a la innovación que tienden a resaltar aspectos superficiales de la misma. El conflicto, y la consecuente discusión que se establece, resulta particularmente difícil de manejar dado que su posición ideológica (visiones) se encuentra fuertemente establecida y que, aún sin conocer las teorías y las metodologías de la educación matemática, algunos de ellos consideran que tienen plena autoridad en el tema.

El entorno, en nuestro caso, las directivas de la Universidad, tiende a tener una variedad de reacciones. Por una parte, aprecian los esfuerzos que se hacen para atacar los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, se sorprenden cuando perciben que los resultados no son tan inmediatos ni tan positivos como ellos esperaban. Las instituciones educativas que se interesan en el diseño curricular esperan encontrar una solución inmediata a sus propios problemas y se sorprenden cuando se les sugiere que el proceso de cambio debe tener lugar al interior mismo de la institución y que la innovación curricular debe ser principalmente un medio para generar un cuestionamiento de las creencias y de la práctica de los actores involucrados en el problema.

Educación matemática e innovación

El grupo de trabajo ha vivido una evolución en su relación con la educación matemática a lo largo del desarrollo del proyecto. Su ignorancia inicial de la educación matemática como disciplina le permitió expresar libremente sus ideas y crear un espacio amplio de experimentación y discusión. Esto habría sido difícilmente posible si, en ese momento, hubiésemos partido de una estructura conceptual pre - establecida de la problemática que queríamos atacar. Por otra parte, el paulatino contacto que el grupo ha tenido durante los últimos años con la educación le ha permitido organizar y dar coherencia al producto de esas ideas iniciales. Además, el grupo ha podido utilizar su conocimiento de la educación matemática como medio para comprender y sistematizar su propio trabajo, y para identificar y abordar las dificultades y obstáculos que se presentan en el camino.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M.; et al. (Eds.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Paris: La Pensée Sauvage.

Artigue, M. (En prensa). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería didáctica en matemáticas*. Bogotá: "una empresa docente".

Bronowski, J. (1973).*El ascenso del hombre*. México: Addison - Wesley Iberoamericana.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2) pp. 33-115.

Cardona, D. (1992). *Sistemas formales. Evaluación*. "una empresa docente": documento de trabajo.

Castro, M. (1994 a). La coordinación: un esquema de formación de profesores. Cali: *Reunión de la Red Colombiana de Investigadores en Educación Matemática*.

Castro, M. (1994 b). Las tareas como instrumento de evaluación didáctica. *Boletín del Club EMA*. 6.

Castro, M. (1994 c). Una experiencia en la resolución de problemas. *Boletín del Club EMA*. 5.

Castro, M. (1994 d). Propuestas alternativas para la enseñanza de las matemáticas. *Coloquio Caldense de Física y Matemáticas*. Manizales.

Chomsky, N. (1962). Explanatory models in linguistics. En Nagel, E.; Suppes, P. & Tarski, A. E. (Eds.) *Logic, methodology and philosophy of science*. Stanford: Stanford University.

Ernest, P. (1992). The nature of Mathematics: Towards a social constructivist account. *Science & Education*. 1 pp. 89-100.

Ernest, P. (1994). A perspective on research in mathematics education. En ICMI (Ed.) *What is research in mathematics education and what are its results?*. Washington: ICMI.

Gómez, C. & Gómez, P. (1992). Modelling a real situation. *ICME 7*.

Gómez, C. (1994 a). Experiencia en formación de profesores. *II Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Blumenau.

Gómez, C. (1994 b). Un curso de matemáticas para ciencias sociales. *II Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Blumenau.

Gómez, P. (1990 a). Formal Systems Informally. Solving Problems through the Construction of Models. *Pacific University Consortium Conference*.Vancouver.

Gómez, P. (1990 b). *MatebásicaMática. Guía del profesor*. Bogotá: una empresa docente.

Gómez, P. (1990 c). *MatebásicaMática*. Bogotá: una empresa docente.

Gómez, P. (1990 d). Didactigramas matemáticos. *Informática Educativa*. 3 (2) pp. 153-162

Gómez, P. (1991 a). Sistemas formales, informalmente. Las matemáticas como herramienta para la resolución de problemas. En UNESCO (Ed.) *Memorias del primer congreso iberoamericano de educación matemática*. París: UNESCO.

Gómez, P. (1991 b). *Profesor: no entiendo*. Bogotá: un empresa docente.

Gómez, P. & Gómez, C. (1992). *Sistemas formales, informalmente. ¿Por qué intentaron formalizar a la matemática, si era tan buena muchacha?* Bogotá: una empresa docente.

Gómez, P. (1993). Didactigramas matemáticos. En Apple Computer (Ed.) *Acceso 2.0*. Cupertino: Apple Computer.

Gómez, P. (1994). “una empresa docente”. Una empresa de educación matemática en Colombia. *Memorias del II Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. pp. 202-203

Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly*. 87 pp. 519-524

Hofstadter, D. R. (1979). *Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid*. Londres: Penguin.

Kemmis, S. & McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación - acción*. Barcelona: Laertes.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematcis education. En Bergeron, J. C.; Herscovics, N. & Kieran, C. (Eds.) *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal: Université de Montreal.

Kilpatrick, J. (1995). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En Kilpatrick, J.; Rico, L. & Gómez, P. (Eds.) *Educación Matemática*. Bogotá: una empresa docente.

Klaoudatos, N. (1994). Modelling-orientated teaching (a theoretical development for teaching mathematics through the modelling process). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* 25(1) pp. 69-80

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology.* Cambridge: Cambridge University.

Mason, J. (1994). Researching from the inside in mathematics education. En ICMI (Ed.) *What is research in mathematics education and what are its results?*. University of Maryland: ICMI.

Mcniff, J. (1992). *Action research. Principles and practice*. London: Routledge.

Mesa, V. M. (1993). *Evaluación del ciclo de ciencias sociales*. “una empresa docente”: documento de trabajo.

Parsons, T. (1981). Social systems. En Grusky, O. & Miller, G. (Eds.) *The sociology of organization*. Londres: The Free Press.

Perrin-Glorian, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. En Artigue, et. al. (Eds.) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Paris: La Pensée Sauvage.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. London: Open University.

Rico, L. (1992). Evaluación en el sistema educativo español: el caso de las matemáticas. *Suma*. 10 pp. 15-24

Sagan, C. (1987)*Cosmos*. Barcelona: Planeta.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Singley, M. K. & Anderson, J. R. (1989). *The transfer of cognitive skill*. London: Harvard University.

Thompson, A. G. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

"una empresa docente" (1993). *Matemáticas y sociedad*. una empresa docente: documento de trabajo.

Valero, Paola (1995 a). El modelaje aplicado a la comprensión de problemas sociales. *IX CIAEM*. Chile.

Valero, Paola (1995 b). *Esquemas alternativos para el manejo de las tareas en Matebásica*. “una empresa docente”: documento de trabajo.

UN CURSO DE MATEMATICAS PARA CIENCIAS SOCIALES

Mauricio Castro – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

Matebásica es el primer curso de matemáticas para estudiantes de ciencias sociales de la Universidad de los Andes. Uno de los objetivos principales de este curso es aportar a mejorar la capacidad de argumentación y análisis del estudiante, ofreciéndole un espacio para la discusión y reflexión de temas científicos, históricos, filosóficos y sociales relacionados con las matemáticas. Las actividades planteadas en el curso junto con un esquema innovador de evaluación, exigen una gran interacción del estudiante con sus compañeros, con el profesor, con las fuentes de información y con él mismo, para construir su propio conocimiento y ser capaz de comunicarlo. Los resultados que hasta ahora se han percibido en este curso, muestran una nueva visión de los estudiantes hacia las matemáticas, una metodología y unos esquemas de evaluación innovadores y un espacio de formación para el estudiante y para el profesor.

ANTECEDENTES

El proyecto "Matemáticas, Ciencia y Sociedad" se ha desarrollado en la Universidad de los Andes, desde enero de 1987. Surgió al interior del Departamento de Matemáticas de la Universidad, como respuesta a inquietudes en relación con la utilización del primer curso de matemáticas básicas como medio para aportar a la formación integral de un estudiante con conciencia social.

El proyecto se ha desarrollado dentro de un esquema de investigación-acción en el que se han producido nueve versiones diferentes del curso y de los materiales sobre los cuales se basa, versiones éstas que se han alimentado de las críticas y comentarios de estudiantes y profesores.

En la actualidad el proyecto se está aplicando en la Universidad de los Andes como el primer curso de matemáticas para más de 200 estudiantes de primer semestre de Ciencia Política, Derecho, Antropología, Artes y textiles, Música, Psicología, Lenguas modernas y Bacteriología.

LA FILOSOFÍA

La misión del proyecto Matemáticas, Ciencia y Sociedad es consecuencia de la misión de la Universidad de los Andes: la formación integral de un estudiante que sea consciente de su responsabilidad social.

Esta misión se expresa en el proyecto a través del ideal de aportar a la formación integral del estudiante por medio de las matemáticas.Este ideal determina un conjunto de objetivos de formación y de información que se refieren al desarrollo de la capacidad del estudiante para identificar, enfrentar, analizar y resolver problemas.

En este sentido, compartimos la visión de Shoenfeld según la cual:

La instrucción matemática debería dar a los estudiante un sentido de disciplina -un sentido de su alcance, poder, uso e historia. Debería darles un sentido de lo que son las matemáticas, cómo se hacen, en un nivel apropiado para que los estudiantes puedan experimentar y entender. Como resultado de estas experiencias instruccionales, los estudiantes deberían aprender a valorar las matemáticas y sentir confianza en su habilidad para hacer matemáticas.

La instrucción matemática debería desarrollar la comprensión de los estudiantes de conceptos importantes en un contenido apropiado. La instrucción debería estar dirigida al entendimiento conceptual más que a desarrollar destrezas puramente mecánicas, y a desarrollar en los estudiantes la habilidad de aplicar la materia que ellos han estudiado con flexibilidad y variedad.

La instrucción matemática debería proveer a los estudiantes de oportunidades para explorar una gran cantidad de problemas y situaciones problemáticas, variando de ejercicios a problemas abiertos y situaciones exploratorias. Debería dar a los estudiantes una gran cantidad de aproximaciones y técnicas (desde la aplicación estricta de métodos algorítmicos apropiados, hasta métodos de aproximación; varias técnicas de modelaje y el uso de estategias heurísticas de resolución de problemas) para manejar esos problemas.

La instrucción matemática debería ayudar a los estudiantes a desarrollar lo que llamaríamos “un punto de vista matemático” -una predilección por analizar y entender, por percibir estructuras y relaciones estructurales, por ver cómo se relacionan las cosas.Debería ayudar a los

> *estudiantes a desarrollar sus destrezas analíticas y su habilidad para razonar en argumentos de largas cadenas.*
>
> *La instrucción matemática debería ayudar a los estudiantes a desarrollar precisión en presentaciones orales y escritas. Debería ayudarles a aprender a presentar sus análisis en argumentos claros y coherentes que reflejen el estilo matemático y la sofisticación apropiada de su nivel matemático. Los estudiantes deberían aprender a comunicarse entre ellos y con otros usando el lenguaje matemático.*
>
> *La instrucción matemática debería ayudar a los estudiantes a desarrollar su habilidad para leer y usar textos y otros materiales matemáticos. Debería preparar a los estudiantes para convertirse, tanto como sea posible, en aprendices independientes, que interpreten y usen las matemáticas (Schoenfeld, 1990).*

Las matemáticas generan una formación que consiste principalmente en una manera de ver el mundo y aproximarse a las diversas situaciones que presenta el entorno. Esta visión no es infalible ni cubre todas las posibles situaciones. Sin embargo, hay algunas situaciones para las cuales la formación matemática es más eficiente.

Nuestra visión racional del mundo proviene de un cierto conocimiento científico acerca del comportamiento del entorno y del papel que juegan las matemáticas en el proceso de explicación y de predicción que las ciencias naturales hacen acerca del mundo. Pensamos que es la razón la que nos puede permitir solucionar, explicar o predecir diversas situaciones relacionadas con la naturaleza y se requiere entonces de un método racional que determine el proceso a seguir.

Podemos afirmar que hay tres factores que influyen en esta manera racional de abordar un problema: el método; la capacidad de abstracción y modelaje; y el sentido de la estética.

En cuanto al **método** esperamos que al estudiante no sólo se le presenten los diferentes métodos de resolución de problemas, sino que sea consciente de que existen y que son efectivos para aproximarse a la solución de una buena cantidad de problemas.

La **capacidad de abstracción** se refiere a la posibilidad de simplificar, manejar y solucionar problemas en ‘modelos’ de la realidad y poder después regresar a ella y darles un significado.

La **estética** es uno de los principales criterios para la selección entre diversas soluciones a un problema y es muy común entre los matemáticos. En cuanto a los estudiantes esperamos que este sentido se exprese en la elegancia del análisis de los problemas, de las argumentaciones que usen para sustentar una solución y de la presentación que hagan de ellas.

LAS HERRAMIENTAS

El hecho de que conozcamos los objetivos no significa que sepamos cómo podemos alcanzarlos dentro del contexto de nuestro curso. Hemos logrado determinar ciertas herramientas que esperamos nos permitan desarrollar una metodología que realice los objetivos propuestos. Estas herramientas son: el contenido del curso, el comportamiento del profesor en clase, el comportamiento del estudiante en clase, el manejo del trabajo del estudiante en casa y los recursos (texto, talleres, didactigramas).

El **contenido del curso** está dividido en cuatro grandes partes: sistemas formales, acertijos, números y ciencia. Cada uno tiene un objetivo pero el que realmente nos interesa es el que logramos al combinar los cuatro temas.

A través de los temas de Ciencia se discute sobre el objeto de la ciencia y sus métodos, presentando las matemáticas como una herramienta útil para el desarrollo científico. Al tomar las matemáticas como ciencia, se estudia el desarrollo histórico del concepto de número y la noción de infinito en el tema llamado Números. Los Sistemas Formales se presentan como un ejemplo de simplificación y modelaje de situaciones conocidas que es fácilmente transferible a problemas sociales y se trabaja el aspecto de resolución de problemas en el tema de Acertijos.

El **comportamiento del profesor** en clase determina el espacio en el cual se desarrolla la clase. Esperamos que se logre un ambiente de discusión en el cual el estudiante presente argumentos válidos que sustenten sus tesis y puedan ser criticados y comparados con libertad y responsabilidad. El profesor debe entonces generar y promover este comportamiento de los estudiantes.

El **comportamiento del estudiante**: queremos que el estudiante viva una experiencia que lo tranforme. Experiencia en que esperamos que primen tres aspectos: nos importa más el proceso que el resultado; queremos que el estudiante descubra más que reciba; la experiencia se vive a través de la discusión en clase.

Y para lograr esto es necessario el trabajo del estudiante en clase, que conozca los temas a tratar o que por lo menos haya reflexionado sobre ellos o se haya cuestionado sobre ciertos aspectos del contenido. Por eso es fundamental el **trabajo del estudiante en su casa**, y para ello es necesario disponer de **recursos** que faciliten y complementen este trabajo. Por eso hemos producido un texto que sirve como guía al curso, programas de computador que complementan algunos temas y cada semestre se diseñan talleres y ejercicios adicionales que orientan el trabajo de los estudiantes.

RESULTADOS

Uno de los principales problemas que hemos encontrado en la implementación de este programa está en los profesores. Es difícil encontrar personas dispuestas a desarrollar un curso de tal naturaleza. Este requiere del profesor un gran trabajo (sobretodo la primera vez que se dicta) y una manera no tradicional de concebir la naturaleza de las matemáticas. Sin embargo, hemos encontrado estrategias que nos han ayudado a superar este problema: involucrar a los profesores en proyectos de investigación en diferentes aspectos del curso. A continuación describiremos brevemente algunas de ellas.

Los didactigramas (informática educativa) se desarrollaron con el grupo de trabajo de los profesores que dictaban el curso y gracias a su colaboración estos programas se han usado en el curso y se han evaluado y mejorado gracias a sus comentarios. Este proyecto ganó el Premio Nacional de Informática Educativa en la categoría de investigación y desarrollo en 1994.

Las diferentes versiones del libro se han logrado gracias a los aportes que profesores y estudiantes han hecho. Muchos de los capítulos del libro han sido escritos y corregidos por profesores del curso.

Se tiene un banco de problemas que se ha conformado con la investigación y creatividad de los profesores en estos cinco años. Este banco es una ayuda para los nuevos profesores y para mejorar y renovar el texto.

En el último año los profesores se han involucrado en un trabajo de investigación sobre temas del curso que no se habían trabajado mucho a pesar de ser importantes. Se hizo primero una revisión bibliográfica sobre Evaluación y Resolución de problemas, y luego cada profesor escogió un aspecto sobre el que quería trabajar en su curso durante todo el semestre. El principal resultado fue el compromiso con el que cada profesor desarrolló su curso.

Estos intentos de investigación por parte de los profesores no sólo han redundado en su formación como profesores sino también en la visión que ellos se han formado de lo que significa enseñar y aprender matemáticas. Esta visión les ha permitido ser más conscientes de lo que quiere el curso y por lo tanto generar diversas estrategias para llevarlas al salón de clase, buscando el logro de los objetivos.

EVALUACION

El proyecto ha sido evaluado en diversas maneras. El primer objetivo que nos interesó evaluar fue el cambio en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas. Para ello se diseñó una prueba que contenía 15 ítems que describían diversas actitudes hacia las matemáticas y las experiencias que con ellas han tenido los estudiantes. Cada afirmación se calificó en una escala de cinco posibilidades desde *está completamente de acuerdo* hasta *está completamente en desacuerdo*. La prueba se aplicó al comienzo y al final del curso (cuatro meses después) pero no se obtuvo un cambio significativo en la prueba.

También evaluamos el logro de los objetivos de contenido del curso con una prueba de 9 preguntas que pretendían evaluar el desarrollo de la capacidad para atacar problemas, para modelar, analizar e interpretar problemas y para organizar y analizar información. Esta prueba se aplicó al comienzo y final del curso y se obtuvo un logro significativo y positivo.

Además de estas evaluaciones formales tenemos las informales que realiza el coordinador del curso en cada una de las secciones, en una charla con los estudiantes. En estas reuniones se determinaron aspectos problemáticos como la extensión de las tareas, la queja de los estudiantes al tener que preparar clase y la presentación del texto en algunos temas.

Después de este proceso determinamos que era importante hacer un seguimiento del desempeño de los profesores para lograr aportar a la calidad con que se dictan los cursos y crear así un ambiente de crecimiento profesional. Se desarrolló entonces un esquemas de visitas y grabaciones de las clases que permitían tener una base para la discusión con el profesor sobre su práctica docente. Se determinaron dominios que nos interesaba estudiar: la planeación de la clase por parte del profesor, la organización y desarrollo de la clase, la relación con los estudiantes y las responsabilidades profesionales.

Otra evaluación que se hizo se centró en el desempeño de los profesores en clase. Estuvo basada en el análisis de interacción verbal y no verbal del profesor, comparando la perspectiva de los estudiantes y la del profesor. Cada profesor hizo su análisis personal basado en un cuestionario abierto que consideraba los siguientes aspectos: comportamientos verbales o no verbales repetitivos, reacciones positivas y negativas hacia los estudiantes, preferencias del profesor por ciertas actividades, preferencias del profesor por ciertos temas, actitud frente a respuestas de los estudiantes, actitud frente a discusiones entre estudiantes. Esperamos que las respuestas de los estudiantes comparadas con las del profesor le permitan hacer una reflexión sobre la manera como se desarrolla la clase pueda determinar las diferencias entre lo que él cree que sucede y lo que los estudiantes ven.

Por último hemos usado como indicador de evaluación del curso, una encuesta de carácter anónimo, que realiza el Departamento de Matemáticas a todos los estudiantes de la Universidad. Se tocan aspectos referentes al profesor, al curso y a los recursos utilizados. En esta encuesta se pide calificar con un número de 1 a 5 siendo 1 *total desacuerdo* y 5 *total acuerdo* un aspecto de los mencionados anteriormente. Estos resultados han sido procesados. Con la información otorgada por el departamento y la sensación que cada profesor tiene del curso, realizamos una evaluación sobre los distintos aspectos.

Se han obtenido cambios significativos en aspectos como la pertinencia que tiene el curso para el desarrollo de la capacidad de modelar situaciones complejas. También en forma general se ha logrado una actitud diferente de los estudiantes frente a la visión que tenían de las matemáticas, al igual que la implementación de una metodología y unos esquemas de evaluación innovadores.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Gómez, P. (1993). *Matebásica Matica. La belleza y el alcance de lo elemental*. Bogotá: "una empresa docente".

Gómez, C. y P. Gómez (1992). *Sistemas formales informalmente. ¿Por qué formalizaron la matemática si eran tan buena muchacha?*. Bogotá: "una empresa docente".

Gómez, P. (1991).*Profesor: no entiendo*. Bogotá: una empresa docente.

Romberg, Thomas A. y Carpenter, Thomas P. (1986). Research on teaching and learning:Two disciplines of scientific inquiry. En Witrock, M.C. (Ed.). *The third handbook of research on teaching*. (pp. 850-873). New York: Macmillan.

Schoenfeld, Alan H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving. Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws, D.A. (Ed.) . *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 334-3670). New York: Macmillan.

EL MODELAJE APLICADO A LA COMPRENSION DE PROBLEMAS SOCIALES

Paola Valero – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

El curso de matemáticas para los estudiantes de ciencias sociales en la Universidad de los Andes, Matebásica, resalta el concepto matemático de "sistema formal" y su utilidad en el modelaje de situaciones reales. El objetivo central de este tema es ofrecer al estudiante una aplicación concreta de las matemáticas en la resolución de problemas de su disciplina de estudio. Después de haber trabajado con otros sistemas formales, se presenta el "sistema social" como una variación del sistema formal que permite modelar, analizar y tomar decisiones hipotéticas sobre situaciones sociales complejas. El tratamiento del tema se realiza en varias sesiones de clase en las cuales se propone a los estudiantes diversas tareas y lecturas que permiten la construcción no sólo del concepto de sistema social, sino la aplicación del mismo en el modelaje de una situación concreta. La experimentación con estas secuencias de enseñanza ha mostrado cómo los estudiantes asocian las características del sistema formal con el sistema social, y cómo construyen una lógica de análisis de problemas sociales basada en el modelaje de las situaciones reales de sus disciplinas de estudio.

EL CURSO DE MATEBÁSICA

Matebásica es el primer curso de matemáticas para estudiantes de ciencias sociales de la Universidad de los Andes. Este es el resultado de un proceso de innovación curricular que inició "una empresa docente" al interior de la Universidad, como forma de responder a la problemática de los cursos de matemáticas tradicionales para estudiantes cuya formación no requiere del estudio profundo de las matemáticas. Uno de los objetivos principales de este curso es aportar a mejorar la capacidad de argumentación y análisis del estudiante, ofreciéndole un espacio para la discusión y reflexión de temas científicos, históricos, filosóficos y sociales relacionados con las matemáticas. Para satisfacer este objetivo, en el curso se tratan varios temas articulados al rededor de cuatro ejes centrales: los números, su historia y utilidad; la ciencia, su historia, evolución y aportes a la humanidad; la resolución de problemas; y los sistemas formales. Los sistemas formales y el modelaje.

LOS SISTEMAS FORMALES Y EL MODELAJE

El concepto de sistema formal dentro del curso se aborda como una herramienta de simplificación y modelaje de diversas situaciones. El concepto se introduce con un acertijo que presenta una variación del "Acertijo de MU" que aparece en el libro "Gödel, Escher y Bach: An eternal Golden Braid". A continuación se trabajan ejemplos de sistemas formales que modelan los conjuntos numéricos, el método axiomático de la lógica y los fractales. Durante el tiempo en que se abordan estos ejemplos de sistemas formales se enfatiza en la idea de que los sistemas formales son una herramienta que permite identificar un conjunto básico de elementos y unas "reglas" de relación entre ellos para, a partir de un elemento inicial (axioma) deducir elementos (teoremas) a través de las relaciones. También se insiste en la capacidad de los sistemas formales para elaborar un modelo de la realidad, simplificar su complejidad y así poderla comprender más eficientemente. De ahí que se considere un instrumento importante para la resolución de problemas y para iniciar al estudiante en el descubrimiento de métodos de razonamiento.

LOS SISTEMAS FORMALES EN LAS CIENCIAS SOCIALES

Debido a que los estudiantes del curso de Matebásica pertenecen a disciplinas sociales como Derecho, Ciencia Política, Antropología, Lenguas Modernas, Psicología y Artes, principalmente, uno de los ejemplos de sistemas formales que se proponen en el curso son los sistemas sociales. La idea de sistema social, que se construyó en la sociología y cuyo máximo exponente es Talcott Parsons, proviene de la necesidad de elaborar modelos que de alguna manera representen y simplifiquen la realidad social. Después de haber utilizado modelos materiales (mecánicos como la balanza de la justicia, las pirámides sociales, u orgánicos como los modelos organicistas spencerianos y durkheimnianos), la sociología comenzó a elaborar modelos formales, dentro de los cuales los modelos puramente matemáticos (en economía especialmente) han jugado un papel importante.

El sistema social es uno de los modelos formales que, de manera similar al sistema formal de las matemáticas, parte del postulado básico de que “la realidad estudiada presenta las propiedades de un sistema” (Rocher, 1970). Esto significa que:

- Existen elementos que mantienen entre sí relaciones de interdependencia
- La totalidad formada por el conjunto de los elementos no es reducible a la suma de los elementos
- Existen relaciones de interdependencia entre los elementos y la totalidad resultante están regidas por reglas lógicas que se pueden expresar en términos lógicos

Lo importante de hacer esta relación entre sistemas formales y sistemas sociales es la oportunidad que se ofrece a los estudiantes para conocer una herramienta que es bastante utilizada dentro de sus disciplinas y que tiene por esencia una noción matemática de modelaje formal.

LA PUESTA EN PRÁCTICA

A continuación se presenta el diseño, aplicación y evaluación de una secuencia de enseñanza que se llevó a la práctica con estudiantes dentro de una de las secciones del curso de Matebásica.

El experimento se realizó durante el primer semestre de 1995. Los estudiantes involucrados, en su mayoría de primer semestre de Derecho, otros de Ciencia Política, Estudios Generales y Artes, se enfrentaron a varias actividades que perseguían, como objetivo central, la familiarización con la idea de modelaje de situaciones reales a través de la “Herramienta” para la construcción de un sistema social. La secuencia de enseñanza estuvo compuesta por varias sesiones de clase en las cuales se realizaron las siguientes actividades:

Sesión 1

Una pareja de estudiantes introdujo el tema de los sistemas sociales por medio de un problema que los estudiantes debían resolver. El problema se trabajó en pequeños grupos y proponía:

> *En Macado, una población de pescadores situada en la Costa Atlántica, se viene presentando hace días una situación anómala, pues se están muriendo los peces de la ciénaga. Esto ha generado una epidemia. En el*

pueblo hay un grupo de médicos, un grupo de pescadores, un grupo de amas de casa, un grupo de ecólogos y un grupo de comerciantes.

Asuma el rol de uno de estos grupos, considere la situación desde su punto de vista y plantee una solución para el problema.

