UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DESDE UNA PERSPECTIVA CURRICULAR: IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

JUAN LUIS PIÑEIRO GARRIDO

GRANADA, 2015

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DESDE UNA PERSPECTIVA CURRICULAR: IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES.

Trabajo de Fin de Máster presentado por

D. Juan Luis Piñeiro Garrido

para optar al máster en Didáctica de la Matemática

D. Juan Luis Piñeiro Garrido

Tutor

D. Enrique Castro Martínez

GRANADA, 2015

El presente trabajo de investigación se ha realizado en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193) de la Universidad de Granada perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

"Those who can, do. Those who understand, teach."

Shulman (1986).

A mis padres, a la Naty, a mi hermana... gracias por ayudar a convertirme en quién soy,

A mis amigos que complementan mi persona… gracias por ser mis hermanos,

A ti...

ÍNDICE

TABLAS

FIGURAS

CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

ANTECEDENTES

La Didáctica de la Matemática es una ciencia con un desarrollo relativamente reciente y que aún no se configura del todo (Rico, 2012). Dentro de ella existen dos líneas de interés que se identifican claramente: la resolución de problemas y la formación de profesores. La primera tiene sus primeros postulados en los pensadores griegos, con la diferenciación que realiza Aristóteles de problema. Siglos después Descartes continúa desarrollando dichas ideas (Castro, 1991). No obstante, es a comienzos de este siglo, con una conferencia ante la Sociedad Suiza de Profesores de Matemática y su posterior reseña, en la revista Matemática Elemental en 1934, donde Pólya trata un "método" de enseñanza para resolución de problemas (Castro, 2008; Contreras 1987). Así, esta línea de investigación se empezó a configurar. Dicho método consistía en cuatro fases para ayudar a los estudiantes a enfrentarse a un problema.

Posterior a esto, otro hito importante está marcado por investigaciones realizadas en los últimos 20 años del siglo pasado. Schoenfeld (1980, 1983) amplió el panorama de investigación, incluyendo la metacognición y la afectividad en la resolución de problemas. Este último aspecto fue desarrollado, entre otros, por McLeod (1989) años más tarde. Castro (1991) hace una extensa y detallada revisión de esta línea de investigación desde sus inicios hasta finales de siglo pasado.

En los últimos años, vemos como la resolución de problemas sigue siendo un tema de interés para investigadores en Didáctica de la Matemática. Entre las muchas publicaciones referidas al tema, destacamos los números especiales de ZDM "*Problem solving around the world – Summing up the state of the art*" del 2008 y de TME, "*International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education*" del 2013. La primera de ellas, tal como se indica en su nombre, se hace un recorrido por diferentes países y el desarrollo sobre resolución de problemas, tanto en el aula como en la investigación. La segunda, muestra investigaciones sobre temas específicos de la resolución de problemas, que se están llevando a cabo en diferentes países del globo.

La segunda línea a la que se hacía referencia en el primer párrafo, es la formación del profesorado. Podríamos señalar a Shulman (1986) como su precursor, pues fue el que diferenció entre conocimiento de la disciplina y el conocimiento didáctico de ésta. Posteriormente, y basándose en estos primeros lineamientos, Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill y Ball, 2009) han desarrollado un modelo de conocimiento del profesor, conocido como Mathematics Knowledge for Teaching [MKT]. Sin embargo, este no es el único modelo, sino el que ha cobrado mayor visibilidad internacional (Rojas, 2014). Además de estudiar el conocimiento del profesor, otras líneas de investigación que tienen al profesor como centro son la reflexión docente (Jaworski, 1993; Korthagen, 2010; Smith, 1991), o su desarrollo profesional (Davis y Brown, 2009; Eraut, 1977).

Paralelo a estas investigaciones, y desde el punto de vista de la enseñanza Brousseau (2007) y la escuela francesa han desarrollado una teoría de Situaciones Didácticas, que pone a la resolución de problemas como un elemento primordial que compone una experiencia de aprendizaje; y por otro lado al docente y su conocimiento, en primera línea. Según esta teoría el docente debe escoger una situación que pueda generar aprendizaje en sus estudiantes. Requiriéndose una gran cantidad de conocimiento en ese docente para realizar tal acción.

Nuestra investigación se ubica en este intrincado escenario que une dos líneas de investigación. Por un lado, como señala Castro (2008), al intentar una clasificación de las investigaciones en resolución de problemas, existe una temática que busca clarificar la enseñanza de la resolución de problemas. Por el otro, tenemos al profesor y su conocimiento profesional, para lo cual nos remitiremos al modelo MKT.

Buscando dilucidar en la literatura qué tipo de investigaciones relacionan estas líneas de investigación, y usando como criterio el conocimiento del profesor sobre resolución de problemas; hemos tomado como base el estudio de Ponte y Chapman (2006) en el que analizan e identifican diversas investigaciones presentadas en diferentes PME; además, se ha ampliado al número especial sobre resolución de problemas del 2008 de la revista ZDM. Junto a ellos, señalamos otras investigaciones que se ubican en nuestro campo de estudio.

Un pionero en investigar los ámbitos en los que situamos nuestra investigación es Cooney (1985). Su estudio se centró en examinar las creencias sobre resolución de problemas en futuros profesores de secundaria al terminar sus estudios y durante los primeros meses de ingresar al sistema escolar. El estudio de caso muestra cómo las creencias idealistas de un futuro profesor, entran en conflicto desde el mismo instante que comienza a dar clases; en ese momento, se dejan fuera de la sala de clases un enfoque de aprendizaje a través de la resolución de problemas, que se explica por la utilización de una posición autoritaria del profesor.

Una investigación pionera fue la de Brissiaud y sus colaboradores (citado en Ponte y Chapman, 2006), que estudiaron la relación existente entre las percepciones de profesores y alumnos sobre lo que entienden por problema. Sus conclusiones pusieron de manifiesto que las percepciones de los alumnos se ven influenciadas por las de sus profesores.

Tirosh, Graeber y Glober (1986) exploraron la elección de operaciones que realizan estudiantes para profesores de primaria al enfrentarse a problemas aritmético verbales en el campo multiplicativo. Sus hallazgos muestran que los futuros docentes presentan modelos básicos de modelización y estos influyen en la elección que realizan. El mismo estudio realizaron Greer y Mangan (1986), pero incluyendo estudiantes de infantil; sus resultados no difirieron demasiado.

Grows, Good y Dougherty (1990) estudian las concepciones sobre resolución de problemas y su enseñanza. Encuentran cuatro perfiles de profesores de acuerdo a lo explorado, llamando a estos: a) resolver problemas es entendido únicamente como problemas de enunciado verbal; b) resolver problemas es resolver problemas; c) resolver problemas es resolver problemas prácticos, y d) resolver problemas es resolver pensando los problemas. Es interesante la incongruencia que presentan los docentes, entre las creencias sobre resolución de problemas y sus prácticas; la investigación atribuyó esto a tres factores: libros de texto, directrices institucionales y pruebas estandarizadas.

Chapman (1994) reportó un estudio de caso que muestra la perspectiva de un profesor de primaria y su enseñanza. El docente muestra una visión de la resolución de problema como una conducta cognitiva y social al mismo tiempo. No obstante, no diferencia entre un problema y su resolución. Respecto a la enseñanza, todo se remite a los métodos presentados por Pólya (1981). Posteriormente, en 2005, un estudio con futuros profesores de secundaria, reveló que una forma efectiva de construcción del conocimiento didáctico del contenido debe abordar situaciones de reflexión desde dos perspectivas: como estudiante y como futuro docente, en orden de poder adquirir un enfoque didáctico significativo para la resolución de problemas (Chapman, 2005). Un año más tarde, Chapman (2006), realizó un estudio sobre cómo los profesores conceptualizan y se ocupan de problemas verbales en su enseñanza, específicamente en lo relativo al contexto en el que se presentan. El estudio fue realizado con profesores de primaria y arrojó una tendencia a relacionarse con el problema de forma lógica-científica, es decir, muy estructurada y que busca la solución del problema, más allá del significado que aporta el contexto. Junto a estas tres investigaciones, Chapman (2015) también realiza una investigación sobre estudios referidas a la resolución de problemas y las clasifica utilizando el modelo MKT.

Fernándes y Vale (1994) también indagan sobre las concepciones de profesores sobre la resolución de problemas y sus prácticas. Su estudio reportó que a iguales concepciones, las prácticas difieren. Una explicación que se dio a esto fue la diferencia de programas que se aplicaban.

Anderson, White y Sullivan (2005), siguiendo una línea similar, estudian cómo afectan las creencias de la resolución de problemas sobre sus prácticas. Reportaron que a creencias que se acercan a una mirada tradicional sobre las matemáticas, los profesores no usaban tareas de resolución en sus prácticas. Por el contrario, a creencias denominadas como no tradicionales sobre las matemáticas, su uso era mayor.

Zsinkó (2006), por su parte, realizó un estudio en el que indaga si los estudiantes para profesor tienen las habilidades de resolución de problemas que deberán enseñar a sus alumnos. Los resultados mostraron que los docentes tienen poca conciencia sobre lo que saben, pues los estudiantes que más conocimientos presentaban en las pruebas, verbalizaban tener poco conocimiento sobre el tema; contrariamente a los profesores con bajo puntaje, que explicitaron lo contrario.

A través de un programa de formación, Karp (2009) intenta mapear el conocimiento didáctico del contenido de profesores de secundaria, con la intención de compararlo con el modelo establecido por Ball y colaboradores (2008) en profesores de primaria. El estudio reportó que en general el mapa es bastante similar, sin embargo, existen algunas características diferenciadoras: el conocimiento matemático debe ser mayor en profundidad y cantidad, por lo que los profesores deben tener un mayor número de habilidades específicas; los niveles de abstracción de los alumnos también se muestran diferentes, implicando tener otras estrategias y conocimientos sobre los alumnos. Todo esto, permitió establecer que el conocimiento didáctico para la enseñanza en profesores de secundaria es insuficiente para lograr los objetivos propuestos por los programas.

Sakshaug y Wohlhuter (2010) muestran el recorrido que realiza un grupo de profesores de primaria para aprender a enseñar a través de la resolución de problemas. El estudio mostró la dificultad que presentan los profesores para realizar clases con el enfoque mencionado, además expone que no existe una receta única, pues lo que sirve para un problema, parece no servir para el otro.

En España, Socas y Hernández (2013) proponen un marco de conocimiento para profesores en formación. Utilizan la resolución de problemas por considerarse un tema transversal en la enseñanza de las matemáticas. Alsina (2012) investiga el proceso de transformación de las concepciones de profesores de primaria sobre la resolución de problemas; identificando tres aspectos que favorecen el cambio: "a) la toma de conciencia de la propia práctica; b) la reflexión sistemática sobre la propia práctica; c) el contraste entre diferentes maneras de trabajar la resolución de problemas en la clase de matemáticas" (p. 71). Gine y Deulefeu (2014), en su estudio sobre conocimientos y creencias en torno a la resolución de problemas, muestran que profesores de secundaria presentan creencias y conocimientos adecuados a mayor nivel de estudios; por su parte, los profesores de primaria presentan creencias inadecuadas, influidas por su el poco conocimiento matemático y didáctico. Contreras (2010), intenta identificar el papel concedido por profesores de primaria a la resolución de problemas y su papel en el aula; sus resultados mostraron la relación entre las creencias presentadas y su tendencia didáctica. Blanco, Guerrero y Carrasco (2013) a través de un programa de intervención, muestran que los profesores presentan creencias tradicionales sobre la conceptualización de un problema; no reconocen tipos de problemas y relacionan esta competencia de forma muy estrecha con la aritmética. Rosales y colaboradores (2012), muestran en su estudio con maestros de primaria al resolver problemas verbales con sus estudiantes, evidenciando que sus aportes suelen ser mecánicos y no reflexivos, al no considerar un conocimiento situacional del problema.

En Chile, un reciente estudio muestra que los profesores muestran una concepción muy instrumentalizada de lo qué es un problema, no considerando al resolutor. Así mismo, sus prácticas pedagógicas muestran pocas tareas que permitan a sus alumnos resolver problemas (Felmer et al., 2014).

En este breve recorrido, se puede observar como los estudios presentados tienen una tendencia a investigar sobre las concepciones o creencias sobre resolución de problemas. Por lo tanto, es posible establecer algunos patrones:

- La mayoría de los estudios reporta la extensa literatura existente sobre resolución de problemas desde el punto de vista del estudiante; al mismo tiempo que desplaza al profesor.
- Las concepciones y creencias de los profesores tienden a ser tradicionales. Estas influyen de forma negativa en sus prácticas, evitando que proporcionen a sus estudiantes experiencias como resolutores de problemas.
- El conocimiento del contenido pareciera ser logrado solo por profesores de secundaria, mientras que los profesores de primaria muestran deficiencias.
- El conocimiento didáctico del contenido es deficiente, tanto en profesores de primaria como de secundaria.
- Existe una necesidad de seguir dilucidando como ponen en juego sus conocimientos profesionales al momento de enseñar resolución de problemas.

En este escenario, resaltamos lo expuesto por Giné y Deulofeu (2014) al mostrar cómo pareciera existir una relación entre el conocimiento que tienen los docentes y las creencias adecuadas para enseñar la resolución de problemas. Esto lleva a pensar que el conocimiento profesional es una necesidad para seguir avanzando en la mejora de las prácticas docentes.

JUSTIFICACIÓN

La finalidad de este estudio es sistematizar y caracterizar el conocimiento profesional de un maestro de primaria para enfrentarse a la enseñanza de la resolución de problemas con éxito, a partir de los currículos de enseñanza primaria de 6 países que presentan un desempeño extremo en resolución de problemas. Bajo nuestra mirada, esto permitirá tener algunas ideas sobre las cuales responder interrogantes como ¿por qué no se utiliza la resolución de problemas en las clases de matemáticas?; conjuntamente, podría ser de utilidad en la construcción de cursos de formación o reestructuración de estos. Brubacher, Case y Reagan (2000), identifican el conocimiento de los profesores como un elemento primordial para que exista reflexión en los docentes. Por tanto el interés de este trabajo radica en complementar este eslabón fundamental para la mejora de las prácticas docentes.

Un aspecto concomitante es señalado por Rico (2015), destacando la importancia de este conocimiento y su relación con la idea de currículo:

> *El equipo de profesores debe dar concreción al marco general* [currículo]. *Para que los profesores puedan llevar a cabo su trabajo profesional como docentes es necesario que planifiquen su trabajo y contemplen sus tareas como una totalidad…. Planificar el trabajo para el aula de matemáticas requiere delimitar y precisar colegiadamente los contenidos con los que se quiere llevar a cabo la formación y sus significados, prever el tipo de aprendizaje que se quiere que alcancen los escolares, diseñar un plan completo de actuación para el logro de los aprendizajes esperados y establecer un sistema de evaluación sobre el alcance de dichos logros* (p. 28).

Se hace evidente la necesidad de conocimiento profesional sobre las especificaciones del currículo por parte de los docente de educación primaria. Rico (2015) indica a las herramientas conceptuales y didácticas de los profesores, como clave para implementarlo con éxito.

Junto con esto, el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, tiene diversos antecedentes; sin embargo, todos ellos suelen estar relacionados con contenidos matemáticos específicos como, por ejemplo, conocimiento del contenido de las fracciones (Rojas, Flores y Carrillo, 2013) o, conocimiento matemático sobre polígonos (Climent, Carreño y Ribeiro, 2014). Chapman (2015), nuestro antecedente más cercano, establece este conocimiento desde la investigación. Como vemos, existe bastante literatura sobre la caracterización de conocimiento profesional del profesor; por lo que nuestro estudio pretende complementar lo planteado por esta última autora, es decir, determinar los conocimientos necesarios para que un docente de primaria pueda desenvolverse con éxito al afrontar procesos de enseñanza que incluyan la resolución de problemas, pero desde una perspectiva curricular.

PLANTEAMIENTO

La resolución de problemas es un tema consustancial a las ciencias, y toma un papel prioritario en la enseñanza de las matemáticas (Castro, 2008; Rico, 2012). La comunidad de investigadores ha desarrollado una línea de trabajo referida explícitamente al proceso de enseñanza de la resolución de problemas (Castro, 2008; Rico y Sierra, 2000); esta línea de investigación sin embargo ha centrado sus esfuerzos en dilucidar cómo piensan o cómo enseñar de mejor manera la resolución de problemas. El presente trabajo se sitúa en este último contexto: la enseñanza de los profesores de primaria referida específicamente a la resolución de problemas; además, se presenta colindante con una línea de formación del profesorado, específicamente, el conocimiento profesional del profesor.

Existe bastante acuerdo en la comunidad científica internacional sobre la potencialidad de la resolución de problemas en los aprendizajes de las matemáticas (Castro y Ruíz, 2015; NCTM, 2000; Peng Yee, 2014; Schoenfeld, 2007). Lamentablemente, esto no se refleja en la mayoría de las salas de clases (Felmer et al., 2014). Nuestra inquietud surge desde esta discordancia entre teoría y práctica. Nuestra primera pregunta fue: ¿Por qué no se utiliza la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas? Sin embargo, para poder responder a esta cuestión nos hemos visto en la necesidad de determinar primero qué es lo que necesitan saber los profesores para utilizar la resolución de problemas en clases. Para comenzar a responder esta pregunta y en vista de los antecedentes, hemos decidido partir desde las propuestas curriculares. Por tanto, nuestra pregunta de investigación es:

- ¿Qué conocimientos sobre resolución de problemas exigen las orientaciones curriculares a los docentes de primaria?

OBJETIVOS

Para responder la pregunta de investigación planteada, nos fijamos un objetivo general.

- Identificar componentes de la resolución de problemas del conocimiento profesional del profesor de primaria, a partir de las orientaciones oficiales que aparecen en el currículo de seis países con rendimientos extremos en resolución de problemas.

Para la consecución de este objetivo general, nos proponemos varios objetivos específicos.

- Analizar e identificar conocimientos sobre resolución de problemas en el currículo de primaria de seis países con rendimientos extremos en resolución de problemas.
- Determinar el conocimiento profesional necesario para abordar los componentes sobre resolución de problemas detectados en dichos currículos de primaria.
- Organizar el conocimiento sobre resolución de problemas, en tipos de conocimiento profesional del profesor según el modelo MKT.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

El objeto de este capítulo es mostrar los sustentos teóricos que nos permitirán interpretar los resultados de nuestra investigación. Como ya hemos explicitado en el apartado anterior, este trabajo se ubica colindantemente entre las líneas de investigación sobre resolución de problemas y del conocimiento del profesor. Existe abundante investigación en ambas líneas, por lo que en este apartado nos limitaremos a dar las bases teóricas generales y nos centraremos en la relación existente entre ellas.

Conocimiento del profesor

El conocimiento para la enseñanza toma significado dentro de una visión del profesor como profesional de la educación. Por tanto, se configura como una preocupación de la Didáctica de la Matemática. El análisis de este conocimiento surge desde los primeros escritos de Shulman (1986). Posteriormente, Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball et al., 2008; Hill y Ball, 2009) han desarrollado un modelo de análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas; clasificándolo en dos subdominios: Conocimiento del contenido y didáctico del contenido, que a su vez se dividen en tres subdominios cada uno. La Tabla 1 muestra las categorías de este modelo.

Tabla 1. *Categorías modelo MKT*

<table>
<tr><td rowspan="6">Conocimiento profesional para la enseñanza</td><td rowspan="3">Conocimiento del contenido</td><td>Conocimiento común del contenido</td></tr>
<tr><td>Conocimiento especializado del contenido</td></tr>
<tr><td>Conocimiento del horizonte matemático</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Conocimiento Didáctico del Contenido</td><td>Conocimiento del contenido y de los estudiantes</td></tr>
<tr><td>Conocimiento del contenido y su enseñanza</td></tr>
<tr><td>Conocimiento del currículo</td></tr>
</table>

La primera categoría que se configura en este modelo es el conocimiento del contenido, entendido como los conceptos e ideas matemáticas necesarias para generar aprendizaje en los estudiantes. Dentro de este tipo, existirían tres subdominios:

- Conocimiento común del contenido: identificado como los contenidos y habilidades matemáticas que no son exclusivos a la escuela.
- Conocimiento especializado del contenido: Descrito como los aspectos de estos contenidos y habilidades, exclusivos para la enseñanza (diferentes representaciones, contextos, etc.)
- Conocimiento del horizonte matemático: definido como la red conceptual que debe establecer el profesor como forma de organizar los contenidos y habilidades.