Después de una discusión en pequeños grupos se hizo una tabla en el tablero donde se anotó cuál era el problema que cada grupo, desde su perspectiva, identificaba y cuál era la solución propuesta. Se entró en una discusión sobre la propuesta de cada grupo y se enfatizó en que: 1) el problema no es uno solo, sino que varía de acuerdo con los intereses que se adopten, 2) desde cada una de las perspectivas se privilegia un aspecto y se da una solución parcial, y 3) una solución global verdadera al problema debería combinar el esfuerzo de todos los implicados. Esto llevó a la idea de la complejidad de las situaciones reales y a la necesidad de moldearlas para comprenderlas y abordarlas de manera global.

Sesión 2

Los mismos estudiantes realizaron una exposición sobre cómo se había desarrollado la idea de "sistema social" en las ciencias sociales, y en especial, en la sociología. Por medio de la exploración de los orígenes de la necesidad de modelaje en las disciplinas humanas, ellos resaltaron su asociación con el modelaje matemático y la influencia que las matemáticas tenían en el abordaje de problemas económicos, políticos y sociales. Con esta presentación se pudo mostrar el nexo entre la noción general de "sistema formal" y las disciplinas de los estudiantes.

Sesión 3

En esta sesión se entró en el estudio de la "Herramienta" que permite elaborar modelos de sistemas sociales. Una pareja de estudiantes, distintos a los anteriores, hicieron una rápida exposición de los elementos de la "Herramienta" y su significado. Esa "Herramienta" propone, para la construcción de un modelo de una realidad social, los siguientes pasos: 1) identificar el problema social que se está abordando, 2) identificar las manifestaciones o hechos de ese problema, 3) fijar los criterios para determinar qué es lo realmente importante de esas manifestaciones, es decir, qué afectan y por qué son problemáticas, 4) identificar cuáles son los elementos que intervienen en el problema y las interrelaciones entre ellos, 5) con base en todo lo anterior, definir el problema a través de un esquema que permita visualizar lo identificado en los pasos anteriores, 6) proponer diferentes alternativas de solución, 7) analizar hipotéticamente los efectos de cada alternativa, 8) seleccionar la solución cuyos efectos estén más de acuerdo con los criterios fijados en el punto 3.

Como ejemplo de aplicación de este procedimiento se tomó el problema del tráfico en Bogotá y se comenzó a estudiar lo correspondiente a los 3 primeros puntos del proceso. Así se generó al interior de la clase una discusión sobre el problema, sus efectos y manifestaciones concretas. También se exploraron los diversos intereses (ecológicos, políticos, administrativos, económicos) que surgían en torno al problema planteado. Junto con lo anterior, los estudiantes realizaron paralelos entre este método de análisis de problemas y otros que habían visto en otras clases.

Sesión 4

Se propuso como tarea a los estudiantes una actividad que debían realizar durante una semana, y cuyo resultado debía ser una propuesta de solución para el Alcalde de Bogotá sobre el problema del tráfico en la ciudad. Para realizar la tarea los estudiantes debían: 1) leer unos documentos sobre la importancia de las matemáticas como herramienta de modelaje de situaciones reales, 2) conseguir artículos de prensa o revistas donde se hablara del problema del tráfico en Bogotá, como fuente de información para su trabajo, 3) asumir el rol de un asesor de la Alcaldía con limitación de recursos de dinero y tiempo, 4) definir un problema concreto asociado con el tráfico en Bogotá, 5) elaborar un modelo que permitiera visualizar los elementos relevantes y relaciones entre ellos, 6) proponer una solución adecuada a ese problema, y 7) pensar en los recursos que se necesitarían para aplicar la propuesta de solución.

Como resultado, los estudiantes entregaron unos documentos donde se desarrollaban los puntos antes mencionados. En esos documentos se plasmó no sólo las percepciones personales de los estudiantes sobre el problema, sino también la creatividad de propuestas coherentes y sencillas que podrían aplicarse. En una discusión posterior se analizaron los aspectos positivos y negativos de algunas alternativas de solución y se abordaron las implicaciones que tendrían en el problema global del tráfico en Bogotá.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A lo largo de la experiencia se generó un ambiente de discusión al interior de la clase, no sólo sobre el tema del tráfico o de la epidemia, sino también sobre la importancia del modelaje en la simplificación y comprensión de realidades sociales. Repetidamente se enfatizó y comentó la utilidad de las matemáticas en el análisis de los problemas sociales y en el modelaje de los mismos. Con este ambiente de discusión y de trabajo en grupos en la construcción de conocimientos, se logró que los estudiantes individualmente y como miembros del grupo socializaran sus saberes y llegaran a acuerdos concretos sobre la manera como se podía utilizar más eficientemente el sistema formal en la resolución de problemas que enfrentaban en la cotidianidad.

Si bien este ejemplo no es muy representativo de actividades que se pueden realizar al interior de una clase de matemáticas donde hay mayor énfasis en el contenido matemático, sí es un ejemplo de un intento por acercar algunas herramientas del pensamiento matemático al tipo de conocimientos y experiencias que maneja un estudiante de ciencias sociales. En este sentido, se evidencia el principio de relacionar el conocimiento matemático con las construcciones que surgen de una realidad y unas necesidades concretas, para evitar una violencia simbólica al interior de la clase de matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gómez, P. (1993). *Matebásica Matica. La belleza y el alcance de lo elemental*. Bogotá: "una empresa docente".

Gómez, C. y P. Gómez (1992). *Sistemas formales informalmente. ¿Por qué formalizaron la matemática si eran tan buena muchacha?*. Bogotá: "una empresa docente".

Rocher, Guy (1970). Introducción a la sociología general. n.d.

La clase: un espacio para la resolucion de problemas

Mauricio Castro – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

En el primer curso de matemáticas para estudiantes de ciencias sociales de la Universidad de los Andes, la resolución de problemas se ubica como uno de los temas principales a trabajar. El propósito de este tema es el de iniciar al estudiante en el descubrimiento de métodos de razonamiento y solución de problemas. Al respecto nos preguntamos, ¿cómo iniciar al estudiante en esta búsqueda? y portanto ¿qué debemos hacer en el salón de clase? Si consideramos que la resolución de problemas es aprender a enfrentarse con tareas nuevas y poco familiares, que requieren métodos de solución no conocidos, es necesario generar en la clase un ambiente que propicie la construcción conjunta de las diferentes aproximaciones a los problemas, que facilite la comunicación de estas aproximaciones, que permita la discusión de las mismas y que finalmente transforme la visión del estudiante hacia la resolución de problemas.El profesor puede generar este ambiente, proponiendo a sus estudiantes la realización diaria de un problema, pero al mismo tiempo observando con cierto detalle el trabajo que realiza el estudiante, para así poder decidir cuándo intervenir y qué sugerencias hacer, para dejar finalmente que ellos descubran la solución.Como resultado la experiencia nos ha mostrado que el estudiante se aproxima a la construcción de una estrategia que le da mejores resultados, organiza mejor sus ideas y es más consciente de lo que sucede en su mente, cuando resuelve un problema.

Presentacion

En este documento se presenta el resultado de una experiencia en torno al análisis de las diferentes formas que tienen los estudiantes para abordar un problema. La experiencia se desarrolla en un primer curso de matemáticas para estudiantes de Ciencias Sociales de la Universidad de los Andes. El curso con el cual se trabajó estuvo conformado por 20 estudiantes de diferentes carreras de ciencias sociales: artes, música, ciencia política y derecho.

LA HISTORIA

Uno de los grandes temas del curso es el de acertijos, realmente aquí se trabaja en la resolución de problemas. Pero en efecto no se trata del trabajo que comúnmente se hace cuando se aborda este tema: presentar un problema, mostrar una estrategia para resolverlo y luego presentar diferentes problemas análogos cuya solución se hace utilizando la misma estrategia. Realmente se trata de algo mucho más interesante, en el sentido de presentar a los estudiantes problemas para los cuales la estrategia no es muy evidente y entonces es necesario encontrarla. Por esta razón tampoco es tan fácil para el profesor abordar este tema, pues realmente orientar este tipo de actividad no es una tarea fácil.

Viendo la importancia que tiene para el curso la resolución de problemas, se propuso desde la coordinación del mismo, un trabajo sobre el tema. La idea era que se diseñaran estrategias o sugerencias prácticas para llevarlas a la práctica en el salón de clase y mediante las cuales se lograra una mejor aproximación al tema. Este trabajó resultó muy interesante pues aparte de reflexionar, estudiar e investigar se convirtió en "la iluminación" para pensar en muchas de las cosas que se pueden hacer alrededor del tema.

El trabajo propuesto el semestre pasado apenas fue el inicio para indagar sobre lo que se podía hacer en clase. Las diferentes estrategias propuestas por los profesores se llevaron a cabo, se experimentaron y luego se evaluaron. Este semestre nuevamente se trabaja en la búsqueda de estrategias que le permitan el estudiante desarrollar la habilidad para resolver problemas.

LA PROPUESTA

Es muy importante crear "un ambiente" en el salón de clase, hacer de él un lugar "agradable" para resolver problemas, en donde desde un principio, haya una familiarización con el tema. La idea es que en ese ambiente que se propicie los estudiantes encuentren diferentes caminos para solucionar un problema, haya discusión sobre las soluciones a los problemas y se origine algo así como una tipificación de los problemas y una posibles estrategias para resolverlos.

Otro aspecto que se quisiera analizar es el de la identificación de los distintos niveles de aproximación a los problemas. En principio es interesante observar si los estudiantes tienen criterios claros para evaluar la solución a un problema. Analizar allí qué es lo más importante para ellos: el resultado, el proceso, el resultado y el proceso, la justificación del resultado, la elección de la estrategia, etc. La intención es la de realizar, en principio, un diagnóstico en donde se ubique al estudiante en algún nivel teniendo como niveles extremos el principiante y el experto en resolución de problemas.Después durante el desarrollo del curso llevar un seguimiento individual de algunos estudiantes para analizar logros y dificultades en la resolución de problemas.

LA EXPERIENCIA

A continuación se describe la actividad realizada durante el semestre, relacionado con la resolución de problemas:

El trabajo con los acertijos debe ser sistemático y periódico. La propuesta es que después de iniciado el tema, diariamente se plantee un acertijo, en los 5 primeros minutos de la clase, y se traiga resuelto al día siguiente. El estudiante que lo resuelva explicará la forma como llegó a la solución y la discutirá con el grupo. Inicialmente el profesor propone los primeros acertijos como un ejemplo. Luego se le asigna a cada estudiante un acertijo por día y el cual se compromete con el curso a traerlo para ese día conociendo la solución. Se elige a un estudiante para que haga la lista de las personas y el día que le corresponde a cada uno y otro estudiante que lleve un récord de los que resuelven acertijos. Se le dará un estímulo tanto al estudiante que resuelve el problema como al que lo propone. Además los acertijos se plantearán en todas las clases siguientes, con el fin de generar una familiarización frente a la solución de problemas.

Con respecto al análisis de los diferentes niveles de aproximación a los problemas, se realizaron las siguientes actividades:

- En una clase se planteó un acertijo traído por el profesor para resolverlo en los últimos 15 minutos de la clase. El acertijo fue elegido al azar y en él se pedía que se escribiera inicialmente la forma como lo iba a resolver y después escribiera la solución. Una vez realizada la actividad se intentó hacer una clasificación en los diferentes niveles,dicha clasificación la hizo el profesor.

- En principio había pensado elegir una muestra representativa para llevar un seguimiento más detenido pero me pareció importante involucrar a todo el grupo ya que este no era muy grande.

- Pasado un mes, se propuso otro acertijo de mayor dificultad que el anterior. Una vez resuelto, se intercambiaron soluciones de tal manera que ningún estudiante quedara con su propia solución, y se les pidió que calificaran la solución del acertijo, haciendo todas las observaciones que consideraran pertinentes. Surgieron entonces las preguntas, que mostraban que no tenían criterios claros para calificar: ¿hay que colocar nota? ¿calificamos la respuesta? ¿ y si no tiene la respuesta, qué le escribo? ¿y si no hizo nada bien?, etc. La instrucción que se les dio fue la de calificar y ellos tenían que elegir los criterios. Se dio discusión entre ellos, se miraban unos a otros, algunos se ponían de acuerdo con otro compañero, pero finalmente calificaron. En seguida se pidió que de acuerdo con la forma como solucionaron el acertijo, trataran de ubicar al estudiante en alguno de los siguientes niveles: ALTO, MEDIO O BAJO, entendiendo alto como un buen resolutor de problemas, y bajo como un principiante.

La idea era que esta actividad se continuara y que durante la resolución de los acertijos el grupo pudiera hacer una evaluación individual bajo unos criterios que se acordaran en el grupo.

MARCO TEORICO

¿Se puede enseñar a ser un buen resolutor de problemas? En contestación a esta pregunta algunos autores han establecido ciertas técnicas y principios que podrían ayudar a hacer de nuestros alumnos buenos resolutores de problemas. Esta preocupación, le llevó a Polya (1949) a establecer las necesidades para poder aprender a resolver problemas. Considera el autor que el fin principal es ayudar a alumno a adquirir la más amplia experiencia. El profesor debe ser un guía que deje, en todo momento, asumir al alumno la parte de responsabilidad que le corresponde. Por este motivo, Polya (1979) sugiere una serie de preguntas y recomendaciones que acompañarían en el desarrollo de la [1]heurística que propone.

Se aprecian cuatro fases que el autor considera convenientes seguir para favorecer la enseñanza de la resolución de problema, que en síntesis son: Comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.

La conveniencia de encontrar una determinada heurística que ayude a la solución de los problemas se pone de manifiesto en la cantidad de autores y artículos que aparecen al respecto. Sin embargo hay que reconocer que casi todos se basan en los cuatro puntos anteriores señalados por Polya.

Así Schoenfeld (1980) propone un esquema similar en el que indica cuatro pasos:

- Analizar y comprender un problema
- Diseñar y planificar una solución,
- Explorar soluciones y

1. 1 Las heurísticas son las estrategias de resolución de problemas

- Verificar la solución.

Este planteamiento que hace el autor acerca del camino a seguir, debe ser completado con el esquema que establece sobre el conocimiento y la conducta para un adecuado desarrollo de la resolución de problemas.Así Shoenfeld (1985) ilustra cuatro categorías a considerar:

- **Recursos:** Conocimientos matemáticos que ayudan a resolver el problema. (Intuiciones y conocimiento informal. Procesos algorítmicos. Rutinas de procesos no algorítmicos. Conocimiento no proposicional.)
- **Heurísticas:** Estrategias y técnicas para progresar en situaciones no familiares o desconocidas. (Dibujar figuras, introducir notaciones, analizar y verificar procesos...)
- **Control:** Decisiones globales respecto de la selección e implementación de recursos y estrategias. (Planificación, toma de decisiones, gestión, cálculo...)
- **Sistema de creencias:** Punto de vista del mundo de las Matemáticas del resolutor. (Sobre el tópico, el ambiente, o sobre las Matemáticas...)

Esta preocupación de enseñar el dominio de técnicas de estudio adecuadas para mejorar el rendimiento de la resolución de problemas en los alumnos es objeto de diversos trabajos de Schoenfeld (1985). En estos sugiere el autor que la utilización y aprendizaje de esta técnicas es lo mejor que podemos hacer con nuestros alumnos en clase de Matemáticas, y además señala que es la mejor manera de que puedan aplicar sus conocimientos o proceso mentales implicados en la resolución de problemas en aspectos de la vida que se encontraran fuera de ella.

El otro interrogante es: Nosotros como profesores, ¿ Cómo podríamos evaluar el trabajo que realiza un estudiante durante la solución de un problema? En respuesta a continuación se describen los niveles y los aspectos que caracterizan cada nivel. La idea es utilizar como parámetro estos niveles para establecer una clasificación de los estudiantes, según la manera como solucionan un determinado problema y para observar su progreso dentro de los mismos niveles.

Primer nivel

- Omite partes importantes del problema.
- Tiene errores mayores.
- Usa estrategias no apropiadas.

Segundo nivel

- Contiene una respuesta completa pero tal vez la explicación es confusa.
- Presenta argumentos pero incompletos
- Incluye diagramas pero no son apropiados o no son muy claros.
- Incluye comprensión de ideas y procesos matemáticos pero estos no son expresados claramente.

Tercer nivel

- Contiene una buena y sólida respuesta.
- Explica con cierta elegancia y rigurosidad.
- No va más allá de los requerimientos del problema.

Cuarto nivel

- Contiene una respuesta con explicaciones elegantes y sin ambigüedades.
- Incluye diagramas claros y sencillos.
- Indica comprensión de ideas y procesos matemáticos
- Identifica todos los elementos importantes del problema.
- Incluye ejemplos y contraejemplos.
- Va más allá de los requerimientos del problema.

Con estos criterios los estudiantes mediante una actividad van a ubicar a su compañero en el nivel que se considere pertinente, después de analizar la resolución de un problema.

CONCLUSIONES

Con el desarrollo de esta actividad se encontró que los estudiantes generalmente son muy desordenados para resolver un problema, omiten partes importantes del problema, eligen una estrategia y se quedan con ella hasta llegar a alguna solución y no son muy conscientes de sus errores. También se encontró que hay estudiantes que sufren un “bloqueo mental” y no tienen ni idea por dónde comenzar a abordar el problema.

Los estudiantes por su cuenta tomaron más conciencia de la importancia de resolver problemas y de la carencia de estrategias para lograrlo. Fue una experiencia agradable y muy importante pues si bien es cierto no se dieron fórmulas mágicas de cómo resolver problemas, los estudiantes si tomaron más consciencia de lo que hacen cuando resuelven un problema. Sería muy interesante continuar con esta actividad, para así convertir la clase en un verdadero laboratorio, en donde los estudiantes jueguen a ser científicos y resuelvan problemas, pero siendo conscientes de que resolver problemas es toda una habilidad que no se adquiere fácilmente, pero que si se práctica con frecuencia existe mayor probabilidad de poseerla.

Con respecto a la segunda propuesta, ”Identificación de los distintos niveles de aproximación a los problemas”, los estudiantes encontraron por medio de la evaluación de la solución de un problema que hacía el compañero, qué es lo que consideran más importante en la solución, qué es lo que más se les dificulta y qué es lo que mejor manejan. Algunos se dieron cuenta que resolver un problema por métodos algebraicos era muy difícil, mientras que para otros era su mejor herramienta. Otros no utilizaban generalmente un diagrama o una gráfica sino iban directamente a realizar alguna operación aritmética que los aproximara a la solución y los se quedaban en la simple exploración o apenas llegaban a una solución utilizando el tanteo. Lograron hacer una tipificación de los distintos problemas, y tener unas pautas de orientación para resolverlos.

Se dejó constancia por escrito de los logros y dificultades que tuvieron los estudiantes en la resolución de problemas a través de un ensayo. Allí se plasmó por un lado la visión que tenían los estudiantes acerca del significado de la resolución de problemas en matemáticas, y en general acerca de la visión de lo que para ellos significa enseñar y aprender matemáticas; y por otro lado el aporte de la actividad realizada en el semestre.

Referencias bibliograficas

Gómez, P. (1991). *Profesor: no entiendo*. Bogotá: una empresa docente.

Romberg, Thomas A. y Carpenter, Thomas P. (1986). Research on teaching and learning: Two disciplines of scientific inquiry. En Witrock, M.C. (Ed.). *The third handbook of research on teaching*. (pp. 850-873). New York: Macmillan.

Schoenfeld, Alan H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws, D.A.

(Ed.) . *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 334-369). New York: Macmillan.

Webb, Norman L. (1992). Assessment of Students' Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory. En Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp 661-683). New York: Macmillan.

MATEMÁTICAS, AZAR, SOCIEDAD: UNA EXPERIENCIA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA

Patricia Perry, Vilma Mesa, Felipe Fernández, Pedro Gómez
"una empresa docente", Universidad de los Andes, Bogotá-Colombia

El proyecto Matemáticas, Azar, Sociedad se desarrolló con el objetivo principal de aportar a la mejora de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje en un curso de matemáticas para estudiantes de ciencias sociales. Surgió como respuesta a la desmotivación de los estudiantes, la deficiente comprensión que lograban y el alto porcentaje que perdía el curso. Fue un proyecto de diseño y desarrollo curricular, realizado con la metodología de la investigación-acción, que transformó un currículo de probabilidad y estadística descriptiva en otro, de estadística con conceptos de estadística descriptiva, conceptos elementales de probabilidad y fundamentos para la estadística inferencial paramétrica.

Como resultados del proyecto se pueden mencionar: una propuesta innovadora del diseño curricular del curso en cuestión –que incluye material didáctico como el libro de texto y la identificación de lecturas complementarias, y un banco de problemas–, y un esquema de administración y coordinación del curso. Por otro lado, ligado directamente con el objetivo que impulsó la realización del proyecto, al llevar a la práctica el nuevo diseño curricular se ha logrado influir la actitud y la visión de los estudiantes con respecto a la estadística y reducir sustancialmente la alta mortalidad académica.

INTRODUCCIÓN

El proyecto *Matemáticas, Azar, Sociedad* fue realizado por "una empresa docente", centro de investigación de la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia, entre 1988 y 1993. Abordó los problemas de hacer un nuevo diseño curricular para el segundo curso de matemáticas que toman estudiantes de ciencias sociales en la Universidad y de desarrollar e implementar tal diseño. Este está vigente en la actualidad, y "una empresa docente" tiene a su cargo la administración y coordinación de las seis secciones del curso que se dictan paralelamente cada semestre.

Aquí se presenta una descripción somera del proyecto y de sus resultados. Se explicita el problema que dio lugar a la innovación y los objetivos que ésta se propuso, luego se hace un esfuerzo para reconstruir y dar a conocer cómo sucedió el proceso de innovación, en seguida se exponen algunos detalles de la propuesta del nuevo diseño curricular, después se habla de los resultados, y finalmente se presentan unas conclusiones.

EL PROBLEMA

Poco tiempo antes del año 1987, el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes mostraba gran preocupación por los deficientes resultados que obtenían los estudiantes de ciencias sociales que tomaban el curso de código 01104, un curso que primero fue de cálculo y probabilidad y posteriormente de probabilidad. Naturalmente, esos resultados deficientes sólo eran indicadores de una situación problemática con respecto a cómo se estaban dando los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los estudiantes –aún la mayoría de los que aprobaban el curso– no lograban un aprendizaje significativo, no veían la utilidad del curso en sus profesiones y estaban casi por completo desmotivados hacia el curso. Por su parte, los profesores también se sentían desmotivados al tener que dictar un curso a personas no interesadas en el mismo. En resumen, el problema abordado por el proyecto que aquí se presenta radicaba en la deficiencia del curso para contribuir a lograr una formación específica en los estudiantes que lo tomaban. La forma de abordarlo y proponer una solución consistió en rediseñar el currículo del curso e implementarlo.

EL PROCESO DE INNOVACIÓN

El proyecto *Matemáticas, Azar, Sociedad* se puso en marcha en agosto de 1987 al iniciar las clases del segundo semestre. Los cuatro profesores que participamos no teníamos una formación especializada en educación matemática y mucho menos en investigación en el respectivo campo; tampoco teníamos constituido un grupo de trabajo. Nos reunió el hecho de dictar el mismo curso en la Universidad y nos constituimos en equipo de trabajo[1] por tener una pre-

1. El grupo “una empresa docente” surgió y se consolidó por razón del trabajo realizado para sacar adelante el proyecto que es tema de este artículo y ha evolucionado hasta convertirse en un centro de investigación en educación matemática.

ocupación común en relación con los resultados deficientes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y por nuestro deseo compartido de contribuir a la mejora de esa situación problemática dentro de Universidad. El coordinador del curso[2] fue quien promovió la idea de innovar el respectivo currículo y lideró su realización; los otros tres profesores aceptamos y apoyamos la idea.

A continuación se narra el proceso que vivimos para lograr una propuesta de diseño curricular completa con la que estamos relativamente satisfechos. Hacemos esta descripción con más detalle para el primer semestre del proceso porque consideramos que en ese período se sentaron unas bases sólidas para llegar a donde hemos llegado.

El primer semestre

Iniciamos el proyecto sin una planificación detallada de lo que debería hacerse; sin embargo, sí eran claras algunas ideas: se quería que el contenido del curso fuera significativo para los estudiantes; que ellos tuvieran una experiencia novedosa de lo que es aprender; y, sobre todo, se quería motivarlos e involucrarlos lo más posible en su proceso de aprendizaje. En cuanto al contenido del curso tuvimos como referencia el programa que había regido en los cursos recientes; sin embargo, la idea no era repetirlo al pie de la letra una vez más; la idea era aprovechar la experiencia para comenzar un cuestionamiento acerca de la pertinencia de los temas propuestos, de su organización y de la forma como eran presentados en el curso, teniendo como factor de retroalimentación de nuestras intuiciones e hipótesis informales, la respuesta de nuestros estudiantes. Por otro lado, nos desprendimos del libro de texto que se empleaba usualmente, e hicimos un gran esfuerzo para producir guías de trabajo para los estudiantes. En nuestras clases se abrió el espacio para que los estudiantes trabajaran en equipo frecuentemente, hablaran entre ellos y con el profesor acerca de sus soluciones a las guías de trabajo y las presentaran a sus compañeros de clase. Los cambios que estábamos proponiendo en los objetivos específicos del curso, en la presentación del contenido y en la metodología exigían un cambio en la forma de comprender la evaluación del desempeño de los estudiantes; ya que el estudiante debía asumir un papel activo en todo el proceso de su aprendizaje, y esto le exigía un trabajo serio, sistemático y permanente; la evaluación debía reflejar el esfuerzo y la calidad de ese trabajo.

A lo largo del semestre nos reuníamos semanalmente para comentar las experiencias que estábamos viviendo y para planear globalmente lo que se sugería hacer en las siguientes clases; además, se hizo el registro escrito de las reunio-

2. Esta persona, también era el coordinador de los otros dos cursos del ciclo de matemáticas para estudiantes de ciencias sociales. Por esa época ya había iniciado un cambio similar en el primer curso del ciclo.

nes. Eramos conscientes en mayor o menor grado, de las exigencias y las implicaciones que se desprendían de haber dado el primer paso en dirección al cambio. Intuíamos, por ejemplo, que el cambio desestabiliza e incomoda lo establecido; por tanto, se requiere de una posición tolerante, flexible y comprensiva de parte de quienes lo dirigen, lo implementan, y lo experimentan; que el cambio es el resultado de un proceso de largo plazo en el que se comprometen las personas involucradas directamente en la situación; por tanto, es necesario dar tiempo para que surjan los efectos asociados a las acciones realizadas y es indispensable motivar y mantener la motivación de quienes están involucrados en el proceso; además, que para llegar a un diseño curricular que nos satisficiera, tendríamos que recorrer un camino de exploración, de mejoramiento de las propuestas, escuchar la opinión de otros –estudiantes y colegas que dictaran el curso–, escribir textos y reescribirlos, etc., todo eso exigía ser persistentes y sistemáticos en nuestro proyecto. A pesar de tener esas intuiciones y de nuestro deseo de cambio, se presentaron las dificultades inherentes a la naturaleza del cambio: es difícil cambiar las costumbres; experiencias pasadas de cambios no exitosos originan y apoyan el escepticismo con relación al cambio; surgen dudas con respecto a qué tan justo es experimentar con los estudiantes que, por azar, están en el curso donde se está aplicando la innovación; surge el temor a cometer errores que nos puedan descalificar como profesionales y, finalmente, es difícil actuar de una cierta manera que no está respaldada necesariamente por las correspondientes creencias y habilidades.

En resumen, sin la intención de hacer investigación-acción[3], nuestro proyecto se realizó, en su primera etapa y también en las demás, siguiendo la metodología de la investigación-acción. La evaluación y reflexión al final de cada ciclo, originaba las modificaciones que se planeaban y llevaban a cabo en el siguiente ciclo, y eran claves en este proceso la observación de los efectos de las acciones propuestas, la reflexión y la elaboración de documentos escritos como registro de lo que ocurría (Kemmis et al., 1992).

El resto del proceso

Al terminar el primer ciclo del proceso, todos teníamos nuestra propia visión de la vivencia; se habían elaborado unos documentos y existían los materiales de clase que se habían producido. Se hizo una evaluación de la experiencia y de allí surgieron las directrices para guiar la innovación el siguiente semestre. Se acordó qué temas se tratarían, qué material era necesario producir, qué libros se iban a emplear como referencia; además, se distribuyeron las tareas entre los cuatro profesores, de manera que cada cosa por hacer tuviera un responsable. Así iniciamos la segunda iteración de la innovación. En esta ocasión

3. Por esa época sabíamos muy poco sobre investigación.

se elaboró el material de trabajo para los estudiantes de manera más sistemática; sin embargo, la producción y entrega de copias mimeografiadas no era lo más eficiente.

Al terminar la segunda iteración, nuevamente se hizo una reflexión de la experiencia vivida y se destacó la dificultad para la producción de materiales. Para solucionar ese *impasse*, el coordinador del proyecto nos embarcó en la creación de una empresa editorial –al interior de la Universidad– con el objetivo principal de apoyar la producción del material escrito de los profesores de la Universidad[4]. Es así como a partir del tercer semestre de realización del proyecto, produjimos el material para nuestros cursos en computador, con las consabidas ventajas que ello tiene.

Semestre a semestre, íbamos mejorando y puliendo nuestra propuesta de diseño curricular para el curso, y también íbamos desarrollando un "saber hacer" en la administración y coordinación del mismo porque llegó el momento en que de los cuatro profesores que iniciamos y desarrollamos la innovación, sólo uno o dos dictaban el curso; además, se incrementó el número de secciones de cuatro a seis. Esas dos circunstancias nos hicieron evidente la importancia y necesidad de la formación de los profesores que dictan el curso. No es suficiente entregar al profesor –que va a dictar el curso por primera vez– el programa, el libro y un manual de comentarios para el profesor. Se requiere involucrarlo en un proceso de interacción con los colegas que han dictado el curso que le permita y ayude a conocer y comprender cuál es el sentido de las diferentes actividades que se proponen, de las diferentes metodologías que se sugieren, cuáles son los objetivos de formación que pretende lograr el curso, y cuál es la importancia relativa que se da dentro del diseño curricular a la evaluación, entendida como diversas oportunidades, para valorar el trabajo del estudiante.

Aunque el proceso de hacer cambios se cerró hacia finales de 1992 –cuando se publicó la última versión del libro *Matemáticas, Azar, Sociedad*–, y en la actualidad se cuenta con un diseño curricular bastante preciso, siempre hay espacio para que los profesores que dictan el curso hagan sus adaptaciones, muchas de las cuales se presentan en el grupo de profesores que tienen a su cargo las diferentes secciones y son acogidas por todos después de un proceso de discusión.

4. Por cerca de cinco años, "una empresa docente" fue fundamentalmente un sello editorial. En la actualidad, seguimos haciendo trabajos editoriales, pero con otro sentido.

DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO CURRICULAR

Con base en la propuesta de Romberg, entendemos que el currículo es un "plan operativo de enseñanza que explica en detalle qué deben saber los alumnos de matemáticas, cómo deben alcanzar las metas curriculares identificadas, qué deben hacer los profesores para ayudarles a desarrollar sus conocimientos matemáticos y el contexto en el que tienen lugar el aprendizaje y la enseñanza" (Romberg, 1991, p. 324). En consecuencia, el diseño curricular es la definición previa de ese plan. En el proyecto *Matemáticas, Azar, Sociedad*, uno de los resultados es justamente ese diseño. A continuación, se presenta una descripción de éste, que incluye los objetivos generales que pretende lograr el curso en el estudiante, los contenidos que se abordan, las metodologías que se proponen y la forma de evaluar el desempeño del estudiante.

El curso "Matemáticas, Azar, Sociedad" se realiza actualmente en la Universidad de los Andes. Es el segundo curso del ciclo de matemáticas que siguen los estudiantes de antropología, bacteriología, ciencia política, derecho, lenguas modernas y psicología. Cada semestre se abren seis secciones en las que se inscriben treinta alumnos en promedio por sección; son grupos heterogéneos que están cursando su segundo semestre en la Universidad. La mayoría de ellos debe hacer el siguiente curso de estadística.

Objetivos

De manera general, se pretende que el curso contribuya a elaborar una visión en los estudiantes con respecto a los problemas sociales –interesantes desde el punto de vista de sus futuras profesiones–, su naturaleza y la forma de abordarlos para su estudio y solución. Específicamente, se busca hacerlos conscientes de que, aun siendo la sociedad un fenómeno bastante complejo, puede ser analizado si se utilizan herramientas adecuadas, y que la estadística cumple ese papel para un cierto tipo de problemas sociales. Además, se ve el curso como una oportunidad para que los estudiantes desarrollen su capacidad de modelar. Por otro lado, se pretende que el curso favorezca y fomente una actitud positiva en el estudiante hacia su propio aprendizaje, hacia su autonomía en ese proceso. Además, se pretende cumplir una labor de motivación en el estudiante, que de no producirse, obstaculizará el logro de los demás objetivos del curso.

Puntualizando, el curso "Matemáticas, Azar, Sociedad" pretende lograr:

- Que el estudiante de ciencias sociales erradique su posible prevención ante las matemáticas y ante los temas desarrollados en el curso.
- Que se sienta bien en el curso y tenga una actitud positiva hacia él.

- Que desarrolle adecuadamente sus capacidades de comunicación efectiva con los demás estudiantes, sabiendo hacer buen uso del lenguaje, la notación y la argumentación.
- Que se aproxime a los temas del azar, la probabilidad y la estadística, reconozca su importancia en la vida diaria y desarrolle herramientas para abordarlos y manejarlos.
- Que descubra por sí mismo dichas herramientas, las haga suyas y se capacite para descubrir o buscar aquellas que necesite.
- Que reconozca la utilidad de lo estudiado en el curso para su actividad académica y profesional futura.
- Que desarrolle su capacidad de análisis estadístico, es decir, que sea capaz de leer, comprender y criticar un artículo de su tema de estudio con contenido estadístico.

Contenido

El tema central del curso lo constituye la estadística. Se inicia con los conceptos de problema social y sistema social como una herramienta de modelaje para simplificar la complejidad del problema. Se hace una reflexión sobre el concepto del azar, su naturaleza, su presencia en la vida cotidiana y el papel que juega en ella. Se trabaja con los conceptos de población, muestra y variable.

Luego se dedican doce sesiones de clase para hacer una aproximación intuitiva[5] a conceptos elementales de estadística y probabilidad (frecuencias absoluta y relativa, enfoques frecuencista y teórico para el estudio del azar y la relación entre los dos enfoques, organización y resumen de información, valor esperado, entre otros). Esa aproximación se hace por medio de talleres: los estudiantes trabajan en grupo para responder una serie de preguntas, circunstancia que favorece la reflexión, la explicitación de conceptos intuitivos y la discusión entre estudiantes. Al final de cada taller se hace una puesta en común para presentar soluciones, exponer dificultades, hacer aclaraciones y establecer conclusiones. Ese trabajo no busca formalizar conceptos; tan sólo pretende generar experiencias concretas que sirvan de referencia posteriormente cuando se haga la formalización. El tipo de preguntas que se formulan en estos talleres se puede ver en el Anexo 1.

5. La forma de realizar esta aproximación ha tenido cambios fuertes a través del proceso de innovación. Inicialmente se diseñó el simulacro de un casino con cuatro juegos de azar, y la idea era que el curso se dividiera en cuatro grupos y cada uno de ellos hiciera el análisis del juego con miras a responder la pregunta "¿Por qué son rentables los casinos?

La formalización de conceptos se hace por medio del estudio de los siguientes temas: organización y resumen gráfico de datos; probabilidad, su significado y sus propiedades; medidas de tendencia central; y medidas de dispersión.

Posteriormente se estudia la distribución normal; para esto se destinan ocho sesiones de clase con la intención de que el estudiante comprenda la importancia del modelo y la forma como se emplea. De esa manera se cierra la parte de estadística descriptiva en el curso. El resto del semestre, que corresponde a un 20% de las clases, se dedica a una introducción a la inferencia estadística. Se estudian pruebas de hipótesis e intervalos de confianza sobre la media y las diferencias de medias, empleando en ambos casos el modelo normal.

Cabe resaltar que la aproximación que hace el curso a los diferentes temas de estudio enfatiza el sentido de las definiciones y la lógica que hay detrás de los conceptos y las herramientas; en cambio, no enfatiza la deducción de fórmulas ni su empleo. Se considera que para los estudiantes del curso es más importante entender el contexto de los problemas y darles solución a partir de la comprensión y correcta interpretación de los conceptos y las correspondientes relaciones entre ellos, que emplear unas cuantas fórmulas y una notación más o menos sofisticada, mecánicamente.

Actividades y metodologías

Las metodologías adoptadas en el curso buscan seguir la línea de los objetivos planteados, como estrategias que pueden contribuir a la motivación del estudiante y que le permitan apropiarse de los conceptos y las herramientas pertinentes. A continuación se explicitan los principios presentes en las metodologías que se proponen:

- El estudiante se motiva para adquirir destrezas estadísticas si percibe que el contenido del curso tiene aplicación en su carrera.
- La conjunción de las diversas metodologías empleadas contribuye a la comprensión y a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.
- El papel del profesor en el curso se centra en la presentación de problemas y la creación de inquietudes en el estudiante, cada vez que sea posible.
- Se favorece la producción, por parte del alumno, de herramientas rudimentarias o aproximaciones a los conceptos.
- Se fomenta la lectura comprensiva y la realización de esquemas de resumen como herramienta para explicitar y mejorar la comprensión de los conceptos.

En forma breve, lo siguiente describe aspectos de las metodologías empleadas más frecuentemente en el curso.

Metodología 1.

En general, se espera que el estudiante prepare con anterioridad el tema de cada clase. Esto implica: leer un texto y con base en él responder la guía de lectura correspondiente o hacer un esquema de resumen, o bien, responder una guía de trabajo. En ambos casos, el trabajo pretende involucrar al estudiante en una reflexión acerca de un tema específico, nuevo para él, pero sobre el cual muy probablemente tiene ideas intuitivas; además, es la oportunidad para que el estudiante pueda identificar posibles dudas y de esa manera pueda aprovechar lo más posible la discusión que se genere en la clase cuando se haga la puesta en común del trabajo, se presenten resúmenes, y se formulen conclusiones. Se pretende que, de manera natural, las clases se caractericen por una participación activa de los estudiantes; para favorecer esta situación se sugiere la disposición de las sillas como en “mesa redonda”.

Metodología 2

Con mucha frecuencia se proponen tareas en clase que deben ser realizadas en grupos de dos o tres estudiantes con el fin de que haya una discusión entre ellos y a partir de tal discusión se generen las respuestas del grupo. Una vez terminado el trabajo de grupo, se hace una puesta en común de las respuestas de los diferentes grupos o bien cada grupo expone sus respuestas. Esta metodología está asociada estrechamente con los talleres. Ellos ocurren casi siempre durante la hora de clase y pueden tomar hasta dos sesiones. Básicamente, tienen uno de los dos propósitos siguientes: identificar dificultades de comprensión o de manejo de los conceptos, a través de la presentación de situaciones problemáticas que generen dudas en los estudiantes. El otro propósito, es consolidar la comprensión de un tema específico.

Metodología 3

De manera paralela al desarrollo de la teoría, los estudiantes realizan un proyecto de investigación. Se identifica un problema sencillo –preferiblemente relacionado con el ambiente universitario en el que viven los estudiantes– que pueda despertar su interés y que se pueda abordar desde la estadística, empleando los temas del curso. El objetivo es generar una oportunidad para que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos estudiados. Este trabajo se realiza en grupos de cuatro o cinco estudiantes, de diferentes carreras; tiene una parte individual y el resto es trabajo de equipo. En diferentes momentos del curso, se dedican algunas sesiones de clase para hablar sobre aspectos generales del trabajo. Cada grupo debe presentar un informe final de proyecto. El tipo de problemas abordados en estos proyectos se puede ver en el Anexo 2.

Aunque se sugieren estas tres metodologías para manejar las actividades del curso, entendemos que no son las únicas que contribuyen a lograr los objetivos propuestos; en consecuencia, se espera que el profesor, atendiendo al contexto, tome la decisión que mejor le parezca con respecto a la metodología que debe adoptar para cada actividad que proponga.

Evaluación

El diseño del curso busca que la evaluación del estudiante se haga de manera sistemática y frecuente con el fin de que refleje realmente el trabajo y el esfuerzo del alumno. Además, se pretende que la evaluación esté al servicio de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esto significa que, durante el curso, la evaluación debe dar información tanto al profesor como al estudiante acerca de las dificultades y logros de los procesos, de manera que se puedan tomar las decisiones pertinentes oportunamente.

Como consecuencia de lo anterior, es necesario generar diversas, diferentes y frecuentes oportunidades de evaluar al estudiante con el fin de que pueda mostrar lo que ha aprendido.

En este curso, los estudiantes son evaluados a través del trabajo que realizan en tareas diarias, pruebas escritas, talleres, el proyecto de investigación, los exámenes parciales y el examen final. Además, se tienen en cuenta comportamientos con relación al curso como son la asistencia, la puntualidad, la participación en las clases.

RESULTADOS

Son varios los resultados ligados con la realización del proyecto *Matemáticas, Azar, Sociedad*. Unos de ellos tienen que ver directamente con los objetivos que lo impulsaron, es decir, con la mejora de la calidad de los resultados de los estudiantes en el curso del mismo nombre; otros tienen que ver con la puesta en práctica del diseño curricular innovado por parte de profesores que no participaron en el proceso de innovación; y otros se relacionan con la consolidación de la imagen de "una empresa docente" como centro capaz de llevar a cabo programas de diseño y desarrollo curricular novedosos.

Entre 1990 y 1992 se llevó a cabo un proyecto para evaluar los efectos del nuevo diseño curricular en el aprendizaje y la actitud de los estudiantes. La cuarta aplicación de las pruebas (de pre-test y post-test) informa que no hay cambio significativo de actitud en los estudiantes, por razón de tomar el curso, con relación a la globalidad de los aspectos que interesan, aunque sí la hay en sentido positivo en unos puntos específicos. En cambio, se encontró una diferencia significativa ($p < 0.01$) entre la primera y la segunda aplicación de la prueba respecto al logro de objetivos (Gómez, P. et al., 1993). No encontrar cambio en la actitud de los estudiantes, estaba relacionado fuertemente con el empleo del "casino" como estrategia metodológica para aproximarnos intuitivamente a los conceptos de probabilidad. Esa es la razón por la cual, esa actividad se cambió por unos talleres. Estos buscan esencialmente lo mismo, pero lo hacen con preguntas menos guiadas y utilizando contextos diversos, no sólo el de los juegos de azar. Aunque no hemos vuelto a realizar una evaluación formal del curso, la opinión que tenemos de parte de los estudiantes nos hace pensar que la actitud actual hacia el curso ha cambiado positivamente.

Quienes iniciamos la innovación, fuimos profesores del curso hasta tener un diseño bastante detallado del mismo. De ahí en adelante hubo un proceso de implantación e implementación del diseño en el que ya no participamos, directamente, los cuatro profesores: sólo uno de nosotros siguió trabajando[6] de cerca en esa nueva etapa. Se hizo entonces evidente la necesidad de desarrollar esquemas de inducción y formación de profesores con el fin de que ellos se apropien del sentido del curso, y además, puedan enriquecerlo. Se tiene entonces como resultado del proyecto la definición de esquemas de administración y coordinación del curso. Muchos de los talleres que actualmente se aplican en el curso son el producto del trabajo conjunto de los profesores que han dictado el curso durante los últimos cuatro semestres. Este trabajo es parte del esquema para involucrarlos en el diseño del curso.

Vemos que la experiencia vivida por razón de realizar el proyecto aportó a nivel personal y a nivel del grupo un "saber hacer" valioso para la ejecución de los siguientes proyectos. Además, contribuyó a crear y consolidar la imagen de "una empresa docente" como centro de investigación, no sólo dentro de la Universidad de los Andes, sino hacia afuera de ella.

CONCLUSIONES

No consideramos que el diseño curricular al que hemos llegado después de nueve años de trabajo sea perfecto; somos conscientes de las debilidades que tiene, sin embargo, es un punto de partida que tienen los profesores que dictan el curso para mejorarlo y modificarlo. Tampoco sentimos que el aprendizaje de los estudiantes sea completamente significativo, sigue habiendo problemas

6. En la actualidad es el coordinador del curso.

fuertes de motivación y comprensión; sin embargo, el esfuerzo que hemos hecho con este proyecto ha logrado cuestionar y modificar en algunos de nuestros estudiantes su visión acerca de la naturaleza de las matemáticas y la utilidad que ella puede prestar a los científicos sociales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gómez, P., Mesa, V., Perry, P., Fernández, F., Gómez, C. & Marulanda, I. (1993). *Matemáticas y Sociedad*. Bogotá: "una empresa docente" (documento de trabajo).

Kemmis, S. & Mctaggart, R. (1992). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Editorial Laertes.

Mesa, V., Perry, P., Fernández, F. (1988). "Diálogo alrededor de una experiencia docente". En *Texto y Contexto*, No. 15. Bogotá: Universidad de los Andes.

Perry, P., Mesa, V., Fernández, F., Gómez, P. (1990). *Matemáticas, Azar, Sociedad. Una introducción empírica a los conceptos de probabilidad*. Bogotá: "una empresa docente".

Perry, P., Mesa, V., Fernández, F., Gómez, P. (1993). *Matemáticas, Azar, Sociedad. Conceptos básicos de estadística*. Bogotá: "una empresa docente".

Romberg, T. (1991). "Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas" en *Revista de Educación*, No. 294.

ANEXO 1

A continuación se presentan dos ejemplos de talleres que se hacen en el curso para generar intuitivamente conceptos de probabilidad y estadística.

TALLER 1

Introducción

Esta actividad se realizará en grupos de dos alumnos y podrá tomar tres días de clase. A través de ella se pretende que los estudiantes comiencen a familiarizarse de manera intuitiva con los conceptos de valor esperado, riesgo, frecuencia relativa como medida para independizar los resultados del número total de juegos. Se quiere que los estudiantes descubran que hay dos maneras de aproximarse al estudio del azar: una teórica y otra experimental y la relación que hay entre ellas. Además, es una oportunidad para que ellos sientan la naturaleza del azar, comprendan el significado de las leyes del azar; comiencen a ver la necesidad de organizar y presentar adecuadamente la información.

El día anterior a la actividad se pedirá a los alumnos que cada uno de ellos traiga un dado.

Primera parte

Se lanza un dado 60 veces y se registra el resultado de la cara superior. Para cada lanzamiento, si el resultado es 1, usted paga $3; si el resultado es 2 ó 3, le pagan a usted $12; si el resultado es 4 ó 5 ó 6, usted paga $6.

1) ¿Estarían dispuestos a jugar el siguiente juego? [Supongan que una de las personas del grupo (el casino) propone el juego a la otra (el posible jugador)]. Justifiquen su respuesta.

2) Jueguen 60 veces y determinen cuál de las dos personas del grupo (el casino o el jugador) gana y cuánto. [Las cuentas deben ser claras].

Segundo parte

Yo acepté jugar y los resultados que obtuve se presentan a continuación:

1	6	4	4	5	3	1	4	1	5	5	1	2	3	1
6	4	6	4	3	5	5	6	3	4	3	1	6	4	3
2	3	3	1	6	3	4	4	2	6	2	1	5	3	1
6	5	4	2	4	6	6	4	6	1	5	1	3	1	6
2	1	4	1	5	6	1	1	6	1	2	2	6	1	1
2	5	6	2	4	6	6	2	3	1	4	2	3	1	4
5	2	6	1	3	6	5	1	5	3					

3) ¿Gané o perdí? ¿Cuánto? [Las cuentas deben ser claras; esa claridad depende en parte de la forma como se organiza la información.] Sugieran una manera de procesar y organizar la información que se presentó.

4) Inventen alguna manera de analizar teóricamente si la definición de los pagos de este juego favorecen al casino o al jugador. (Para ello hagan los supuestos que crean convenientes).

5) Utilicen la misma manera para analizar la situación si se juegan 100, 500, 1.000, 50.000 100.000 veces. Para cada uno de los casos, determinen, en promedio, cuánto gana o pierde el jugador por cada juego que haga.

Tercera parte

Se simuló el lanzamiento de un dado con un programa de computador. Los resultados obtenidos se presentan a continuación:

	Resultados					
# de lanzam.	1	2	3	4	5	6
100	14	13	18	19	20	16
500	74	73	83	100	82	88
1.000	158	169	160	172	173	168
10.000	1.610	1.734	1.667	1.644	1.642	1.703
50.000	8.356	8.451	8.379	8.401	8.230	8.183
100.000	16.730	16.661	16.775	16.748	16.636	16.450

6) Para cada uno de los seis casos que presenta la tabla, determinen la ganancia o pérdida del jugador. En promedio, ¿cuánto ganó o perdió el jugador en cada lanzamiento? Comparen los resultados obtenidos experimental y teóricamente (preguntas 5 y 6) y establezcan una conclusión.

TALLER 8

Durante los primeros tres meses del presente año, casi a diario, los habitantes de la ciudad X han visto levantarse columnas de humo en diferentes zonas de la ciudad con el consiguiente olor a madera quemada de árboles de pino, vegetación nativa, matorrales y pastos que se chamuscan bajo el fuego.

La Oficina de Prevención de Emergencias de la ciudad, el Cuerpo de Bomberos, la Defensa Civil, el Ejército Nacional, y la Policía Metropolitana de la ciudad han visto reflejada esta situación en los datos de registro y reconocimiento de su Cuerpo de Bomberos, los cuales muestran la dimensión del problema ecológico a que se ha visto abocada la ciudad.

Puesto que el gobierno nacional debe prever el suministro anual de recursos para atender emergencias, quiere analizar la situación tal como se ha presentado en el primer trimestre del año, aceptando que eso representa una muestra de lo que puede ocurrir durante todo el año.

La siguiente tabla presenta los incendios ocurridos a la fecha:

Incendios forestales presentados en el primer trimestre del presente año

		Tipos de incendio	
		Menores	**De gran magnitud**
Ubicación geográfica	cerros orientales	50	10
	bosques de la parte alta del Silencio	40	5
	cerros del Cable, Manjui, Conejera, Altos de Suba	68	7

1) Defina (en sus palabras) el problema. Identifique el objetivo del estudio.

2) ¿Cuáles son las variables relevantes del estudio? Determine los valores que pueden asumir dichas variables y de qué tipo son ellas.

3) Identifique la población de estudio. Identifique la(s) muestra(s) del estudio.

4) Con base en la información que da la tabla anterior, determine:
   - qué representa la cifra 68
   - cuántos incendios han ocurrido en la ciudad X en el primer trimestre del presente año
   - cuántos incendios han ocurrido durante el primer trimestre del presente año, en los bosques de la parte alta del Silencio y de gran magnitud
   - cuál es la proporción de incendios ocurridos durante el primer trimestre del presente año en los bosques de la parte alta del Silencio, sabiendo que han sido de gran magnitud.

5) Haga una tabla de frecuencias relativas de:
   - la ubicación geográfica de los incendios
   - el tipo de incendios

6) Suponga que las proporciones del tipo de incendio se mantienen durante el resto del año. ¿Cuántos incendios de cada tipo se producirán durante el presente año? Si para combatir un incendio menor se necesitan dos helicópteros "baldebambi" y 15 en el caso de un incendio de gran magnitud, ¿cuántos helicópteros se esperaría utilizar para combatir cada emergencia?

ANEXO 2

A continuación se presentan tres ejemplos de los problemas que se han abordado en el curso como proyecto de investigación.

1) Existe polémica nacional alrededor de la dosis personal de droga. Se quiere conocer la aceptación de esta medida en la población uniandina y cómo se relaciona esta opinión con el uso de la droga, el cigarrillo y el alcohol.

2) Los estudiantes que traen auto a la Universidad enfrentan problemas originados por la falta de espacio para el estacionamiento, los altos costos y la inseguridad.

3) Vamos a suponer que la Oficina de Bienestar de la Universidad está interesada en determinar si las actividades en las que se involucran los estudiantes por el hecho de estar en la Universidad son situaciones que generan estrés en ellos.

Experiencias en el manejo del coeficiente de correlación de Pearson en un curso de estadística

Felipe Fernández. Olga Lucía Monroy – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

En este artículo se presenta una experiencia relacionada con el diseño de un desarrollo curricular sobre el manejo del coeficiente de correlación de Pearson en un curso de estadística para ciencias sociales en la Universidad de los Andes. Este coeficiente se presentaba anteriormente sin justificar de donde salía la herramienta y su utilización se centraba más en el manejo algorítmico de la fórmula que en su sentido y aplicación.

Se propuso por un lado, una construcción del coeficiente de correlación de Pearson que diera más sentido a su expresión algebraica y por otro, la utilización de calculadoras gráficas para explorar interrelaciones entre variables en problemas concretos. Como resultado de estas actividades parece ganarse una mayor comprensión en cuanto al sentido de la herramienta por el lado de su construcción y una mayor motivación para resolver problemas, por el lado de la introducción de las calculadoras gráficas.

Contexto

En la Universidad de los Andes se ofrecen cursos de estadística de diferentes niveles y a diferentes tipos de estudiantes. En particular para las carreras de ciencias sociales (derecho, ciencia política, psicología, lenguas modernas y antropología) se ofrece un ciclo de tres cursos de matemáticas, de los cuales los dos últimos hacen énfasis en temas de probabilidad y estadística. *Estadística y Sociedad* es el nombre del tercero de estos cursos que coordina "una empresa docente" en la Universidad, y que se inscribe dentro de un proyecto más amplio de diseño y desarrollo curricular que contempla los tres cursos, conocido como *Matemáticas y Sociedad*.

ANTECEDENTES

En el curso *Estadística y Sociedad*, y también en los cursos *Matemáticas, Ciencia, Sociedad* y *Matemáticas, Azar, Sociedad* se ha trabajado en el diseño, implantación y evaluación de un currículo de acuerdo con una misión y unos objetivos planteados en el proyecto *Matemáticas y Sociedad*. Sin embargo, aunque los esfuerzos hechos hasta el momento han aportado en textos y otros materiales didácticos, evaluaciones formales e informales que sobre el curso se han realizado en los últimos semestres con estudiantes y profesores, sugieren que el diseño y el desarrollo curricular que efectivamente se está dando en la práctica, tiene todavía varios problemas. Algunos aspectos sintomáticos que manifiestan la existencia de tales problemas son los siguientes:

- Los instrumentos que se han usado para evaluar la actitud que tienen los estudiantes hacia el aprendizaje y la enseñanza de la estadística no reflejan cambios notorios
- Se ha identificado que el tema de la resolución de problemas juega un papel muy importante en la problemática del aprendizaje y la enseñanza de la estadística, pero no se ha implementado un programa permanente de diseño y elaboración de nuevas situaciones que favorezcan el aprendizaje
- La práctica de la enseñanza que realmente se da en el salón de clases, todavía está lejos de ser coherente con la nueva filosofía educativa que se predica

Conscientes de lo anterior al iniciar el primer semestre de 1995 se propuso a los profesores la tarea de planear, ejecutar y evaluar nuevos desarrollos curriculares alrededor de diferentes temas de la estadística y haciendo énfasis en la resolución de problemas. Uno de los temas escogidos fue el manejo del coeficiente de correlación de Pearson.