La segunda categoría corresponde al conocimiento didáctico del contenido, que se organiza en torno a tres subdominios:

- Conocimiento del contenido y de los estudiantes: establecido como el conocimiento sobre como los estudiantes aprenden las matemáticas (pensamiento, errores, dificultades, etc.)
- Conocimiento del contenido y su enseñanza: determinado como el conocimiento sobre procesos y metodologías de enseñanza relacionados con las matemáticas.
- Conocimiento del currículo: corresponde al conocimiento sobre el currículo, materiales y recursos sobre la enseñanza.

Resolución de Problemas

Configurar una forma de organizar el conocimiento sobre resolución de problemas es un tema complejo (Castro, 2002, 2008). No obstante existen algunos lineamientos generales desde los que partimos para construir nuestro trabajo. Como ya se expuso, no es nuestro fin detallar en profundidad el significado de cada uno de los componentes de esta línea de investigación, sino cómo la entendemos en forma conjunta. No obstante, es importante señalar que la resolución de problemas es una actividad reconocida como de suma importancia dentro de los sistemas educativos (Castro y Ruíz, 2015). La concepción que se tenga de ella es preponderante para la forma en que se pueda desarrollar en los distintos ámbitos en los se ha abierto un espacio. La resolución de problemas tiene presencia en diferentes áreas como la investigación, la escuela, la investigación y en cada una de ellas toma un significado diferente, con sus matices propios. La resolución de problemas es una actividad inherente al ser humano; es una actividad transversal de la matemática; forma parte de la actividad científica; es una actividad de socialización y significación que permite entender la matemática con su propia lógica (Charnay, 1994). Así, podemos decir que esta actividad se puede comprender desde diferentes perspectivas o focos que solo en su conjunto permiten dilucidar las complejas redes que forman el significado de resolución de problemas. En este contexto surge nuestra necesidad de relacionar ambas líneas de investigación para interpretar nuestros resultados.

Resolución de problemas y competencia matemática

La noción de competencia matemática que emana desde la evaluación internacional PISA, al diagnosticar la calidad de los sistemas educativos, enmarcándose en un enfoque funcional del currículo; presenta a la resolución de problemas como el contexto en que los alumnos deberán demostrar su competencia matemática, en uno de sus significados (Rico, 2007). El último marco teórico de PISA explicita y define la resolución de problemas como el proceso mediante el cual los estudiantes formularán, emplearán e interpretarán fenómenos usando las matemáticas (OECD, 2013). En el desarrollo que ha manifestado el concepto de competencia matemática en este marco, se observa una clara evolución en la importancia que se le otorga a la resolución de problemas. Se podría establecer que resolver problemas es un indicativo primordial al momento de demostrar competencia matemática y evaluar la calidad de los sistemas educativos.

Resolución de problemas y Problemas

Definir problema es una tarea compleja, no obstante existe bastante acuerdo en que una aproximación puede ser:

> *Un problema es una tarea para la cual el individuo o grupo que se enfrenta con ella quiere o necesita encontrar una solución, y no hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución, y el*

individuo o grupo debe realizar intentos para encontrar la solución (Castro y Ruíz, 2015, p. 92).

Esta definición amplía la visión de PISA, centrando la atención en dos aspectos: tarea escolar y proceso de resolución. Esta concepción, será la que emplearemos al referirnos a un problema en este trabajo.

El definir un problema nos lleva a diversas clasificaciones de los tipos de problemas. Una diversidad de autores han realizado esta organización desde una variedad de criterios. Una organización muy amplia, desde las tareas que se proponen en una clase de matemáticas es la que proporciona Foong (2013). La Figura 1 muestra dicha clasificación.

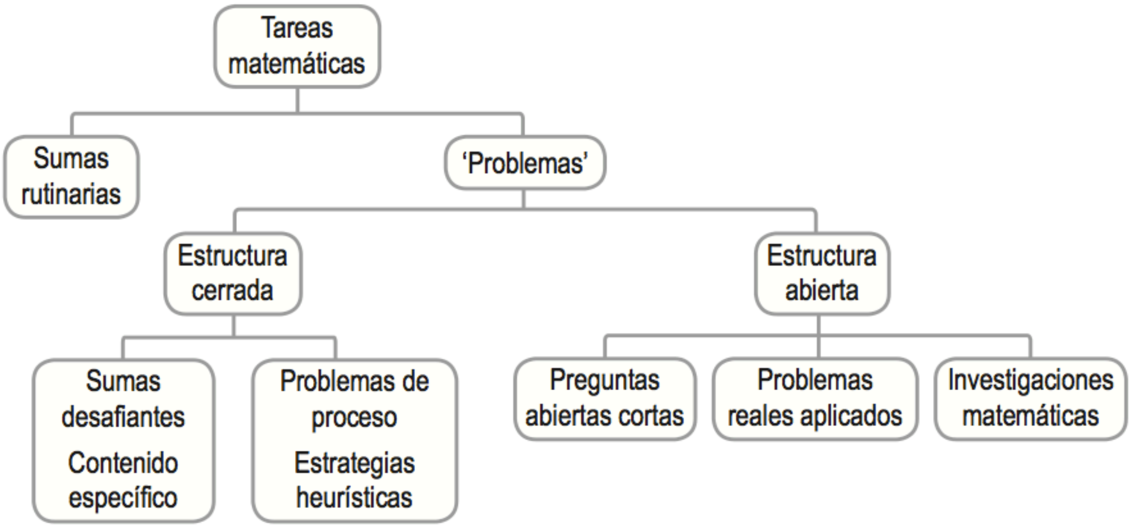

Figura 1. Plan de clasificación para los tipos de problemas matemáticos. Nota Fuente: Foong, P. Y. (2013). Resolución de problemas en matemática. En Yee, L. P. (Ed.), *La enseñanza de la matemática en la Educación Básica* (pp. 68). Santiago, Chile: Academia Chilena de la Ciencia.

Un lugar especial ocupan los problemas aritméticos de enunciado verbal [PAEV], debido al interés que han generado en los investigadores en didáctica de la matemática (Castro, 2008). Numerosas son las variaciones y especificidades de las clasificaciones, no obstante la Tabla 2 muestra una clasificación ampliamente aceptada según sus características semánticas.

Tabla 2. *Clasificación de PAEV*

Estructura Aditiva	Estructura Multiplicativa
- Cambio - Combinación - Comparación - Igualamiento	- Proporcionalidad simple - Comparación multiplicativa - Producto cartesiano

Además de su clasificación según un análisis semántico, encontramos variables que modificarán la demanda cognitiva que provean. Existen varias clasificaciones, sin embargo como expone Castro (1991), la realizada por Kilpatrick es una de las más usadas y de mayor utilidad. De acuerdo con Kilpatrick (1978), *any study of problem solving in mathematics involves a person (subject) solving a mathematical problem (task) under some coadition (situation). Each of these components can be used to define a class of variables* (p.8). Dentro de las variables de sujeto, el autor las clasifica en tres tipos: orgánicas, de característica y de historia instruccional. Al estar enmarcados en un estudio en Didáctica de las Matemáticas, las variables orgánicas y de historia instruccional son difícilmente modificables, nos centraremos en identificar algunas variables de característica o rasgo de los sujetos; pues como describe Kilpatrick (1978), estas variables de características son las que están abiertas a modificaciones para poder definirlas operacionalmente. El segundo grupo de variables que identifica Kilpatrick (1978) en el proceso de resolución de un problema, son las de tarea. Están asociadas a la naturaleza del problema. Se clasifican en: contexto, estructura y formato. Finalmente, tenemos las variables de situación que se asocian a las condiciones físicas, psicológicas y sociales en que se resuelve el problema (Castro, 1991; Kilpatrick, 1978).

De estos tres tipos, las segundas variables son claramente en las que el profesor tendrá mayor incidencia, y demandan un conocimiento profesional de su parte.

Resolución de problemas y pensamiento

Resolución de problemas se relaciona estrechamente con el pensamiento; Meyer (1986) incluso los consideras sinónimos. El posicionarse desde esta idea, obliga a entender la resolución de problemas como un proceso dinámico y no lineal, tal como se han interpretado las recomendaciones de Pólya (1981) en libros de textos y escuelas (Wilson, Fernández y Hadaway, 1993). El proceso de resolver problemas, en este trabajo, será entendido como un proceso cíclico y dinámico, que la Figura 2 ilustra.

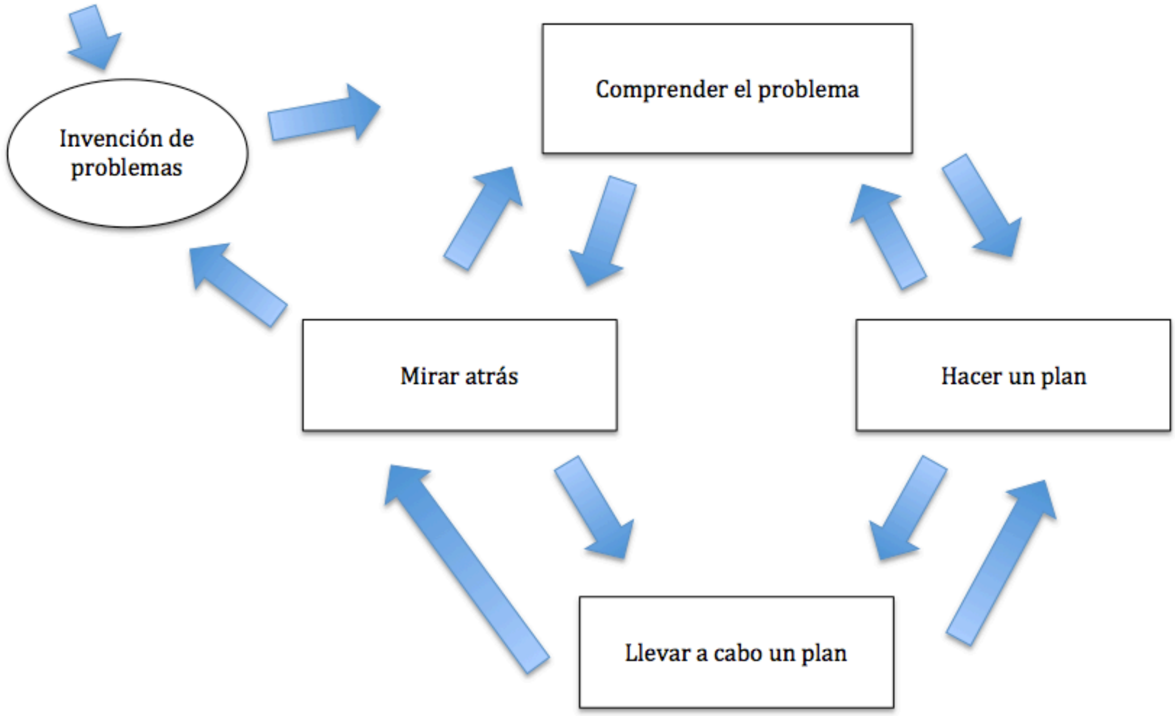

Figura 2. Actividad de resolución de problemas. Nota Fuente: Traducido de Wilson, J. W., Fernández, M. L., y Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. En P. S. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (p. 62). New York: MacMillan.

Resolución de problemas como proceso

Cuando se habla del proceso de resolver problemas, generalmente, se relaciona a los heurísticos. Esto debido a que podrían definirse como estrategias usadas para avanzar a la solución de un problema (Foong, 2013). Pólya (1981) es uno de los pioneros en establecer esta idea, que Castro (1991) denomina dirección. Esta noción se enmarca en los aportes de la Teoría de Gestalt e intentó determinar unas fases que seguiría el sujeto para encontrar la solución a un problema. Pólya (1979) planteó una serie de fases desde el punto de vista del comportamiento del resolutor ideal, las fases propuestas por este autor son: comprensión del problema, diseño del plan, ejecución y verificación de la solución obtenida. Foong (2013) plantea que además de estas heurísticas "generales", existen otras específicas que serían de ayuda para problemas concretos; Castro y Ruíz (2015) utilizan la terminología contraria para referirse a estas heurísticas, sin embargo concuerdan en la importancia de conocerlas para resolver problemas exitosamente. Entre las heurísticas específicas, encontramos: actuar el problema, utilizar un diagrama, dibujar esquemas de barras, hacer una lista sistemática, buscar patrones y utilizarlos, hacer una operación, ensayo y error, trabajar hacía atrás, usar la noción antes-después, dividir el problemas en partes, resolver un problema más sencillo y conjeturar.

Schoenfeld (1992) expandió la perspectiva de investigación y en su modelo mostró la importancia que tienen la metacognición y los afectos. La metacognición es descrita como la forma en que el resolutor se auto-regula, monitorea y controla los heurísticos y los conocimientos matemáticos para resolver un problema, permitiendo que pueda tomar decisiones acertadas sobre lo que se hace. Junto con esto, los afectos y las creencias también jugarán un papel esencial, pues determinarán la forma en que el resolutor afronte los problemas.

Mirar atrás es una parte fundamental del proceso de resolver problemas. Será el minuto en que el estudiante aprenda lo que ha hecho y pueda hacer generalizaciones sobre lo que lo realizado. En este contexto surge la importancia de la invención de problemas entendida como la formulación que efectúan los estudiantes de problemas matemáticos. Autores como Brown y Walter (2005) y Stoyanova (1998) exponen diversas estrategias para ser llevadas al aula.

Resolución de problemas y su enseñanza

Podemos mirar esta frase desde variadas perspectivas, aquí nos remitiremos a dos. Desde un punto de vista, y partiendo desde elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), Charnay (1994) establece modelos de enseñanza, utilizando el triángulo didáctico, es decir, la relación que se da entre estudiante, profesor y saber. La utilización de los problemas dependerá entonces, de qué rol le otorga el profesor a cada uno. Se hace énfasis en que ninguno se da en estado puro, sino que según las necesidades del profesor surge en el aula; haciendo la salvedad, que el conocimiento surge en un modelo aproximativo, por la posibilidad que da a resignificar el conocimiento. La Tabla 3 muestra una síntesis de los modelos.

Tabla 3. *Modelos de Enseñanza*

Modelo	Características
Modelo Normativo (centrado en el contenido)	• En este modelo el objetivo central es aportar, comunicar un saber a los alumnos, la pedagogía consiste entonces en él are de comunicar de hacer pasar un saber. • El profesor muestra las nociones, las introduce, provee los

	ejemplos. • El alumno en primer lugar, aprende, escucha, debe estar atento; luego imita, se entrena, se ejercita, y al final aplica. • El saber ya está acabado, entregado e incorporado.
Modelo Aproximativo. (centrado en la construcción del saber por parte del alumno)	• Se propone partir de "modelos", de concepciones existentes en el alumno y ponerlas a prueba, para mejorarlas, modificarlas o construirlas. • El profesor propone y organiza una serie de situaciones con distintos obstáculos, organiza las diferentes fases investigación, formulación, validación, institucionalización. • Organiza la comunicación de la clase, propone en el momento adecuado los elementos convencionales del saber (notaciones, simbologías) • El alumno ensaya, busca, propone soluciones, las confronta con la de sus compañeros, las defiende o las discute. • El saber es considerado con su lógica propia.
Modelo Incitativo (centrado en el alumno)	• Al principio se les pregunta a los alumnos sobre sus intereses, sus motivaciones, sus intereses, su entorno. • El profesor escucha al alumno, suscita su curiosidad, le ayuda a utilizar fuentes de información, responde a sus demandas, lo remite a herramientas de aprendizaje (fichas), busca una mejor motivación (ejemplos, Centros de interés de Decroly, Educación centrada en el entorno Freinet, en general la corriente activa en educación) • El alumno busca, organiza, luego estudia, aprende, a menudo de manera próxima a lo que es la enseñanza programada, • El saber está ligado a las necesidades de la vida, del entorno (la estructura propia del saber pasa a un segundo plano)

Desde otra arista tenemos tres enfoques o vías de acceso que comúnmente se conocen con el nombre de enseñanza *sobre*, *para* y a través de la resolución de problemas. Castro y Ruiz (2015) plantean que "los dos primeros enfoques [para y sobre] consideran la resolución de problemas como un objetivo de aprendizaje y, en el tercer caso [a través], como vehículo para enseñar o desarrollar otros contenidos" (p. 95). Pudiéndose establecer la conclusión sobre su uso en el aula; "estos tres acercamientos a la resolución de problemas pueden utilizarse de manera aislada, pero en la práctica se solapan y se utilizan en secuencias que incorporan más de una de estas aproximaciones" (p.95).

Además del enfoque o formas de ver la resolución de problemas en el aula, un aspecto fundamental se relaciona con la evaluación. Clark (2002) plantea un tipo de evaluación adecuada para procesos de enseñanza aprendizaje de esta temática: evaluación constructiva. Dicho concepto tiene relación principalmente con la idea de que la evaluación informa sobre el aprendizaje de los alumnos; este debiese ser su fin y todas las acciones realizadas por los profesores tendrían que apuntar a ese objetivo. Para la consecución de este tipo de evaluación, se señala al contrato didáctico como una herramienta fundamental para regular este proceso entre profesor y estudiantes. Por otra parte, identifica los tres tipos de evaluación: heteroevaluación, coevaluación y autoevaluación como formas de evaluar, todas dependiente del momento y de los que se quiere saber del aprendizaje de los alumnos. Un aspecto en el que se hace énfasis, en este modelo, es la diferencia entre aspectos cognitivos y afectivo; postulando que la evaluación debiese indagar en ambos. Además, se debería diferenciar entre evaluación con calificación.

Actitudes y Creencias sobre resolución de problemas

Es bastante aceptado por la comunidad de educadores matemáticos la influencia que tienen los aspecto afectivos en los aprendizajes de las matemáticas (Blanco, 2012). Schoenfeld y posteriormente McLeod, introdujeron estas ideas y hasta hoy son referenciados al hablar de estas cuestiones.

Schoenfeld (1983, 1992) establece el vínculo con la resolución de problemas al ubicarlo como uno de los componentes de su teoría sobre esta temática y cómo la utilización de creencias adecuadas ayudaría a lograr éxito en la enseñanza de esta competencia matemática. McLeod (1989) por su parte, indaga aún más y establece algunos descriptores de este dominio: actitudes, creencias y emociones. Cada uno de ellos influiría de una manera específica en como vemos y configuramos nuestro actuar frente a un problema. En este planteamiento, tenemos que al aprender matemáticas, en situaciones o experiencias particulares, se generan respuestas emocionales, que en la medida de su reiteración se transformaran en creencias; estas últimas serán las que influyan en nuestro futuro actuar frente a esas situaciones. Por tanto, se infiere la necesidad de crear situaciones y ambientes que generen las emociones adecuadas, para que las creencias que se puedan arraigar en los estudiantes sean las adecuadas para que puedan enfrentarse a una matemática cada vez más compleja.

Resolución de problemas y tecnología

Hace al menos 25 años que se habla de tecnología y educación. Es un línea de investigación que se encuentra abierta por las posibilidades que proporciona al desarrollo del pensamiento matemático; posibilidades que algunas veces el papel y el lápiz no proveen. Si bien aún no existe claridad sobre los beneficios de la tecnología sobre el razonamiento por sobre otros recursos (Camacho y Santos-Trigo, 2015), Wilson, Fernández y Hadaway (1993), plantearon dos posibles beneficios del aprendizaje de la resolución de problemas con programas informáticos: a) por un lado, permite usar procedimientos que con lápiz y papel se transforman en tediosos y extremadamente prolongados; y b) permite la exploración de variedades de respuestas a un problema, extensiones de estos o transformaciones de problemas rutinarios a no rutinarios. De carácter general y no específico a la resolución de problemas, Drijvers (2013) distingue algunas funcionalidades didácticas que pueden tener las TIC's en educación matemática: a) la función de herramienta para hacer matemáticas, refiriéndose al trabajo de *outsourcing* que también se podría hacer con lápiz y papel; b) la función de ambiente de aprendizaje para la práctica de habilidades; y c) la función de ambiente de aprendizaje para fomentar el desarrollo de la comprensión conceptual. Además, establece tres factores claves al momento de evaluar si la tecnología funciona en la sala: el diseño de la TIC's, el papel del profesor y el contexto en el que se realice.

Además de esto, existe una preocupación internacional por este tema debido al grado de presencia que tienen en una gran parte de las escuelas. Un ejemplo de esto es la importancia que le dedica el NCTM (2000) al incluirlo como uno de los principios de la educación matemática para el siglo XXI.

Conocimiento del profesor y resolución de problemas

Retrospectivamente, se puede observar la complejidad que tiene establecer qué tipo de conocimiento sobre problemas pertenece a qué criterio del modelo MKT. Recientemente, Chapman (2015), caracteriza el "mathematical problem-solving knowledge for teaching" (p.20) sobre lo que ella llama competencia de resolución de problemas, desde los avances en investigación. Esta competencia en resolución de problemas, se define como "what is necessary for one to learn and do genuine problem solving successfully" (p. 20). Esta competencia se caracteriza por:

- Comprensión conceptual de los contenidos matemáticos, operaciones y relaciones.
- Comprensión de heurísticas generales y estrategias específicas; y cuándo y cómo usarlas.
- Capacidad para pensar y comprender procesos de monitoreo cognitivos y metacognitivos durante la resolución de un problema.
- Tener creencias sobre las matemáticas, la resolución de problemas y la capacidad de resolver problemas, que apoyen la motivación y la confianza.