PREOCUPACIÓN TEMÁTICA

Alrededor del tema de la correlación de Pearson y del diseño curricular que nos proponíamos elaborar surgieron al comienzo varias inquietudes:

- ¿Qué objetivos queremos lograr?
- ¿Qué conceptos y procesos están relacionados con el tema?
- ¿Qué dificultades y errores de aprendizaje pueden ocurrir?

Como respuesta parcial a estas inquietudes pensamos que el diseño debía tener en cuenta los siguientes objetivos:

- Motivar a los estudiantes para que las actividades propuestas les llamara la atención
- Proponer problemas y actividades que fueran lo más cercano posible a la realidad, para que realmente se motivaran los estudiantes
- Concentrarse más en el aprendizaje del concepto de correlación y no tanto en los procesos de cálculo involucrados alrededor de este
- Revisar la literatura disponible acerca de errores, dificultades y en general acerca del aprendizaje estadístico

CONSIDERACIONES ACERCA DEL DISEÑO

Preparativos

Llegar al diseño curricular que finalmente se aplicó, fue un proceso laborioso en el que algunas consideraciones iniciales fueron posteriormente descartadas. Al comienzo por ejemplo para cumplir con el requisito de que los problemas fueran cercanos a la realidad, quisimos desarrollar un problema alrededor de un artículo presentado en Tanur (Tanur et. al., 1989): "Statisctics, the Sun, and the Stars", el cual trata con la correlación que se obtiene al realizar mediciones de la brillantez solar, que han aportado a fundamentar una teoría sobre el comportamiento del interior del sol. Posteriormente descartamos este artículo, pues por un lado, vimos que no tenía suficiente interés para los estudiantes y por otro, porque se dificultaba para el planteamiento de preguntas alrededor del mismo.

De otro lado, una consideración clave, fue la idea de implementar el uso de calculadoras gráficas dentro del diseño. Con ellas podíamos simplificar las dificultades de cálculo del coeficiente de correlación de Pearson y concentrarnos más en los conceptos que en los procesos de cálculo involucrados. Además vimos que con las calculadoras lograríamos una mayor motivación de los estudiantes y era un reto interesante para nosotros diseñar la actividad incluyendo su uso.

Con respecto a la revisión de literatura relacionada con errores y dificultades de aprendizaje acerca de la correlación de Pearson, no se encontró mucho material, sin embargo, hubo algunos artículos que dieron luces sobre como orientar el trabajo. Por ejemplo, en Batanero et. al. (1994), encontramos cuestiones relacionadas con errores y dificultades que alertaron sobre aspectos que debería considerar el diseño; en Centeno (1984), encontramos un ejemplo de una aproximación al diseño de situaciones didácticas siguiendo la metodología de la Ingeniería Didáctica y en un libro del NCTM (1981) encontramos algunas ideas para el planteamiento del problema de correlación que daríamos a los estudiantes.

En lo que sigue sobre consideraciones acerca del diseño, presentamos algunas de las reflexiones que influyeron en la elaboración del trabajo.

Metodología de trabajo

Como ya se mencionó más atrás, un ejemplo de un diseño de situaciones didácticas presentado en Centeno (1984) ayudó a guiar la manera de elaborar el diseño curricular que se proponía realizar. Básicamente la influencia que tuvo este artículo fue el planteamiento de una serie de preguntas que hicieron reflexionar sobre lo que se quería hacer. Las preguntas giran en torno de tres aspectos:

Con respecto al contenido y los materiales. ¿Que materiales y recursos de trabajo considerar? ¿Cuáles son las principales ideas a manejar y qué objetivos se pretende alcanzar?

Con respecto al proceso de aprendizaje del estudiante. ¿Cuál sería el punto de partida? ¿Qué debe saber el estudiante para participar en forma activa en el problema que se plantea? ¿Qué conceptos debe manejar el estudiante durante el proceso que se siga? ¿Qué progresos puede realizar al término de la secuencia?

Con respecto al profesor y su método de enseñanza: ,¿Cómo organizar la clase? ¿De qué forma transmitir los propósitos de la situación? ¿Cómo provocar la acción y cómo participar dentro de ella? ¿De qué manera producir, sostener y animar la comunicación? ¿Cómo aprovechar las situaciones de debate que se generan en clase? ¿Cómo terminar la secuencia y de qué manera realizar la institucionalización del conocimiento?

Prerequisitos del tema

Algunos conceptos y procesos que se identificaron como relacionados con el tema de correlación cuantitativa fueron: tipos de variables (continuas, discretas, categóricas, etc.), proporcionalidad (directa e inversa), gráficas de dispersión (representaciones gráficas bivariadas de variables continuas), manejo simbólico de notaciones (tales como: Σx, Σx^2, σ_x, S_x, etc.), formas de presentaciones tabulares, proceso de estandarización y las ideas de localización y de escala. Respecto a la lista anterior, supusimos que allí estaban todos los conceptos y procesos básicos que debería manejar el estudiante para poder introducirlo en el tema de correlación cuantitativa.

Calculadoras gráficas

Antes de entregar a los estudiantes la guía donde se presentaría el problema, era necesario que los estudiantes adquirieran cierta destreza en el manejo de la calculadora. La TI-85 de Texas Instruments fue el modelo de calculadora que prestamos a cada estudiante.

La lectura del manual de la calculadora no era fácil y las opciones y aplicaciones de la calculadora son múltiples, nosotros sólo debíamos concentrarnos en le tema de correlación. Por ello decidimos diseñar una guía para aprender a manejar sus posibilidades estadísticas: la manera como se podía construir un gráfico de dispersión, cómo se podía calcular el coeficiente de correlación de Pearson a partir de una muestra de parejas de datos (x, y), etc.

Aprendizaje y enseñanza de la estadística

La educación estadística es un área naciente de la educación matemática donde la teoría del constructivismo y la resolución de problemas han permeado su práctica. Algunos de los principios que están influenciando nuestra propia práctica son los siguientes (Garfield, 1995):

- El aprendizaje debe ser interactivo y constructivo, se deben generar oportunidades para una discusión creativa, donde cada estudiante pueda poner de su propia parte.
- Debe tener lugar la presentación y discusión de puntos de vista conflictivos.
- Se debe trabajar hacia un consenso en el cual las ideas estadísticas que son manejadas sean reconocidas.
- Para enseñar los temas tradicionales de la estadística, los estudiantes deben previamente experimentar y trabajar con técnicas sencillas de conteo, tabulación de datos y de construcción de gráficas, conjeturar hipótesis y luego verificarlas con métodos estadísticos
- Los temas deben ser presentados bajo formas o diseños que motiven a los estudiantes a ganar experiencia trabajando con datos
- Los proyectos de investigación desarrollados por estudiantes con un fuerte énfasis en la indagación estadística deben ser parte integral de la enseñanza
- El énfasis en cualquier trabajo de estadística debe estar en el análisis y en la comunicación de resultados, no en simples respuestas

Representaciones gráficas, tabulares y correlación

La habilidad para interpretar y extraer información de tablas y gráficas era uno de los propósitos básicos y elementales del diseño propuesto. Al respecto Curzio (1987), (citado en Batanero (1994)), distingue tres niveles de comprensión de la lectura de datos:

- Un primer nivel donde no es necesario la interpretación, sólo se requiere leer los hechos explícitamente expresados en la tabla o en la gráfica. Por ejemplo los títulos de una gráfica
- Un segundo nivel donde se requiere el uso de conceptos y habilidades matemáticas, por ejemplo en un gráfico de dispersión, responder a preguntas tales como que tan intensa es la relación entre las variables, si esta dependencia es directa o inversa y si puede considerarse que exista una relación lineal
- Un tercer nivel donde adicionalmente al uso de conceptos y habilidades matemáticas, se pueden realizar procesos de inferencia y/o de predicción. Por ejemplo estimar un intervalo de confianza para la correlación o pronosticar un valor de y a partir de un valor de x.

Es claro que las dificultades de los estudiantes van aumentando a medida que deseemos que respondan en los niveles segundo y tercero. Por otra parte, alrededor de las representaciones gráficas algunos errores u omisiones que se observan con alguna frecuencia son los siguientes:

- Elección inapropiada de la gráfica para el tipo de variable que se está considerando
- Omisión o mal manejo de las escalas en uno o en ambos ejes
- Ausencia del sentido de agrupación o de la escala en uno de los ejes.

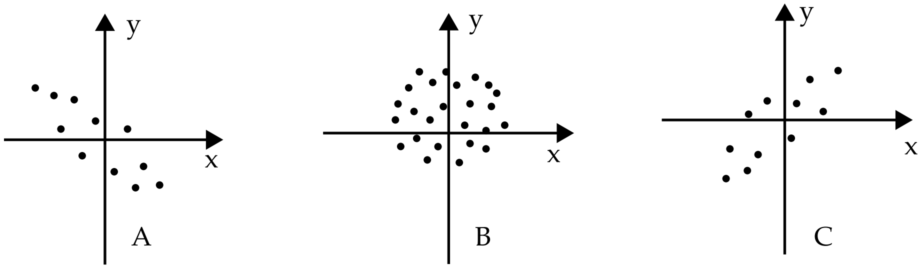
De otro lado, Philips (1992), advierte sobre la dificultad a nivel conceptual de distinguir entre una verdadera co-relación y una relación de causa-efecto.

Construcción del coeficiente de correlación de Pearson

La expresión del coeficiente de correlación de Pearson tiene la siguiente forma:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})}{S_x}\frac{(y_i-\bar{y})}{S_y}$$

El punto de partida para el proceso de construcción es el siguiente: primero se presentan tres gráficas así:



Se plantea al estudiante la necesidad de construir una herramienta en la que se refleje, una relación intensa y negativa entre la variables x e y si se trata de una situación como la que se presenta en la gráfica A, intensa y positiva si se presenta como en la gráfica C, y si la situación es como en la gráfica B, la herramienta debe reflejar que no hay relación entre x e y. Al estudiante se le dice que debe proponer algún tipo de expresión algebraica con base en sumas o productos y que involucre todas los datos (x, y). Si después de un tiempo no se le ocurre nada se le propone analizar las siguientes expresiones: $\sum x_i y_i$ y $\sum x_i + y_i$ de donde debe poder deducir que $\sum x_i y_i$ satisface las propiedades que se quiere que refleje con respecto a las gráficas A, B y C mientras que $\sum x_i + y_i$ no.

Los pasos siguientes también se guían a través de una argumentación que se apoya en representaciones gráficas y en los conceptos de localización y de escala. De manera resumida son los siguientes:

Descubrir la equivalencia entre utilizar $\sum x_i y_i$ ""y"" $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ para lo cual se argumenta básicamente que la correlación debe ser independiente de la localización de los datos. Luego debe verse que por efectos de escala es más apropiado considerar $\sum \frac{(x_i - \bar{x})}{S_x} \Diamond \frac{(y_i - \bar{y})}{S_y}$ y finalmente argumentar que para que no influya la cantidad de parejas de datos que se consideren debe ponderarse cada elemento $\frac{(x_i - \bar{x})}{S_x} \Diamond \frac{(y_i - \bar{y})}{S_y}$ dividiendo por el total de datos.

APLICACIÓN DEL DISEÑO

Materiales y guías de trabajo

Se utilizaron tres guías de trabajo y se discutió la parte del texto guía del curso, que contiene lo relacionado con la construcción del coeficiente. A cada estudiante se le prestó una calculadoras gráficas durante las sesiones, pero no por fuera de clase. También se utilizó un retroproyector de acetatos y papel milimetrado para facilitar la elaboración de las gráficas sobre los acetatos. A continuación hacemos una breve referencia del contenido de las guías de trabajo.
Guía para manejo de la calculadora. Muestra al estudiante la manera de prender la calculadora, de borrarle todos los datos que la haya introducido otro usuario, de introducir y editar una muestra de parejas de datos (x, y), de hacer los gráficos de dispersión, de calcular el coeficiente de correlación y algunas cosas más que se necesitarían para resolver el problema que se daría el día siguiente.

Guía de presentación del problema. Se escogió un problema que presentaba siete variables relacionadas con el rendimiento académico de los estudiantes. La guía estaba dividida en tres partes: en la primera parte se debían organizar en grupos de cuatro y escoger algunos pares de variables para explorar interrelaciones entre ellas, haciendo gráficos de dispersión y calculando sus correlaciones, cada estudiante introducía un par de estas variables en su calculadora y en grupo discutían los resultados obtenidos; en la segunda parte cada grupo preparaban una presentación de sus discusiones en un acetato para realizar una puesta en común; en la tercera parte se trataba de obtener conclusiones de la puesta en común.

Desarrollo de la actividad

El diseño curricular estaba planeado para ser desarrollado en tres horas pero fue necesario utilizar cuatro sesiones de una hora. Por otra parte, la actividad fue realizada en dos cursos con diferentes alumnos del mismo nivel pero con profesores distintos. A continuación hacemos una breve referencia de lo ocurrido en las sesiones:

Primera sesión (Trabajo individual). Con la guía de manejo de la calculadora se introdujo a los estudiantes en el modo estadístico y gráfico. Los estudiantes trabajaron individualmente y la mayoría completaron la actividad tal como se había planeado, adicionalmente respondieron a la pregunta: "¿cómo les pareció la actividad desarrollada?", con la cual se pretendía evaluar la motivación inicial de los estudiantes.

Segunda sesión (Trabajo en grupos de cuatro). Se entregó a los estudiantes la segunda guía de que presentaba el problema. Algunos estudiantes trabajaban individualmente en la introducción de datos pero otros se ayudaban entre sí dictándose los datos. Todos los grupos necesitaron utilizar la guía de manejo de la calculadora. Con respecto a lo que se había planeado inicialmente el tiempo se quedó corto principalmente por la dificultad de algunos estudiantes para manejar la calculadora. La presentación de resultados que cada grupo debía realizar se aplazó para la tercera sesión, aunque los grupos si alcanzaron a preparar sus acetatos, a relacionar de alguna manera las gráficas y correlaciones obtenidas y a concluir algunas cuestiones con respecto al coeficiente de Pearson. Por lo ocurrido en esta sesión se vio la necesidad de modificar la tercera parte de la guía de presentación del problema.

Tercera sesión (Puesta en común). Se realizó la puesta en común y a través de esta se detectaron varios errores que obligaron a algunos grupos a revisar y reflexionar sobre lo que habían hecho. Ocurrieron varias dificultades que se había previsto, como por ejemplo en el manejo de las escalas y en no poder comparar fácilmente dos gráficas que presentaban la misma información (por intercambio de los ejes de presentación) entre otras, que contribuyeron a alertar a los estudiantes sobre los cuidados que se deben tener en la presentación de resultados. Se logró que los estudiantes intuyeran que las correlaciones siempre tomaban valores entre -1 y 1, que valores cercanos a cero reflejaban poca relación, que valores cercanos a 1 o -1 reflejan una correlación intensa y que el signo sugiere el sentido de la relación. Por otra parte la modificación de la tercera parte de la guía llevaba a que los estudiantes exploraran el efecto de trasladar los datos y de cambiar escalas, con respecto al valor de la correlación.

Cuarta sesión (Institucionalización). Para finalizar las actividades desarrolladas se decidió discutir la construcción del coeficiente de correlación, desafortunadamente las exploraciones que debían realizar los estudiantes en la tercera sesión con respecto a traslaciones y cambios de escala no se consolidaron en la medida que habíamos previsto y aunque la discusión en torno de la construcción del coeficiente la entienden, no se internaliza la independencia del coeficiente con respecto a la localización y la escala.

CONCLUSIONES

Como conclusiones generales acerca de toda la actividad desarrollada y haciendo una evaluación general del desempeño de todos los estudiantes mencionamos las siguientes:

- La formación de grupos pequeños de trabajo parece ayudar a sobrellevar concepciones erradas y a mejorar el aprendizaje de conceptos estadísticos
- La utilización de nuevas tecnologías que permitan al estudiante visualizar e interactuar con datos parece mejorar la comprensión de procesos relacionados con el análisis de datos y el aprendizaje de conceptos estadísticos
- Las concepciones erradas de los estudiantes son "elásticas" y difíciles de cambiar. Los profesores no pueden esperar que los estudiantes ignoren sus creencias cognitivas o sus fuertes intuiciones simplemente por enfrentarse con resultados contradictorios en clase
- Los estudiantes pueden mostrar un mejor rendimiento en pruebas evaluativas porque ellos saben cual es la respuesta que se espera de ellos, sin embargo, pueden seguir teniendo ideas incorrectas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. et. al. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *Int. J. Math. Educ. SCI Technol.*, vol. 25, 4, pp. 527-547.

Centeno, J. (1984). Relación con el saber: las situaciones. En Centeno, J. (1984), *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*, pp. 113-133. Madrid: Editorial Síntesis.

Chatfield, C. (1988). *Problem Solving. A Statistician´s Guide*. London: Chapman and Hall.

Fernández, F. et. al. (1993). *Estadística y Sociedad*. Bogotá: una empresa docente.

Garfield, J. (1995). How Students Learn Statistics. *International Statistics Review, 63, 1,* pp. 25-35.

Gómez, P. et. al. (1993). *Matemáticas y Sociedad*. (Documento de una empresa docente).

NCTM, (1981). *Teaching Statistics and Probability*. Reston, VA: NCTM.

Phillips J. (1992) *How to Think about Statistics*. New York, Freeman and Company.

Tanur J., et. al. (Eds.). (1989). *Statistics: A Guide to the Unknown*. California, Wadsworth & Brooks.

Calculadoras gráficas y precálculo: exploración de aspectos relacionados con la comprensión

Vilma–María Mesa, Pedro Gómez. – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

Resumen

Se analizaronn las respuestas que dos grupos de estudiantes –uno que utilizó calculadoras gráficas y otro que no las utilizó– dieron a una prueba que se aplicó tanto al comienzo como al final de un curso de Pre-cálclo, buscando estrategias de solución comunes, las cuales se analizaron luego bajo dos perspectivas perspectivas diferentes: la dualidad operacional–estructural de los conceptos (Sfard, 1991) y la del manejo de representaciones (Kaput, 1992) El análisis mostró que la restricción del uso de la calculadora en las evaluaciones, dificulta la indagación acerca de su aporte a los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, las estrategias de solución de los ejercicios mostraron diferencias entre los grupos. El análisis de las estrategias bajo las dos perspectivas propuestas también mostró diferencias entre los dos grupos. La calculadora por sí misma no es un elemento que garantice un manejo más estructural de los conceptos, como sí lo son los cambios en la instrucción, en el diseño curricular y en las visiones que el profesor tiene de su actividad, de cómo se aprende y de las matemáticas.

Presentación

El programa de investigación, "Calculadoras gráficas y Pre-cálculo" tiene como objetivo analizar la influencia de la calculadora gráfica en el diseño curricular; en la interacción dentro del salón de clase del profesor y del estudiante entre sí y con el conocimien-to; en las creencias del profesor; en el aprendizaje y la comprensión y en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.

Es un proyecto en cinco fases, que busca crear un espacio de reflexión para la producción de un nuevo currículo que integre la calculadora gráfica en los cursos finales de la formación básica de los bachilleres en el país. En las dos primeras fases, se ha hecho una primera indagación del alcance del recurso, teniendo como referencia la Universidad de los Andes. En este documento se hablará del trabajo adelantado en relación con el aspecto de aprendizaje y comprensión.

Este proyecto ha sido financiado por COLCIENCIAS, Texas Instruments, la Comisión para el Avance de la Ciencia y la tecnología del Banco de la República y por el PLACEM, Proyecto Latinoamericano de Calculadoras en Educación Matemática.

MARCO TEÓRICO

Acerca del conocimiento

El conocimiento se describe como un conjunto de estructuras internas que existen en la mente de cada ser humano y que están interrelacionadas. Se acepta que existe un conjunto de representaciones mentales internas de ese conocimiento. Las matemáticas se aprenden cuando se adicionan y conectan elementos a las estructuras internas de conocimiento o cuando se reorganiza una estructura ya existente. Las adiciones, conexiones y reorganizaciones pueden ser producto de relaciones de semejanza (analogías), de diferencia o de inclusión. Para efectos de analizar la complejidad del proceso de comprensión de un individuo, se utilizarán dos perspectivas, la de la dualidad operacional–estructural de los conceptos matemáticos y la del manejo de los sistemas de representación. Se hablará del "mundo mental" para hablar de todo lo que tiene lugar en la mente del individuo. Se usará el término *concepto* siempre que se hable de una idea matemática en su forma "oficial": como un constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento ideal. Al conjunto de representaciones internas y a las asociaciones que evoque el concepto (como representación subjetiva o interna) se le llamará *concepción*.

Dualidad operacional–estructural

Es necesario definir lo que se entiende por visión como objeto y visión como proceso de un concepto matemático.

Cuando se tiene la visión objeto del concepto, es posible referirse a éste como un ente que posee rasgos propios y que puede someterse a procesos regidos por reglas bien definidas. Esta visión es estática, instantánea e integradora.

Cuando se tiene la visión proceso del concepto, es posible referirse a éste en términos de algoritmos, acciones y procedimientos. Esta visión es dinámica, secuencial y cargada de detalles.

El supuesto básico sobre el que se trabaja es que las dos concepciones de la misma noción matemática no son mutuamente excluyentes y que ara efectos de obtener un profundo entendimiento de las matemáticas, es indispensable contar con la habilidad de ver los conceptos como procesos y como objetos. Esto es lo que se conoce como la dualidad operacional (proceso)– estructural (objeto).

Sistemas de representación

Un *sistema de representación* está conformado por un conjunto de caracteres y un sistema de reglas. El sistema de reglas permite identificar nuevos caracteres del sistema; -operar sobre- y -determinar relaciones entre- ellos. El *medio* es el conjunto de aspectos particulares del mundo físico que se usa para ejecutar acciones del sistema de representación.

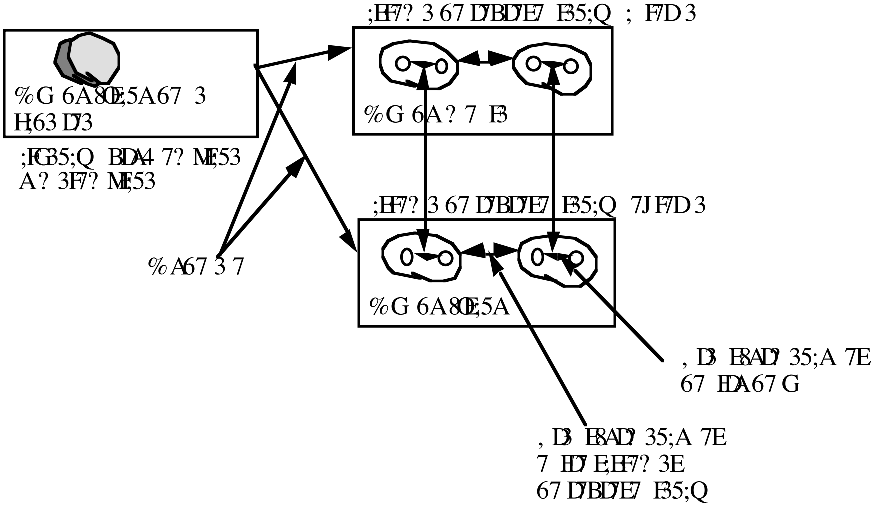
Se supone que las representaciones externas pueden evidenciar la forma en que las estructuras internas (es decir las que están en la mente del individuo) están interrelacionadas y que es posible hablar de un concepto utilizando solamente un sistema de representación; también es posible utilizar más de un sistema de representación para hablar del mismo concepto. Es posible relacionar las diferentes clases de actividad matemática con los manejos que se dan a los sistemas de representación en el mundo físico (es decir en el mundo que puede percibirse a través de los sentidos y en el que tienen lugar las acciones de los individuos, ver Figura Nº 1):

- Aquella en la que se hacen transformaciones exclusivamente dentro de un sistema de representación, con o sin significado externo
- Aquella en la que se hacen traducciones entre sistemas de representación
- Aquella en la que se construyen y se ponen a prueba modelos en los que se requiere manejar un conjunto grande de sistemas de representación
- Aquella en la que se hacen traducciones entre estructuras matemáticas o entre diferentes modelos de situaciones

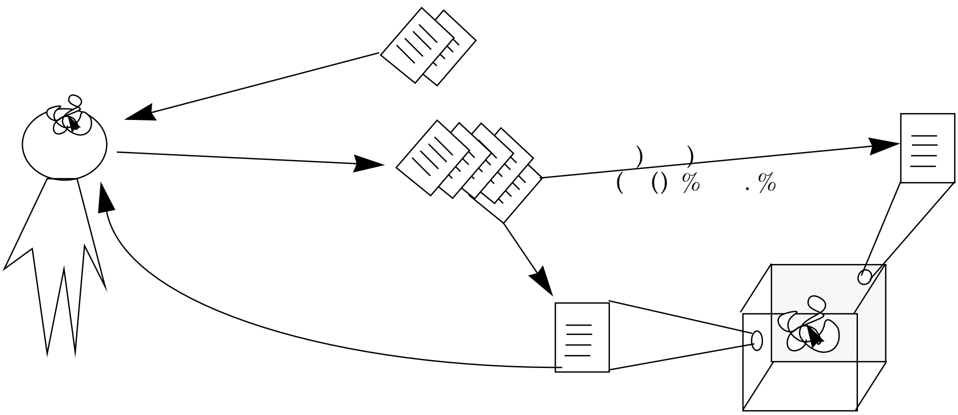
Implicaciones en la investigación

Las dos perspectivas bajo las cuales se puede analizar la comprensión de un estudiante pueden ser utilizadas de la siguiente forma (ver figura Nº 2):

En la mente del individuo existe un estado de comprensión de los conceptos matemáticos determinado tanto por la instrucción como por la experiencia (1).



1:) I



1:) I

G36A 7 ;6; H6GAE7 78 D7F 3 5A G3 35F;H636 ? 3F7? ME53 CG7; HAG5D3 7 ? 37 A67 3 9GAE 67 7EFAE5A5 7BFAE BG7 67 D73 ;L3D5;7DAEB3EAE B3D3 ED3 43 3D7 7 3 4;7 E73 7 8AD 3 AB A7E5DE3 5363 B3EA67 3 7EED3F79;3 E7 BG767 675;DE; E7 7EM? 37 36A G 5A5 7BFA67E67 3 H;EQ ABD35;A3 A 67E67 3 7EDG5FGD KE7 BG767 D75AA57DCGNE;EF7? 3 67 D7BDE7F 35;Q E7 7EM GE36A

7EF7 6A5G?7F AE7 3? 3DMWEED3F79;3X3 AEB3EAE CG7E9G77 ;6; H6GA5G36A 67E3DDA 3 G3 35FE;H; 636? 3F7? ME53

Esto significa que un paso de la estrategia puede localizarse en alguna de las casillas de la Tabla Nº 1 (4a y 4b). Puede haber estrategias que únicamente se

Perspectiva[a]	**Sistema de representación 1 Gráfica**	**Sistema de representación 2 Simbólica**	**...**	**Sistema de representación n**
Operacional				
Estructural				

Tabla Nº 1.

a. Moschkovich et al. (1993).

localizan en una casilla, v.g., representación simbólica y visión operacional o que se localizan sobre una fila o sobre una columna de la tabla, v.g., representación gráfica y visión operacional y estructural. El análisis de la estrategia bajo estas dos perspectivas arrojará información acerca del estado de comprensión que existe en la mente del individuo en relación con los conceptos evocados por la actividad propuesta.

DISEÑO METODOLÓGICO

Las apreciaciones hechas en el marco teórico permiten definir los objetivos de la exploración que se quiere hacer sobre la comprensión. En primer lugar, se desea identificar las estrategias que un grupo de estudiantes usa al resolver tres ejercicios en el curso de pre-cálculo y en segundo lugar calificar las estrategias según las casillas de la tabla de perspectivas, Tabla Nº 1. Se desea hacer esto en cuatro momentos diferentes en el tiempo:

- Al comenzar el semestre en un grupo sin calculadoras gráficas
- Al finalizar el semestre en un grupo sin calculadoras gráficas
- Al comenzar el semestre en un grupo con calculadoras gráficas
- Al finalizar el semestre en un grupo con calculadoras gráficas

Contexto

El proyecto se adelantó con estudiantes de precálculo de la Universidad de los Andes. El primer grupo tomó el curso en el semestre II de 1993; el segundo grupo, en el semestre I de 1994. El mismo profesor dirigió cursos. El curso está dirigido al estudio de diversos tipos de funciones –temas longitudinales– según diversos aspectos –temas transversales; así, cada uno de los temas longitudinales, se estudia teniendo como referencia cada uno de los temas transversales (ver Tabla Nº 2)

Temas longitudinales
Funciones lineales
Funciones cuadráticas
Funciones cúbicas
Funciones polinómicas
Funciones racionales
Funciones con radicales

Temas transversales
Trabajo dentro de la representación gráfica
Trabajo dentro de la representación simbólica
Relación entre manipulaciones
Características de la función
Características de la familia de funciones
Sistemas de ecuaciones
Ecuaciones y desigualdades
Aplicaciones

Tabla Nº 2.

Prueba

Se diseñó una prueba escrita con ejercicios de respuesta abierta que evalúan los objetivos del curso. Se trabajó únicamente con los sistemas de representación gráfica y simbólica.

Análisis previos

El marco teórico propuesto implica la realización de dos pasos de codificación de la información que se obtiene al analizar las estrategias.

Una primera codificación ocurre en el momento de analizar las respuestas que da el grupo de estudiantes a una actividad matemática. Se espera que para una actividad dada haya un número reducido de estrategias que un estudiante pueda seguir al enfrentarse a la actividad.

Por otra parte, cada estrategia puede caracterizarse según las casillas que utilice en la tabla de perspectivas. Esta nueva codificación será la que permita hacer referencia al estado de comprensión de los conceptos involucrados en la actividad. Este proceso se muestra en la Figura Nº 4:

El proceso de análisis tendrá dos pasos:

- Obtención de las estrategias posibles por ejercicio.
- Calificación de las estrategias según la tabla de perspectivas, a partir de la caracterización de los pasos de la estrategia.

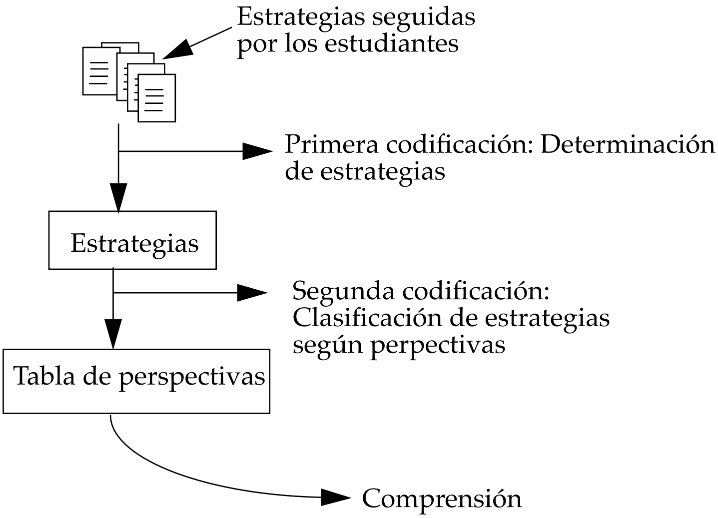


Figura Nº 4.

Obtención de las estrategias posibles por ejercicio. Se tomará una muestra aleatoria de las hojas de respuestas de los estudiantes en las dos pruebas y en ambos grupos con el fin de definir una lista de estrategias utilizada. Esta lista se utilizará para clasificar los dos grupos de estudiantes según las estrategias encontradas.

Calificación de las estrategias según la tabla de perspectivas, a partir de la caracterización de los pasos de la estrategia. Para adelantar este proceso, se partirá del trabajo de Moschkovich et al. (1993) en la caracterización del contenido de cada una de estas casillas:

- Operacional-Gráfica, OG: Se localizan puntos en un plano cartesiano que luego se conectan. Se identifican las coordenadas de puntos que están sobre una gráfica.
- Operacional-Simbólica, OS: Se muestran transformaciones sintácticas exclusivamente en esta representación. Se observan fórmulas descontextualizadas. Se da una expresión simbólica para definir un objeto, aún cuando no se necesita.
- Estructural-Gráfica, EG: Se muestran movimientos de una gráfica en un plano cartesiano, sin referencia a una expresión simbólica.
- Estructural-Simbólica, ES: Se describen características de los objetos utilizando la representación simbólica. Se interpreta el significado de un parámetro en una expresión simbólica. Se reconoce una

expresión como identificadora de una familia o se asocia con un objeto de la familia.

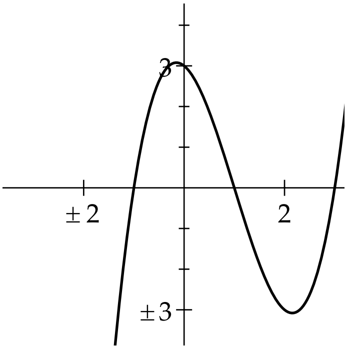
Un resultado del proyecto será el de refinar esta caracterización.

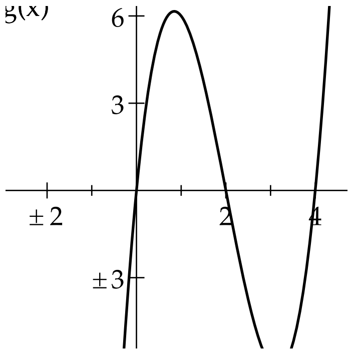
DATOS Y RESULTADOS

La aplicación de las pruebas inicial y final a los dos grupos dio lugar a cuatro paquetes de pruebas, cada uno con un promedio de 23 pruebas. El documento de la prueba tiene 9 hojas, de manera que se dispone de aproximadamente 4 5 23 5 9 = 828 ejercicios que pueden ser analizados. Se escogieron 3 ejercicios y se analizaron las pruebas en forma pareada para 18 estudiantes que presentaron las dos pruebas.

Por razones de espacio, en este documento se muestran los resultados para uno de los tres ejercicios analizados. El texto del ejercicio es siguiente:

A continuación se presenta la gráfica de una expresión f(x) y la gráfica de otra expresión, g(x), obtenida a partir de f(x). Dé una expresión para g(x) en función de f(x) que represente la transformación que sufrió f(x). Explique su razonamiento.





Durante el curso, en ninguno de los grupos, se hicieron ejercicios de este tipo. En general, siempre se pedían expresiones simbólicas concretas que definieran la función representada en una gráfica. Por esta razón, se considera que el ejercicio reviste una mayor complejidad. Es un ejercicio en el que, implícitamente, se pide hablar de una función a partir de su gráfica y explícitamente, tratar la gráfica como un objeto que sufre transformaciones y traducir a un sistema de representación simbólico las transformaciones hechas en una representación gráfica.

En este ejercicio se espera que los estudiantes reconozcan que con respecto a la gráfica de *f*, la de *g* tiene una traslación horizontal hacia la derecha y además una dilatación; se espera que descubran que el valor de la traslación es 1 y el de dilatación es 2; finalmente, se espera que vean que no es necesario modelar *f* para obtener *g* y que representen simbólicamente tanto la traslación como la dilatación.

Estrategias y frecuencias

A continuación se describen las estrategias que se observaron en los grupos.

E1. Modelar f; para poder obtener una expresión para g. Se da una expresión polinómica, racional o trigonométrica para definir f; g se expresa o bien en función de “f(x)” o bien haciendo referencia a la definición que se utilizó para definir f:

f(x) = sen(x);

g(x) = 3f(x) -1 (No se hace referencia a la expresión dada para definir f)

g(x) = 3sen(x) -1 (Se hace la referencia a la definición de f)

Figura Nº 5.

E2. Expresar g en función de “f(x)”. Se da una expresión para g g se expresa en función de “f(x)”; es decir que no se requiere la expresión que define a f para poder definir g.

E3. Verbal. Se da una descripción verbal de lo que le sucedió a f. Se reconoce la dilatación y la magnitud (2 ó 3) y la traslación de una unidad a la derecha.

Nada. No hay respuesta en el ejercicio.

La Tabla Nº 3 muestra las frecuencias de uso de estas estrategias en los dos grupos en la prueba final[2].

En el grupo que no usó calculadoras, el 45% (8 estudiantes) dio, en la prueba final, una expresión para g en función de f o una descripción verbal de lo que sucedió con la función. El 17% (del 22% que aparece en la tabla) modeló la gráfica de f mediante una función polinómica utilizando los cortes para dar los factores del polinomio. También se abandonó el modelo trigonométrico observado en la prueba inicial.

2. En la prueba inicial, en el grupo sin calculadoras 1 estudiante trabajó el ejercicio (modelando f); en el grupo con calculadoras, 3 estudiantes lo hicieron (dos modelando f; uno con una aproximación verbal).

Estrategias	#		%	
	SIN	**CON**	**SIN**	**CON**
E1. Modelar f para poder definir g	4	10	22%	56%
E2. Expresar g en función de “f(x)”	5	4	28%	22%
E3. Verbal	3	1	17%	6%
Nada	5	3	27%	17%
Sin información	1	0	6%	0%
Total	18	18	100%	100%

Tabla Nº 3.

En el grupo que usó calculadoras se observa que el 28% (5 respuestas) dio en la prueba final una expresión para g en función de f o una descripción verbal de lo que sucedió con la función; la expresión dada para f –a diferencia de lo que se encontró en el grupo sin calculadoras –, se usa en la respuesta que se daba para g. Es decir, en la expresión final, aparece g en términos de la expresión dada para f. También se abandona el proceso de modelar mediante funciones trigonométricas. Como punto interesante de contraste con el grupo que no usó calculadoras, se encontró que el 43% (del 56% que aparece en la tabla) modeló la gráfica de f mediante funciones polinómicas.

En la Figura Nº 6 se pueden apreciar las diferencias por grupos. Se puede ver una diferencia importante en la intención de modelar f antes de poder iniciar el trabajo con g, en el grupo que utilizó la calculadora gráfica. como contraste, no se aprecia una diferencia importante en los grupos al modelar g sin tener que recurrir a la definición simbólica de f. También se ve que el grupo que usa calculadora gráfica tiende a utilizar más una descripción verbal comparado con la tendencia que se ve en el grupo que no la usa.

Caracterización de los pasos de estrategias según tabla perspectivas

En la Tabla Nº 4 se da la lista de los diferentes pasos encontrados en las estrategias junto con la calificación dada por la tabla de perspectivas. Se utiliza la siguiente convención:

- E: Estructural
- O: Operacional
- G: Sistema de representación gráfico
- S: Sistema de representación simbólico

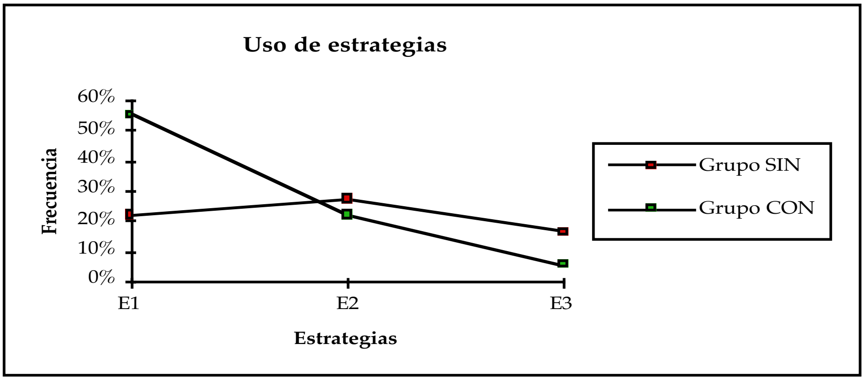


Figura Nº 6.

En este documento se muestra el análisis de la estrategia número uno, E1, con respecto a la tabla de perspectivas, por ser ésta la que mostró mayor diferencia entre los dos grupos. Para obtener la clasificación fue necesario desglosar la estrategia en cuestión. Dentro de esta estrategia se encontraron diferencias en cuanto al manejo de los conceptos involucrados, lo que dio origen a 6 modos diferentes de tocar la tabla de perspectivas. Esto se muestra en la Tabla Nº 6.

En la Tabla Nº 6 se muestra la comparación para los dos grupos:

Quizás lo interesante para resaltar es la intención de tratar a g como un objeto. Esto es lo que corresponde a los casos en los que se hace un tratamiento Estructural–Simbólico en la estrategia. Obsérvese que en el grupo que no usó calculadoras, el 12% muestra esta tendencia, mientras que en el grupo que usó calculadoras, el 22% lo hace. Es decir, que a pesar de que en este grupo hay una tendencia a trabajar operacionalmente con las funciones –por la necesidad de modelar f–, se puede notar, a la larga, una tendencia a manejar el concepto de manera más estructural que en el grupo que no usa la calculadora.

Sobre la tabla de perspectivas se obtiene una visión diferente de esta información (ver Figura Nº 7)

Se puede observar un mayor peso (cantidad de puntos en las casillas) en la casilla OG del grupo que usó la calculadora que en el otro grupo. Las demás casillas muestran un peso similar.

# ID	Descripción del elemento	Calificación
1.	Descripción verbal de la traslación que afectó la gráfica de f para obtener la de g.	EG: Se está hablando de un objeto (gráfica) que sufre transformaciones
2.	Descripción verbal de la dilatación que afectó la gráfica de f para obtener la de g.	EG
3.	Reconocimiento de la traslación sin estimar magnitud.	EG
4.	Reconocimiento de la dilatación sin estimar magnitud.	EG
5.	Utilizar información de la gráfica de g para estimar un valor de traslación: 1.	OG: Se está tomando información de la gráfica: puntos sobre ella.
6.	Utilizar información de la gráfica de g para estimar un valor de dilatación: 2 ó 3.	OG
7.	Escribir una expresión en la que aparece un valor de traslación sumando/ restando a f(x): f(x)±•; f(x±•).	ES: Se reconoce que el objeto inicial se puede simbolizar sin recurrir a su expresión completa.
8.	Escribir una expresión en la que aparece un valor de dilatación multiplicando a /como potencia de f(x): •f(x); $f(x)^{\bullet}$.	ES
9.	Escribir una expresión polinómica de grado 3 para definir f	OS: Se operacionaliza el objeto de manera que tenga una expresión conocida
10.	Escribir una expresión polinómica de grado 3 para definir g	OS
11.	Escribir una expresión racional para definir f.	OS
12.	Escribir una expresión trigonométrica para definir f.	OS
13.	Utilizar los cortes en X de alguna de las gráficas como raíces que se escribirán en factores: $(x-r_1)$	OS
14.	Describir verbalmente cómo es la expresión que produce a f	OS: Se requiere operacionalizar f

Tabla Nº 4.

# ID	Descripción del elemento	Calificación
15.	Decir que para hacer el ejercicio se requiere una expresión para f.	OS
16.	Tomar valores de la gráfica de f para hacer una tabla de valores.	OG
17.	Usar valores de la gráfica para construir una expresión para f.	OS

Tabla Nº 4.

Id	Sub clasificación de la estrategia 1	Asignación de casillas en a tabla de perspectivas
E1.1	Modelar f y modelar g usando "f(x)"; reconocer magnitud de la dilatación y de la traslación; describir en lenguaje natural lo sucedido con la gráfica	OG-OS-ES-EG
E1.2	Modelar f, modelar g teniendo en cuenta la expresión dada para f; aplicar a esta expresión la dilatación y la traslación	OG-EG-OS
E1.3	Modelar f, modelar g usando f(x); reconocer magnitud de la dilatación y de la traslación	OG-ES-OS
E1.4	Modelar f	OG-OS
E1.5	Modelar f y describir en lenguaje natural lo que sucede con g; se pueden identificar las magnitudes de la traslación y de la dilatación	EG-OG
E1.6	Dar tabla de valores para construir una expresión que defina a f	OG

Tabla Nº 5.

CONCLUSIONES

En el grupo que utilizó calculadoras, se observó un manejo más estructural de las funciones lineales y más operacional de las funciones polinómicas. Sin embargo en este grupo se observa una tendencia a manejar estructuralmente las funciones desde una perspectiva gráfica y simbólica.

Estrategia 1: Modelar f	**#**		**%**	
	Sin	**Con**	**Sin**	**Con**
OG-OS-ES-EG	1	2	6%	11%
OG-EG-OS	1		6%	
OG-ES-OS		2		11%
OG-OS	2	4	11%	22%
EG-OG		1		6%
OG	1	1	6%	6%
Total	5	10		

Tabla Nº 6.

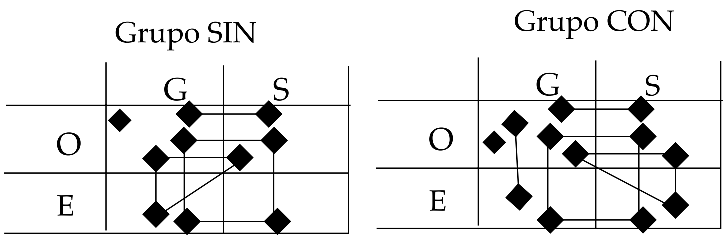


Figura Nº 7.

Se observó mayor evidencia de reconocimiento de atributos de los objetos en el grupo que usó calculadoras que en el grupo en que no se usaron.

También se observó en el grupo que usó la calculadora, un mayor número de puntos sobre la casilla OG de la tabla de perspectivas. Esto puede explicarse debido a la mayor posibilidad de experimentación que se tiene cuando se dispone del recurso; sin embargo, este es un punto que amerita una mayor profundización.

En ambos grupos se observa la influencia del currículo en el manejo de procedimientos que se enseñan en el curso, aunque en ambos grupos se observa tendencia a utilizar más representaciones simbólicas que gráficas.

La no utilización de la calculadora durante las evaluaciones restringe sus posibilidades de uso en el aula. Esto fue evidente en el tipo de respuestas dadas por los dos grupos de la investigación en comparación con lo que se ha observado con otros grupos en los que el recurso se puede utilizar incluso en las evaluaciones.

Este mismo hecho impidió evaluar cómo fue la incorporación del recurso al trabajo de los estudiantes. Las respuestas consignadas en las pruebas no mostraron la forma en que los estudiantes habrían utilizado el recurso, lo cual habría sido valioso para efectos de evidenciar el tipo de aproximación que se tienen de los conceptos; es muy posible, que la calculadora esté fomentando el trabajo operación gráfico, el cual puede llevar a desarrollar una mayor sensibilidad estructural–gráfica y una operacional–simbólica; estos dos factores pueden llevar a fomentar el desarrollo del manejo estructural–simbólico de los conceptos que maneja el individuo. Esto es, nuevamente, otra posible línea de trabajo para investigaciones futuras.

La calculadora por sí misma no es un elemento que garantice un manejo más estructural de los conceptos, como sí lo son los cambios en la instrucción, en el diseño curricular y en las visiones que el profesor tiene de su actividad, de cómo se aprende y de las matemáticas.

La calculadora es un elemento que genera choques y esto la convierte en un elemento valioso para propiciar una reflexión en torno a nuestra práctica y a nuestras visiones de las matemáticas y del proceso enseñanza -aprendizaje

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Birenbaum, M., Kelly, A., & Tatsuoka, K. (1993). Diagnosing knowledge states in algebra using the rule-space model. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(5), pp. 442-459.

Bobrow, D. G. y Collins, A. (Eds.). (1978). *Representation and understanding: Studies in cognitive science*. New York: Academic Press.

Boers, M.A y Jones, P.L. (1994). Students' Use of Graphics Calculatos under Examination Conditions. International Journal of mathematics Education, Sciences and Technology (pp. 491-516). Leicestershire, U.K: Taylor and Francis.

Bright, G., Waxman, H. y Williams, S. (Eds.). (1994). *Impact of calculators on mathematics instruction*. Lanham: University Press of America.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), pp. 33-115.

Churchhouse, R. F. (1992). The effect of computers on mathematics. En Cornu, B. & Ralston, A. (Eds.) *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. pp.12-18. Paris: Unesco.

Cobb, P., Yackel, & E.Wood, T. (1992). A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education* , 23, 1, pp. 2-33.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC.

Connell, M. L. (1992). How Do They Know? An Investigation into Student Mathematical Conceptions and Demana, F., & Waits, B. K. (1988). Microcomputer graphing: A microscope for the mathematics student. *School Science and Mathematics Journal*, *88*,

Cornu, B. (1992). Computers as an aid to teaching and learning mathematics. En Cornu, B. & Ralston, A. (Eds.) *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. pp. 25-32Paris: Unesco.

Dick, T. P. (1992) Symbolic/Graphic Calculators - Teaching Tools for Mathematics. *School science and matehamtics*. pp.1-5.

Demana F., Waits, B. K. K. (1990) The role of technology in teaching mathematics. *The mathematics Teacher*. 82(1) pp.27-31.

Douady, R. (1993). *L'ingéniérie didactique. Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage*. Paris: IREM.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). (1992). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (MAA Notes, Volume 25)*. USA: Mathematical Association of America.

Dunham, P. H., &Dick T.P. (1994). Research on Graphing Calculators. *Mathematics Teacher*, 87(6), pp. 440-445.

Echeverri, H., Gómez, P., Gómez, H., & Mesa, V. M. (1991). *Precálculo*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education. Studies in Mathematics Education*. London: The Evertson, C. M., & Burry, J. A. (1988). Capturing Classroom Context: The Observation System as Lens for Assessment. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Edu-*

cational Research Association (New Orleans, LA, April 5-9, 1988). ERIC Number: ED298109 . ERIC Issue: RIEJAN89,

Ernest, P. A Perspective on Research in Mathematics Education.

Fey, James T. (1994). Technology and mathematics education at ICME-7. En Dossey, J. A. (Ed.). *American perspectives on the seventh inerntional congress on mathematical education*. Reston: NCTM.

Gimeno, J. (1991). *El curriculum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata.

Gimeno, J. (1985). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo*. Madrid: Amaya.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics*, *1*(3), pp. 4-11.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En Hiebert, J. (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, James y Carpenter, Thomas P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kaput J.J.(1989) Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. En Wagner, S. y Kieran, C. (Eds.). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston: NCTM.

Kaput, J. J. & Thompson, P. W. (1994). Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME. *Journal for Research in Mathematics Education*. 25(6) pp. 676-684

Kieran, C. (1993). Functions, Graphing, and Technology: Integrating Research on Learning and Instruction. En Romberg, T., Fennema, E. y Carpenter, T. (Eds.). *Integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale: LEA.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En Wagner, S. y Kieran, C. (Eds.). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston: NCTM.

Kieran, Carolyn (1992). The learning and teaching of school algebra. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Kirshner, D. (1989) Critical Issues in Current Representacion System Theory or A Reaction to: "Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. En Wagner, S. y Kieran, C. (Eds.). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston: NCTM.

Larkin, J.H. (1989) Robust Performance in Algebra: Ther Role of the Problem Representation. En Wagner S. Kieran, C (Eds.). R*esearch Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston: NCTM.

Leindhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, *60*(1), pp. 1-64.

Lesh, Richard (1987). The Evolution of Problem Representations in the Presence of Powerful Conceptual Amplifiers. En Janvier, C. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1990). *Teoría y práctica en educación matemática*. Madrid: Alfar.

Mayer, R. (1986). Capacidad matemática. En Sternberg, R. J. (Ed.) *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*. Madrid: Labor Universitaria.

Mercer, J. () What is left to teach if students can use calculators?. Mathematics Teacher. 85(6) pp415-417. NCTM.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. En Romberg, T., Fennema, E. y Carpenter, T. (Eds.). *Integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale: LEA.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards*. Reston: NCTM

National Research Council (1989). *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*. Washington: National Academy Press.

Quesada, A. R., & Maxwell, M. E. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college student's performance in precalculus. *Educational Studies in Maathematics*, *27*(2), pp. 205-215.

Rachlin, S. L. (1989). The research agenda in algebra: a curriculum development perspective. En Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston: NCTM - LEA.

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: M.E.C. - Paidós.

Rico, Luis (1 ,1990). Diseño curricular en educación matemática: elementos y evaluación. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (Eds.). *Teoría y práctica en educación matemática*. Madrid: Alfar.

Rico, Luis (2 ,1990). Diseño curricular en educación matemática: una perspectiva cultural. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (Eds.). *Teoría y práctica en educación matemática*. Madrid: Alfar.

Rico, L. (1991). *Los tetraedros del currículo. Diseño, desarrollo y evaluación del currículo*. Disertación no publicada, Universidad de Granada, Granada.

Romberg, T. A. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación*, *294*, pp. 323-406.

Romberg, T. A. (1993). How one comes to know: Models and theories of the learning of mathematics. En Niss, M. (Ed.) *Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Romberg, T. y Carpenter, T. (1986). Research on teaching and learning mathematics. Two disciplines of scientific inquiry. En Witrock, M. C. (Ed.). *The third handbook of research on teaching*. (pp. 850-873). New York: Macmillan.

Romberg, T., Carpenter, T. &Fennema, E. (1987). Toward a Common Research Perspective. En Romberg, T., Fennema, E. y Carpenter, T. (Eds.). *Integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale: LEA..

Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculators use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies en Mathematics*, *21*, pp. 431-450.

Schoenfeld, Alan H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 334-369). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, *81*(6), pp. 420-427.

Selden, Annie y Selden, John (1992). Research perspectives on conceptions of functions: Summary and overview. En Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (MAA Notes, Volume 25)*. : Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, pp. 1-36.

Sfard, A. & Linchevsky, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification- The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 26, pp 191-228. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Madrid: MEC.

Sierpinska, A. (1991). Some remarks on understanding in mathematics. *For the learning of mathematics*, *10*(3), pp. 24-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (MAA Notes, Volume 25)*. USA: Mathematicl Association of America.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), pp. 9-15.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del curriculum*. Madrid: Morata.

Swan, M. (1986). *The language of functions and graphs*. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston: NCTM - LEA.