Desde esta premisa se construye un modelo que intenta mostrar un acercamiento al difuso conocimiento del profesor en resolución de problemas. Esta categorización corresponde al primer intento de sistematizar el conocimiento profesional sobre resolución de problemas. Su categorización no presenta una relación directa entre estas y las del modelo MKT. No obstante, si se establece la división en dos subcategorías. A continuación se expone una breve caracterización de los tipos de conocimiento según Chapman (2015); los tres primero se corresponden con el conocimiento del contenido matemático y los tres últimos, con el conocimiento didáctico del contenido.

- El primer tipo de conocimiento es el referido a *problemas*; responde a la necesidad del profesor de tener una comprensión de la naturaleza de los problemas para ser competente en la selección y diseño de estos, permitiendo apoyar el desarrollo de la competencia de resolución de problemas en sus estudiantes. Esta comprensión debe abarcar la estructura y propósito de cada problema. También debe considerarse como conocimiento, el posible impacto que tiene en los estudiantes cada uno de los tipos existentes. Ejemplos de este tipo de conocimiento, serían definiciones de problemas que apoyen la toma de decisiones al escogerlos; clasificaciones de problemas según número de operaciones, el número de variables, el proceso heurístico específico necesario para su resolución, estructura semántica; problemas de final abierto, etc.
- Una segunda clase, es el conocimiento sobre *resolver problemas*. Chapman (2015), lo define como la resolución de problemas desde la perspectiva del resolutor. Este tipo de conocimiento incluye comprensión sobre estrategias de resolución según el contenido matemático implicado, selección de estrategias, interpretación de la información contenida en el problema, diversidad de soluciones a un mismo problema, interpretación de respuestas inusuales de los

estudiantes dados en cada momento de la resolución, heurísticas generales y específicas, fases de resolución, etc.

- El conocimiento sobre la *invención de problemas* es el tercer tipo. Este, se relaciona con la resolución de problemas pues permite generar nuevos problemas o reformular los dados. Su importancia radica en la potencialidad que tiene este tipo de tarea en el pensamiento matemático de los estudiantes; Chapman (2015) destaca el impacto que tiene en promover un pensamiento divergente y flexible, mejorando las actitudes y la confianza del que realiza tareas de resolución. Algunos elementos contenidos en esta categoría son: los diferentes propósitos y beneficios de acuerdo al momento en que se utilizan, tipos de invención, etc.
- Un cuarto aspecto tiene que ver con el *conocimiento de los estudiantes como resolutores de problemas*. En él, se hace referencia a la ayuda que pueden brindar los profesores conociendo cómo resuelven problemas sus estudiantes. La comprensión de la naturaleza conceptual de las dificultades y su interpretación desde la perspectiva de quién resuelve, características de los resolutores exitosos y las heurísticas que utilizan, la disposición a resolver problemas y las formas de pensar la resolución de problema, entre otras, son ejemplos de conocimientos de esta clase.
- El conocimiento sobre *enseñanza de la resolución de problemas* corresponde al quinto tipo. Las prácticas instruccionales deben ser planificadas en función de lo que se quiere lograr, para ayudar a los estudiantes a convertirse en buenos resolutores. Para ello, se señalan como tipos de conocimiento referidos a esta categoría, el deber conocer las estrategias usadas para dirigir experiencias de aprendizaje exitosas, saber cómo y cuándo intervenir, formas de trabajo (individual o grupal), uso de tecnologías, papel de la metacognición, enfoques o vías de acceso, y formas de evaluar la resolución de problemas.
- Finalmente, la última categoría corresponde al conocimiento de *factores afectivos y creencias* y su posible impacto en los estudiantes. También se incluyen las referidas al profesor y cómo afectan los procesos de aprendizaje sobre resolución de problemas. Chapman (2015) destaca la importancia de este conocimiento para ayudar a comprender y desarrollar creencias apropiadas para el logro de esta competencia.

Chapman (2015) señala que esta caracterización no está acabada. Por ello, y en vista del panorama en investigación sobre resolución de problemas (Castro, 2002, 2008), hemos agregado dos componentes de conocimiento en las categorías de problemas y en invención de problemas.

En el conocimiento sobre problemas, adherimos a lo expuesto por Schoenfeld (1985) señalando a los problemas aritmético verbales como un tipo distinto de conocimiento pues se enmarca en un grupo de investigaciones diferentes, por tanto, lo hemos agregado dentro de la primera categoría. Esto significaría al profesor conocer variables semánticas y su influencia en el aprendizaje de las estructuras aritméticas.

También se ha sumado a la categoría de invención de problemas las formas en que es posible plantear estas tareas, es decir, las formas de enfrentar a los estudiantes a la tarea de proponer problemas. Ejemplo de esto corresponde a la estrategia *¿Qué pasaría?* (Brown y Walter, 2005) o la clasificación en situaciones libres, semiestructurada o estructurada que realiza Stoyanova (1998). Además, existe otra perspectiva sobre este tipo de conocimiento que se relaciona con los momentos para hacerlo, es decir, antes de resolver un problema, durante el mismo proceso o una vez finalizado.

Cada uno de estos elementos se relaciona de manera interconectada con los demás y configuran una compleja red, no solo entre ellos sino con las demás ramas de las matemáticas que, en forma sistémica, permite enseñar a resolver problemas.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

Una vez descrito nuestro problema de investigación y el marco teórico a través del cual se interpretarán los resultados, en este capítulo se expone la perspectiva metodológica desde la que configura este trabajo; determinaremos su diseño, la muestra y las categorías de análisis utilizadas.

En términos generales este estudio tiene un carácter cualitativo y utilizará la técnica del análisis de contenido de carácter descriptivo.

Caracterización

Este trabajo tiene como meta analizar de qué forma se encuentran presente, en el currículo, elementos de la resolución de problemas y desde allí, inferir el conocimiento profesional del profesor requerido para hacerlo viable en la sala de clases. A partir de esta afirmación y como ya se explicitó, se deduce la utilización de un enfoque cualitativo no interactivo. Según McMillan y Schumacher (2005) este tipo de estudios se caracterizan por la realización de descripciones y levantamiento de interpretaciones sobre las fuentes seleccionadas. Por su parte, Cohen, Manion y Morrison (2011) lo definen como "un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos" (p. 563). Consideramos este tipo de diseño adecuado para el logro de nuestro objetivo, pues como exponen Rico y Fernández-Cano (2013), su finalidad está en "descubrir la estructura interna de la comunicación" (p.9). Por otra parte, Krippendorff (1990) la define como "una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto" (p.28); coincidiendo ambos argumentos en la utilidad para inferir, por tanto útil al momento de realizar está tarea, con los componentes que aparecen sobre la resolución de problemas en las propuestas curriculares, para identificar el contenido profesional del profesor de primaria.

También es importante señalar el carácter descriptivo de este estudio, desprendido del análisis de contenido. Como señalan Fernández-Cano y Rico (1992), una de las funciones básicas de esta técnica, es heurística; es decir, encontrar y describir "aspectos del discurso de un modo más sistemático que por [el] simple tanteo" (p.49).

Muestra y contexto

En este trabajo, la muestra o unidades muestrales (Krippendorff, 1990) está constituida por "documentos grupales" (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010) o documentos curriculares de enseñanza primaria. Se escogieron a través de un muestreo de casos-tipo (Hernández et al., 2010), pues nuestro objetivo es la "riqueza, profundidad y calidad de la información" (p.397). La muestra consta de seis documentos curriculares, correspondiendo a países situados en diferentes terciles del rango PISA, presentando como características: a) ser países pertenecientes a la OCDE, b) tener culturas occidentalizadas, c) ser participantes en evaluaciones internacionales PISA y TIMSS. Este procedimiento se realizó a partir de los puntajes de PISA 2012 (OECD, 2014); se escogieron dos países del tercio superior, dos del tercio medio y dos del tercio inferior; es decir, sus desempeños en dicha evaluación representan sus extremos. La Tabla 4 muestra los currículo utilizados en este estudio.

Tabla 4. *Currículos y criterios de selección*

Tercio	País	Puntajes PISA 2012
Superior	Singapur	573
	Finlandia	519
Medio	España	484
	Estados Unidos	481
Inferior	Chile	423
	Argentina	388

Para efectos de este estudio, se analizaron los niveles de educación primaria. Es decir, niveles de 1º a 6º de cada país participante[1]. Krippendorff (1990) resalta la importancia de hacer explícito este contexto de los datos; pues ayuda a delimitar el marco de nuestro

[1] En los currículos de E.E.U.U. y Finlandia se analizaron hasta 5º de primaria, debido a su organización.

posterior análisis. En la Tabla 5 se expone una breve caracterización de cada currículo. Por tanto, podemos establecer que nuestro contexto esta determinado por objetivos o descriptores de aprendizajes esperados por cada nación; y será este, el que nos ayude a analizar cuando se encuentren ambigüedades en las unidades de análisis (Bardin, 1986).

Tabla 5. *Caracterización de Currículos utilizados*

País	Año publicación	Organización de conocimiento	Organización de los niveles
Finlandia	2004	Objetivos. Contenidos básicos. Descriptores de buen desempeño al término del nivel.	1 y 2 de primaria. 3 a 5 de primaria.
Singapur	2006	Objetivos generales para primaria. Tópicos/Sub-tópicos. Contenidos.	Por nivel. Existen 6 listados.
España	2014	Objetivos Contenidos y criterios de evaluación por ciclos	3 ciclos de 2 niveles
Estados Unidos	2000	Estándares de contenido y de proceso	2 ciclos; 4 niveles el primero, 3 el segundo.
Chile	2012	Habilidades y objetivos de aprendizaje por niveles. Ejes de contenido	6 niveles.
Argentina	2011	Bloques de contenidos y estándares de aprendizaje evaluables	6 curso o niveles

Unidades de análisis

El análisis de contenido realizado en este estudio fue hecho sobre un concepto educativo: la resolución de problemas; presente en el currículo de primaria de los seis países anteriormente mencionados. Según Krippendorff (1990), y como ya se dijo, estos últimos corresponderían a nuestras unidades de muestro. Empero, estas unidades aún son muy amplias para ser analizadas, por lo que se determinaron unidades de análisis o de contexto[2], que limitarán la información contextual, ayudando a determinar temas y posibles categorías; pudiendo así encontrar el sentido interno del texto (Rico y Fernández-Cano, 2013). Por tanto, nuestras unidades de análisis quedan organizadas de la siguiente forma:

- Unidades de muestreo: Currículo de educación primaria de 6 países con rendimientos extremos en prueba PISA 2012.
- Unidades de registro: frases u oraciones que aludan explícitamente a la resolución de problemas.
- Unidades de contexto: Lineamientos de la asignatura educación matemática, objetivos de esta, descripciones o introducciones, criterios de evaluación. Todos ellos, presentes en el documento curricular oficial.

El procedimiento de selección utilizado para establecer las unidades de análisis surgen desde el propósito de este estudio: identificar componentes del conocimiento profesional sobre resolución de problemas. Para cumplir con este cometido, se utilizaron dos tipos de unidades que conjuntamente colaboran a dar una mayor fiabilidad al estudio: sintácticas y temáticas. Krippendorff (1990) señala a la primera como elementos sintácticos naturales, cargados de fiabilidad debido a su pequeño tamaño; para la segunda, destaca "su correspondencia con una definición estructural particular del contenido de los relatos, explicaciones o interpretaciones. Se distinguen entre sí sobre bases conceptuales, y del resto del material irrelevante por poseer propiedades estructurales deseadas" (p.90). Por tanto las unidades de análisis las definiremos como las frases u oraciones que hagan referencia explícita a las palabras "resolución de problemas", "situación problema" y "problema", pero que además incluyan elementos sobre que debería lograrse con ellas, cómo deberían trabajarse o que a través de ellas se logre otro cometido. En la Figura 1 se observa un ejemplo de unidad de análisis.

The pupils will

- demonstrate an understanding of concepts associated with mathematics by using them to solve problems, and by presenting and explaining them to the teacher and other pupils

Figura 3. Ejemplo de unidad de análisis (National Core Curriculum for Basic Education, 2004, p. 160)

[2] Las unidades aparecen en el Anexo I, ya clasificadas según las categorías de análisis.

Otro aspecto importante señalado por Bardin (1986), ligado a las unidades de análisis, en el diseño de una investigación que utilice el análisis de contenido, es la necesidad de establecer la regla de numeración que guiará el análisis. En nuestro caso, se utilizará la regla de presencia, pues nuestro objetivo es describir un tipo de conocimiento específico en su totalidad, por tanto esta presencia o ausencia es significativa.

Categorías de análisis

Rico y Fernández-Cano (2013), estableciendo etapas en el procedimiento para realizar un análisis de contenido, declaran que después de determinar las unidades de análisis se debe "Denominar, definir e interpretar las categorías consideradas. Evitar en lo posible la categoría OTROS, para obviar indeterminaciones" (p.10). Para ello, estos autores recomiendan "Codificar o cuantificar mediante frecuencias o rangos las unidades de análisis previamente adscritas al sistema de categorías predeterminado (procedimiento deductivo) o inferir tal sistema de categorías sobre las unidades de análisis seleccionadas (sistema inductivo)." (p.10). Así también, Bardin (1986) plantea el proceso de categorización definiéndolo como:

> *... una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación, tras la agrupación por género (analogía), a partir de criterios previamente definidos. Las categorías son secciones o clases que reúnen un grupo de elementos (unidades de registro en el caso del análisis de contenido) bajo un título genérico, reunión efectuada en razón de los caracteres comunes de estos elementos.* (p.90)

En este estudio, debido a la intensa investigación sobre conocimiento del profesor, iniciada con Shulman (1986) y que ha logrado visibilidad internacional con el modelo de conocimiento del profesor MKT (Ball, 2000; Ball et al., 2008; Hill y Ball, 2009), el procedimiento para establecer las categorías de análisis parte desde el modelo antes mencionado. Permitiendo que las unidades de cada currículo fueran clasificadas en dos grandes categorías y cada una de estas en tres subcategorías. Este proceso definido como de las casillas (Bardin, 1986) se utilizó para una primera organización de las unidades de análisis. Rico y Fernández-Cano (2013) lo caracterizan como deductivo. No obstante, siguiendo las recomendaciones de Chapman (2015), y por la naturaleza de la resolución de problemas se esclarecieron las categorías establecidas en el MKT, utilizando las propuestas por Chapman (2015) para caracterizar el "mathematical problem-solving knowledge for teaching" (p.20) sobre lo que ella llama competencia de resolución de problemas, desde los avances en investigación; si bien no existe una relación directa entre las categorías más específicas y las del modelo MKT, si la hay en la división en dos subcategorías: conocimiento del contenido y didáctico del contenido. Debido a que estas, ya fueron detalladas en el capítulo 2, no ahondaremos más en ello.

Una vez realizado el análisis deductivo, se continuó con uno inverso, es decir, inductivo dentro de cada categoría. Este procedimiento llamado por montones (Bardin, 1986), permitió establecer subcategorías más específicas sobre el conocimiento de los profesores de primaria sobre resolución de problemas. Krippendorff (1990), además señala que a partir de categorías primarias pueden establecerse otras, que toman características de las primeras; ese será el camino que seguiremos a continuación.

El proceso intermedio, por el cual se construyeron las subcategorías, permitió establecer los descriptores de cada categoría, estos se muestran en la Tabla 6.

Finalmente, para poder realizar una "descripción precisa de las características pertinentes del contenido" (Bardin, 1986, p. 78), se realizó una codificación de estas categorías. La Tabla 6 muestra un resumen de lo señalado en este apartado.

Tabla 6. *Categorías de Análisis*

Categorías deductivas	**Descriptores**	**Subcategorías inductivas**	**Codificación**
	Conocimiento del contenido		
Problemas matemáticos	Comprensión de la naturaleza y significancia de los problemas; estructura y propósitos de los diferentes tipos de problemas; impacto de las características de los problemas en los aprendices; conocimiento sobre clasificación y estructura de un PAEV.	Caracterización de Problema	CCpp
		Clasificación de problemas según criterios diversos	CCpc
Resolución de problemas	Ser competente resolviendo problemas.	Heurísticos Generales	CCrhg

matemáticos	Comprensión de la resolución de problemas como forma de pensar; modelos de resolución y el significado y uso de heurísticas; como interpretan los estudiantes soluciones inusuales; e implicancias para los estudiantes de los diferentes enfoques.	Heurísticos específicos Estrategias de otras áreas de contenido Estrategias Personales	CCrhe CCre CCrep
Invención de problemas	Comprensión de la invención de problemas antes, durante y después de resolver un problema; formas de llevarlo a cabo; estrategias.	Contextos Beneficios Estrategias	CCic CCib CCie
Conocimiento didáctico del contenido			
Conocimiento de los estudiantes como resolutores de problemas	Comprensión de lo que los estudiantes saben, pueden hacer y están dispuestos; dificultades, características de un resolutor exitoso, formas de pensar la resolución de problemas (modelación y representaciones mentales)	Pensamiento de los estudiantes Dificultades de los estudiantes Conductas de resolutores exitosos	CDep CDed CDee
Conocimiento del papel de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática	Comprensión sobre como y qué hacer para ayudar a los estudiantes a convertirse en resolutores de problemas; técnicas instruccionales para heurísticas/estrategias, metacognición, uso de tecnología, evaluación para el progreso; cuando intervenir para ayudar.	Enfoques o vías de acceso Metacognición Evaluación Estrategias metodológicas	CDpe CDpm CDpv CDpa
Factores afectivos y creencias	Comprender la naturaleza y el impacto de los factores afectivos productivos e improductivos y creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza de la resolución de problemas	Papel e implicaciones de diferentes emociones Rol del profesor	CDae CDap

Nota: Basado en Chapman, 2015, p.31. Traducción del autor.

Capítulo 4: Análisis y discusión de los datos

El presente capítulo tiene por objetivo mostrar el análisis y una primera discusión sobre las unidades establecidas en el apartado anterior. Para ello, dichas unidades fueron clasificadas según las categorías establecidas de manera deductiva, en tablas (anexo 1). A continuación se muestran las generalizaciones que permitirán establecer interpretaciones que identifiquen (McMillan y Schumacher, 2005) el conocimiento profesional necesario del profesor de primaria sobre resolución de problemas, presente en algunas propuestas curriculares. Dichas generalizaciones se establecen desde una técnica analítica discriminante por la necesidad de extraer máximos que muestren todas las características de la resolución de problemas en los currículos, aunque también presenta algunas características de la técnica de conglomerado (Krippendorff, 1990).

Análisis sobre conocimiento del contenido.

Un primer análisis se corresponderá con el conocimiento del contenido y sus tres subcategorías: conocimiento sobre problemas, conocimiento sobre resolución y conocimiento sobre invención de problemas (Chapman, 2015).

Conocimiento sobre problemas.

El conocimiento sobre problemas presente en los currículos estudiados es bastante diverso, sobre todo en cuanto a cantidad y explicitación de este. La Tabla 7 muestra un resumen de los datos encontrados en esta categoría.

Tabla 7. *Presencia de conocimientos sobre problemas*

		Currículos					
		Tercio superior		**Tercio medio**		**Tercio inferior**	
Categorías		Singapur	Finlandia	España	E.E.U.U.	Chile	Argentina
Problemas	CCpp			X	X	X	
	CCpc	X	X	X	X	X	X

Nota: CCpp=caracterización del problema; CCpc=clasificación de problemas según diversos criterios.

Sobre este tipo de conocimiento, los países que se encuentran en el tercil más alto del informe PISA, en ambos casos, explicitan la enseñanza de problemas de manera escueta. Finlandia solo alude a este tipo de conocimiento señalando la utilización de problemas simples (National Core Curriculum for Basic Education, 2004, p. 160). Por su parte, en el currículo elaborado por el Ministerio de Educación de Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2007), se pueden apreciar una mayor cantidad de conocimientos. Se hace referencia a diferentes clasificaciones según características: problemas no rutinarios, de respuesta abierta y de enunciado verbal realista; también se hace referencia a problemas de la vida cotidiana. Otra clasificación que se señala en el currículo de Singapur es la cantidad de pasos para resolverlos: uno, dos y tres pasos; otro aspecto que aparece, es el contenido matemático que toma como contexto el problema: cuatro operaciones (+, -, * y :); sistema monetario; perímetro, área, tiempo, masa, volumen y capacidad; tablas, pictogramas, gráficos de barras, gráficos de líneas y gráficos circulares; polígonos y poliedros; fracciones, porcentajes y razones; promedio, velocidad y velocidad promedio; y expresiones algebraicas. También se hace mención a los sistemas de representación utilizados en la elaboración del problema, por ejemplo, problemas que promuevan las representaciones pictóricas. Cada una de estas clasificaciones se entremezclan durante los seis cursos que establece la educación primaria. En ninguno de los currículos señalados se hace mención explícita a los PAEV, sin embargo se pueden deducir de la solicitud de enfrentar problemas que se resuelvan con las cuatro operaciones.

En los currículos de los países del tercio medio, se observa una mayor cantidad de especificaciones referidas a este tipo de conocimiento. Al igual que en el currículo de Singapur, en el español (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014), se hace mención a problemas según el contexto: vida cotidiana. La mayor cantidad de menciones se encuentra en la clasificación de problemas según el área de contenido, es decir, problemas que impliquen geometría; medida, porcentajes, proporcionalidad y probabilidad y estadística. Se debe hacer una mención especial a los PAEV, pues en este currículo se nombran numerosas veces, problemas en los que intervengan las cuatro operaciones y específicamente el uso y automatización de los algoritmos a través de la resolución de problemas. Un aspecto complementario a esto es la explicitación de la estrategia a utilizar para resolverlos: estimación, cálculo mental o relaciones numéricas (podría inferirse el sentido numérico); por tanto, se deduce conocer variables de tarea de los PAEV para su correcta utilización en el aula. Sobre el significado de problema y su caracterización existen muy pocas menciones, solo explicitando la diferenciación entre problema y ejercicio. Por su parte, E.E.U.U. (NCTM, 2000) es uno de los pocos currículos que define en sus lineamientos qué entienden por problema. El NCTM incluye clasificaciones de los tipos de problemas según diversidad de criterios: contexto (vida diaria, laboral o ámbito científico); se habla de identificar este tipo de problemas para tener estrategias metacognitivas para resolverlos; también aparece el criterio del contenido matemático, señalando problemas geométricos, con proporciones y algebraicos (patrones y funciones). También se habla de problemas que permitan modelizar y de investigaciones matemáticas. Respecto a los PAEV, en estas directrices aparecen bastantes explicitaciones: se habla de "interpretaciones" de las operaciones básicas, especificando acciones (juntar, separar, igualar, iteración de una medida, distribución, etc.).

En el tercio más bajo, el currículo chileno (Ministerio de Educación, 2012), muestra en sus directrices este conocimiento de problemas de forma más desarrollada que cualquier otro de los países analizados. Junto a E.E.U.U., son los dos países que explicitan qué entienden por problema. Aparecen clasificaciones como el contexto; rutinarios y no rutinarios; y la organización según el área de contenido en el que se deben resolver: sistema monetario; perímetros; polígonos; tiempo, longitud y masa; fracciones y decimales; ecuaciones e inecuaciones; y factores y múltiplos. Sobre los PAEV, aparecen conocimientos como las cuatro operaciones básicas, las estrategias utilizadas para resolverlos (representaciones, familia de operaciones, combinaciones multiplicativas básicas, paréntesis) y las variables de tarea: cantidad de cifras de los números y cantidad de pasos para resolverlo. Finalmente, las directrices argentinas (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b), también condensa sus objetivos en este tipo de conocimiento. En las metas propuestas, se encuentran dos tipos de clasificaciones, una referida al tipo de contenido involucrado: números, orientación espacial y geometría, unidades de medida, fracciones y números decimales. Y la otra, las estrategias que intervienen para su resolución: estimación, relaciones numéricas y propiedades. En relación a los PAEV, se hace referencia a los significados de las operaciones, es decir, tipos de problemas según acción.

A modo de síntesis, la Figura 4 muestra como se configura este conocimiento en los currículos estudiados.

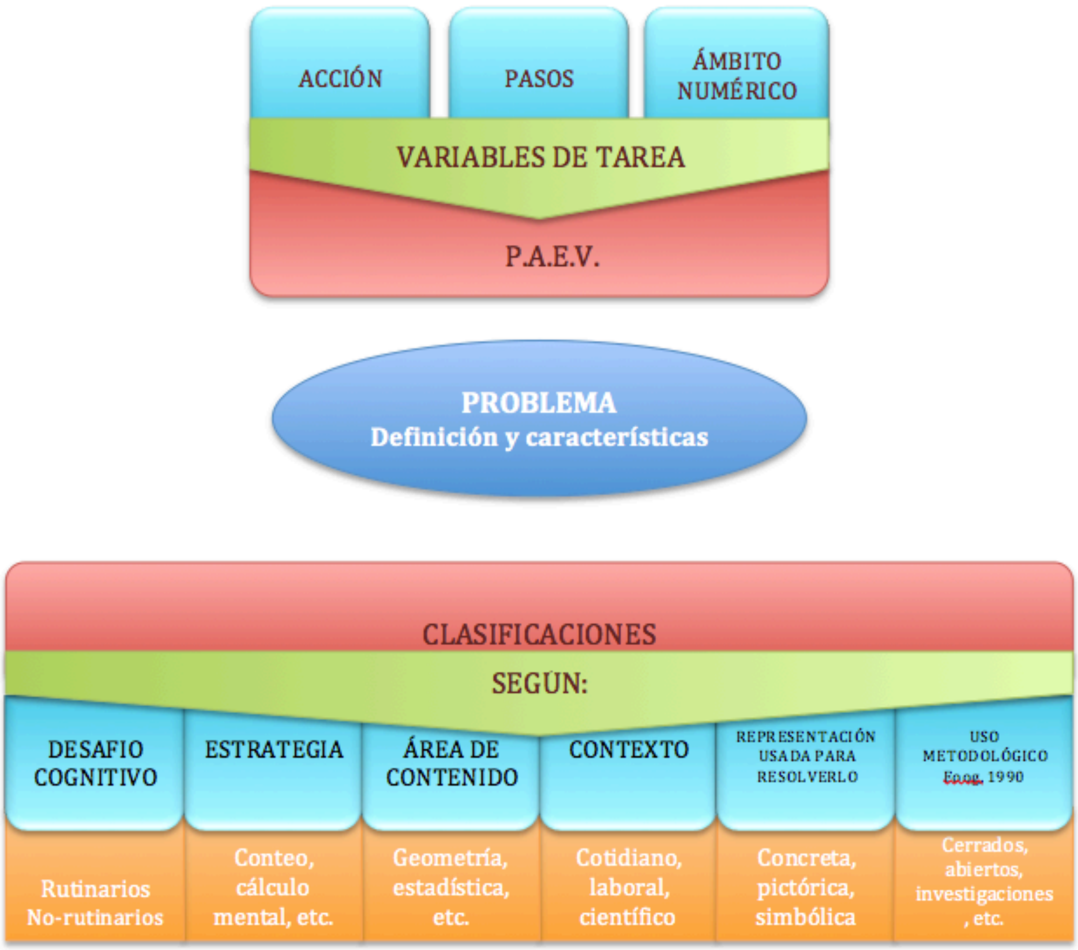

Figura 4. Conocimientos sobre problemas

Conocimiento sobre resolución de problemas

Este tipo de conocimiento se centra fundamentalmente en el tradicional método de enseñanza de Pólya (1981), haciendo énfasis a algunos de los pasos más que a otros. La Tabla 8 muestra la presencia de ellos en cada currículo.

Tabla 8. *Presencia de conocimiento sobre resolver problemas*

	Currículos					
	Tercio superior		**Tercio medio**		**Tercio inferior**	
Categorías	Singapur	Finlandia	España	E.E.U.U.	Chile	Argentina

Resolver problemas	CCrhg	X	X	X	X	X	X
	CCrhe			X	X	X	
	CCre			X	X		X
	CCrep	X			X	X	X

Nota: CCrhg=heurísticos generales; CCrhe=heurísticos específicos; CCre=estrategias de otras áreas de contenido; CCrep=estrategias personales.

En los países de primer tercil del informe PISA, se encuentran muy pocas referencias que cumplieran con los descriptores de la categoría. Finlandia, en su currículo para la escuela primaria, hace mención a la mediación del profesor a encontrar la solución de un problema y en la elaboración de justificaciones a sus actos y presentación de soluciones, infiriéndose que se entiende como un proceso con etapas, pues además señala el "learn to solve mathematical problems" (National Core Curriculum for Basic Education, 2004, p. 161). Por su parte, el currículo de primaria singapurense (Curriculum Planning and Development Division, 2007), detalla un poco más, relacionando la resolución de un problema con el pensamiento matemático y habilidades de resolución de problemas. Al igual que Finlandia, Singapur entiende la resolución de problemas como un proceso, sin embargo explicita más las fases de Pólya (1981). Encontramos, también, objetivos que hacen referencia a lo importante de planificar el acto de resolución; uso heurísticos (sin especificar cuáles); justificación de acciones; explicación y discusión de estrategias; presentación y evaluación de las soluciones y estrategias personales.

En los países del tercil medio hallamos una descripción muy detalla en el currículo de primaria de E.E.U.U. (NCTM, 2000), no así en el español (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014). Este último, hace un especial énfasis en el la resolución de problemas cómo un proceso, explicitando cada una de la fases de manera muy minuciosa. También se mencionan el uso de heurísticos específicos y estrategias de otras áreas de contenido (geometría). Por su parte, el NCTM (2000), sigue la tendencia de utilizar los pasos de Pólya (1981). No obstante, además detalla otros heurísticos específicos como son: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar hacía atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear un problema más sencillo. Una marcada importancia se le otorga al uso de las representaciones (manipulativas, pictóricas y gráficas) como estrategias para resolver problemas. También se nombran estrategias provenientes desde las áreas especificas de contenido: ideas geométricas, descomposición de números, conteo, algoritmos, estimación, propiedades de las operaciones y equivalencias. Junto con esto, se especifica un uso flexible de estás y la capacidad de justificar y argumentar su utilización. También se propicia el uso de estrategias personales. Se relaciona el uso de estrategias con el desarrollo de ideas matemática, razonamientos y flexibilidad mental. Sobre los pasos, se señala la importancia de planificar la actuación, la selección adecuada de estrategias o heurísticos, evaluar la estrategia escogida, evaluar la pertinencia de la respuesta. Se menciona el factor tiempo para la resolución de un problema y el uso de las TIC's como estrategia. Finalmente, se hace una conexión con otra área del conocimiento (artes plásticas) y cómo se relaciona con la resolución de problemas y la comunicación de los resultados.

Por último, en los países del tercil más bajo, sólo un país (Chile) se mantiene en la línea de utilizar el modelo de Pólya como pasos para resolver problemas de manera explícita. Las directrices chilenas (Ministerio de Educación, 2012), además, nombran los heurísticos específicos presentes en el currículo americano. Al describir sus objetivos para los cuatro pasos de Pólya (1981), especifica una estrategia para comprender el problema usando material concreto o gráfico. Se hace hincapié en el uso de diversidad de estrategias (sin detallarlas), saber seleccionarlas y usarlas de manera flexible; admitiendo posibilidad de crear nuevas. También se señala el uso de la generalización de tipos de problemas a partir de la estrategia utilizada para resolverlo. Aparece la argumentación y comunicación como elementos importantes en estas fases. Un aspecto que no había aparecido hasta ahora, es la relación que hacen con la creatividad a través de la adaptación y creación de estrategias. Argentina, por su parte, señala en su currículo de primaria (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b) aspectos generales referidos a los pasos de Pólya, sin mencionarlos. Se establece como importante: a) identificación de datos y pregunta, b) la comunicación de las estrategias utilizadas y su comparación; también se hace mención a la elaboración de estrategias propias, y c) valoración de las respuestas.

La Figura 5 muestra una síntesis correspondiente a los conocimientos referidos al resolver un problema.

Figura 5. Conocimiento sobre resolver problemas

Conocimiento sobre invención de problemas

Bastante somera es la descripción realizada sobre este tipo de conocimiento en los currículos de primaria de los países situados en el tercil más alto. La Tabla 9 muestra nuestros hallazgos.

Tabla 9. *Presencia de conocimiento sobre invención de problemas*

		Currículos					
		Tercio superior		**Tercio medio**		**Tercio inferior**	
Categorías		Singapur	Finlandia	España	E.E.U.U.	Chile	Argentina
Invención de Problemas	CCic				X	X	X
	CCib				X		
	CCie	X	X	X	X	X	X

Nota: CCic=penamiento de los estudiantes; CCib=beneficios; CCie=estrategias.

Mientras Finlandia (National Core Curriculum for Basic Education, 2004) solo hace referencia a guiar en la invención de problemas y a presentar problemas en nuevas formas; en las directrices de Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2007) solo se menciona una vez este tipo de conocimiento, pidiendo aplicar habilidades de resolución de problemas para inventar nuevos.

En el tercio medio, la situación no es muy distinta. En el currículo español (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014) encontramos 2 referencias a este tipo de conocimiento. Ambas referidas a la invención de problemas a partir de otros ya resuelto, es decir, estrategias metodológicas para usarla. En E.E.U.U. (NCTM, 2000) explicitan la relación entre formular problemas y ser mejor resolutor de problemas; hacen énfasis en lo natural de hacer preguntas de los niños de primaria y como el profesor debe aprovechar esto; relacionan estrechamente el inventar problemas con preguntar y a ampliar los problemas a partir de esto. También se sugieren contextos como la literatura infantil y los mismos problemas. Además enfatizan las posibilidades de reflexionar sobre la invención de problemas y como esta tarea matemática, mejora los procesos de resolución de los estudiantes.

En el tercil inferior, también se encuentran pocas referencias a este conocimiento. Chile (Ministerio de Educación, 2012) por su parte, hace énfasis en la invención de problemas utilizando operaciones aritméticas. También señala, en menor medida, el contexto familiar para realizar esta tarea y el uso de TIC's y representaciones (concretas, pictóricas y gráficas) para realizarlo. En las directrices argentinas (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b) solo encontramos dos referencias: una apuntando al tipo de invención: preguntas y enunciados, y otra a la comparación de estas una vez realizadas.

En la Figura 6 encontramos una síntesis sobre los conocimientos referidos a la invención de problemas.

Figura 6. Conocimiento sobre Invención de Problemas

Análisis sobre el conocimiento didáctico del contenido

El segundo análisis corresponde al conocimiento didáctico y sus tres subcategorías: conocimientos sobre los estudiantes como resolutores, conocimiento sobre el papel de la resolución de problemas en los procesos de enseñanza aprendizaje y conocimiento sobre factores afectivos y creencias (Chapman, 2015).

Conocimiento de los estudiantes como resolutores

Este tipo de conocimiento, relativo a cómo piensan los estudiantes cuando resuelven problemas, sus dificultades y éxitos, es un tipo de conocimiento que solo E.E.U.U. (NCTM, 2000) expone ampliamente en su currículo; el resto de los países hace pocas o nulas referencias a él. La Tabla 10 muestra dicha presencia en la muestra.

Tabla 10. *Presencia de conocimientos sobre estudiantes como resolutores*

		Currículos					
		Tercio superior		**Tercio medio**		**Tercio inferior**	
Categorías		Singapur	Finlandia	España	E.E.U.U.	Chile	Argentina
Estudiantes como resolutores	CDep	X	X		X	X	
	CDed				X		
	CDee				X		

Nota: CDep=pensamiento de los estudiantes; CDed=dificultades de los estudiantes; CDee=conductas de resolutores exitosos.

En el primer tercil, el de mejores puntajes, se encuentran dos referencias. En Finlandia (National Core Curriculum for Basic Education, 2004), referida a la importancia del punto de vista del alumno al hacer observaciones de los problemas. Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2007) en cambio, nombra los componentes del desarrollo de la habilidad de resolver problemas: comprensión conceptual, dominio de competencias y habilidades de pensamiento; sin detallar qué entienden por cada una.

Los países de tercil medio presentan una dicotomía sobre este tipo de conocimiento en sus orientaciones curriculares. España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014), no presenta ninguna mención sobre el pensamiento de los alumnos mientras resuelven problemas. En cambio, en las directrices de E.E.U.U. (NCTM, 2000), encontramos un gran número de referencias; estas pueden agruparse en tres grandes grupos: las dificultades que presentan, las conductas de los buenos resolutores y las formas de pensar la resolución de problemas. En esta última se mencionan dos aspectos: las representaciones y la modelización.

En el primer grupo, dificultades de los estudiantes al resolver problemas, aparecen estándares que indican conocimientos como: los tiempos que los estudiantes demoran en aprender las estrategias, el uso ineficaz de lo que saben no significa falta de conocimiento matemático, saber cuándo ayudar a los estudiantes y cuándo no, y la necesidad que presentan algunos niños de ser acompañados en los procesos de resolución.

Sobre las conductas de resolutores exitosos, se encuentran conocimientos referidos a caracterizar o explicitar qué hacen estos estudiantes; encontrando: fluidez en cálculos, análisis cuidadoso en términos matemáticos, uso eficiente y eficaz de estrategias, uso de la metacognición (saber qué hacer y porqué se hace), planificar, actuar, buscar soluciones y no entramparse al no conseguir lo que se busca, y capacidad para comunicar su pensamiento.

Finalmente, en las formas de pensar la resolución, y en lo referido a las representaciones, aparecen conocimientos sobre el alumno y sobre como el profesor debe acompañar este proceso. En el primer tipo se encuentra: la relación entre capacidad de representar y éxito al resolver problemas, y con el desarrollo del razonamiento que provocan; seleccionar, aplicar y traducir representaciones; diferentes tipos de representaciones: tablas, igualdades, informales. Sobre las representaciones y el profesor aparecen ideas como: el uso de representaciones indica una forma de pensar del estudiante, y se debe exponer al resto; dar oportunidades para representar los problemas; fomentar la comunicación y escuchar sus formas de representar; conocer las diferentes maneras de representar de los estudiantes. Sobre modelización aparecen dos menciones, haciendo una énfasis en la reciprocidad de representación y modelización. Se expone que las representaciones ayudan a modelizar, y que este proceso estimula el uso y el análisis de las primeras.

Los países del tercil más bajo siguen la tendencia de presentar pocos focos sobre este conocimiento. En el currículo argentino (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b) no se encontraron referencias y en el chileno (Ministerio de Educación, 2012) aparecen cuatro menciones. La primera de ellas detalla las habilidades, destrezas y conocimientos que se ponen en juego para resolver problemas, sin explicar ninguna de ellas; otra hace referencia a las potencialidades que tiene conocer las formas de pensar de los estudiantes cuando utilizan estrategias; y las últimas dos, a ejemplos de tareas que ayudan a reconocer como piensan: patrones y uso de representaciones.

En síntesis, se puede observar los conocimientos que muestra la Figura 7.

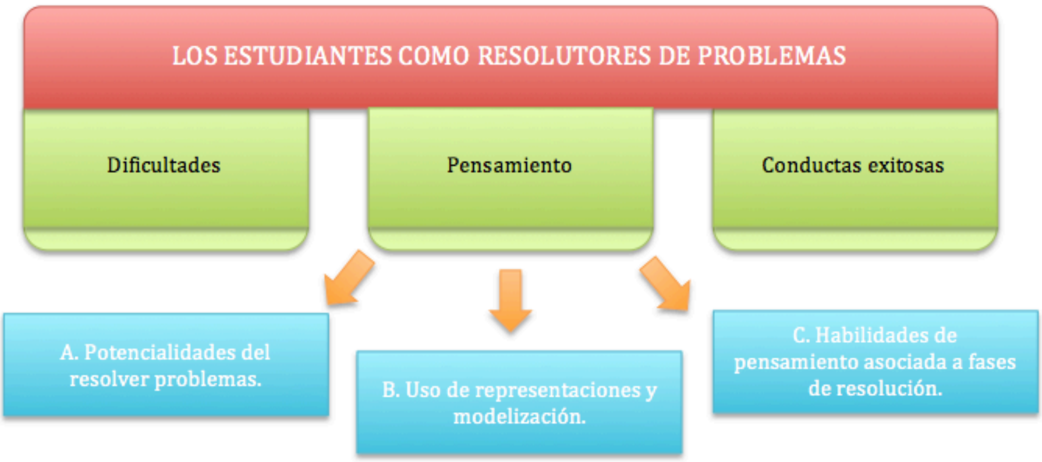

Figura 7. Conocimiento de los estudiantes como resolutores.

Conocimiento sobre el papel de la resolución de problemas en los procesos de enseñanza aprendizaje

El conocimiento sobre la enseñanza de resolución de problemas tiene un carácter primordial, pues mediará las relaciones del resto de tipos de conocimientos. El enfoque o vía de acceso que se explicite en los currículos, le otorgará un papel a la resolución de problemas en el aula. En general, pareciera ser una de las preocupaciones de los países, pues junto al conocimiento de problemas, es una de las categorías que más menciones presenta. La Tabla 11 expone un panorama general de los currículos estudiados.