Webb, Norman L. (1992). Assessment of Students' Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 661-683). New York: Macmillan.

Calculadoras gráficas y precálculo: el impacto en las creencias del profesor

Cristina Gómez y Paola Valero – "una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

La investigación pretende establecer cuál es el impacto del uso de las calculadoras gráficas sobre el sistema de creencias del profesor. Para tal efecto, se ha tomado como marco de referencia general de los sistemas de creencias de los profesores de matemáticas la tipología de Paul Ernest sobre las concepciones de las matemáticas, su enseñanza, aprendizaje, objetivos y materiales instruccionales. El sistema de creencias se mira en dos niveles: el de lo que el profesor "hace", y el de lo que "dice", para finalmente llegar a concluir algo sobre lo que el profesor "piensa". Metodológicamente, se utilizaron varios instrumentos que se dirigen a observar cada uno de los niveles y la relación entre ellos. El proyecto tiene un diseño cuasi-experimental con dos etapas. En ambas se analiza e identifica el sistema de ciencias del profesor Al final se obtiene la comparación de los resultados en cada una de ellas, para así poder concluir algo acerca de las posibles influencias del uso de las calculadoras gráficas en las creencias del profesor sobre los diversos aspectos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Antecedentes

La investigación "Calculadoras y precálculo: impacto en las creencias del profesor" se inscribe en un programa completo de investigación, llamado "Calculadoras gráficas y precálculo", que mira cómo un cambio curricular en el que se introducen las calculadoras gráficas como material instruccional influye en seis aspectos diferentes, uno de los cuales son las creencias del profesor y su desempeño en el salón de clase. El problema de investigación de este subproyecto es la influencia de la introducción de las calculadoras gráficas, dentro de una innovación curricular, sobre las creencias de un profesor de matemáticas con respecto a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, sus objetivos y la utilización de los recursos instruccionales.

La investigación se realizó en el curso de precálculo de la Universidad de los Andes, y durante dos semestres académicos, uno previo a la innovación curricular y otro cuando se aplicó dicha innovación, se observó al mismo profesor pero con diferentes estudiantes. En cada etapa se aplicaron los mismos instrumentos de investigación. Sin embargo, en la segunda etapa se tuvo un mayor contacto con el profesor del experimento, ya que la innovación curricular introdujo también unas sesiones especiales de coordinación del curso. En estas reuniones semanales de coordinación, tanto la profesora de la investigación como el equipo de investigadores, quienes también estaban dictando el curso con el nuevo currículo, discutían de las experiencias durante la semana y planeaban actividades especiales como talleres o parciales.

CONCEPTUALIZACIÓN SOBRE LAS CREENCIAS

¿Qué son las matemáticas?

Hablar de educación, en cualquier campo, requiere una mención especial al contexto social donde ésta se desarrolla, ya que la estructura de la sociedad y los grupos que la conforman determinan las condiciones para las prácticas educativas y los objetivos que ellas persiguen (Ernest, 1991, pps. 122-123). La educación matemática no es ajena a dicha relación en tanto los objetos del conocimiento matemático son construcciones sociales que se re-crean constantemente en el proceso de interacción entre los conocimientos matemáticos individuales, la relación con otros sujetos y el acuerdo social. Un individuo, con base en sus experiencias en el mundo físico, genera una serie de conocimientos matemáticos que se expresan a través del lenguaje. El lenguaje natural, visto como el conjunto de convenciones sociales que sustenta las relaciones entre individuos, estructura de manera coherente discursos matemáticos que surgen de la interacción sujeto-mundo físico. La publicación de los conocimientos subjetivos pone a consideración de la sociedad los descubrimientos de un individuo, y sólo cuando se ha generado un acuerdo social sobre su validez es cuando dichos conocimientos adquieren un carácter objetivo, es decir, en ese momento hay construcción de objetos matemáticos. Una vez el conocimiento ha adquirido objetividad, la sociedad lo representa de manera que cada individuo pueda reformularlo. Al existir una reformulación se vuelve a generar nuevo conocimiento que otra vez hace parte del dominio privado o individual. De esta manera es como se crea y se re-crea de manera cíclica y constante el saber matemático de la humanidad (Ernest, 1991, pps. 42-88)

Al conectar las diferentes posiciones epistemológicas y éticas de un individuo y de la sociedad con respecto a las matemáticas con los diversos objetivos sociales de la educación matemática, se pueden diferenciar cinco ideologías educativas que perfilan los siguientes tipos de profesor: el entrenador, el tecnólogo, el humanista, el progresista y el crítico. Cada uno tiene un sistema de creencias que permite distinguirlo de los demás.

El sistema de creencias

Un sistema de creencias es el conjunto estructurado de grupos de concepciones, valores e ideologías que el profesor posee con respecto al campo del conocimiento que enseña, a los objetivos sociales de la educación de ese campo, a la manera como este conocimiento se enseña y se aprende, y al papel que tienen algunos materiales instruccionales dentro del proceso de aprendizaje y enseñanza (Thompson,1990; Ernest, 1989, 1991).

En esta definición se pueden identificar los siguientes elementos que forman el sistema de creencias del profesor:

Concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas. Los profesores tienen una visión sobre la naturaleza de las matemáticas como un todo. Aunque tal visión está relacionada con una posición filosófica con respecto a las matemáticas, no se puede decir que las concepciones del profesor constituyan una filosofía totalmente articulada.

Concepciones sobre los objetivos de la educación matemática. El profesor, como miembro de un grupo social, tiene intereses claros sobre la educación. Esos intereses se expresan en aspectos de la práctica docente del profesor.

Modelo de la enseñanza de las matemáticas. Este incluye el enfoque personal del profesor con respecto a la manera como se enseñan las matemáticas, y el tipo de actividades instruccionales que se relacionan con tal enfoque.

Modelo del aprendizaje de las matemáticas. Aquí se incluyen la visión del profesor sobre la manera como el estudiante aprende las matemáticas, los comportamientos y actividades mentales que las prácticas instruccionales deben promover en el estudiante.

Concepciones sobre los recursos educativos. Los avances en tecnología educativa hace que se le de gran importancia a lo que el profesor piensa sobre el uso de computadores, calculadoras, etc. en los procesos de aprendizaje y enseñanza.

Tipología de creencias del profesor

Las concepciones del profesor sobre la naturaleza del conocimiento matemático al igual que sus objetivos sobre la educación matemática determinan el modelo de enseñanza y de aprendizaje que éste adopta y el uso de los recursos instruccionales, ya que se pueden encontrar correspondencias entre las diferentes posiciones filosóficas y las implicaciones que estas tienen en la manera como se enseña y se aprenden las matemáticas (Ernest, 1989). Los valores que toma cada uno de los elementos del sistema de creencias del profesor varían de acuerdo con cada uno de los tipos de profesor anteriormente mencionados.

Tipo de profesor	**Entrenador**	**Tecnólogo**	**Humanista**	**Progresista**	**Crítico**
Concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas	Conjunto de verdades y reglas asociadas con autoridad	Cuerpo incuestionable de conocimiento útil	Cuerpo estructurado de conocimiento puro	Cuerpo estructurado de conocimientos personalizados	Conjunto de conocimientos construidos socialmente, susceptibles de cambio
Concepciones sobre los objetivos de la educación matemática	Mecanización de destrezas básicas	Utilidad del conocimiento Aplicación a la tecnología y industria	Transmisión de valores racionales culturales. Formación mental	Desarrollo individual y autorrealización a través de las matemáticas	Desarrollo del potencial individual con miras al cambio social
Modelo de enseñanza	Transmisión de habilidades, repetición de ejercicios	Instrucción en manejo de habilidades. Resolución de problemas aplicados	Explicaciones, motivación y transmisión estructuras	Fomento del aprendizaje personal	Discusión, investigación, cuestionamiento
Modelo de aprendizaje	Autoridad, memorización, repetición y mecanización "La letra con sangre entra"	Práctica y aplicación de destrezas "Aprender haciendo"	Comprensión de estructuras y aplicación	Investigación autonomía, creatividad, juegos, exploración	Internalización de construcciones sociales de las matemáticas. Resolución de problemas de la vida diaria

Tipo de profesor	Entrenador	Tecnólogo	Humanista	Progresista	Crítico
Concepciones sobre la utilización de recursos	Sólo papel y lápiz Anti-calculadoras	Materiales permiten la experimentación. Permitidos computador, calculadoras, etc.	Materiales tradicionales mínimos necesarios	Cualquier instrumento que facilite la formación de conceptos y representaciones	Materiales variados. Cada estudiante los utiliza de acuerdo con sus necesidades

LA INVESTIGACIÓN EN CREENCIAS

La manera de disminuir la brecha entre teoría e instrumentos de investigación consiste en partir de un marco conceptual amplio, con el fin de establecer una relación más clara entre los diferentes elementos que conforman toda una conceptualización sobre las creencias del profesor.

Lo que hace, lo que dice y lo que piensa

Hay que aclarar que el estudio de las creencias de los profesores se mueve en tres niveles: el nivel de lo que el profesor piensa, el de lo que hace y el de lo que dice. Todo lo que se ha expuesto anteriormente es una construcción teórica sobre las creencias del profesor con respecto a los cinco elementos del sistema de creencias; sin embargo, lo que el profesor piensa no es algo que se pueda observar directamente. Hay que, a través de lo que el profesor dice y hace, sacar conclusiones sobre lo que piensa y así, llegar a decir algo sobre sus creencias.

En la literatura sobre investigaciones en creencias de los profesores se hace una clara distinción entre lo que el profesor piensa y lo que hace -los modelos de enseñanza y aprendizaje "espoused" y "enacted" (Ernest, 1990); las creencias "profesed" y la práctica (Thompson, 1984); "what teachers do" y "what teachers think" (National Institute of Education, 1975). Sin embargo, se puede establecer un tercer nivel que corresponde a lo que el profesor dice. La expresión de las creencias del profesor sin base en la reflexión directa sobre su práctica se ve influenciada por algún modelo ideal sobre el "deber ser", no permitiendo que lo que el profesor dice en verdad refleje lo que él piensa. Brown, Cooney y Jones (1990), Thompson (1984, 1990), McGalliard (1983) y Scheffler (1965) hablan de la importancia de diferenciar lo que el profesor dice de lo que piensa y hace. Justamente una de las críticas más fuertes a la investigación en creencias se deriva del hecho de confiar en lo que el profesor dice como indicador de lo que piensa. Esto ha conducido a que se generen inconsistencias en los modelos teóricos que sustentan los análisis.

Además, el hecho de que los patrones de comportamiento del profesor en su práctica instruccional obedezcan, en buena parte, a manifestaciones inconscientes de sus creencias, hace que la reflexión sobre las acciones concretas muestre lo que el profesor realmente piensa. Sólo así puede establecerse la relación entre los tres niveles de los que se ha hablado, ya que tanto los comportamientos observados del profesor como lo que él dice sobre sus comportamientos arrojan bastante información sobre lo que piensa.

Creencias y práctica docente

Thompson (1992) señala que lo que un profesor considera que es la manera deseable de enseñar y aprender matemáticas depende de las creencias sobre las matemáticas que él tiene. A su vez, la reflexión sobre todos los elementos de un sistema de creencias le dan al profesor la capacidad de cambiar sus concepciones y, como consecuencia, sus prácticas.

La discusión de la calidad de la práctica docente y de la educación en general ha sido la base de muchos movimientos de reforma en el campo de las matemáticas. Los resultados de estudios como los del National Council of Teachers of Mathematics (1989) en Estados Unidos y del proyecto Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación (SABER) del Ministerio de Educación de Colombia(1992) han mostrado que hay problemas de baja calidad en la educación. Si se entiende calidad como un valor que se le da al resultado de los procesos educativos, dentro de unas condiciones históricas y sociales particulares, y además, si se entiende la calidad de la educación como “el grado de cercanía entre lo establecido en los fines del sistema educativo nacional y el logro de la población estudiantil”, entonces se puede decir que la educación matemática no prepara a los estudiantes para la socialización del saber matemático como instrumento de formación del individuo y para su aplicación en la resolución diaria de problemas.

Las transformaciones en las creencias y en la práctica docente permiten que el profesor se vaya acomodando a las tendencias actuales de la sociedad y de la educación matemática, y así ofrezca un tipo de enseñanza que sitúe el saber matemático dentro del proceso de democratización de la sociedad, a través de la capacitación para resolver problemas que contribuyen a la justicia social (Ernest, 1991).

¿CÓMO ABORDAR LAS CREENCIAS?

Las técnicas de investigación que se utilizaron fueron de tres tipos: 1.Observación y videograbación de clases; 2. Prueba escrita para determinar las creencias del profesor sobre las matemáticas; 3. Entrevistas guiadas sobre la prueba escrita y las videograbaciones.

Observación de clases

La técnica de investigación basada en la observación de clases permite centrar la atención sobre lo que el profesor "hace". Con base en el marco teórico, se diseñó una matriz que incluye solamente cinco aspectos (de toda la gama de temas de observación posibles dentro de un salón de clase) que más información pueden dar sobre las diferentes maneras como se manifestar las creencias del profesor. Esta matriz permite ubicar al profesor en la tipología general de los sistemas de creencias, de acuerdo con sus comportamientos en el salón de clase. Para determinar estos aspectos se siguió un proceso de observación de distintos cursos y profesores durante el cual se identificaron dichos puntos de observación. Después, se discutió sobre cuáles de esos presentaban mayores variaciones entre profesores debido a lo que ellos consideraban qué eran las matemáticas.

Los aspectos que se observaron son: el uso del lenguaje tanto verbal como no verbal por parte del profesor, los patrones de interacción del profesor con los estudiantes, el manejo del tiempo, el tipo de ejercicios y preguntas que utiliza el profesor, y el manejo del error.

Lenguaje. El lenguaje es el instrumento que el profesor utiliza para transmitir sus ideas sobre las matemáticas y para establecer la comunicación entre él y los estudiantes, y también entre los mismos estudiantes y el conocimiento matemático. Dado que el conocimiento matemático se construye a partir del lenguaje natural (Ernest, 1991), es importante tener en cuenta la manera como se maneja la comunicación verbal y no verbal en el salón de clase. El manejo del lenguaje varía en cada profesor dependiendo de las creencias que tenga sobre las matemáticas. A continuación se presentan las variaciones para cada tipo de profesor con respecto a cuando se usa el lenguaje matemático, el lenguaje verbal de comunicación con los estudiantes, el no verbal de comunicación con los estudiantes y los esquemas de comunicación.

Patrones de interacción. Relacionados con el uso del lenguaje, los patrones de interacción, definidos como las diversas actitudes con las que el profesor maneja al grupo, muestran los diferentes roles que éste asume. Tales roles permiten identificar lo que éste cree con respecto al proceso de aprendizaje y enseñanza, es decir, que el rol del profesor y el consiguiente papel de los estudiantes dentro del salón de clase corresponden a las concepciones que el profesor tiene frente a los eventos que suceden en la construcción del conocimiento matemático. A continuación se presentan los posibles patrones de interacción que puede adoptar cada uno de los tipos de profesor

Manejo del tiempo. El uso del tiempo de clase se refiere a las actividades que el profesor privilegia ya las que dedica más tiempo dentro de toda la gama posible de eventos que pueden suceder en las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Aquí es necesario advertir el porcentaje del tiempo instruccional que el profesor gasta hablando, las actividades que tanto el profesor como los estudiantes realizan con mayor frecuencia, y los instrumentos que tanto el profesor como los estudiantes usan para desarrollar tales actividades.

Tipos de ejercicios. Los tipos de ejercicios que el profesor privilegia dentro del salón de clase muestran la manera como él cree que el estudiante aprende, ya que a través de los ejercicios y preguntas el estudiante se enfrenta al conocimiento matemático. Para esto, se ha tomado la categorización de Borassi (1986) sobre el tipo de ejercicios posibles.

Manejo del error. Finalmente, el manejo del error también se relaciona con las creencias respecto del conocimiento matemático y su aprendizaje (Rico, 1991). La manera como el profesor se enfrenta al error varía de acuerdo con la categoría a la que pertenezca.

Instrumento de observación de clases

Para la recolección de la información a través de la observación de clases, se tomó el instrumento desarrollado por Peggy Amidon. Este instrumento de observación mezcla el clásico Sistema de Análisis de Interacción Verbal (AIV) de Flanders con un sistema de Interacción no Verbal (AINV). El AIV está compuesto de 10 categorías que dan cuenta de los comportamientos verbales del profesor, de los estudiantes y de los momentos de silencio o confusión. El AINV presenta diferentes símbolos para representar los elementos de las cuatro dimensiones de análisis no verbal, que corresponden a la organización del salón de clase, a los materiales que se usan, a los comportamientos no verbales, y a las actividades.

Esta técnica consiste en observar lo que sucede en el salón de clase en dos momentos: el previo a la instrucción y durante la instrucción. En el primer momento se observa la organización del salón y se anota en una hoja de registro la disposición de los muebles, materiales, y el contenido de los mismos; en el segundo se observa, en intervalos de 5 segundos, lo que sucede en el salón en términos de quién habla, el tipo de su intervención de acuerdo con una de las 10 categorías, y las conductas no verbales que adopta bien sea para sustituir comportamientos verbales o para acompañarlos. El resultado de las observaciones en clase se registran en un formato de observación que tiene dos columnas y tantas filas como número de intervenciones se deseen registrar.

Con base en la mezcla de las categorías del AIV y las dimensiones del AINV es posible dar una descripción detallada de los comportamientos regulares del profesor en el salón de clase, analizar el manejo del tiempo, los patrones generales del lenguaje que utiliza y los patrones de interacción que se presentan.

Instrumento de creencias

El instrumento de creencias va dirigido hacia la observación de lo que el profesor "dice". Se utilizó la prueba de escala de Likert, validada, de 60 items que construyó Hashem Ibrahim Ibrahim como tesis doctoral *"A multidimensional mathematics belief instrument with content and construct validity and its application to elementary and secondary preservice teachers"*, en la Universidad de Pennsylvania, en 1990. Este instrumento contiene 60 afirmaciones sobre las matemáticas, su naturaleza y origen. Después de aplicar un *factor analysis*, los 60 items resultaron agrupados en 5 factores principales, cada uno de los cuales corresponde a una concepción de las matemáticas que se puede equiparar con cada uno de los tipos de profesor que se definieron previamente en la tipología del sistema de creencias de esta investigación.

Se hizo la traducción del instrumento y se reformuló la idea de algunos enunciados en español. Posteriormente se aplicó a un grupo de profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes, con el fin de determinar los factores correspondientes al contexto social de la investigación.

El instrumento se aplicó al profesor, dos veces durante cada semestre, con el objetivo de verificar la consistencia en las respuestas.

Entrevistas

Las entrevistas guiadas con el profesor se realizaron tomando como base las observaciones en clase, los videos y sus respuestas al instrumento de Ibrahim. Como se mencionó anteriormente, el poder encontrar una relación verdadera entre lo que el profesor hace, dice, y piensa requiere la combinación de instrumentos de investigación, en especial de aquellos que inciten a que el profesor reflexione sobre sus comportamientos dentro del salón de clase y la causa de éstos en su sistema de creencias. Así que se realizaron entrevistas dirigidas que se encaminaron a verificar los resultados encontrados con los instrumentos anteriores.

Entrevista sobre las observaciones

Para esta entrevista se tomó como base la observación por parte del profesor de una selección representativa de sus clases en video. Se le pidió observar el video y pensar en que describiera su actuación con referencia al uso del lenguaje, la interacción con los estudiantes, el manejo del tiempo, los ejercicios, el manejo del error y otros posibles aspectos que le pudieran parecer relevantes. El profesor contó con un formato que llenó con las observaciones pertinentes sobre lo observado. Posteriormente se realizó una sesión de comentarios sobre lo observado, donde se le pidió al profesor contestar preguntas que tocaban temas como lo representativo del video la manera como, por lo general, desarrolla sus clases, la descripción que da a cada uno de los aspectos mencionados, para qué se enseña matemáticas y para qué se aprenden, cómo es el proceso de instrucción en matemáticas, y con qué recursos se desarrolla este proceso.

El objetivo central de las preguntas fue tener información sobre lo que el profesor cree con respecto a los objetivos de la educación matemática, la enseñanza, el aprendizaje y los recursos educativos.

Entrevista sobre el instrumento de creencias

Para la entrevista sobre las respuestas del instrumento se aplicó nuevamente la prueba y se contrastaron las respuestas a la aplicación anterior con las nuevas respuestas. Para esto se contó con una tabla que muestra las respuestas dadas en la primera aplicación a cada enunciado y su agrupación por factores. En la entrevista se tuvieron en cuenta la consistencia al interior de cada factor en cada aplicación de la prueba y la consistencia entre las respuestas dadas en la primera aplicación con las de la segunda aplicación de la prueba.

RESULTADOS

Observación de clase

El instrumento de observación permite tener una descripción de lo que sucede en clase. Se observaron cuatro videos de 12,5 minutos cada uno para cada una de las etapas del proyecto, completando cincuenta minutos para el análisis de cada semestre.

En el primer semestre pueden describirse las clases como dominadas por el profesor, que habla la mayor parte del tiempo (67%) con intervenciones de presentación del contenido matemático. Las intervenciones de los estudiantes ocupan 15% del tiempo y corresponden en su mayoría a intervenciones predecibles como respuesta a preguntas del profesor, es decir, no hay iniciativa propia de los alumnos. Se dan monólogos de la profesora que expone el tema, corrige los ejercicios y toma la dirección de la clase en los momentos en que los estudiantes están en el tablero. El desarrollo del tema se hace a partir de los ejercicios que se realizan en tablero y son tomados del libro.

En el segundo semestre las intervenciones la profesora se redujeron a 57% y aumentó considerablemente la participación de los estudiantes. Se dan diálogos largos centrados en el contenido del curso. La materia se presente a partir del trabajo de los estudiantes en el tablero y se da importancia al significado y uso de los términos matemáticos. Se nota una preocupación de la profesora por que los alumnos comprendan los proceso aunque no haya actividades concretas que favorezcan este aspecto. Los ejercicios que se realizan son los mismos del texto y del programa del curso que se sigue.

En conclusión se ve un cambio en lo relacionado con la interacción entre la profesora y los estudiantes. En el primer semestre ella domina todo lo que sucede en la clase y deja hablar muy poco a los estudiantes. En el segundo, por el contrario, los estudiantes llevan el control en el sentido de que son ellos, con sus intervenciones espontáneas y sus dudas, los que guían la manera como se desarrolla la clase. También hay cambios en el lenguaje que se utiliza para referirse a los objetos y conceptos matemáticos: mientras en el primer semestre se hacía un uso del lenguaje que resaltaba aspectos mecánicos de los procedimientos, en el segundo el lenguaje aparece más en justificaciones y relaciones entre los conceptos y objetos. Con respecto al tipo de ejercicios que propone el profesor, no hay mayores cambios puesto que en ambos semestres se toman los ejercicios del texto que, en su mayoría, están centrados en el desarrollo de algoritmos. Sin embargo, si hay un cambio en la manera como la profesora maneja el erro de los estudiantes en la solución de esos ejercicios. En el primer semestre ella guía tanto al estudiante que no permite el error, y cuando éste se presenta, entonces ella da la respuesta correcta. En el segundo semestre, por el contrario, se permite el error y se construye sobre él, los estudiantes participan en la corrección e imponen su ritmo y sus dudas sobre la guía que quiere dar la profesora.

Todo lo anterior muestra que hubo cambios significativos en lo que ella hace en el salón de clase.

Instrumento de creencias

El test de Ibrahim fue usado en nuestro trabajo por ser un instrumento validado que servía para determinar las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas. Nuestro trabajo tuvo dos hipótesis fundamentales para ser validadas con este instrumento:

H1: el sistema de creencias sobre las matemáticas es un aspecto multidimensional más que unidimensional.

Esta hipótesis es la misma de Ibrahim y esperábamos validarla sobre el grupo de profesores que formaban la comunidad sobre la cual se desenvolvía la profesora que observamos. Este grupo estaba conformado por profesores del departamento de matemáticas de la Universidad de los Andes que es el sitio donde se realizó la investigación.

La segunda hipótesis se refiere al comportamiento de la persona observada.

H2: no hay diferencia significativa en la "medición de las creencias" antes y después de un semestre de trabajo con calculadoras.

Esta hipótesis esperábamos validarla usando el mismo grupo de referencia, aplicando la prueba al comienzo y al final de la investigación y utilizando los resultados del análisis de factores.

La prueba consta de 60 enunciados para ser calificados de 1 a 5, siendo 1 estar en total desacuerdo y 5 en total acuerdo.

La muestra que se utilizó estuvo conformada por 33 personas, profesores del departamento de matemáticas de la Universidad de los Andes durante el segundo semestre de 1993. El total de profesores del departamento en ese momento era de 58. Había 17 mujeres y 16 hombres con edades entre 23 y 62 años. Todos tenían formación profesional en matemáticas, 6 tenían cursos de posgrado o especializaciones y 10 con doctorado. 5 personas tenían entre 1 y dos años de experiencia como profesores de matemáticas, 6 tenían entre dos y cuatro y los 22 restantes tenían más de cuatro años de experiencia como profesores. 13 de ellos estaban en ese momento dictando curso básico de matemáticas (de 1 a 3 semestre), 17 cursos de niveles intermedios (4 a 7 semestre) y 3 de niveles avanzados (de últimos semestres o de la carrera de matemáticas).

Los resultados que se obtuvieron se describen a continuación. Las medias estuvieron entre 1.636 y 4.531, las desviaciones estándar entre 0.506 y 1.205. El mayor porcentaje de indecisión (calificación de 3 a cualquier pregunta) fue de 40.6%, que se obtuvo sólo en una pregunta. Esto es un índice de la claridad de las preguntas y el cuidado con que los encuestados respondieron.

Se utilizó esta técnica para ver si hay diferentes tipos de creencias sobre lo que son las matemáticas y usar los coeficientes por factores como indicadores para determinar posibles cambios en el tiempo luego del semestre de prueba con las calculadoras. La aplicación permitió validar la primera hipótesis y se obtuvo el siguiente grupo de factores.

Con el primer factor se tomaron 8 items que explican el 14.9% de varianza. Los items tomados pueden describir las matemáticas como un cuerpo de verdades con pasos lógicos, no necesariamente mecánicos, y relacionada con cosas concretas.

Con el segundo factor se tomaron 10 ítems que explican el 12.1% de varianza. Los ítems describen las matemáticas como un conjunto de reglas y leyes, son universales y todo debe ser demostrado.

En el factor 3 se tomaron 8 ítems que explican el 10.3% de varianza. Este factor describe las matemáticas como un conjunto de verdades cuya validez y desarrollo depende de las personas.

Con el cuarto factor se tomaron 4 ítems que explican el 9.5% de varianza. Los ítems tomados pueden describir las matemáticas como una actividad con usos prácticos y donde se requieren unas habilidades y destrezas básicas.

En el factor 5 se tomaron 5 ítems que explican el 7.6% de varianza.Para este factor las matemáticas son una actividad creada por seres humanos donde el conocimiento se va construyendo y dan por sí misma, herramientas de pensamiento.

Las cargas que se obtuvieron para cada factor se tomaron como base para comparar los resultados de las dos aplicaciones (en el primer semestre y en el segundo) de la prueba a la profesora que participó en la investigación.