Tabla 11. *Presencia de conocimientos sobre el papel de la resolución de problemas*

		Currículos					
		Tercio superior		**Tercio medio**		**Tercio inferior**	
Categorías		Singapur	Finlandia	España	E.E.U.U.	Chile	Argentina
Papel de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje	CDpe	X	X	X	X	X	X
	CDpm	X			X		
	CDpv				X	X	
	CDpa	X		X	X	X	

Nota: CDpe=enfoques o vías de acceso; CDpm=metacognición; CDpv=evaluación; CDpa=estrategias metodológicas.

En el primer tercil encontramos las orientaciones curriculares de Finlandia (National Core Curriculum for Basic Education, 2004), haciendo referencia a dos vías de incorporación a la resolución de problemas: enseñar *para* resolver problemas, utilizando los conocimientos matemáticos adquiridos y *a través* de la resolución, es decir, utilizar esta actividad matemática para enseñar nuevos conceptos e ideas. Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2007) por su parte, hace referencia a las tres vías de acceso; las dos antes nombradas y enseñar *sobre* la resolución de problemas. Además de estas menciones, aparecen ideas sobre la metacognición y sus aportes en la enseñanza por los tres enfoque, también aparece el uso de TIC's, específicamente el uso de las calculadoras.

En el segundo tercio, España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014), presenta conocimientos relativos principalmente al enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas. No obstante, en mucho mayor cantidad, se hacen menciones sobre aplicación de diferentes contenidos matemáticos, infiriendo un enfoque de enseñanza para la resolución de problemas. Otro aspecto al que se hace referencia es el uso de TIC's, especialmente del uso de la calculadora. E.E.U.U. (NCTM, 2000) por su parte, establece como necesarios conocimientos referidos a los tres enfoques, la metacognición, estrategias metodológicas y la evaluación de la resolución de problemas. En lo referido a los enfoques, se explicita cada uno de ellos y sus propósitos, además de detallar ampliamente cada una. Sobre metacognición se mencionan su función y beneficios. En cuanto a la evaluación se mencionan instrumentos y sentido. Dejamos al último las estrategias metodológicas, pues en este tipo de conocimiento se observan algunos ejemplos: secuenciar grados de dificultad, contextos dónde usar la resolución de problemas, selección de problemas según metas, uso de feedback, conectar con otras áreas de conocimiento, uso de TIC's y la forma de agrupar a los estudiantes.

En el último tercil, las directrices argentinas (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b) hacen alusión en la mayoría de sus objetivos al modo y el lugar en que se debe utilizar la resolución de problemas; dicha idea se realiza a través del prefijo en, especificando que el contenido matemático debe hacerse en un modo determinado: a través de situaciones problemas y en un lugar determinado: la resolución de problemas. Esto conlleva que el tipo de conocimiento explicitado es una de las vías o enfoques: enseñar a través de la resolución de problemas. Esta es la única alusión referida a este tipo de conocimiento emanada del currículo argentino. Chile (Ministerio de Educación, 2012), en sus orientaciones curriculares para primaria, presenta solo dos enfoques en forma explícita: enseñar a través y para la resolución de problemas. Sin embargo, al ser identificada como una habilidad transversal que debe enseñarse en todos los niveles, se puede inferir que también se encuentra presente el enfoque de enseñanza sobre resolución de problemas. En este tipo de conocimiento se centran las menciones de este currículo, además de ellas, encontramos 2 más referidas, una a evaluación y otra, una sugerencia metodológica específica.

A modo de síntesis, la Figura 8 presenta los conocimientos de esta categoría.

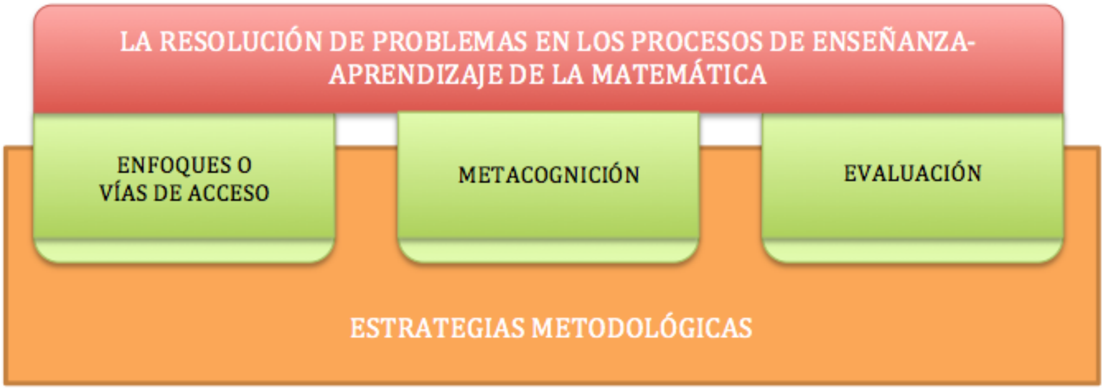

Figura 8. Conocimientos sobre la enseñanza de resolución de problemas

Conocimiento sobre factores afectivos y creencias

Este tipo de conocimiento, junto al de invención de problemas es el que menor cantidad de menciones presenta en los diferentes currículos de primaria. Estudios como los de Shoenfeld (1983) y McLeod (1989) mostraron el papel fundamental que juega la afectividad en la resolución de problemas; por tanto se hace necesario que los profesores conozcan sobre esto y sus implicaciones para el aula. La Tabla 12 expone lo encontrado sobre este tema en los diferentes currículos.

Tabla 12. *Presencia conocimientos sobre factores afectivos y creencias*

		Currículos					
		Tercio superior		**Tercio medio**		**Tercio inferior**	
Categorías		Singapur	Finlandia	España	E.E.U.U.	Chile	Argentina
Factores afectivos y creencias	CDae	X	X	X	X	X	X
	CDap				X		

Nota: CDae= papel e implicaciones de diferentes emociones; CDap=rol del profesor.

La tendencia en todos los currículos de la muestra es a hacer poco explícito el conocimiento referido a los afectos. En las directrices para primaria del primer tercil, encontramos dos menciones, una en cada país. En Finlandia (National Core Curriculum for Basic Education, 2004), mostrando como la satisfacción y el placer debe encontrarse al resolver problemas; en Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2007), sobre el desarrollo de la perseverancia en la resolución de problemas.

En los currículos del tercil medio, aparecen un poco más de menciones; sin embargo, son pocas si se comparan con el resto de las categorías. En España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014), se pueden observar objetivos que apuntan a la seguridad y a la motivación frente a la resolución de problemas. En E.E.U.U. (NCTM, 2000), se pueden encontrar conocimientos en la misma dirección que el currículo español; sin embargo, se detalla como se relacionan y el papel que juega el profesor en planificar experiencias de aprendizaje que contemplen estos factores afectivos.

Finalmente, en el último tercil, se encuentra una mención en el currículo argentino (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b) y tres en el chileno (Ministerio de Educación, 2012). En las directrices argentinas se hace referencia a la seguridad y confianza que propicia la resolución de problemas. En las orientaciones chilenas, se mencionan la perseverancia, seguridad y confianza y el disfrute de resolver problemas; todas estas relacionadas y exppuestas como resultado de la resolución de un problema.

En síntesis, la Figura 9 muestra los hallazgos sobre este tipo de conocimiento.

Figura 9. Conocimientos sobre Factores Afectivos y Creencias

Análisis comparativo entre países

Como planteamos en el capítulo 1, nuestro interés por este análisis es determinar elementos del conocimiento profesional necesario sobre resolución de problemas presente en una muestra de currículos seleccionados. Ya planteábamos al inicio de este capítulo, que el análisis se realiza para establecer máximos, es decir, establecer todos las ideas matemáticas referidas a la resolución de problemas. En este contexto, el siguiente análisis muestra los hallazgos comparativamente entre los países.

Sobre el conocimiento referido a los problemas, se observa dos tendencias: un grupo de países (España, E.E.U.U. y Chile) que explicita qué se entenderá por problema y sus clasificaciones; mientras otro grupo (Singapur, Finlandia y Argentina) solo presenta algunas clasificaciones sobre los problemas que deberán aprender los estudiantes.

En lo que respecta al conocimiento sobre resolver problemas encontramos que todos los países presentan contenidos referidos a heurísticos generales. No obstante, solo España, E.E.U.U. y Chile manifiestan heurísticos específicos, mientras Estados Unidos y Argentina van aún más allá al plantear estrategias de otras áreas de contenido. Por último, Finlandia y España no hace mención a las estrategias personales de resolución. Con esto, podemos afirmar que E.E.U.U. es el currículo más completo en esta categoría, seguido de España, Chile y Argentina, y finalmente Singapur y Finlandia.

En la categoría de invención de problemas, nuevamente el currículo de E.E.U.U. es el que cumple con todas las categorías. Seguido de Chile y Argentina, que cumplen con dos subcategorías: explicitación de contextos dónde usarlos y estrategias posibles. Por su parte, Singapur, Finlandia y España solo hacen referencia a estrategias en las que realizar la invención de problemas.

Situándonos en el conocimiento didáctico del contenido, en la categoría conocimiento sobre los estudiantes como resolutores todos los países estudiados, a excepción de España y Argentina hacen mención sobre el pensamiento de los estudiantes, la importancia de conocerlo y que aspectos tener en cuenta. Sobre las demás categorías, solo E.E.U.U. cumple con mencionar en su currículo de primaria conocimientos sobre las dificultades y las conductas de resolutores exitosos.

Referente al papel que la resolución de problemas debiese jugar en el aula, nuevamente E.E.U.U es el único que cumple con la totalidad de las categorías. Singapur y Chile cubren casi la totalidad y España, Argentina y Finlandia solo mencionan el enfoque prioritario.

Finalmente, en la categoría de conocimiento sobre factores afectivos y creencias, Todos los países hacen referencia a ellas, pero solo E.E.U.U. además, señala el papel del profesor.

Capítulo 5: Conclusiones

En el capítulo 3 afirmábamos que nuestro interés es analizar currículos para determinar componentes de la resolución de problemas presentes y proponer un modelo de conocimiento del profesor sobre este tema primordial de las matemáticas. Este interés se realizó a través de un análisis de contenido, que aportó una serie de generalizaciones que planteamos en el capítulo 4. En este último apartado, es nuestro interés exponer las conclusiones generales relativas al proceso investigativo, y a los objetivos que nos propusimos relacionándolos con los resultados obtenidos. Para ellos y a través de nuestros objetivos específicos hacemos una síntesis de los hallazgos. Posteriormente, vemos cómo este proceso nos llevó a detectar una serie de limitaciones, desde las cuales surgen ideas de continuidad para este trabajo.

Conclusiones

El primer objetivo específico tiene relación con el análisis e identificación de los conocimientos sobre resolución de problemas en el currículo de primaria de seis países con rendimientos extremos en resolución de problemas. Esto nos permitió identificar unidades de análisis que es posible visualizar en el Anexo I. Ahora bien, tomando como criterio la explicitación que realizan los países sobre conocimientos referidos a la resolución de problemas, se puede afirmar que E.E.U.U. es el país que más detalla los aprendizajes que espera de sus estudiantes. Mientras que Singapur, España y Chile lo hacen medianamente. Finalmente, los países que menos mencionan contenidos son Finlandia y Argentina. Esto, nos lleva a inferir que pareciera no existir relación entre explicitación de contenidos en el currículo y éxito en evaluaciones estandarizadas.

Con el trabajo de clasificación según categorías surgidas desde la investigación (Chapman, 2015) hemos dado cumplimiento al segundo objetivo específico, que apuntaba a determinar los elementos sobre resolución de problemas detectados en dichos currículos de primaria, en términos de los tipos de conocimientos profesional del profesor. Este objetivo marcó la unión de las dos líneas de investigación que describimos en el capítulo 1 y 2, pues se clasificaron todas las menciones sobre resolución de problemas, que aparecen en los currículos, en función de estudiantes, en áreas o campos de conocimiento específico del profesor. Así, se generaron subcategorías que nos señalaban los elementos de la resolución de problemas presentes; y así, se pudo cumplir nuestro último objetivo específico, que planteaba la meta de organizar el conocimiento sobre resolución de problemas, en tipos de conocimiento profesional del profesor según el modelo MKT. Así, y en este contexto, si observamos los datos separadamente, según los dos grandes tipos de conocimiento profesional de un profesor de matemática y exceptuando a E.E.U.U., encontramos que Singapur y España, hacen más explícitos los conocimientos referidos a conocimiento matemático y menos al conocimiento didáctico. El resto de los países se muestra un equilibrio entre lo que se menciona de cada tipo de conocimiento.

Nuestro objetivo general que apuntaba identificar componentes de la resolución de problemas sobre el conocimiento profesional del profesor de primaria, a partir de las orientaciones oficiales que aparecen en el currículo de seis países con rendimientos extremos en resolución de problemas se logra a través de una descripción del conocimiento necesario, y no total, que necesita un profesor de primaria. No obstante, podemos afirmar que este conocimiento es muy amplio y se configura en toda la matemática. Además, como plantea Chapman (2015), es un conocimiento teórico y también práctico; además, siguiendo las ideas de Rico (2015), se pueden identificar dos niveles en él: uno personal y otro profesional. En el nivel personal encontramos los conocimientos teóricos y prácticos con que debe contar él como sujeto que sabe qué es un problema y cómo resolverlo. En el nivel profesional, tenemos los conocimientos sobre cómo planificarlo y llevarlo a la práctica, teniendo en cuenta al estudiante y sus dominios cognitivos y afectivos.

Por otro lado, podemos afirmar que este conocimiento se configura de manera muy cercana al modelo aproximativo de enseñanza (Charnay,1994). Esto debido a que el poner en juego todas la categorías obliga a darle a la resolución de problemas un papel de fuente, lugar y criterio de aprendizaje. Esta idea, enfatiza el papel del docente en la planificación de situaciones que carguen de sentido a los saberes matemáticos, por tanto, el conocimiento que exige al profesor es amplio y profundo, al igual que nos muestran nuestros resultados y la literatura revisada.

Así y a modo de síntesis, el conocimiento del profesor de primaria debiese estar compuesto, al menos, por lo indicado en la Tabla 13.

Tabla 13. *Conocimiento profesional necesario para un profesor de primaria sobre resolución de problemas*

Conocimiento del contenido	
Problemas matemáticos	Significado de problema; clasificaciones según objetivo de enseñanza, estrategia, etc.; Conocimiento especifico sobre PAEV y las variables de tarea, contexto y sujeto; que intervienen en su complejidad.
Resolución de problemas matemáticos	Comprensión dinámica de la heurística general de resolución de problemas; Conocimiento sobre estrategias o heurísticas especificas y sus usos. Ser competente al resolver problemas.
Invención de problemas	Estrategias de utilización de la invención de problemas, temporales y metodológicas. Saber inventar diversidad de problemas.
Conocimiento didáctico del contenido	
Conocimiento de los estudiantes como resolutores de problemas	Conocimiento sobre las formas de pensar la resolución de problemas por parte de sus alumnos (especialmente uso de representaciones y procesos de modelización); Dificultades más comunes y conductas de resolutores exitosos.
Conocimiento del papel de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática	Conocer y aplicar tres formas de acceso a la resolución de problema: para, sobre y a través. Tener diversidad de estrategias de evaluación para promover el avance de los estudiantes. Conocer papel y usos de la metacognición en la enseñanza de la resolución de problemas. Saber conectar la resolución de problemas con otras áreas de la matemática y extramatemática.
Factores afectivos y creencias	Conocer las emociones, creencias y actitudes más comunes presentes en los estudiantes y como dirigirlas para que sean beneficiosas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas.

Limitaciones

Dentro de las limitaciones que detectamos podemos señalar:

- Si bien, nuestras categorías principales fueron determinadas por expertos (Chapman, 2015), dándonos un acercamiento a la exactitud, uno de los componentes de la fiabilidad, nuestro estudio presenta una limitación en cuanto a la existencia de un solo analista (Rico y Fernández-Cano, 2013), provocando no poder atender a criterios de validez y fiabilidad.
- Además, debemos tomar en cuenta que los currículos tienden a reducir los significados de la resolución y toman una mirada ingenua (Lesh, 2006), por lo que nuestro trabajo no debiese conformar un estudio acabado sobre el tema.
- La muestra utilizada para este estudio no pretende ser representativa de los países de la OCDE, pero nos permite un primer acercamiento.
- Otro aspecto que limita nuestro estudio es la determinación desde una perspectiva curricular; pues tal como indica Rico (2015) el conocimiento del profesor tiene componentes tanto teóricos como prácticos. Concordamos con Chapman (2015) en la necesidad de continuar investigando.

Líneas de investigación abiertas

El presente trabajo fue concebido como un paso previo a una posible tesis doctoral. Por tanto, desde un inicio se presentan ideas para continuar. Además, en el transcurso de la misma, nos hemos dado cuenta de otras líneas que no habíamos considerado. Algunas de ellas son:

- Coincidimos con Chapman (2015) con la necesidad de investigación desde el aula, que proporcione una perspectiva práctica a este tipo de conocimiento.
- Rico (2015) plantea la utilidad del Análisis Didáctico como herramienta para profesores y Rojas, Flores y Ramos-Rodríguez (2013) lo exponen como un método para caracterizar el conocimiento de contenido del profesor. Desde ambas perspectivas nos parece interesante explorar en este tipo de conocimiento desde la práctica, utilizando las categorías usadas en este estudio, complementándolas con el Análisis Didáctico.
- También se vislumbra la posibilidad de ampliar el estudio en cantidad de currículos analizados y con mayor cantidad de analistas que permitan establecer criterios de validez y fiabilidad.
- Como establecimos en párrafos anteriores, la explicitación del contenido en el currículo pareciera no tener relación con el éxito en pruebas estandarizadas de

resolución de problemas; por lo que la formación de los profesores podría ser un foco de continuidad, al intentar responder: ¿Los profesores de los países mejor evaluados reciben esta formación?

Como vemos existen numerosas líneas de seguimiento a este trabajo; pensamos que la concreción de la totalidad de ellas nos podría acercar a una respuesta a nuestra pregunta de investigación: por qué no se utiliza la resolución de problemas en la sala, a pesar de la evidencia existente de su utilidad. Si bien, no hemos podido llegar a una respuesta, creemos que nuestro trabajo es un aporte a desentrañar la duda que nos trajo hasta aquí.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2012). Proceso de transformación de las concepciones del profesorado sobre la resolución de problemas matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *30*(3), 71–88. http://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n3.645

Anderson, J., White, P. y Sullivan, P. (2005). Using a schematic model to represent influences on, and relationships between, teachers' problem-solving beliefs and practices. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(2), 9–38. http://doi.org/10.1007/BF03217414

Ball, D. L. (2000). Bridging practices intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241–247. http://doi.org/10.1177/0022487100051003013

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. http://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid, España: Akal.

Blanco, L. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 171–186). Barcelona, España: Graó.

Blanco, L., Guerrero, E. y Caballero, A. (2013). Cognition and affect in mathematics problem solving with prospective teachers. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1y2), 335–364.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Brown, S. I. y Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing* (3ª ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Brubacher, J. W., Case, C. W. y Reagan, T. G. (2000). *Cómo ser un docente reflexivo: La construcción de una cultura de la indagación en las escuelas*. Barcelona, España: Gedisa.

Camacho, M. y Santos-Trigo, M. (2015). Aportes sobre resolución de problemas, tecnología y formación de profesores de matemática. En N. Planas (Ed.), *Avances y realidades de la educación matemática* (pp. 113-131). Barcelona, España: Graó.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa* (Memoria de Tercer Ciclo no publicada). Universidad de Granada, España.

Castro, E. (2002). La resolución de problemas desde la investigación en educación matemática. En D. Cardeñoso, E. Castro, A. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en educación matemática. Resolución de problemas* (pp. 11-28). España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada y SAEM THALES.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113–140). Badajoz, España: SEIEM.

Castro, E. y Ruíz, J. F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 89–108). Madrid, España: Pirámide.

Chapman, O. (1994). Teaching problem solving: A teachers' perspective. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME international conference* (Vol. 2, pp. 168–175). Lisboa, Portugal: PME.

Chapman, O. (2005). Constructing pedagogical knowledge of problem solving: Preservice mathematics teachers. En H. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29st PME international conference,* (Vol. 2, pp. 225–232). Melbourne, Australia: PME.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 211–230. http://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT*, *3*(1), 19 – 36.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Sainz (Eds.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51–64).

Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Clark, D. (2002). *Evaluación constructiva en matemáticas: Pasos prácticos para profesores*. México D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Climent, N., Carreño, E. y Ribeiro, C. M. (2014). Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática. El caso de los polígonos. En P. Lestón (Ed.), *Acta latinoaméricana de matemática educativa.* (Vol. 27, pp. 1761–1769). México, D. F., México: Clame. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/6064/

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7ª ed). Londres, Inglaterra: Routledge.

Consejo Federal de Educación. (2011a). *Núcleos de aprendizajes prioritarios. 1° ciclo educación primaria. 1°, 2° y 3° Años*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación.

Consejo Federal de Educación. (2011b). *Núcleos de aprendizajes prioritarios. 1° ciclo educación primaria. 4°, 5° y 6° Años*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación.

Contreras, L. C. (1987). La resolución de problemas, ¿una panacea metodológica? *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *5*(1), 49–52.

Contreras, L. C. (2010). *Resolución de problemas: Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(5), 324–336. http://doi.org/10.2307/749355

Curriculum Planning and Development Division. (2007). *Mathematics syllabus primary*. Singapore: Ministry of Education.

Davis, B. y Brown, L. (2009). Development of teaching in and from practice. En R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 149–166). Nueva York, NY: Springer US. Recuperado de http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-0-387-09601-8_18

Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). *PNA*, *8*(1), 1–20.

Eraut, M. (1977). Strategies for promoting teacher development. *British Journal of In-Service Education*, *4*(1-2), 10–12. http://doi.org/10.1080/0305763770040103

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisterna, T., Cea, F., Randolph, V. y Medel, L. (2014). *La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente.* (Proyecto FONIDE N°: 721209). Santiago, Chile: MINEDUC. Recuperado de http://www.ciae.uchile.cl/download.php?file=noticias/555_-1410884943.pdf

Fernández-Cano, A. y Rico, L. (1992). Elementos para el análisis de las relaciones entre prensa y matemática. En A. Fernández-Cano y L. Rico (Eds.), *Prensa y educación matemática* (pp. 49–62). Madrid, España: Síntesis.

Fernández, D. y Vale, I. (1994). Two young teachers' conceptions and practices about problem solving. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME international conference* (Vol. 2, pp. 328–335). Lisboa, Portugal: PME.

Foong, P. Y. (2013). Resolución de problemas en matemática. En L. P. Yee (Ed.), *La enseñanza de la matemática en la educación básica* (pp. 65–91). Santiago, Chile: Academia Chilena de la Ciencia.

Giné de Lera, C. y Deulofeu Piquet, J. (2014). Conocimientos y creencias entorno a la resolución de problemas de profesores y estudiantes de profesor de matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 191–208. http://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a10

Greer, P. y Mangan, C. (1986). Choice of operations: From 10-year-olds to student teachers. En Universidad de Londres Instituto de Educación (Eds.) *Proceedings of the 10th PME international conference* (Vol. 1, pp. 25–30). Londres, Inglaterra: PME.

Grows, D., Good, T. A. y Dougherty, B. J. (1990). Teacher conceptions about problem solving and problem solving instruction. En G. Booker, P. Cobb y T. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME international conference* (Vol. 1, pp. 135–142). Oaxtepex, México: PME.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ª ed.). México D.F., México: McGraw-Hill.

Hill, H. y Ball, D. L. (2009). The curious - and crucial - case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan*, *91*(2), 68–71.

Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers — The potential of critical reflection. *British Journal of In-Service Education*, *19*(3), 37–42. http://doi.org/10.1080/0305763930190307

Karp, A. (2009). Analyzing and attempting to overcome prospective teachers' difficulties during problem-solving instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(2), 121–139. http://doi.org/10.1007/s10857-009-9127-y

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 7–20). Columbia, NY: ERIC/SMEAC.

Korthagen, F. A. J. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación Del Profesorado*, (68), 83–101.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Barcelona, España: Paidós.

Lesh, R. (2006). New directions for research on mathematical problem solving. En P. Grootenboer, R. Zevenbergen y M. Chinnappan (Eds.) *Identities, cultures and learning spaces: Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 15–33). Adelaide, Australia: MERGA.

Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona, España: Ediciones Paidós.

McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: New views of affect in mathematics education. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Ed.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 3-19). Nueva York, NY: Springer-Verlag.

McMillan, J. H., y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa. Una introducción conceptual* (5ª ed.). Madrid, España: Pearson Addison Wesley.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria. *BOE,* (52), 19349-19420.

Ministerio de Educación. (2012). *Bases curriculares educación básica*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

National Core Curriculum for Basic Education. (2004). *National core curriculum for basic education intended for pupils in compulsory education.* Helsinki, Finland: National Board of Education.

NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Trans.). Sevilla, España: SAEM THALES.

OECD. (2013). *Draft PISA 2015 mathematics framework*. París, Francia: OECD Publishing. Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf

OECD. (2014). *PISA 2012 Results: What students know and can do (Volume I, revised edition, february 2014)*. París, Francia: OECD Publishing. Recuperado de http://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2012-results-what-students-know-and-can-do-volume-i-revised-edition-february-2014_9789264208780-en

Peng Yee, L. (2014). *La enseñanza de la matemática en educación básica: Un libro de recursos un libro de recursos*. Santiago, Chile: Academia Chilena de la Ciencia Ministerio de Educación.

Polya, G. (1981). *Como plantear y resolver problemas*. México D. F., México: Trillas.

Ponte, J. P. da y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461–494). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47–66.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en didáctica de la matemática. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39–63.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 21–40). Madrid, España: Pirámide.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1–22). Granada, España: Comares.

Rico, L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de la matemática e investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77–131). Huelva, España: Hergué.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, (4), 47–64.

Rojas, N., Flores, P. y Ramos-Rodríguez, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 191 - 208). Granada, España: Comares.

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J. M., Muñez, D. y Orrantia, J. (2012). Teacher–student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education*, *28*(8), 1185–1195. http://doi.org/10.1016/j.tate.2012.07.007

Sakshaug, L. E. y Wohlhuter, K. A. (2010). Journey toward teaching mathematics through problem solving. *School Science and Mathematics*, *110*(8), 397–409. http://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2010.00051.x

Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching problem-solving skills. *The American Mathematical Monthly*, *87*(10), 794–805. http://doi.org/10.2307/2320787

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyondthe purely cognitive. Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forcesin intellectual performance. *Cognitive Science*, (7), 329–363.

Schoenfeld, A. H. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En MEC (Eds.), *La enseñanza de la matemática a debate* (pp. 25–30). Madrid, España: Subdirección General del Perfeccionamiento del Profesorado.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Nueva York, NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: Research and theory, practice and politics. *ZDM*, *39*(5-6), 537–551. http://doi.org/10.1007/s11858-007-0038-z

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. http://doi.org/10.2307/1175860

Smith, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación*, *294*, 275–300.

Socas, M. y Hernández, J. (2013). Mathematical problem solving in training elementary teachers from a semiotic logical approach. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1y2), 191–218.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: A contemporary perspective* (pp. 164–185). Perth, Australia: Edith Cowan University y MASTEC.

Tirosh, D., Graeber, A. y Glover, R. (1986). Pre-service teachers' choice of operation for multiplication and division word problems. En Universidad de Londres Intituto de Educación (Eds.), *Proceedings of the 10th PME international conference* (Vol. 1, pp. 57–62). Londres, Inglaterra: PME.

Wilson, J. W., Fernández, M. L. y Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. En P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57–78). Nueva York, NY: MacMillan.

Zsinkó, E. (2006). Analysis of the affective factors of learning mathematics among teacher trainees. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4*(2), 225–254.

ANEXOS

CLASIFICACIÓN DE UNIDADES DE ANÁLISIS

Tabla 14. *Finlandia . 1-5 grades* (National Core Curriculum for Basic Education, 2004)

Conocimiento del contenido	**Conocimiento Didáctico del contenido**
Conocimiento sobre problemas	**Conocimiento de los estudiantes como resolutores**
“be able to note information in simple, day-to-day problems” (p.160)	“Become practised in making observations about mathematical problems that come up and are challenging and important from their personal standpoints” (p.158)
Conocimiento sobre resolución	**Conocimiento sobre la instrucción de la resolución de problemas**
“Guide the pupil in finding and formulating problems, and seeking solutions to them” (p.158) “Justify their actions and conclusions and present their solutions to others” (p.161) “Know how to present their solutions” (p.159) “learn to solve mathematical problems” (p.161) “Learn justify their solutions and conclusions” (p.158) they will be able to interpret a simple text, ilustration, or event and to make a plan for	“Demostrate an understanding of concepts associated with mathematics by using them to solve problems” (p.159; 162) (Vías de acceso) “Problems that come up in day-to-day situations, and that can be resolved with the aid of mathematical thinking or operations, are to be utilized effectively” (p.158) “Fort he learning of mathematical concepts and the most widely used problema-solving methods” (p.158) “Use their mathematical thinking and

solving the problem" (p.163)	skills ti solve those problems" (p.160)
Conocimiento sobre invención de problemas	**Conocimiento sobre factores afectivos y creencias**
"guide the pupil in finding and formulating problems, and in seeking solution" (p.158) "know how to present mathematical problems in a new form" (p.163)	"they will derive satisfaction and pleasure from understanding and solving problems" (p.158)

Tabla 15. *Chile. 1º a 6º básico* (Ministerio de Educación, 2012)

Conocimiento del contenido	Conocimiento Didáctico del contenido
Conocimiento sobre problemas	**Conocimiento de los estudiantes como resolutores**
"dispuestos a resolver problemas de diversos tipos" (p.86) "La matemática les ayudará a resolver problemas cotidianos" (p.86) "Contextualizar el aprendizaje mediante problemas reales relaciona la matemática con situaciones concretas, y facilita así un aprendizaje significativo de contenidos matemáticos fundamentales" (p.87) "resolver los problemas propios de la matemática (rutinarios y no rutinarios)" (p.89) "Se habla de resolver problemas, en lugar de simples ejercicios, cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir" (p.89) "Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 20 progresivamente, de 0 a 5, de 6 a 10, de 11 a 20 con dos sumandos, resolviendo problemas en contextos familiares" (p.99) "Demostrar que comprende la adición y la sustracción en el ámbito del 0 al 100,	"Resolver problemas da al estudiante la ocasión de enfrentarse a situaciones desafiantes que requieren, para su resolución, variadas habilidades, destrezas y conocimientos que no siguen esquemas prefijados" (p.87) "La resolución de problemas permite, asimismo, que el profesor perciba el tipo de pensamiento matemático de sus alumnos cuando ellos seleccionan diversas estrategias cognitivas y las comunican" (p.87) "La percepción de los patrones les permite predecir y también fundamentar su razonamiento al momento de resolver problemas" (p.91) "Usar representaciones y estrategias para comprender mejor problemas e información matemática" (p. 118)

resolviendo problemas con una variedad de representaciones concretas y pictóricas, de manera manual y/o usando software educativo" (p. 103) "Demostrar que comprende la relación entre la adición y la sustracción al usar la "familia de operaciones" en cálculos aritméticos y la resolución de problemas" (p. 104, 107) "Demostrar que comprende la multiplicación, resolviendo problemas que involucren las tablas del 2, del 5 y del 10" (p. 104) "Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 1 000" …. "resolviendo problemas de adición y sustracción que involucren operaciones combinadas, en forma concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o por medio de software educativo" (p. 107) "Demostrar que comprenden las tablas de multiplicar hasta el 10 de manera progresiva, resolviendo problemas que involucren las tablas aprendidas hasta el 10" (p.108) "Demostrar que comprenden la división en el contexto de las tablas de hasta 10x10"…" resolviendo problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación" (p.108) "Resolver problemas rutinarios en contextos cotidianos, que incluyan dinero e	

involucren las cuatro operaciones (no combinadas)" (p.108) "Demostrar que comprenden el perímetro de una figura regular e irregular, midiendo y registrando el perímetro de figuras del entorno en el contexto de la resolución de problemas" (p.109) "Demostrar que comprende la medición del peso (g y kg), midiendo y registrando el peso de objetos y en fracciones de uso común, en el contexto de la resolución de problemas" (p.109) "Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números hasta 1 000, resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que incluyan adiciones y sustracciones" (p. 113) "Demostrar que comprenden la multiplicación de números de tres dígitos por números de un dígito, resolviendo problemas rutinarios" (p. 113) "Resolver problemas rutinarios y no rutinarios en contextos cotidianos que incluyen dinero, seleccionando y utilizando la operación apropiada" (p. 114) "Resolver adiciones y sustracciones de fracciones con igual denominador (denominadores 100, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2) de manera concreta y pictórica en el contexto de la resolución de problemas" (p. 114)	

“Identificar, escribir y representar fracciones propias y los números mixtos hasta el 5 de manera concreta, pictórica y simbólica, en el contexto de la resolución de problemas” (p. 114) “Resolver adiciones y sustracciones de decimales, empleando el valor posicional hasta la centésima en el contexto de la resolución de problemas” (p. 114) “Realizar conversiones entre unidades de tiempo en el contexto de la resolución de problemas: el número de segundos en un minuto, el número de minutos en una hora, el número de días en un mes y el número de meses en un año” (p. 115) “Medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm) y realizar transformaciones entre estas unidades (m a cm y viceversa) en el contexto de la resolución de problemas” (p. 115) “Demostrar que comprenden la multiplicación de números naturales de dos dígitos por números naturales de dos dígitos, resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios, aplicando el algoritmo” (p. 119) “Demostrar que comprenden la división con dividendos de tres dígitos y divisores de un dígito, resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que impliquen divisiones” (p. 119) “Resolver problemas rutinarios y no	

rutinarios que involucren las cuatro operaciones y combinaciones de ellas" (p. 119) "Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones, aplicando las reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y la división por sobre la adición y la sustracción cuando corresponda" (p. 119) "Resolver problemas rutinarios y no rutinarios, aplicando adiciones y sustracciones de fracciones propias o decimales hasta la milésima" (p. 120) "Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica" (p. 120) "Medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm, mm) en el contexto de la resolución de problema" "Demostrar que comprenden los factores y los múltiplos, resolviendo problemas que involucran múltiplos" (p. 121, 125) "Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones en el contexto de la resolución de problemas, utilizando la calculadora en ámbitos superiores a 10 000" (p. 125) "Resolver problemas rutinarios y no rutinarios que involucren adiciones y sustracciones de fracciones propias,	

impropias, números mixtos o decimales hasta la milésima" (p. 125) "Determinar la longitud de objetos, usando unidades de medidas no estandarizadas y unidades estandarizadas (cm y m), en el contexto de la resolución de problemas" (p. 104)	
Conocimiento sobre resolución	**Conocimiento sobre la instrucción de la resolución de problemas**
"facilitar la selección de estrategias para resolver problemas" (p.86) "La matemática contribuye a que los alumnos valoren su capacidad para analizar, confrontar y construir estrategias personales para resolver problemas" (p.86) "Mediante estos desafíos, los alumnos experimentan, escogen o inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, transferencia desde problemas similares ya resueltos, etc.), comparan diferentes vías de solución y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia" (p.89) "La argumentación y la discusión colectiva sobre la solución de problemas"…"favorece el aprendizaje matemático" (p.89) "desarrollar la flexibilidad y la	"Su aprendizaje involucra desarrollar capacidades cognitivas clave, como… resolver problemas…" (p.86) "Hacer matemáticas no consiste simplemente en calcular las respuestas a problemas propuestos, usando un repertorio específico de técnicas probadas" (p.86) "La resolución de problemas es el foco de la enseñanza de la Matemática" (p.87) "(de la comunicación) obtiene evidencia muy relevante para apoyar y ajustar la enseñanza a las necesidades de ellos" (p.87) "La comprensión de los algoritmos y la aplicación de operaciones para resolver problemas se facilitan y se hacen más sólidas cuando se ha tenido la oportunidad de ejercitar destrezas de

creatividad por medio de la búsqueda de soluciones a problemas" (p.92) "Emplear diversas estrategias para resolver problemas" (p.98) "Comprobar enunciados, usando material concreto y gráfico" (p.98, 102) "Expresar un problema con sus propias palabras" (p.98) "Emplear diversas estrategias para resolver problemas" como "por medio de ensayo y error" "Resolver problemas dados" (p. 102, 106, 112) "Emplear diversas estrategias para resolver problemas y alcanzar respuestas adecuadas, como la estrategia de los 4 pasos: entender, planificar, hacer y comprobar" (p. 106, 112, 118, 124) "Transferir los procedimientos utilizados en situaciones ya resueltas a problemas similares" (p. 106, 112) "Reconocer e identificar los datos esenciales de un problema matemático" (p. 118, 124) "Demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas	cálculo mental" (p.88) "En este desarrollo, están involucradas cuatro habilidades interrelacionadas: resolver problemas"…"Todas ellas tienen un rol importante en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos para resolver los problemas propios de la matemática" (p.89) "Resolver problemas es tanto un medio como un fin para lograr una buena educación matemática" (p.89) "Emplear diversas estrategias para resolver problemas, aplicando conocimientos adquiridos" (p. 102)

sencillos" (p. 125) "Explicar las soluciones propias y los procedimientos utilizados" (p. 101) "Comprender y evaluar estrategias de resolución de problemas de otros" (p. 118, 124) "Documentar el procedimiento para resolver problemas, registrándolo en forma estructurada y comprensible" (p. 118)	
Conocimiento sobre invención de problemas	**Conocimiento sobre factores afectivos y creencias**
"Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 20 progresivamente, de 0 a 5, de 6 a 10, de 11 a 20 con dos sumandos, creando problemas matemáticos y resolviéndolos" (p. 99) "creando problemas matemáticos en contextos familiares y resolviéndolos" (p. 103) "Resolver problemas" … " o creados" (p. 106) "Crear un problema real a partir de una expresión matemática, una ecuación o una representación" (p. 106) "Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 1 000, creando" …. "problemas de adición y sustracción que involucren operaciones combinadas, en forma concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o por	"la perseverancia en la búsqueda de caminos y soluciones" (p. 86) "puede brindar momentos de entusiasmo al estudiante cuando se enfrenta a un desafío, de alegría y sorpresa cuando descubre una solución a simple vista, o de triunfo cuando logra resolver una situación difícil" (p.86) "contribuye [la resolución de problemas] a desarrollar confianza en las capacidades propias de aprender y de enfrentar situaciones, lo que genera, además, actitudes positivas hacia el aprendizaje" (p.87)

medio de software educativo" (p. 107) "Demostrar que comprenden la división en el contexto de las tablas de hasta 10x10, creando"…"problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación" (p.108) "Crear un problema real a partir de una expresión matemática, una ecuación o una representación" (p.112)	

Tabla 16. *EEUU* (NCTM, 2000)