Así se obtuvo, para cada factor y cada aplicación, un número que representa el factor. Se hizo una prueba pareada para estos resultados para ver la diferencia entre las dos pruebas. Al aplicar una prueba t con el 5% de significancia vemos que no resultan significativas estas diferencias. Así que no podemos rechazar la hipótesis 2 y afirmar que no hay cambios significativos en las creencias de la persona analizada.

Entrevistas

Estas entrevistas sirvieron para verificar que si bien se presentaron cambios en el comportamiento de la profesora en el salón de clase, no se dieron cambios significativos en sus creencias con respecto a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, sus objetivos y el uso de los recursos. En las entrevistas sobre las observaciones de clase la profesora expresó que estaba sorprendida por la manera como en el segundo semestre se habían desarrollado sus clases, en comparación con la forma tradicional como ella lo hacía en el primero. Pero la justificación a este hecho se centraba en que el grupo de estudiantes era diferente y que, en cierta medida, el estar involucrada en la innovación curricular le había mostrado alternativas que no conocía. Sin embargo, cuando se exploraron sus respuestas al instrumento de creencias de Ibrahim, no se vio con claridad en sus afirmaciones una concepción diferente con respecto a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, ella afirmó que el impacto de las calculadoras sobre su clase no había sido muy grande debido a que ella no creía mucho en la utilidad de este recurso y que, sobre todo, le faltó mucho tiempo para conocer su manejo y posibilidades.

INTERPRETACIÓN

Los resultados obtenidos con los instrumentos de observación con respecto al sistema de creencias de la profesora que participó en la investigación muestran que en el primer semestre ella se ubicaba en las categorías de profesor "entrenador" en los aspectos relacionados con sus creencias con respecto a los objetivos de la educación matemática, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el uso de los recursos instruccionales en esos procesos. Los resultados sobre su comportamiento en clase se agrupan en su mayoría en esta categoría, aunque aparecen algunos comportamientos esporádicos propios de los otros tipos de profesores. Con respecto a sus creencias sobre las matemáticas, ella se ubica en el grupo del profesor "entrenador". Todo esto sugiere que tanto sus concepciones como sus comportamientos se enmarcan dentro de un grupo de visiones dualistas y tradicionales de las matemáticas.

En el segundo semestre hubo una modificación en la ubicación de la profesora en las categorías de profesores. Sus comportamientos en el salón de clase tuvieron variaciones: por un lado se conservan rasgos que la siguen ubicando en la categoría de profesor "entrenador", pero por el otro, la interacción con los estudiantes hace que aparezcan comportamientos propios del profesor "crítico", y que también haya una distribución mayor de comportamientos correspondientes a los otros tipos de profesor. Con respecto a sus creencias sobre las matemáticas, ella sigue ubicada en la categoría del profesor "entrenador" pues no mostraron cambios significativos al respecto. Esto sugiere que si bien hubo una desestabilización del sistema de creencias de la profesora con respecto a los objetivos de la educación matemática, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el uso de los recursos instruccionales en esos procesos, manifestadas en los cambios de comportamiento al interior de clase, no hubo un cambio en sus creencias con respecto a las matemáticas. En este sentido, la profesora sigue manteniendo una visión dualista de las matemáticas, pero se comporta de manera un poco más relativista.

CONCLUSIONES

En general esta investigación mostró que después de la participación de la profesora en la innovación curricular, hubo alteraciones en lo que ella hace, dice y piensa. Con respecto a lo primero, se notó un cambio significativo en sus comportamientos en clase, motivados por circunstancias relacionadas con el grupo de estudiantes y con la innovación misma, y no con un cambio profundo en sus creencias. Con respecto a lo que ella dice, hay un cambio en la percepción que ella tiene sobre lo que se puede hacer en clase y de lo que los alumnos son capaces de hacer, pero nuevamente no hay indicios de la expresión de un cambio de concepción sobre las matemáticas. Y con respecto a lo que piensa, no hubo cambios significativos, a pesar de que hay un cuestionamiento sobre verdades que ella antes consideraba absolutas.

Esto genera una reflexión sobre el cambio en las creencias del profesor y la consistencia del sistema de creencias. Se pudo observar que el estar en contacto con una experiencia pedagógica innovadora durante corto tiempo no genera un cambio real en las creencias. Esto requiere de un trabajo más largo y continuo donde se puedan explorar con mayor profundidad las potencialidades de la innovación y su influencia en las dinámicas al interior de la clase. Por otro lado, la innovación si permite desestabilizar el sistema de creencias en la medida en que genera unos comportamientos diferentes por parte del profesor. Este cambio de comportamientos, con el tiempo, puede convertirse en la base para un cambio en las creencias.

Lo más significativo que se logró con esta profesora fue el haber generado un cuestionamiento en la manera como ella desarrolla su práctica docente. Si bien durante el periodo de la investigación ella no podía justificar muy claramente sus decisiones y comportamientos, en este momento su interés por comprender y conocer más sobre la disciplina de la educación matemática la ha llevado a ser más consciente de los que hace. También recientemente ella se ha vinculado a otros proyectos similares en busca de continuar su formación.

FUTUROS CAMPOS DE ACCIÓN

El proceso de construcción teórica y metodológica y para la investigación en creencias del profesor hasta el momento ha estado inscrito dentro de un proyecto específico, y con unas restricciones investigativas limitadas. Sin embargo, dada la importancia de este campo no sólo en el ámbito del conocimiento sino también en áreas como la formación y capacitación de profesores para el mejoramiento de las prácticas de la educación matemática, el reto investigativo hacia el futuro es bastante grande, y toca puntos como:

- El perfeccionamiento y la validación de los instrumentos de investigación utilizados. Con ésto, se puede pensar en poner a disposición de la comunidad de investigadores en educación matemática unas herramientas para diagnosticar grupos de profesores, evaluar su desempeño y sobre todo iniciar procesos de capacitación donde se enfatice la importancia de la relación entre creencias y práctica docente.

- La utilidad del instrumento de Ibrahim en la comparación de grupos de profesores provenientes de poblaciones diferentes. La prueba de Ibrahim permite determinar si la agrupación por factores de las afirmaciones sobre las matemáticas es igual o diferente en grupos de profesores provenientes de poblaciones diferentes. Esto es útil en investigaciones sobre creencias que adicionen variables más amplias como creencias sociales o políticas, o estudios que pretendan relacionar las tendencias sociales en educación matemática con el sistema de creencias de los profesores.
- La relación entre creencias y el conocimiento matemático. Esta investigación tomó el sistema de creencias de los profesores de manera independiente frente al contenido matemático y al conocimiento que posee el profesor del mismo. Sin embargo, es un primer paso para entrar a investigar el sistema de creencias a profundidad cuando se introduce una nueva variable como es la del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrews, T. and Barnes, S. (1990). Assessment of teaching. *Handbook of Research on Teacher Education*.. New York: Macmillan, 1990.

Amidon, Peggy (1971). *Nonverbal Interaction Analisis. A method of sistematically observing and recording nonverbal behavior*. Minneapolis: Paul S. Amidon & Associates.

Ball, D. L. (1986) Unlearning to Teach Mathematics. En *Paper presented at the meeting of the North american Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. , 1986 East Lansing, MI.

Borassi, R. (1986). "On the nature of problems". *Educational Studies in Mathematics*, 17.

Brown, S.; Cooney, T., and Jones, D. (1990). Mathematics teacher education. *Handbook of ResearchTon Teacher Education*.. New York: Macmillan, 1990.

Carpenter, T. y Fenema, E. (1988). Research and cognitively guided instruction. En Fenema, E., Carpenter, T. P. y Lamon, S. J. (Eds.). *Integrating research on teaching and learning mathematics*. (pp. 2-9). Madison: National Center for Research in Mathematical Sciences Education.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C. P., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children´s mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, *26*(4), pp. 499-532.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1990). Classrooms as learning environments for teachers and researcher. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, pp. 125-146.

Collier, C. P. (1972). Prospective elementary teacher´s intensity and ambivalence of beliefs about mathematics and mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*, pp. 155-163.

Cooney, T.J.; Grouws, D.A., and Jones, D. (1988). An agenda for research on teaching matematics. *Perspectives on Research on Effective Mathematics Teaching*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Copes, L.The Perry development scheme and the teaching of mathematics. En (1979). *Paper presented at the meeting of the International Group for the Psychlogy of Mathematics Education*. Warwick, England, 1979

Copes, L. (1982). The Perry development scheme: A metaphor for learning and teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *3*, pp. 38-44.

Dougherty, B. J. (1990). Influences of teacher cognitive conceptual levels on problem-solving instruction. En Booker, G.et al. (Eds.). *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 119-126). Oaxtepec, Mexico: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Ernest, P. (1985). The philosophy of mathematics and mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *16*, pp. 603-612.

Ernest, P. (1988) The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En *Actas del ICME VI.*, 1988 Budapest, Hungary.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching*, *15*(1), pp. 13-33.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.*. London: The Falmer Press, 1991.pp. 603-612.

Ernest, P. (1992). The nature of Mathematics: Towards a social constructivist account. *Science & Education*, *1*, pp. 89-100.

Ernest, P. (1992). Problem solving: Its assimilation to the teacher's prespective.

Fennema, Elizabeth y Franke, Megan L.Teacher's knowledge and its impact. En Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Fransella, F. y Bannister, J. (1977). *A manual for repertory grid technique*. London: Academic Press.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.

Grouws, d. A. y Cooney, T. J. (Eds.). (1988). *Effective mathematics teaching*. Reston: LEA - NCTM.

Harvey, O. J., Hunt, D. E., & Schroder, H. M. (1961). *Conceptual systems and personality organization*. New York: Wiley.

Ibrahim, Hashem Ibrahim. (1990). *A multidimensional mathematics beleif instrument with content and construct validity and its application to elementary and secondary preservice teachers*. Ann Arbor: UMI Dissertation Services, 1993.

Jones, D. (1991). A study of the belief systems of two beginning middle school mathematics teachers. *Dissertation Abstracts International*, *51*(10), pp. 3353-A.

Kuhs, T. M. y Ball, D. L. (1986). *Approaches to teaching mathematics. Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions*. East Lansing: Michigan State University: Center on Teacher Education.

Lerman, S. (1983). Problem solving or kn owledge centered: The influence of philosophy of mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(1), pp. 59-66.

Lorenzo, J. (1984). *El método axiomático y sus creencias*.

Llinares, Salvador (1992). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En Marcelo, G.*La investigación sobre la formación del profesorado. Métodos de investigación y análisis de datos*. Buenos Aires: Cincel.

McGalliard, W.A., Jr. (1983). Selected factors in the conceptual systems of geometry teachers: Four case studies. (Doctoral Dissertation, University of Georgia, 1982) *Dissertation Abstracts International*, 44, 1364A.

Marcelo, C. (1987). *El pensamiento del profesor*. Barcelona: Ceac.

Marcelo, G. (Ed.). (1992). *La investigación sobre la formación del profesorado. Métodos de investigación de datos*. Buenos Aires: Cincel.

Meyerson, L. N. (1978). Conception of knowledge in mathematics: Interaction with and applications to teaching methods course (Doctoral dissertation, State University of New York, Buffalo, 1977). *Dissertation Abstracts International*, *38*, pp. 733A.

Ministerio Nacional de Educacióde Colombia (1992). SABER:Primeros resultados: Matemáticas y Lenguaje en la básica Primaria. Bogotá: MEN, 1992.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Institute of Education (1975). *Teaching as clinical information processing* (Report on Panel 6), National Conference on Studies in Teaching, Washington, D.C.

Owens, J. (1987). A study of four preservice secondary mathematics teacher's constructs of mathematics and mathematics teaching. *Dissertation Abstracts International*, *48*(3).

Peterson, P.; Fennema, E. et al. (1989). Teachers' pedagogical beliefs in mathematics. En *Cognition and Instruction*, 1989, 6(1). Lawrence Erlbaum Associates.

Perry, W. G. J. (1970). *Forms of intellectual and ethical development in the college years: A scheme*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.

Rico, Luis (1991). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Granada: Universidad de Granada.

Sánchez, María Victoria (1992). El repertorio de rejilla de Kelly: una técnica para investigar los constructos personales de los profesores. En Marcelo, C. (Ed.). *La investigación sobre la formación del profesorado*. *Métodos de investigación y análisis de datos*. Buenos Aires: Cincel.

Scheffler, I. (1965). *Conditions of knowledge: An introduction to epistemology and education*. Chicago: Scott, Foresman.

Schoenfeld, A(1990). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of ResearchTon Teacher Education*.. New York: Macmillan, 1990.

Schram, P. y Wilcox, S. K. (1988). Changing preservice teacher´s conceptions of mathematics learning. En Behr, M. J., Lacampagne, C. B. y Wheeler, M. M. (Eds.). *PME-NA: Proceedings of the tenth annual meeting*. (pp. 349-355). DeKalb, IL: Northern University.

Schirk, G.B. (1973). *An examination of conceptual frameworks of beginning mathematics teachers*. Unpublished doctoral dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Silver, E. A. (Ed). (1985). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), pp. 9-15.

Thompson, Alba (1985). Teacher's Conceptions of Mathematics and the Teaching of Problem Solving. En Silver, E. A. (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Thompson, Alba (1988). Learning to teach mathematical problem solving: Changes in teacher´s conceptions and beliefs. En Charles, R. I. y Silver, E.*The teaching and assessing of mathematical problem solving*. (pp. 232-243). Restoon: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, Alba (1984). The relationship of teacher's conceptions of mathematics and mathematics teaching to instrucional practice. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, pp. 105-127.

Thompson, Alba (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Villar Angulo, L. M. (Ed.). (1988). *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores*. Madrid: Alcoy.

Villar Angulo, L. M. (1986). *Pensamiento de los profesores y toma de decisiones*. Sevilla.

ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI DEL FUNCIONAMIENTO DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS EN EL SALÓN DE CLASE

Cristina Carulla, Pedro Gómez, Vilma María Mesa –"una empresa docente"
Universidad de los Andes – Bogotá, Colombia

En el proyecto de investigación que analiza los efectos de la calculadora gráfica en un curso de precálculo se encontraron cambios en lo que se refiere al diseño curricular. Se generaron unas situaciones problemáticas que mostraban una manera diferente de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se inició, entonces, un estudio para confrontar los supuestos de los investigadores sobre el sistema curricular con su comportamiento real. Se utilizó como metodología la ingeniería didáctica; se hicieron análisis a priori y a posteriori que mostraron una diferencia en lo supuesto por los investigadores acerca de: lo que los estudiantes deberían ser capaces de hacer, las soluciones esperadas y la metodología. Esto mostró que el sistema curricular, en su componente estudiante, tiene una complejidad diferente a la que tanto investigadores, como desarrolladores de currículo y como profesores preven después de una larga experiencia.

INTRODUCCIÓN

"una empresa docente", centro de investigación en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, Colombia, ha venido realizando un proyecto de investigación sobre las implicaciones de la introducción de la calculadora gráfica en un curso de precálculo. Una de las implicaciones más importantes se reflejó en el cambio en el diseño curricular. El grupo de profesores–investigadores que participaban en el proyecto produjo unas situaciones problemáticas que generó una dinámica diferente en el salón de clase. Surgió entonces la necesidad de analizar estas situaciones problemáticas y su utilización en el salón de clase.

En este documento se presentarán los resultados preliminares de los análisis relacionados con la aplicación de una de estas situaciones problemáticas.

Descripción general

El proyecto "Calculadoras gráficas y precálculo" se desarrolló en el curso de Pre-cálculo de la Universidad de los Andes. Este curso lo toman estudiantes de primer semestre de las carreras de ingeniería, administración, ciencias biológicas y ciencias económicas. El proyecto de investigación se ha venido desarrollando desde el primer semestre de 1993, y ha recibido apoyo de COLCIENCIAS, de Texas Instruments y de la Fundación para el Avance de la Ciencia y la Tecnología del Banco de la República. El grupo de trabajo representa a Colombia en el PLACEM, Proyecto Latinoamericano de Calculadoras gráficas en Educación Matemática.

El propósito del proyecto ha sido explorar algunos aspectos del sistema curricular con motivo de la utilización de la calculadora gráfica. Estos aspectos fueron: la interacción dentro del salón de clase, las actitudes y la comprensión de los estudiantes, las creencias del profesor y el diseño curricular.

A continuación se presentan brevemente los cambios que tuvieron lugar en el diseño curricular con motivo del proyecto.

Efectos en el diseño curricular

Las diferencias que surgieron en el diseño curricular del curso están relacionadas con un cambio en las visiones del grupo de investigadores con respecto al saber a enseñar y a la forma como se cree que se debe aprender y enseñar ese conocimiento. El grupo construyó, a lo largo de dos años de trabajo, una visión del conocimiento a enseñar en la que se percibe una mayor complejidad y profundidad del contenido matemático. El estudio de las funciones se hizo más coherente gracias a la introducción del concepto de familias de funciones, concepto que permite identificar las diferencias y similitudes entre cada una de las familias (lineales, cuadráticas, etcétera). Por otra parte, el grupo se hizo más consciente de la complejidad de los objetos matemáticos estudiados, complejidad que se expresa en dos dimensiones, principalmente: la riqueza de cada concepto matemático en cuanto a su expresión en múltiples sistemas de representación (simbólico, gráfico, tabular, verbal); y la complejidad de cada concepto en cuanto a su posible ubicación dentro del espectro de los conocimientos procedimental y conceptual.

Por otra parte, el grupo logró expresar en la práctica, y de manera explícita, su posición ideológica con respecto al aprendizaje: el constructivismo social. La expresión práctica de esta visión (el individuo construye su conocimiento matemático dentro de un entorno social que simula el funcionamiento de las comunidades científicas) llevó al grupo a centrar buena parte de su atención en el diseño y utilización de situaciones problemáticas que, expresando las nuevas visiones del contenido a enseñar, indujeran a los estudiantes a construir su conocimiento matemático dentro de un contexto de interacción social.

Estas nuevas visiones acerca del conocimiento a enseñar, del aprendizaje y de las matemáticas, se complementó con nuevas visiones del estudiante (como alguien mucho más capaz de enfrentar y resolver tareas complejas) y del profesor (como alguien capaz y deseoso de aprovechar apropiadamente una mayor libertad en el desarrollo del currículo).

Es así como el nuevo diseño curricular pretende que el conocimiento construido por el estudiante sea coherente y holístico (en contraposición con un conocimiento desagrupado de herramientas específicas); sea rico en sus aspectos procedimental y conceptual (buscando ir más allá de los hechos y los algoritmos, hacia las estructuras conceptuales y procedimentales); y sea rico en las conexiones entre sistemas de representación (buscando que un mismo concepto pueda ser visto desde diversas perspectivas y que éstas se encuentran conectadas).

Se busca además que el estudiante perciba que los problemas en matemáticas no tienen necesariamente una única respuesta, ni una única estrategia de resolución; que vea la utilidad práctica del conocimiento que construye (como medio para modelar la realidad); que desarrolle sus capacidades de comunicación y argumentación matemática; que reconozca que el conocimiento se construye socialmente; que desarrolle la capacidad para enfrentarse a lo desconocido (tareas que son diferentes de las que él ya conoce); que desarrolle su capacidad para investigar en matemáticas; y, en general, que desarrolle su capacidad para resolver problemas.

Aunque desde un punto de vista superficial, el contenido sufrió solamente cambios leves, un análisis más detallado de los temas tratados y de las tareas propuestas a los estudiantes resulta en un tratamiento del contenido que expresa las visiones que se describieron anteriormente con respecto al conocimiento a enseñar: tratamiento de familias de funciones, riqueza en los sistemas de representación y profundidad en los aspectos procedimental y conceptual del conocimiento.

El manejo de la interacción entre el profesor y el estudiante dentro del salón de clase alrededor del conocimiento matemático también sufrió cambios importantes, al pasar de una situación en la que se seguía de cerca el libro texto dentro de un esquema de exposición del profesor y resolución individual de ejercicios típicos por parte de los estudiantes a una situación de interacción que gira principalmente alrededor de la resolución en grupos de situaciones problemáticas complejas y diferentes, seguida de discusiones del grupo global en las que se enfatiza la argumentación y el consenso global para aceptar la validez de las afirmaciones propuestas.

Finalmente, la evaluación dejó de ser exclusivamente una herramienta para clasificar a los estudiantes y se convirtió en un medio por medio del cual estudiantes y profesores se comunican en su proceso de interacción en la búsqueda de la construcción del conocimiento y en el que se reconoce y enfatiza las capacidades de comunicación y argumentación, la coherencia del discurso, la diversidad de estrategias posibles, la experimentación y la proposición y verificación de conjeturas. Se introdujeron nuevos esquemas de trabajo tales como ensayos escritos, portafolios y proyectos de investigación.

Estos cambios en el diseño y desarrollo curricular generaron una nueva situación en la que se estaba experimentando con esquemas y estrategias diferentes. En particular, la utilización sistemática de situaciones problemáticas en el salón de clase generó inquietudes en el grupo de investigación en cuanto a su comprensión del sistema curricular y al funcionamiento de estas situaciones dentro del sistema.

A continuación se describen brevemente las características de esta situaciones problemáticas.

LAS SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Descripción general

El curso en el que se desarrolló el proyecto, está dirigido al estudio de diversos tipos de funciones –temas longitudinales– según diversos aspectos –temas transversales; así, cada uno de los temas longitudinales, se estudia teniendo como referencia cada uno de los temas transversales

Temas longitudinales
Funciones lineales
Funciones cuadráticas
Funciones cúbicas
Funciones polinómicas
Funciones racionales
Funciones con radicales

Temas transversales
Trabajo dentro de la representación gráfica
Trabajo dentro de la representación simbólica
Relación entre manipulaciones
Características de la función
Características de la familia de funciones
Sistemas de ecuaciones
Ecuaciones y desigualdades
Aplicaciones

Los estudiantes del curso deben preparar con anterioridad a la clase la teoría y los ejercicios que se van a tratar. Es así como existen actividades que pueden desarrollarse sin haber profundizado mucho en un tema; otras en las que se busca consolidar o recoger el trabajo adelantado alrededor de un cierto tema y otras en las que se pretende profundizar en un tema específico o para avanzar en la construcción de conocimiento. Se han diseñado 7 tipos de situaciones problemáticas: tablas, familias, construcción de objetos, diversas representaciones, de palabras, ensayos y proyectos de investigación

Por lo general las tablas se utilizan en las clases de introducción de tema, mientras que las de construcción de objetos, las de palabras y los ensayos, se usan en las clases de consolidación de conocimientos. Las situaciones de familias, las de diversas representaciones, los ensayos y los proyectos de investigación se utilizan para avanzar y profundizar en un tema.

EL PROBLEMA

Las nuevas actividades generan un funcionamiento del sistema curricular que es relativamente nuevo. Esto generó el interés por explorar con alguna profundidad el funcionamiento de estas situaciones problemáticas.

Para efectos de analizar este funcionamiento se decidió escoger cuatro situaciones problemáticas. Se tuvieron en cuenta los siguientes criterios:

- Duración: deberían ser situaciones que tomasen una hora de clase
- Localización en el curso según los temas longitudinales: se escogería de manera que se hiciera una en cada mes y en diferente tema cada una
- Tipo: se deberían escoger situaciones de diferentes tipos
- Temas transversales: se deberían escoger situaciones que abarcaran el mayor número de temas transversales posible

De un total de 80 situaciones problemáticas se preseleccionaron 10 que cumplían con los requisitos anteriores. De estas se escogieron las siguientes:

- Funciones cuadráticas (tipo: diversas representaciones)
- Funciones cúbicas (tipo: familia)
- Funciones racionales (tipo: construcción de objetos)
- Composición de funciones (tipo: tabla)

La metodología que se adecuó mejor para realizar el estudio de estas situaciones problemáticas y su utilización en clase fue la de la ingeniería didáctica, metodología desarrollada por la escuela francesa de educación matemática (Artigue, 1988; Brousseau, 1993; Douady, 1993). A continuación se describe en qué consiste esta metodología.

DISEÑO METODOLÓGICO: LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

La ingeniería didáctica es una metodología de investigación particularmente apropiada para estudiar la complejidad del sistema curricular en el contexto del salón de clase. La ingeniería didáctica, como metodología de investigación, ofrece un camino experimental basado en realizaciones didácticas en clase. Tales realizaciones se componen de unas secuencias de enseñanza que diseña el profesor, en muchas ocasiones en colaboración con investigadores, en las cuales se presentan unas situaciones didácticas dentro de las cuales se lleva a cabo el aprendizaje de los conceptos o de las habilidades matemáticos.

En este sentido, la ingeniería didáctica contempla tanto el estudio de los procesos de aprendizaje de un concepto matemático específico, como el análisis de procesos paramatemáticos (como el aprender a demostrar) o como la implantación de estrategias globales didácticas (por ejemplo la implantación del debate científico en clase). Este proceso experimental posee cuatro fases.

Fase de análisis preliminares

En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción de las secuencias se apoya en un marco teórico didáctico, en unos conocimientos adquiridos dentro del campo científico de la educación matemática y en unos análisis preliminares. Estos análisis preliminares se efectúan alrededor de:

- Un análisis epistemológico de los contenidos a enseñar, un análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- Un análisis de las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y obstáculos que marcan la evolución de sus concepciones
- Un análisis de las restricciones del medio en el cual se construyen las secuencias.

Fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas para la ingeniería

En esta segunda fase, el investigador decide tomar en cuenta aquellas variables que supone son pertinentes con respecto la situación estudiada. Estas variables son de orígenes diversos. Así pues pueden ser de carácter global, que tienen que ver con la organización de la clase, o de carácter más específico, que tienen que ver con el contenido y la organización de la actividad.

El objetivo del análisis a priori es el de determinar cómo las secuencias establecidas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes. Para lograr esto se basa en hipótesis que se formulan dependiendo de lo que se quiera estudiar.

Fase de experimentación

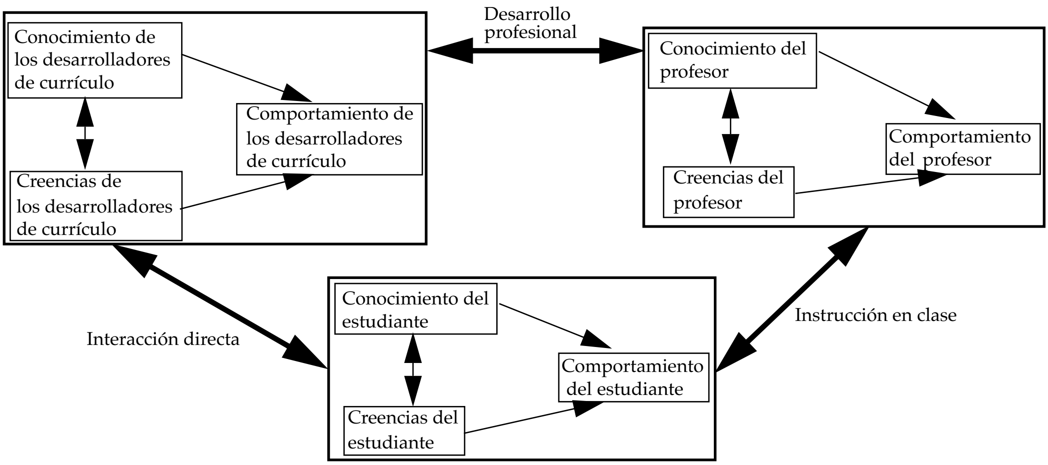
Es la fase de realización de las secuencias previstas y analizadas con anterioridad. Se pone en prueba las secuencias diseñadas y se observa el comportamiento de los distintos elementos en ellas.