Conocimiento del contenido	**Conocimiento Didáctico del contenido**
Conocimiento sobre problemas	**Conocimiento de los estudiantes como resolutores**
"cómo utilizar números y operaciones para resolver problemas" (p.34) "La multiplicación y la división pueden empezar a tener sentido para los niños de la etapa Pre-K-2, al resolver problemas que surjan de su entorno" (p.36) "Deberían ser capaces de decidir si deben sumar, restar, multiplicar o dividir para resolver un problema determinado" (p.36) "una misma operación puede aplicarse a problemas que parecen totalmente diferentes" (p.36) "desarrollar algoritmos fiables para resolver problemas aritméticos con eficacia y seguridad" (p.37) "La resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano" (p.55) "Los contextos de los problemas pueden variar desde las experiencias familiares o escolares del alumnado a las aplicaciones científicas o del mundo laboral" (p.55) "Los buenos problemas deberán integrar múltiples temas e involucrar matemáticas	"comprender, pero no tener la fluidez necesaria para calcular, puede inhibir el proceso de resolución de problemas" (p.37) "Investigadores y profesores con experiencia coinciden en que cuando se anima a los alumnos de los niveles elementales a desarrollar, registrar, explicar y criticar las estrategias de resolución de problemas de cálculo, tiene lugar un número importante de tipos de aprendizaje" (p.37) "Ser un buen resolutor de problemas proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo" (p.55) "Los buenos resolutores de problemas tienden naturalmente a analizar las situaciones cuidadosamente en términos matemáticos" (p.56) "una disposición a analizar con mayor profundidad lleva a una comprensión más completa de la situación y a una solución correcta" (p.56) "Cuando los alumnos llegan a los niveles medios, deberían ser diestros en reconocer cuándo es apropiado usar diversas

significativas" (p.55) "En los niveles medios, podría introducirse el concepto de proporción mediante una investigación" (p.55) "La elección atinada de problemas y el empleo y adaptación de problemas a partir de materiales, es una parte difícil de la enseñanza de las matemáticas" (p.56) "A medida que experimentan con una más amplia variedad de problemas, necesitan diferentes estrategias" (p.57) "Las experiencias matemáticas en todos los niveles deberían incluir oportunidades de aprender, trabajando en problemas que surjan de contextos no matemáticos" (p.69) "aplicar las matemáticas a problemas reales a través de la modelización" (p.71) "Puede generarse una interpretación de la adición y de la sustracción cuando los alumnos resuelven problemas de "juntar" y de separar" (p.87) "En cuanto a la sustracción, pueden sugerirse nuevas interpretaciones mediante situaciones en las que se necesita igualar dos colecciones o hacer una colección con un tamaño determinado" (p.87) "Aunque inicialmente las formas de pensar de los alumnos respecto a la resolución de problemas pueden ser completamente diferentes, los profesores	estrategias y ser capaces de decidir cuándo y cómo usarlas" (p.57) "Tal discusión también sugiere que ninguna estrategia se aprende de una vez para siempre" (p.57) "Los resolutores eficientes de problemas controlan y ajustan constantemente lo que están haciendo. Se aseguran de que entienden el problema. Si el problema está escrito, lo leen cuidadosamente; si se les plantea oralmente, hacen preguntas hasta entenderlo. Con frecuencia, se trazan un plan. Periódicamente, evalúan sus progresos para ver si están en el buen camino. Si consideran que no están progresando, se detienen para considerar otras alternativas y no dudan en hacer un enfoque totalmente distinto" (p.57-58) "muchas veces, los fallos de los estudiantes en la resolución de problemas no se deben a falta de conocimientos matemáticos, sino a un uso ineficaz de lo que saben" (p.58) "Por consiguiente, no es necesario esperar a que los estudiantes desarrollen por completo las estructuras conceptuales relativas al valor posicional, para darles oportunidades de resolver problemas con números de dos y tres cifras" (p.86) "Conocer los intereses de los alumnos permite a los profesores formular problemas que amplíen el pensamiento

deberían ayudarles a darse cuenta de que resolver una clase de problemas tiene relación con resolver los de otra clase" (p.87) "los estudiantes podrían también iniciarse en los conceptos de multiplicación y división. Tratando situaciones que se refieran a grupos iguales dentro de una colección, pueden asociar la multiplicación con la adición repetida de grupos de igual tamaño. De manera semejante, pueden investigar la división mediante la distribución de objetos reales en partes iguales, a través de problemas que entrañen cuentos" (p.88) "(la rp) Consiste en encontrar una manera de alcanzar un objetivo que no es directamente asequible" (p.120) "La literatura infantil es útil para proporcionar contextos, … para los que propongan los profesores" (p.122) "Al abandonar el nivel 5, los alumnos deberían ser capaces de resolver problemas de cálculo con números naturales, y deberían reconocer que cada operación les ayudará a resolver muchos tipos diferentes de problemas" (p.153) "Los estudiantes deberían considerar y discutir diferentes tipos de problemas que puedan resolverse utilizando la multiplicación o la división" (p.155) "En Álgebra, los alumnos de los niveles 3-	matemático de algunos de ellos y, también, refuercen los conceptos aprendidos por otros que todavía no han alcanzado el mismo grado de comprensión" (p.124) "Es responsabilidad del profesor saber cuándo los alumnos necesitan ayuda, y cuándo pueden seguir trabajando productivamente sin ella" (p.190) "Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas" (p.210) "En los niveles 3-5, los alumnos necesitan desarrollar y usar una variedad de representaciones de ideas matemáticas para modelizar problemas" (p.210) "Deberían utilizar representaciones informales, tales como dibujos, para destacar diversas características de los problemas" (p.210) "Además, deberían aprender a usar igualdades, tablas y gráficas para modelizar y resolver problemas. Estas representaciones sirven como herramientas para pensar acerca de los problemas y resolverlos. También, ayudan a los estudiantes a comunicar a otros lo que piensan." (p.210) "Los estudiantes de esta etapa deberían continuar desarrollando el hábito de representar los problemas y las ideas para apoyar y ampliar su razonamiento."

5 trabajan frecuentemente con problemas geométricos para explorar patrones y funciones" (p.173) "Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos" (p.186) "comprender distintos significados de la adición y sustracción de números naturales y la relación entre ambas operaciones" (p.82) "comprender situaciones que impliquen multiplicar y dividir, tales como la de agrupamientos iguales de objetos y la de repartir en partes iguales" (p.82)	(p.210) "Los alumnos representan ideas cuando … expresan aspectos de un problema mediante una igualdad." (p.210) "Los alumnos que representen de alguna manera el problema, es más probable que vean relaciones importantes que los que lo traten sin representación." (p.210) "Aprender a registrar o representar el pensamiento de una manera organizada, tanto para resolver un problema como para compartir una solución, es una destreza adquirida por muchos estudiantes." (p.212) "Modelizar el proceso cuando trabajan con la clase en un problema, es una forma de estimular a los alumnos para que usen y analicen las representaciones." (p.212) "Cada una de las representaciones revela una forma distinta de pensar respecto al problema." (p.212) "Prestar atención a los diferentes métodos y representaciones contribuirá a que los alumnos vean la importancia de contemplar un problema desde varias perspectivas." (p.212) "A medida que los alumnos van discutiendo sus ideas y empiezan a desarrollar conjeturas basadas en representaciones del problema, el profesor podría querer representar de otras maneras lo que piensan, para así fundamentar y

	ampliar sus ideas" (p.213) "Algunos alumnos necesitarán expresamente ayuda para representar problemas." (p.213) "Si tienen muchas oportunidades para usar, desarrollar, comparar y analizar diversas representaciones, llegarán a ser competentes para seleccionar la que necesiten en un problema determinado." (p.213) "Al escuchar atentamente las ideas de los alumnos y ayudarles a seleccionar y organizar las representaciones que mostrarán su pensamiento, los profesores pueden ayudarles a desarrollar la tendencia y las destrezas para modelizar problemas eficientemente," (p.213) "Si al analizar y preparar un problema, se prevén las ideas matemáticas que puedan extraerse al trabajar con él y las preguntas de los alumnos, los profesores pueden decidir si el problema en cuestión ayudará a favorecer sus objetivos matemáticos para la clase" (p.56) "Probablemente, en una misma clase los alumnos tienen diferentes grados de conocimientos y destrezas; una situación que puede constituir un problema para un alumno, puede provocar una respuesta automática de otro" (p.120)

Conocimiento sobre resolución	Conocimiento sobre la instrucción de la resolución de problemas
"Los alumnos generarán una serie de estrategias interesantes y útiles para resolver problemas de cálculo, que deberían compartirse y discutirse" (p.37) "Las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de las matemáticas y en situaciones del mundo real" (p.43) "Los alumnos deberían adquirir experiencia en el uso de una gran variedad de representaciones visuales y de coordenadas para analizar problemas y estudiar matemáticas" (p.44) "Al estudiar Análisis de datos y Estadística, pueden también aprender que las soluciones a algunos problemas dependen de las hipótesis que se establezcan y tienen cierto grado de incertidumbre" (p.51) "De las muchas descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas puede encontrarse en el trabajo de Pólya (1957). Estas estrategias, frecuentemente citadas, incluyen: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema	"Los procesos de …. Resolución de Problemas …. Intervienen en todas las áreas (contenidos y procesos)" (p.33) "A través de la resolución de problemas, los estudiantes pueden explorar y consolidar sus conocimientos sobre los números" (p.34) "Para encontrar una solución, los estudiantes tienen que recurrir a sus conocimientos y, a través de este proceso, muchas veces adquieren nociones matemáticas nuevas" (p.55) "Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo" (p.55) "La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas, y por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina" (p.55) "Los buenos problemas les dan oportunidad de solidificar y ampliar lo que conocen y, si están bien elegidos, pueden estimular el aprendizaje de las matemáticas" (p.55) "Con los niños, puede introducirse la mayoría de los conceptos matemáticos a través de problemas que surjan de su

equivalente y crear un problema más sencillo" (p.57) "los profesores pueden ayudar a los niños a expresar, clasificar y comparar sus estrategias" (p.57) "A medida que experimentan con una más amplia variedad de problemas, necesitan diferentes estrategias" (p.57) "Frecuentemente, resuelven problemas de suma y resta contando objetos concretos, y muchos niños inventan estrategias de resolución de problemas basadas en las estrategias para contar" (p.84) "modelizando directamente la situación o usando estrategias de conteo como contar hacia delante o hacia atrás" (p.87) "Es responsabilidad de los profesores llegar a tener una perspectiva de cómo piensan sus alumnos respecto a diversos problemas, animándoles a explicar lo que hacen con los números" (p.91) "Los estudiantes deberían aprender a resolver problemas identificando procesos específicos" (p.96) "Los estudiantes ganan perspicacia en su pensamiento cuando presentan sus métodos para resolver problemas" (p.64) "Las características representaciones que hacen los estudiantes cuando resuelven problemas e investigan ideas matemáticas, pueden jugar un importante papel	propio mundo" (p.55) "La resolución de problemas puede y debería utilizarse para ayudar a los estudiantes a desarrollar fluidez con destrezas específicas" (p.55) "Las oportunidades para utilizar las estrategias tienen que insertarse naturalmente en el currículo a través de las áreas de contenidos" (p.57) "Tienen que llegar ser conscientes de estas estrategias a medida que se presenta la necesidad de emplearlas" (p.57) "Si los profesores mantienen un ambiente en el que el desarrollo de la comprensión es consistentemente controlado mediante la reflexión, es más probable que los alumnos, cuando resuelven problemas, aprendan a responsabilizarse de reflexionar sobre su trabajo y a hacer los ajustes necesarios" (p.58) "Los buenos resolutores de problemas llegan a ser conscientes de lo que están haciendo y comprueban con frecuencia sus progresos, se autoevalúan, a medida que enfocan y resuelven los problemas" (p.58) "El proceso de resolver problemas con otros alumnos es beneficioso" (p.66) "Un buen contexto en el que pueden compartir y analizar las estrategias propias y ajenas es el de la resolución de problemas aritméticos, donde las

ayudándoles a comprender y resolver los problemas y proporcionándoles modos útiles de registrar un método de resolución y de describirlo a los demás" (p.72) "Las representaciones pueden ayudar a los estudiantes a organizar su pensamiento; a hacer las ideas matemáticas más concretas y asequibles a la reflexión" (p.72) "Los modelos matemáticos pueden usarse para aclarar e interpretar los fenómenos y para resolver problemas" (p.75) "Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas" (p.120) "Los profesores deberían animar a sus alumnos a usar las matemáticas que van aprendiendo para desarrollar una amplia serie de estrategias de resolución de problemas…" (p.120) "Frecuentemente, los alumnos empiezan a resolver los problemas de una manera y, antes de llegar a una solución, cambian sus estrategias. Además, cuando crean y modifican éstas, reconocen con frecuencia que necesitan aprender más matemáticas" (p.122) "El compartir da oportunidades a los alumnos de escuchar ideas nuevas, de compararlas con las suyas y de justificar su pensamiento" (p.122) "los alumnos se enfrentan a los problemas,	estrategias ideadas pueden llegar a ser objeto de discusión y crítica" (p.66) "Los procesos y contenidos científicos pueden inspirar un enfoque para resolver problemas aplicable al estudio de las matemáticas" (p.70) "el aprendizaje más intenso de matemáticas de estos niños, proviene frecuentemente de sus exploraciones con problemas" (p.79) "Las actividades con números orientadas hacia la resolución de problemas pueden tener éxito, incluso con niños muy pequeños, y pueden desarrollar no sólo las capacidades de contar y de numeración, sino también las relativas a razonar, clasificar y ordenar" (p.80) "Los profesores deberían asegurar que los problemas interesantes y las conversaciones matemáticas estimulantes sean parte del quehacer diario" (p.80) "Los Estándares de procesos de resolución de problemas, … apoyan el aprendizaje de los Estándares de contenidos y se desarrollan a través de éstos: aprender contenidos supone aprender y utilizar procesos matemáticos" (p.81) "El desarrollo del sentido numérico debería avanzar hacia niveles cada vez más complejos de construcción de ideas y destrezas, de reconocimiento y uso de relaciones para resolver problemas y de

el ver diversas soluciones mejora su oportunidad de aprender estrategias útiles y les permite determinar cuáles son más flexibles y eficaces” (p.123) “Dando tiempo para pensar, creyendo que los alumnos pueden resolver problemas, escuchando atentamente sus explicaciones y estructurando un ambiente que valore su trabajo, los profesores fomentan la resolución de problemas y ayudan a los alumnos a hacer explícitas sus estrategias” (p.123) “En las aulas donde los alumnos tienen a su alcance materiales como fichas, calculadoras y ordenadores, y en las que se les anima a utilizar una amplia serie de estrategias, se desarrollan formas de pensamiento generadoras de múltiples niveles de comprensión” (p.124) “Los profesores deben de tener la convicción de que la resolución de problemas no está reservada para los estudiantes mayores o para los que ya “tienen base”. También los pequeños pueden trabajar en esto de forma sustantiva y, al hacerlo, desarrollar destrezas básicas, habilidades de pensamiento de más alto nivel y estrategias de resolución de problemas.” (p.125) “[la comunicación] Incita a los alumnos a reflexionar sobre sus conocimientos y	conexión de nuevos aprendizajes con los anteriores” (p.81) “los profesores deberían animarlos regularmente para que demuestren y profundicen su conocimiento de los números y las operaciones, resolviendo problemas interesantes y contextualizados y discutiendo las representaciones y estrategias que emplean” (p.83) “Como resultado de las experiencias regulares con problemas que desarrollen las nociones de valor posicional, los alumnos … podrían contar hasta las centenas, descubrir patrones …, componer …y descomponer … números … (p.86). “Las explicaciones de los alumnos acerca de las soluciones de los problemas propuestos, permiten a los profesores evaluar el desarrollo del sentido numérico” (p.91) “Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas” (p.120) “Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos” (p.120) “Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él” (p.120) “La resolución de problemas es una característica notable de la actividad matemática y un medio importante para

maneras de resolver problemas" (p.132) "Así, pueden apreciar que algunas representaciones destacan mejor las características del problema" (p.143) "También empiezan en esta etapa a razonar algebraicamente con la multiplicación, buscando patrones generales; por ejemplo, al explorar problemas…" (p. 148) "Los estudiantes deberían ver los algoritmos como herramientas para resolver problemas" (p.148) "Deberían ser capaces de resolver mentalmente muchos problemas, hacer una estimación razonable del resultado de un problema" (p.153) "Para resolver problemas de forma flexible, los estudiantes necesitan tener muchas y variadas experiencias componiendo y descomponiendo números" (p.154) "Al estudiar simultáneamente los decimales, las fracciones y los porcentajes, los estudiantes aprenden a trabajar con formas equivalentes, y a elegir y usar la forma más apropiada para resolver problemas y expresar cantidades" (p.155) "Cuando desarrollan métodos para resolver problemas con números de varias cifras, debería animárseles a anotar y compartir dichos métodos. Al hacer esto,	desarrollar el conocimiento matemático" (p.120) "Los profesores deberían animar a sus alumnos a usar las matemáticas que van aprendiendo … y aprender a controlar sus propias ideas sobre la resolución de problemas y a reflexionar sobre ellas" (p.120) "En los primeros años, la resolución de problemas debería referirse a una variedad de contextos, desde las rutinas diarias a las situaciones matemáticas que surgen de los cuentos" (p.120) "La resolución de problemas da oportunidades para usar y ampliar el conocimiento de los conceptos" (p.120) "Cuando los niños resuelven problemas referentes a comparar y completar colecciones usando estrategias de conteo, desarrollan mejor la comprensión de la adición y la sustracción y de la relación entre ambas operaciones" (p.121) "una clase basada en problemas, … facilita a los alumnos el desarrollo de estrategias de resolución" (p.122) "Las decisiones que tomen los profesores respecto a las oportunidades de resolver problemas, afectan a la profundidad y amplitud del aprendizaje de matemáticas de sus alumnos" (p.123) "Cuando estructuran situaciones

pueden aprender unos de otros, analizar la eficiencia y generalidad de los diferentes enfoques, e intentar aplicar los métodos de otros" (p.157) "Al tiempo que los alumnos adquieren una base conceptual para los números racionales, deberían empezar a resolver problemas utilizando las estrategias que desarrollan, o adaptar aquéllas utilizadas para los números naturales. En estos niveles, el énfasis no debería ponerse en desarrollar procedimientos generales para resolver todos los problemas con números decimales y fracciones. En vez de ello, los estudiantes deberían generar soluciones que se basen en el sentido numérico y en las propiedades de las operaciones, y que utilicen una variedad de modelos o representaciones" (p.159) "A medida que los alumnos aprenden el significado de la multiplicación y desarrollan estrategias para resolver problemas en que intervenga esta operación, empezarán a usar con naturalidad propiedades como la distributiva" (p.165) "usar modelos geométricos para resolver problemas de otras áreas de las matemáticas, tales como los números y la medida" (p.168) "Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas"	problemáticas y alcanzables por una amplia gama de ellos, deben tener claro qué matemáticas desean" (p.123) "Toman decisiones importantes sobre cuándo demostrar, cuándo proporcionar *feedback* (retroalimentación) que confirme lo correcto e identifique lo incorrecto, cuándo abstenerse de hacer comentarios y programar tareas semejantes, y cuándo utilizar las discusiones en clase para fomentar el pensamiento matemático de los alumno" (p.123) "En lugar de tratar aisladamente la resolución de problemas, los profesores deberían incrustarla en el currículo de contenidos matemáticos" (p.123) "Cuando los profesores integran la resolución de problemas en el contexto de situaciones matemáticas, los alumnos reconocen la utilidad de las estrategias" (p.123) "Los profesores deberían elegir determinados problemas porque son apropiados para sugerir estrategias particulares y permiten el desarrollo de ciertas ideas matemáticas" (p.123) "Evaluar la habilidad de los estudiantes para resolver problemas es más difícil que evaluar su destreza de cálculo. No obstante, es imperativo que los profesores recaben pruebas de diversas maneras -a través del trabajo y las conversaciones de

(p.186) “Los que saben desarrollar *y* llevar a cabo un plan para resolver un problema matemático, muestran un conocimiento mucho más profundo y útil que el de efectuar simplemente un cálculo” (p.186) “Tenían que generar y organizar información, y luego evaluar y explicar los resultados” (p.187) “También permite ayudar a determinados alumnos a abordar aspectos diferentes del problema, como construir todos los rectángulos, organizar los datos, buscar patrones o formular y justificar conjeturas” (p.189) “Reflexionar sobre las diferentes formas de pensar y representar una solución de un problema, permite las comparaciones de estrategias y la consideración de las distintas representaciones” (p.189) “Cuando se hayan presentado diferentes estrategias, se debería pedir examinar las diversas formas de resolver el problema y observar las que son iguales y las que difieren” (p.189) “Es fundamental que los alumnos dispongan de tiempo para explorar los problemas” (p.190) “Cuando los alumnos comparten sus soluciones con los compañeros, los profesores pueden ayudarles a probar	los alumnos, por ejemplo- y utilicen esta información para programar una forma de ayudarles individualmente en el con- texto de la clase” (p.123) “Los profesores deberían pedir a sus alumnos que reflexionen sobre sus respuestas, las expliquen y las justifiquen, para que la resolución de problemas no sólo los conduzca a la comprensión de los conceptos matemáticos, sino que también la confirme” (p.125) “el doble objetivo del aprendizaje de las matemáticas: dar sentido a los conceptos matemáticos y adquirir habilidades e ideas para resolver problemas” (p.149) “Cuando los alumnos trabajan problemas que conllevan muchos o complejos cálculos, la calculadora es una herramienta eficiente para aplicar las estrategias que han decidido emplear. Permite al alumno centrarse en el proceso de resolución de los problemas” (p.149) “Identificar y utilizar las relaciones entre operaciones –la división como operación inversa de la multiplicación, por ejemplo– para resolver problemas” (p.152) “Al trabajar en muchos problemas de multiplicación, con variedad de modelos, los alumnos deberían inicialmente aprender y llegar a tener fluidez con algunas de las combinaciones más fáciles” (p.157)

varios aspectos de sus estrategias. Las explicaciones que son simplemente descripciones de procedimientos o resúmenes, deberían dar paso a argumentos matemáticos.” (p.190) “Al preguntar “¿pensáis que siempre funciona?, llevó la discusión sobre un problema específico, a la consideración de una característica general de los problemas de multiplicación” (p.193) “La habilidad de los estudiantes para leer, escribir, escuchar, pensar y comunicar sobre los problemas, desarrollará su comprensión y profundización de las matemáticas” (p.198) “En los niveles 3-5, deberían usar la comunicación como un instrumento para comprender y generar estrategias de solución.” (p.198) “Para ayudarles a escribir sobre su proceso de razonamiento, el profesor puede proponer una actividad de resolución de problemas y preguntar” (p.203) “La discusión de varias respuestas, en especial cuando los conceptos y problemas matemáticos se hacen más complejos, es una manera eficaz de ayudar a los alumnos a perseverar en la mejora de su capacidad para comunicar” (p.203) “…propicia un sentido de unidad y conexión en el estudio de las matemáticas. Asimismo, cuando los estudiantes	“La investigación sugiere que resolviendo problemas, los alumnos desarrollan métodos de cálculo y también aprenden sobre las operaciones y sus propiedades” (p.157) “Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas” (p.168) “reconocer ideas y relaciones geométricas y aplicarlas a otras disciplinas y a problemas que surjan en la clase o en la vida diaria” (p.168) “La destreza en el razonamiento, que los estudiantes desarrollan en la etapa 3-5, les permite investigar problemas de creciente complejidad y estudiar propiedades geométricas” (p.169) “Los estudiantes deberían tener la oportunidad de aplicar ideas y relaciones geométricas a otras áreas de las matemáticas, a otras disciplinas y a problemas que surjan de sus experiencias diarias” (p.173) “Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas” (p.186) “Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él” (p.186) “La resolución de problemas es la piedra angular de las matemáticas escolares”

resuelven problemas tan diversos como calcular las combinaciones posibles de camisas y pantalones en un ropero y medir el área de un rectángulo…" (p.204) "En los niveles 3-5, los alumnos deberían desarrollar el importante proceso inherente a la investigación científica y la resolución de problemas matemáticos: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir." (p.205) "… la comunicación y la resolución de problemas deberían integrarse con el lenguaje de las artes." (p.207) "Deberían aprender a elaborar una hoja de cálculo sencilla (ver fig. 5.39) y usarla para plantear y resolver problemas, examinar datos e investigar patrones" (p.211) "Inicialmente, los alumnos podrían generar muchos ejemplos... Otros, podrían usar una tabla de multiplicar para organizar su trabajo.... Organizar el trabajo de esta manera resalta patrones que favorecen el que los alumnos piensen más sistemáticamente sobre el problema." (p.212) "Los buenos problemas pueden inspirar la exploración de ideas matemáticas importantes, alimentar la perseverancia y reforzar la necesidad de comprender y usar varias estrategias, propiedades y relaciones matemáticas." (p.186) "las estrategias se aprenden con el paso	(p.186) "Sin la habilidad para resolver problemas, la utilidad y el poder de las ideas matemáticas, y el conocimiento y las destrezas, están gravemente limitados" (p.186) "A no ser que los alumnos sepan resolver problemas, los hechos, conceptos y procedimientos que conozcan son de poco uso" (p.186) "El objetivo de las matemáticas escolares debería ser que todos los alumnos estén cada vez más capacitados para resolver problemas, y deseen comprometerse en ello" (p.186) "La resolución de problemas es también importante porque puede ser un medio para aprender nuevas ideas y destrezas matemáticas" (p.186) "Un enfoque de la enseñanza de las matemáticas centrado en los problemas, se vale de problemas interesantes y bien seleccionados para iniciar lecciones e involucrar a los alumnos" (p.186) "La resolución de problemas no es un tema aparte, sino un proceso que debería impregnar el estudio de las matemáticas y proporcionar un contexto en el que se aprendan los conceptos y destrezas." (p.186) "A través de las discusiones se puede

del tiempo, se aplican en contextos particulares, y llegan a ser más refinadas, elaboradas y flexibles según se van utilizando en problemas de complejidad creciente" (p.57)	evaluar la comprensión de los alumnos" (p.191) "Para cualquier evaluación de la resolución de problemas, los profesores tienen que ver más allá de la respuesta, considerar el razonamiento que lleva a ella. Para esto, pueden basarse en las explicaciones orales y escritas, los dibujos y los modelos. Reflexionando sobre estos datos de evaluación, pueden elegir direcciones para una instrucción posterior que se ajuste a sus objetivos matemáticos." (p.191) "Observar cómo eligen y emplean las representaciones, da al profesor información para evaluar qué aspectos del problema consideran, y cómo razonan sobre los patrones y regularidades que revelan aquéllas." (p.213) "Los buenos problemas y los trabajos de resolución de problemas estimulan la reflexión y la comunicación, y pueden surgir del entorno de los alumnos o de contextos puramente matemáticos. Generalmente, sirven a distintos propósitos, como estimularlos para desarrollar y aplicar estrategias, introducir conceptos nuevos y proporcionar un contexto donde utilizar destrezas. Deberían conducir, matemáticamente, a algún lado" (p.187) "Los profesores pueden ayudar a los

	alumnos para que lleguen a ser resolutores de problemas, seleccionando problemas ricos y apropiados, dirigiendo el trabajo con ellos y evaluando la comprensión y el empleo de estrategias” (p.189)
Conocimiento sobre invención de problemas	**Conocimiento sobre factores afectivos y creencias**
“Los alumnos deberían tener frecuentes oportunidades de formular problemas complejos, de enfrentarse a ellos y de resolverlos -problemas que requieran una cantidad considerable de esfuerzo- y, luego, habría que estimularles a reflexionar sobre su pensamiento” (p.55) “Los buenos resolutores de problemas tienden naturalmente a … proponer problemas basados en las situaciones que ven” (p.56) “Plantearse problemas es algo natural en los niños: … Los profesores y los padres pueden favorecer esta inclinación ayudando a los niños a que propongan problemas a partir de su entorno” (p.56) “Los profesores deberían animar a sus alumnos a usar las matemáticas que van aprendiendo para …. plantear problemas retadores …” (p.120) “Proponer problemas, esto es, generar nuevas preguntas en un contexto de problema, es una disposición matemática que los profesores deberían cultivar y	“Para aprender la resolución de problemas en matemáticas, los alumnos deberían adquirir formas de pensar, hábitos de perseverancia y curiosidad, y confianza en situaciones no familiares que les servirán fuera de la clase” (p.55) “animándoles a persistir mediante problemas interesantes pero estimulantes” (p.56, 121) “Es importante lo que pueden hacer los profesores para desarrollar la disposición de los alumnos para la resolución de problemas, creando y manteniendo un ambiente de clase que… les anime a explorar, arriesgarse, compartir fracasos y éxitos y preguntarse unos a otros” (p.56) “los alumnos adquirirán confianza en sus capacidades, voluntad para comprometerse y explorar problemas; los propondrán y serán perseverantes en la búsqueda de soluciones” (p.57) “les animan a resolver problemas y a ser persistentes” (p.78) “Deberían plantear problemas que reten

desarrollar" (p.121) "La literatura infantil es útil para proporcionar contextos, tanto para problemas que generen los alumnos…" (p.122) "Los datos pueden utilizarse para desarrollar argumentos basados en pruebas y para proponer problemas." (p.184) "Además de desarrollar y utilizar diversas estrategias, los estudiantes necesitan también aprender a formular preguntas que amplíen los problemas" (p.189) "Mediante estas extensiones de los problemas y de la formulación de distintas preguntas, los alumnos llegan a ser tan buenos proponiendo problemas como resolviéndolos" (p.189)	matemáticamente a los alumnos, pero también expresarles su creencia en que son capaces de resolverlos" (p.134) "Los alumnos de los niveles 3-5 deberían tener experiencias frecuentes con problemas que les interesen, y los animen y comprometan a pensar en matemáticas importantes" (p.186) "En las clases donde los alumnos intervienen en el establecimiento de normas y donde sus ideas se respetan y valoran, es más probable que se desarrolle la confianza y la seguridad en sí mismos para resolver problemas. Estas actitudes son esenciales si se quiere que los estudiantes den sentido a las matemáticas, se arriesguen formulando preguntas y conjeturas y ofrezcan argumentos matemáticos" (p.189-190) "Puesto que los buenos problemas desafían a pensar, los alumnos se esforzarán frecuentemente para llegar a las soluciones" (p.190) "Ellos necesitan saber que un problema desafiante requiere algún tiempo, y que la perseverancia es un aspecto importante del proceso de resolución de problemas y de hacer matemáticas" (p.190) "su natural inclinación a resolver problemas" (p.80) "En estos niveles, el reto consiste en construir sobre sus innatas inclinaciones a

	resolver problemas y en preservar y estimular esta favorable disposición al respecto" (p.120)

Tabla 17. Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2007)

Conocimiento del contenido	Conocimiento Didáctico del contenido
Conocimiento sobre problemas	**Conocimiento de los estudiantes como resolutores**
"a wide range of situations, including non-routine, open-ended and real-world problems" (p.6) "It is important that students apply mathematical problem-solving skills and reasoning skills to tackle a variety of problems, including real-world problems" (p.8) "Apply mathematics to everyday life problems" (p.9) "solving 1-step word problems involving addition and subtraction within 20" (p.12) "multiplication and división include solving 1-step word problems with pictorial representation" (p.13) "solving word problems involving addition and subtraction of money in dollars only (or in cents only)" (p.13, 16) "solving up to 2-step word problems involving addition and subtraction" (p.15, 18) "solving 1-step word problems involving multiplication and division within the multiplication tables" (p.15) "solving word problems involving length/	"These components (conceptual understanding, skill proficiencies and thinking skills) are integral to the development of mathematical problema solving ability" (p. 2)

mass/ volumen" (p.15) "solving problems using information presented in picture graphs" (p.17) "solving up to 2-step word problems involving the 4 operations" (p.18) "solving word problems involving length/ mass/ volume/ capacity" (p.19) "solving word problems involving addition and subtraction of time given in hours and minutes" (p.19) "solving word problems involving addition and subtraction of money in decimal notation" (p.19, 35) "solving word problems involving the area/ perimeter of squares and rectangles" (p.20, 23) "solving problems using information presented in bar graphs" (p.20) "solving up to 3-step word problems involving the 4 operations" (p.21, 33, 38) "solving up to 2-step word problems involving addition, subtraction and multiplication" (p.22, 34) "solving up to 2-step word problems involving the 4 operations" (p.23, 26) "solving word problems involving time in 24-hour clock" (p.23) "solving word problems involving the 4 operations of money in decimal notation" (p.23)	

"solving problems using information presented in tables" (p.25) "solving problems using information presented in line graphs" (p.25) "Fractions four operation solving word problems involving the 4 operations" (p.26) "Decimals…solving word problems involving the 4 operations" (p.27) "solving up to 2-step word problems involving percentage" (p.27, 30, 39) "solving up to 3-step word problems involving the volume of a cube/ cuboid" (p.28, 31, 39) "solving word problems involving average" (p.29) "solving word problems involving 2 pairs of ratios" (p.30) "solving up to 3-step Word problems involving speed and average speed" (p.30) "solving word problems involving area and perimeter" (p.31) "solving 1-step problems using information presented in pie charts" (p.32, 40) "solving word problems involving algebraic expressions" (p.32) "solving up to 3-step word problems involving addition and subtraction of time given in hours and minutes" (p.35) "solving up to 3-step word problems	

involving the area/ perimeter of squares and rectangles" (p.36) "solving problems using information presented in tables/ bar graphs/ line graphs" (p.37) "solving up to 3-step word problems involving average" (p.37)	
Conocimiento sobre resolución	**Conocimiento sobre la instrucción de la resolución de problemas**
"Develop the mathematical thinking and problem solving skills and apply these skills to … solve problems" (p.5) "Provide students with problems that require planning (before solving) and evaluation (after solving)." (p.9) "Encourage students to seek alternative ways of solving the same problem and to check the appropriateness and reasonableness of the answer." (p.9) "Allow students to discuss how to solve a particular problem and to explain the different methods that they use for solving the problem." (p.9) "Use appropriate heuristics to solve problems" (p.10)	"Students develop… problem solving skills through the learning and application of mathematics" (p.5) "Mathematical problem solving is central to mathematics learning. It involves the acquisition and application of mathematics concepts and skills" (p.6) "The development of mathematical problem solving ability is dependent on five inter-related components, namely, *Concepts*, *Skills*, *Processes*, *Attitudes* and *Metacognition*" (p.6) "Skill proficiencies… where appropriate, for exploration and problem solving" (p.6) "**Metacognition**, or "thinking about thinking", refers to the awareness of, and the ability to control one's thinking processes, in particular the selection and use of problem-solving strategies" (p.9) "The provision of metacognitive

	experience is necessary to help students develop their problem solving abilities" (p.9) "Expose students to general problem solving skills, thinking skills and heuristics, and how these skills can be applied to solve problems" (p.9) "Encourage students to think aloud the strategies and methods they use to solve particular problems" (p.9) "Use mathematical concepts learnt to solve problems" (p.10) "The introduction of calculators at P5 and P6 reflects a shift to give more focus to processes such as problem solving skills" (p.11)
Conocimiento sobre invención de problemas	**Conocimiento sobre factores afectivos y creencias**
"Develop the mathematical thinking and problem solving skills and apply these skills to formulate… problems" (p.5)	"Perseverance in solving a problem" (p.9)

Tabla 18. Currículo España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014)

Conocimiento del contenido	**Conocimiento Didáctico del contenido**
Conocimiento sobre problemas	**Conocimiento de los estudiantes como resolutores**
"iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana" (p.19386) "Planteamiento de pequeñas investigaciones en contextos numéricos, geométricos y funcionales" (p.19388) "Identificar y resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para la resolución de problemas" (p.19388, 19389, 19392, 19393) "Distingue entre problemas y ejercicios y aplica las estrategias adecuadas para cada caso" (p.19388) "Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas"	

(p.19389) "Iniciarse en el uso de los de porcentajes y la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana" (p.19389) "Utiliza diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, identificándolos y utilizándolos como operadores en la interpretación y la resolución de problemas" (p.19389) "Resuelve problemas utilizando la multiplicación para realizar recuentos, en disposiciones rectangulares en los que interviene la ley del producto" (p.19389) "Resolución de problemas de la vida cotidiana" (p.19389) "Conocer, utilizar y automatizar algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones de la vida cotidiana" (p.19389) "Usa la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad, para resolver problemas la vida diaria" (p.19390) "Resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando porcentajes y regla de tres en	

situaciones de proporcionalidad directa” (p.19390) “Utiliza y automatiza algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones cotidianas” (p.19390) “Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados” (p.19390) “Resolución de problemas de medida” (p.19392) “Utilizar las unidades de medida más usuales, convirtiendo unas unidades en otras de la misma magnitud, expresando los resultados en las unidades de medida más adecuadas, explicando oralmente y por escrito, el proceso seguido y aplicándolo a la resolución de problemas” (p.19391, 19391) “Conocer las unidades de medida del tiempo y sus relaciones, utilizándolas para resolver problemas de la vida diaria2 (p.19391) “Resuelve problemas de la vida diaria utilizando las medidas temporales y sus relaciones” (p.19392) “Resuelve problemas realizando cálculos con medidas angulares” (p.19392) “Resuelve problemas geométricos que	

impliquen dominio de los contenidos trabajados" (p.19393) "Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad" (p.19393) "Utilizar las propiedades de las figuras planas para resolver problemas" (p.19393)	
Conocimiento sobre resolución	**Conocimiento sobre la instrucción de la resolución de problemas**
"En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer, reflexionar, planificar el proceso de resolución, establecer estrategias y procedimientos y revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados" (p.19386) "expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas" (p.19387) "Planificación del proceso de resolución problemas: Análisis y comprensión del enunciado; Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas	"los contenidos de aprendizaje parten de lo cercano, y se deberán abordar en contextos de identificación y resolución de problemas" (p.19386) "Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática" (p.19386) "Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para obtener información, realizar cálculos numéricos, resolver problemas y presentar resultados" (p.19388, 19389) "Seleccionar y utilizar las herramientas tecnológicas y estrategias para el cálculo, para conocer los principios matemáticos y resolver problemas" (p.19388) "Se inicia en la utilización de la

adecuadas, etc. y Resultados obtenidos" (p.19388) "Expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema" (p.19388) "Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas" (p.19388) "Comunica verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema de matemáticas o en contextos de la realidad" (p.19388) "Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema)" (p.19388) "Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas" (p.19388) "Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisa las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprueba e interpreta las soluciones en el contexto de la situación, busca otras formas de resolución, etc." (p.19388) "Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia" (p.19388) "Profundiza en problemas una vez	calculadora para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas" (p. 19389)

resueltos, analizando la coherencia de la solución y buscando otras formas de resolverlos" (p.19388) "Se inicia en el planteamiento de preguntas y en la búsqueda de respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas" (p.19388) "Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad" (p.19388) "Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares, etc." (p.19388) "reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas" (p.19389) "explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas" (p.19390) "Resuelve problemas … utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización" (p.19390, 19393)	

"Reflexiona sobre el proceso aplicado a la resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, buscando otras formas de resolverlo" (p.19390, 19392, 19393)	
Conocimiento sobre invención de problemas	**Conocimiento sobre factores afectivos y creencias**
"Se debe trabajar en la profundización en los problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc." (p.19387, 19388) "Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, conectándolo con la realidad, buscando otros contextos, etc." (p.19388)	"Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas" (p.19388) "Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación" (p.19388)

Tabla 19. Currículo Argentina. (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b)

Conocimiento del contenido	Conocimiento Didáctico del contenido
Conocimiento sobre problemas	**Conocimiento de los estudiantes como resolutores**
"El reconocimiento y uso de las operaciones con distintos significados en la resolución de problemas." (p.14a, 16a, 18a, 20a) "El reconocimiento y uso de los números naturales, de su designación oral y representación escrita y de la organización del sistema decimal de numeración en situaciones problemáticas" (p.16a, 18a, 20a) "El reconocimiento y uso de relaciones espaciales en espacios explorables o que puedan ser explorados efectivamente en la resolución de situaciones problemáticas" (p.16a, 18a, 20ª, 18b) "El reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos a partir de distintas características en situaciones problemáticas" (p.17a, 19a, 21a) "La diferenciación de distintas magnitudes y la elaboración de estrategias de medición con distintas unidades en situaciones problemáticas" (p.17a, 19a, 21a) "El reconocimiento y el uso de las operaciones con distintos significados y en distintos campos numéricos en la	

resolución de problemas.” (p.14b) “El reconocimiento y uso de las propiedades de las operaciones en la resolución de problemas de cálculo.” (p.14b, 16b, 19b) “El reconocimiento y uso de relaciones espaciales y de sistemas de referencia en la resolución de problemas.” (p.14b, 21b, 24b) “El reconocimiento y la clasificación de figuras y cuerpos geométricos a partir de sus propiedades en la resolución de problemas” (p.14b, 21b) “El reconocimiento y uso de los números naturales, de la organización del sistema decimal de numeración y la explicitación de sus características, en situaciones problemáticas” (p.16b, 19b, 23b) “El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales de uso social habitual en situaciones problemáticas” (p.16b, 19b) “El reconocimiento y uso de las operaciones entre fracciones y expresiones decimales de uso social habitual en situaciones problemáticas” (p.17b) “El reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos y la producción y análisis de construcciones considerando las propiedades involucradas en situaciones	

problemáticas" (p.18b) "La comprensión del proceso de medir, considerando diferentes expresiones posibles para una misma cantidad en situaciones problemáticas" (p.18b, 21b, 25b) "El análisis y uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular medidas en situaciones problemáticas" (p.18b, 22b, 25b) "El reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos y la producción y el análisis de construcciones, considerando las propiedades involucradas, en situaciones problemáticas" (p.21b, 24b) "El reconocimiento y el uso de las operaciones entre números naturales, fracciones y expresiones decimales, y la explicitación de sus propiedades en situaciones problemáticas" (p.23b)	
Conocimiento sobre resolución	**Conocimiento sobre la instrucción de la resolución de problemas**
"La comunicación oral y escrita de resultados y procedimientos utilizados para resolver problemas aritméticos, geométricos y de medida." (p.14a) "La comparación de procedimientos utilizados para resolver problemas y el análisis de la validez de las respuestas por su adecuación a la situación planteada."	

(p.14a) “La identificación de datos e incógnitas en problemas aritméticos, geométricos y de medida.” (p.14a) “El reconocimiento y uso de relaciones espaciales en la re- solución de problemas en espacios explorables o que puedan ser explorados efectivamente. “La elaboración de procedimientos para resolver problemas atendiendo a la situación planteada.” (14b)	
Conocimiento sobre invención de problemas	**Conocimiento sobre factores afectivos y creencias**
“…elaborar preguntas o enunciados de problemas y registrar y organizar datos en listas y tablas a partir de distintas informaciones.” (p.18a, 20a) “La comparación de las producciones realizadas al resolver problemas, el análisis de su validez y de su adecuación a la situación planteada.” (p.14b)	“La confianza en las propias posibilidades para resolver problemas y formularse interrogantes.” (p.14ª, 14b)