Fase de análisis a posteriori y de validación

En esta fase se realiza la validación de las hipótesis que se enunciaron en el análisis a priori. Se pueden utilizar metodologías tradicionales para el análisis de los datos obtenidos durante la experimentación. Lo fundamental de esta etapa es el contraste entre las concepciones y análisis que se realizaron previamente a la experimentación y lo que en realidad sucedió durante la experiencia. Esta validación interna de los resultados es una de las características más potentes de esta metodología de investigación.

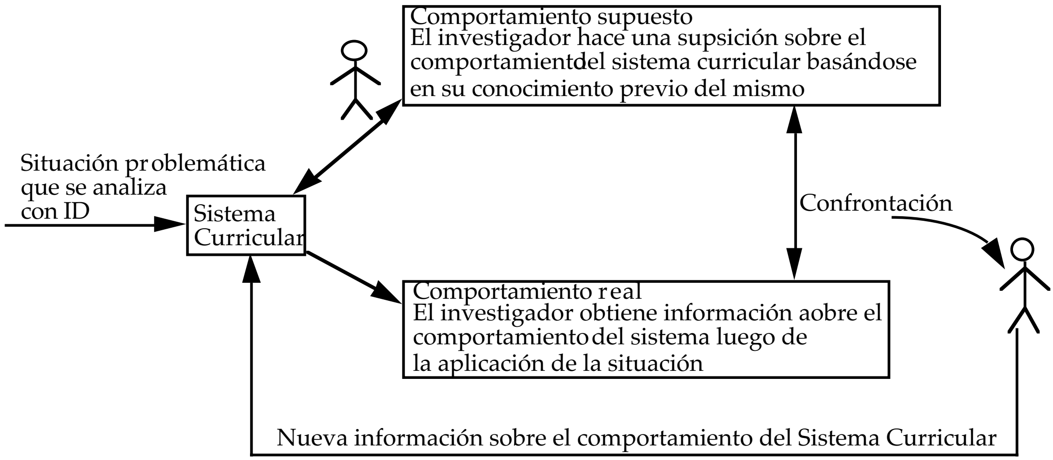
Alcance de la metodología de investigación

La aplicación de la metodología propuesta incide en diversos aspectos relacionados con el sistema curricular. Se está tomando el modelo de investigación en sistema curricular propuesto por Rachlin, 1989:



Este modelo está compuesto por tres ternas: los desarrolladores de currículo (o los investigadores), los profesores y los estudiantes. Cada terna a su vez, está compuesta por las creencias, el conocimiento y las actitudes de cada uno de los actores en el sistema. La investigación sobre el sistema curricular se inicia con un cierto conocimiento a priori de los conocimientos, creencias y actitudes de cada uno de los participantes y es a través del comportamiento de los desarrolladores, de los profesores y de los estudiantes que se puede obtener una medida del conocimiento del sistema que se está estudiando. Dentro de cada terna existen aspectos que se oponen y que se complementan y que inciden en el comportamiento global de todo el sistema.

En el caso particular de este estudio, los investigadores actuaron también como profesores; y, aunque se puede analizar la información que se obtuvo sobre el estudiante, se hablará únicamente del cambio institucional (es decir el cambio en los profesores y en los investigadores) que se dio en las visiones del funcionamiento del sistema curricular.



Para mostrar cómo se dio la confrontación entre los comportamientos supuesto y real, se hará una descripción detallada de lo que ocurrió con la aplicación del proceso de ingeniería didáctica en una de las 4 situaciones problemáticas analizadas. Se considera la situación llamada: “Funciones cuadráticas: diversas representaciones”.

EJEMPLO

En esta sección se presentará en detalle el trabajo realizado con una de las cuatro situaciones analizadas. Se desarrollará el siguiente esquema:

- Texto original de la situación problemática
- Análisis preliminares
- Nuevo texto
- Análisis a priori: de contenido matemático, de posibles soluciones y de dificultades observadas
- Proceso de observación escogido
- Aplicación de la situación: observaciones sobre contenido matemático, soluciones y dificultades

- Confrontación entre lo supuesto y lo observado

Texto inicial

El punto de partida fue la siguiente situación problemática:
"Las siguientes son algunas de las formas en que se pueden expresar simbólicamente las funciones cuadráticas:

a. $y = a(x-h)^2 + k$

b. $y = a(x-r_1)(x-r_2)$

c. $y = ax^2 + bx + c$

d. $4c(y-y_0) = (x-x_0)^2$

Cada una de estas formas contiene unos parámetros. Por ejemplo en la forma b.- los parámetros son $\mathbf{a}$, $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$. En el caso de la forma d., los parámetros son $\mathbf{c}$, $\mathbf{y_0}$ y $\mathbf{x_0}$.

A usted le será asignada una de estas formas de expresión simbólica. Para esa forma simbólica, usted deberá:

1) Explicar en detalle el significado gráfico de los parámetros. Usted debe dar el significado general y también presentar ejemplos que muestren los efectos de cambios en estos parámetros.

2) a. Explicar la relación algebraica entre los parámetros de la forma que le correspondió y los parámetros de las otras tres formas.

   b. Identificar las técnicas matemáticas que se requieren para hacer las transformaciones que son necesarias en cada una de las relaciones (por ejemplo, factorización, completación de cuadrados, etcétera).

   c. Siempre que sea posible, usted debe también explicar el significado gráfico de estas relaciones. Por ejemplo, si a usted le correspondió la forma c.-, usted deberá encontrar la relación entre los parámetros **a**, **b** y **c** de esta forma y los parámetros **a**, **h** y **k** de la forma a.-. Esto es, usted deberá expresar **a**, **h** y **k** (forma a.-) <u>en función</u> de **a**, **b** y **c** (forma c.-). Usted deberá hacer lo mismo con las otras dos formas."

Análisis preliminares

El primer paso consistió en fijar los objetivos que se querían lograr con esta actividad. Un objetivo general de la actividad es el de contribuir a la construcción una concepción de función rica, potente y compleja. Esto implica, entre otras cosas, lograr que el estudiante desarrolle la mayor cantidad posible de conexiones entre las diferentes representaciones del objeto.

Específicamente, la actividad buscaba permitir una consolidación de intuiciones previas con respecto a las conexiones entre los parámetros de las diferentes representaciones simbólicas de la función cuadrática y la representación gráfica respectiva. Que el estudiante pudiera reconocer las diferentes formas de simbolización, que reconociera que son iguales, que existe una relación simbólica entre los diferentes parámetros de las diferentes formas y que reconociera el papel de los parámetros al interior de una forma gráfica y simbólica.

Con respecto a las técnicas de manipulación simbólica se buscaba que la actividad sirviera como condensación de los algoritmos de transformación simbólica (Sfard, 1991).

De acuerdo con estos objetivos se realizó un análisis del problema escogido. Se encontraron algunos errores en la redacción que daban lugar a malas interpretaciones de lo que se quería hacer. Igualmente se encontró una falla en el tratamiento de la conexión entre lo simbólico y lo gráfico de donde surgió la necesidad de hacer una segunda actividad cuyo objetivo era el de recuperar el trabajo simbólico que se había realizado con los parámetros y reforzar las conexiones entre las representaciones gráfica y simbólica. En este documento, se analizará lo que se encontró en la primera parte.

Nuevo texto

La primera parte del texto, “Formas simbólicas de las funciones cuadráticas, I” corresponde al texto presentado previamente. El curso se debía organizar en grupos y cada uno habría de trabajar en una de las formas simbólicas. La segunda parte se redactó así:

Formas simbólicas de las funciones cuadráticas II

1) En la gráfica que se presenta en la figura identifique las coordenadas de los puntos marcados utilizando los nombres de los parámetros que aparecen en

las cuatro formas simbólicas

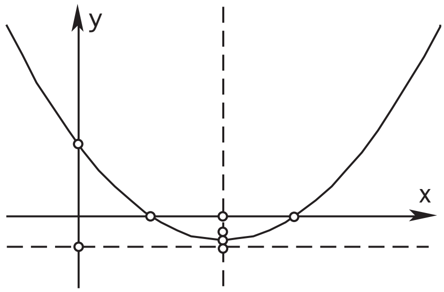


Figura Nº 8.

Grupo $y = a(x-h)^2 + k$

Suponga que a = 1 y k = -2. A partir de la gráfica y para cada uno de los parámetros de las otras formas simbólicas, formule una conjetura que describa lo que sucede con ese parámetro cuando **h** aumenta.

Grupo $y = a(x-r_1)(x-r_2)$

Suponga que $r_1 = 1$ y $r_1 < r_2$. A partir de la gráfica y para cada uno de los parámetros de las otras formas simbólicas, formule una conjetura que describa lo que sucede con ese parámetro cuando $\mathbf{r_2}$ aumenta.

Grupo $y = ax^2 + bx + c$

Suponga que a = 1, b = 1 y c > 0. A partir de la gráfica y para cada uno de los parámetros de las otras formas simbólicas, formule una conjetura que describa lo que sucede con ese parámetro cuando **c** aumenta.

Grupo $4p(y-y_0) = (x-x_0)^2$

Suponga que $p = \frac{1}{4}$, $x_0 = 2$ y $y_o < 0$. A partir de la gráfica y para cada uno de los parámetros de las otras formas simbólicas, formule una conjetura que describa lo que sucede con ese parámetro cuando $\mathbf{y_0}$ aumenta.

2) Para cada una de las conjeturas que acaba de formular, muestre que ella concuerda con las relaciones simbólicas que halló en la primera parte del trabajo.

Análisis a priori

Qué se había visto en el curso antes de la actividad

A lo largo del curso se hace énfasis en las relaciones existentes entre lo gráfico y lo simbólico. La función lineal es una función que se expresa simbólicamente como $y=mx+b$ o $y=m(x-h)$ donde los parámetros tienen un significado gráfico. m es la pendiente, pero también se hace referencia a ella como "dilatación" de la gráfica de $y=x$. b se interpreta como una traslación vertical de la gráfica de $y=x$, y h se interpreta como la traslación horizontal de la gráfica de $y=x$. Igualmente se explicita la relación entre los parámetros de la forma simbólica y los cortes de la gráfica con los ejes de coordenadas. Paralelamente, se toman los temas de valor absoluto y de desigualdades entre funciones lineales, temas en los cuales se enfatiza en los significados gráfico y simbólico. Se trabaja simultáneamente en resolución de problemas que utilicen funciones lineales. Se proponen actividades en las que se requiere poner una variable en función de otra.

Se hace una introducción histórica recordando las propiedades geométricas de la parábola. Se habla del foco y la directriz. En seguida se presenta la expresión de la parábola como una función polinómica de grado dos $y=ax^2+bx+c$. Se trabaja en la forma $y=a(x-h)^2+k$, usando dilataciones y traslaciones de la gráfica de la función $y=x^2$. Se presenta la completación de cuadrados como técnica para, a partir de la forma $y=ax^2+bx+c$, llegar a la forma $y= a(x-h)^2+k$. Luego se establece una relación entre la fórmula cuadrática y las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Se llega a la expresión factorizada de la forma $y = a(x-r_1)(x-r_2)$. Al igual que en la sección anterior se hace énfasis en las conexiones de los parámetros de éstas representaciones simbólicas con su representación gráfica.

Qué se supuso que deberían saber los estudiantes para poder resolver el ejercicio

En principio, los estudiantes deberían conocer: la forma como se expresan simbólicamente las parábolas; que las funciones cuadráticas generan parábolas; cuál es la gráfica de las diferentes representaciones de la función cuadrática; el significado de parámetro y el sentido de asignarle valores para apreciar el efecto en una gráfica; las diferencia entre variable y coeficiente en la representación simbólica; el significado gráfico de los parámetros.

Se supuso que los estudiantes en ese momento intuían que las cuatro formas de expresión simbólica son representaciones de un mismo objeto. Entonces los estudiantes deberían reconocer la igualdad entre las diferentes expresiones. De aquí se concluyó que los estudiantes deberían tener claro que el coeficiente a que aparece en las tres expresiones simbólicas es el mismo y que, por ende, cumple con la misma función en la gráfica. Por otra parte, se supuso que los estudiantes sabían que al igualar dos polinomios es posible igualar los coeficientes de los términos semejantes de cada uno.

Cuáles fueron las soluciones y cuáles las dificultades esperadas

Con respecto al numeral 1 de la primera parte, se pensó que los estudiantes no tendrían mayores dificultades. Se esperaban respuestas del siguiente tipo (se muestra una parte):

> *"(…) En la representación simbólica* a *(primera forma), a es la dilatación de la gráfica de*
> $y = x^2$*. h representa la traslación horizontal de esta misma gráfica y k representa la traslación vertical. Si a es positivo, la parábola es cóncava hacia arriba. Si a es un número mayor que 1, la parábola tiende a cerrarse, debido a que crece más rápido; si a es un número positivo inferior a 1, la parábola tiende a abrirse, pues no crece tan rápido. Si h y k son números positivos, la parábola estará localizada en el cuadrante I, y no tendrá cortes con el eje de las X. (…)"*

Para el numeral 2, se determinaron las alternativas de solución posibles y con ellas se realizó una tabla en las que se mostraban los resultados y junto con las técnicas que los estudiantes utilizarían para llegar a la respuesta. En la tabla 1 se da una muestra de las soluciones propuestas para la relación de la forma c, $y = ax^2 + bx + c$.

Con respecto a las posibles dificultades de los estudiantes se analizó si serían capaces de reconocer la igualdad entre las cuatro formas para poder expresar los coeficientes de una en términos de otra. Rápidamente se concluyó que no debería haber ninguna dificultad en este sentido.

Otra duda surgió con respecto a la identificación de *a* como el mismo parámetro en las tres expresiones. Se llegó a la conclusión nuevamente de que esto no debería ser difícil de reconocer.

Se habló de la posibilidad de que efectuaran algunos errores técnicos por la cantidad de variables y coeficientes que debían manejar; este sería uno de los puntos que se deberían tratar durante la institucionalización[1] en clase.

1. Dentro de la literatura francesa se utiliza el término "institucionalización" para referirse al momento en el que, durante la clase, después de que los estudiantes han desarrollado cierta actividad, se quiere evidenciar el saber involucrado en ella. (Brousseau, 1993)

	Solución	**Comentarios**
Primera forma	$y = a(x–h)^2 + k$	Se necesita utilizar la forma a. $y = a(x\text{-}h)^2 + k$ y expandirla para llegar a la forma c.
	$= a(x^2 –2xh+h^2) + k$ $= ax^2\text{-}2axh–ah^2+k$	Aquí se pueden cometer errores algebraicos
	$= ax^2\text{-}2ahx+(ah^2+k)$	Es necesario reconocer que $–2ah$ es el coeficiente de x, es decir b, de la tercera forma y que (ah^2+k) es el término independiente, c.
Segunda forma	$y = ax^2 + bx + c$	Completar el cuadrado
	$= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$	En este proceso se pueden cometer varios errores algebraicos
	…	
	$= a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$	Aquí se requiere reconocer la igualdad entre los coeficientes de los dos polinomios: $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = c - \frac{b^2}{4a}$. Es necesario reconocer que se piden b y c en función de los otros parámetros; así, se requiere un paso adicional para obtener: $b = –2ah$ y $c = ah^2+k$

Tabla Nº 7.

Metodología

Se pensó que la actividad era muy larga para hacerla durante los 50 minutos de clase; así que se decidió que trabajarían en grupos en la casa y harían una presentación en clase. En cada una de las formas trabajarían dos grupos de máximo tres personas. Uno de los grupos expondría y el otro aportaría ideas para construir una respuesta. Cada grupo dispondría de 10 minutos para la exposición.

Debido a las limitaciones de tiempo se decidió que se pediría el detalle de algunas de las relaciones entre parámetros, las cuales se escogieron según la variedad de las técnicas algebraicas utilizadas. Se dejarían 10 minutos para la institucionalización.

Comportamiento del profesor

Prever cuáles serían los movimientos del profesor en caso de que sucediera una u otra cosa en el salón de clase fue imposible. Es así como los profesores expresaron lo siguiente: “Nosotros actuamos según se vayan presentando las cosas. Las decisiones se van tomando sobre la marcha". Sin embargo, dentro de la metodología habitual, el profesor no interviene durante el tiempo de exposición de los grupos. Se limita a hacer la institucionalización.

Proceso de observación

En la investigación trabajaron tres personas. Dos de los investigadores eran profesores de dos secciones del curso; el hecho de que fueran sesiones consecutivas, facilitó mucho el trabajo logístico de localización de equipos. El investigador principal no era profesor del curso. Se hicieron observaciones en las clases de los profesores-investigadores. El investigador principal estaría tomando notas sobre manejo del tema con respecto a:

- el trabajo en el tablero
- el trabajo del profesor
- las inquietudes de los estudiantes

El profesor no titular manejaría la cámara de video y se encargaría del registro de audio. Debería enfocar la actividad que se desarrollara en el tablero y ocasionalmente los aportes del grupo de estudiantes.

Aplicación

En esta sección se mostrarán solamente las soluciones que evidenciaron mayor divergencia entre lo supuesto por el grupo de trabajo y lo que sucedió realmente.

Soluciones

No se notaron dificultades particulares para la primera parte del problema. Para la segunda parte del problema el grupo estaba bastante lejos de imaginar los caminos y las posibles dificultades de los estudiantes.

La primera dificultad que se dio fue la incertidumbre, por parte de los estudiantes, sobre lo que debían hacer. Para ellos no fue evidente que debían igualar las expresiones y realizar transformaciones algebraicas que los llevaran a la solución. Hubo una tendencia a despejar el parámetro dentro de las representaciones involucradas:

Se está trabajando la primera forma en relación con la tercera. El estudiante hace dos columnas; primero manipula la tercera forma y luego, la primera; busca llegar, en ambas, a una forma más o menos equivalente:

(Tercera forma)	*(Primera forma)*
$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x-h)^2 + k$
$y - c - ax^2 = bx$	$= a(x^2 - 2xh + h^2) + k$
	$= ax^2 - 2axh - ah^2 + k$
	$y - k = ax^2 - ah\,(2x+h)$
	$y - k - ax^2 = -ah\,(2x+h)$

*El estudiante necesita trabajar en el parámetro h; y explica que quiere despejarlo "en función de **a**, **b** y **c** (forma c.-)". De ahí que (1) haya expandido la primera forma, y (2) busque dejar h de un solo lado de la ecuación.*

Tabla Nº 8.

Otra de las dificultades encontradas fue que los estudiantes no tenían claro cuál era el significado de expresar parámetros en función otros parámetros, Tabla 3.

Se está trabajando la primera forma en relación con la tercera.

$ax^2 - 2axh - ah^2 + k = ax^2 + bx + c$ (1)

$a = a$

$b = -2ah$

$c = -ah^2 + k$ (2)

El estudiante ha igualado los polinomios, luego de expandir la primera forma, (1).

A continuación iguala los coeficientes de términos semejantes y da por terminado el trabajo (2). *Es decir, no reconoce que debe expresar h y k en función de a, b y c.*

Tabla Nº 9.

La estrategia de trabajo algebraico a la cual se llegó durante el trabajo en clase fue la de basarse en la forma simbólica básica, $y = ax^2 + bx + c$, para establecer las igualdades entre expresiones y luego despejar para poner un parámetro en función de otros. Esta estrategia fue más eficiente que las que el grupo había analizado.

Se encontró igualmente una dificultad técnica en el manejo simbólico y en la interpretación de los resultados que obtenían (Normalmente los estudiantes han trabajado estas transformaciones con ejemplos concretos, v.g., la completación de cuadrados de una función particular):

Se está trabajando la primera forma en relación con la tercera.

$a = a$

$b = -2ah$

$c = -ah^2+k$ (1)

$a = 1; b = -2; c = 2.$ (2)

Por una parte se obtiene

$y = 1(1-1)^2 + 1 = 1$

y por otra,

$y = 1(1)^2 + (-2)(1) + 2 = 1$

Se han igualado los coeficientes de términos semejantes (1). *El estudiante procede a asignar valores a., b y c en la tercera forma y a evaluar los polinomios en x = 1. Si las transformaciones han sido correctas, debe obtenerse una igualdad en ambos polinomios. En ese momento el estudiante da por terminado el trabajo.*

Tabla Nº 10.

Fue evidente que los errores técnicos que se presentaron superaron las expectativas; una explicación de esto se encuentra en el hecho de que se requería manipular únicamente letras y no números y letras como es lo usual.

Metodología en clase

Los estudiantes tuvieron dificultades al realizar el ejercicio y esto se reflejó en que los diez minutos de exposición no fueron suficientes. El tiempo destinado a la institucionalización fue insuficiente para poder hacer una reflexión sobre lo que sucedió tanto en el trabajo en la casa, como el trabajo en clase; además sólo pudieron exponer tres de los cuatro grupos.

A lo largo de las exposiciones los diferentes grupos seguían trabajando en su problemática, teniendo en cuenta lo que se iba desarrollando en el tablero. Aún así, varios grupos no lograron captar la intención del proceso de despejar parámetros. Dado que esto era esencial para el desarrollo de la segunda actividad, se acordó utilizar una sesión más para toda la situación problemática.

Comportamiento del profesor

Se encontraron diferencias entre el manejo de la clase de los dos profesores. Los cursos eran consecutivos; de esta manera el profesor que asistió al primer curso tuvo un mejor manejo del tiempo que se necesitaba y logró dirigir las exposiciones para lograr una institucionalización parcial, lo cual que no fue posible lograr en el primer curso.

En ambos grupos los profesores intervinieron, prácticamente desde el comienzo de las exposiciones, para llevar a los estudiantes a descubrir los errores que se estaban cometiendo. En varias oportunidades, fueron los profesores los que produjeron resultados parciales y necesarios para el desarrollo de la actividad.

RESULTADOS

Se encontraron diferencias entre lo previsto y lo observado a lo que los estudiantes deberían ser capaces de hacer, sus soluciones y sus dificultades. También se evidenciaron diferencias en la metodología. Esta confrontación entre lo que suponíamos y lo que pasó nos permitió ver que el sistema curricular, en su componente estudiante, tiene una complejidad diferente a la que como investigadores, desarrolladores de currículo y profesores nosotros habíamos imaginado después de una larga experiencia.

Supusimos serían capaces de intuir que, para llegar a expresar los parámetros de una expresión en función de los parámetros de la otra, era necesario ser consciente de la conexión entre las cuatro representaciones simbólicas de la función cuadrática. Esta suposición resultó falsa. Esta no fue la estrategia utilizada en los grupos. Por el contrario, ellos hicieron transformaciones al interior de una expresión buscando despejar un parámetro en función del resto. Simultáneamente transformaban la otra expresión buscando algo similar, sin poder llegar a lo que se pedía.

Las estrategias previstas para resolver la situación no fueron utilizadas durante la clase. Por el contrario, se llegó a una estrategia más eficiente que consistió en escribir la representación en la forma general e igualar, a continuación, los coeficientes de los términos semejantes; partir de estas equivalencias, se obtenían las expresiones pedidas.

Fue necesaria una negociación para evidenciar que la equivalencia entre las formas simbólicas permitía igualar los coeficientes correspondientes.

Se pensó que los estudiantes serían capaces de comprender qué significaba expresar unos parámetros en función de otros. Como se muestra en la Tabla Nº 3, esto no fue tan claro. Se expresaban a, b y c en función de a, h y k pero no a, h y k en función de a, b y c.

No se había previsto que pudieran necesitar de ejemplos con números para confirmar que las igualdades que se obtenían eran efectivamente correctas.

Por otro lado, la estimación del tiempo necesario para la realización de la puesta en común de las soluciones de los estudiantes no fue correcta pues se necesito de una sesión adicional. Igualmente se creyó que los estudiantes serían capaces de llegar a la solución sin la ayuda del profesor. Este no fue el caso.

Estas diferencias evidencia el conocimiento parcial que los investigadores tienen del sistema. Cabe anotar que el ejercicio ya se había hecho en el semestre anterior y se contaba con esta información.

El análisis a priori de la situación problemática ayudó al equipo a comprender mejor la complejidad del ejercicio y sus posibilidades. Sin embargo la confrontación con la realidad generó un choque al interior de las creencias del equipo.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Realizar este proceso de análisis a priori y a posteriori fue muy enriquecedor e impactante para el equipo de investigadores. El hecho de llevar seis años trabajando en educación matemática, generando problemas y cuestionándose continuamente sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no es suficiente para tener una visión real acerca del comportamiento del sistema.

Analizando las posibles soluciones que los estudiantes podrían tomar y sus posibles dificultades, se percibió una extrema complejidad en la situación. La confrontación con lo observado corroboró que, en efecto la situación era compleja, pero además que los estudiantes tenían dificultades en lugares en los que no se había previsto nada. El tiempo previsto fue sistemáticamente menor que el que requería la actividad.

Esta particularidad nos mostró qué tan lejos estamos de percibir correctamente la realidad del salón de clase y qué tan lejos estamos de prever las dificultades de nuestros estudiantes cuando diseñamos tareas para ellos. Una reflexión importante es que los estudiantes son capaces de realizar las tareas complejas a las cuales los sometemos pero que el tiempo que les damos no es suficiente.

Las dificultades observadas se pueden atribuir al hecho de que los estudiantes han manejado el álgebra con instancias particulares de los objetos. Al introducir los parámetros que, son a su vez variables –ni constantes ni números–, se evidencian dificultades de órdenes diferentes a las esperadas cuando se supone que se dominan las instancias parametrizadas.

El profesor tiene una percepción errada de la complejidad del manejo simbólico y de los procesos algebraicos involucrados; no se trata únicamente de aplicar rutinas o algoritmos; en muchas ocasiones es necesario que los estudiantes hayan logrado una percepción diferente de los objetos. En caso contrario, ellos no estarán en capacidad de iniciar siquiera la actividad.

Esta fue la primera situación problemática analizada. Los resultados encontrados nos sirvieron para replantear las tres situaciones siguientes. A pesar de que logramos cada vez más llegar a plantear la actividad tomando en cuenta el factor tiempo para acercarnos al tiempo real, no nos fue posible prever correctamente los caminos y las dificultades de los estudiantes. Siempre encontramos diferencias en nuestras apreciaciones.

La experiencia que como profesores e investigadores hemos ido adquiriendo con respecto a la práctica docente en matemáticas debido a la introducción de la calculadora gráfica, ha generado unas visiones específicas sobre el saber, sobre la enseñanza, sobre el aprendizaje y sobre el comportamiento de los estudiantes en el aula. Si bien el proyecto de calculadoras gráficas y precálculo tuvo una gran influencia sobre la visión del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y de las matemáticas a enseñar, este proyecto en particular tuvo una influencia en la visión que se tenía sobre la complejidad de la dinámica dentro del salón de clase y sobre la comprensión de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, Michèle (1988). "Ingenierie Didactique" en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, Nº 3, p. 281-308.Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. En Sánchez, E., Zubieta, G. (Eds.) *Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa*, México:DME-CINVESTAV.

Douady, Régine (1993). L'Ingenierie Didactique. Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage.*Cahier de DIDIREM IREM*, Nº 19, Paris: Université Paris VII.

Rachlin, S. L. (1989). The research agenda in álgebra: a curriculum development perspective. En Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of álgebra*. Reston: NCTM - LEA.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, pp. 1-36.