

## Acercamiento a la noción de función desde los Isomorfismos de medida

Claudia Marcela Agudelo Ibáñez  
marcagudelo@yahoo.es  
Niny Johana Chiguazuque Pulido  
nina778\_2@hotmail.com  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
LEBEM

### Resumen

*El concepto de función ha evolucionado a través de la historia gracias a la superación de algunos obstáculos adheridos a otros conceptos como la razón, la proporción y la medida. Con base en ello, se prepara el camino para realizar una transposición didáctica y abordar desde allí la noción de función, apoyando el diseño y la implementación de una secuencia de actividades cuyo interés es mostrar que a través una de situación fundamental mediada por el análisis de facturas de servicios públicos, y las fases de la TSD1, es posible acercarse a la noción de función desde los isomorfismos de medida. Palabras clave: isomorfismos de medida, razón, operador funcional, noción de función, Teoría de Situaciones Didácticas, medida y magnitud.*

### Presentación

La construcción de la noción de función y función lineal a través de los isomorfismos de medida, es una experiencia llevada a cabo con niños de séptimo grado, por medio del planteamiento de una situación fundamental de la cual se desprenden múltiples situaciones a-didácticas. La situación fundamental es una situación abierta en la cual el conocimiento aparece como la solución óptima y se aborda a partir de los conocimientos previos (Brousseau, 1986). En esta medida, no solo se trata de construir un concepto, sino de dotar de sentido el objeto matemático y analizar desde allí todas las acciones del profesor como la planeación y diseño de las actividades, los recursos didácticos, la gestión y la evaluación. Ésta última, debe ocupar un lugar importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje para generar una nueva cultura alrededor de ella, con la que se valoren procesos y no solo contenidos.

### Referentes Teóricos

A nivel histórico, aspectos como la disociación entre número y magnitud, razón y proporción, entre otros, han llevado a la construcción de la noción función y función lineal. La ausencia del número racional no permitía ver la conexión entre razón y fracción, por ejemplo la razón 7:8 significa que una longitud mide 7 con relación a otra que mide 8, ambas medidas con una misma unidad y, la fracción  $7/8$ , significa que una longitud mide siete octavos de otra que se toma como unidad. Durante

---



muchos siglos, el universo numérico solo lo conformaban los naturales y la existencia de enteros, racionales y reales era algo que no aparecía aún en el mundo antiguo.

En cuanto al uso de las proporciones, el inconveniente radicaba en la comparación de magnitudes de la misma naturaleza y la relación entre aquellas que eran distintas no era notoria. Los griegos no lograban ver, por ejemplo, conexión alguna entre el área y el perímetro de un rectángulo, pues para ellos carecería de sentido.

Lo anterior nos llevó a plantear situaciones que involucran relaciones entre magnitudes de distinta naturaleza, para que los estudiantes fueran partícipes de su construcción. Un autor que se destaca por su trabajo en este campo es Vergnaud (1991), quien trabajó los isomorfismos de medidas como relaciones cuaternarias entre cuatro cantidades siendo dos de ellas de un tipo y las otras dos de otro tipo:

M1	M2
a	c
b	d

$M_1$  y  $M_2$  son espacios de medida diferentes.

Analizando este esquema encontramos que es posible el establecimiento de dos tipos de relaciones.

- *Análisis vertical*: se centra en la relación que permite el paso entre cantidades de la misma naturaleza (lo que permite el paso de  $a \rightarrow b$ ) este paso es permitido por un operador sin dimensión lo que se conoce como *operador escalar*:
- *Análisis horizontal*: es lo que permite el paso de una categoría de medida a otra (el paso de  $a \rightarrow c$  y de  $b \rightarrow d$ ) por medio de un cociente denominado *operador funcional*. Este operador a diferencia del escalar esta dimensionado en las magnitudes relacionadas y determina una función que va desde una clase de medida a la otra ya que se establece una correspondencia univoca en la que: *a un elemento del primer conjunto le corresponde un elemento y solo uno del segundo conjunto*, siendo esta una definición de función que puede ser llevada al aula.

Teniendo en cuenta lo anterior, propusimos una secuencia de actividades en la que se aborda la noción de función y función lineal a partir de las etapas propuestas por Brousseau (1986) en la TSD, metodología que procedemos a desarrollar en el apartado siguiente.

## Metodología

Según la TSD (Brousseau, 1986)<sup>1</sup>, el trabajo que desarrolla el alumno debe ser comparable al que desarrolla un científico matemático para elaborar una de sus teorías, es decir, el alumno debe apropiarse del problema, formular hipótesis sobre el mismo, validar y/o rechazarlas, argumentar sus modelos, construir nuevos lenguajes, teorías e interrogantes, además de compartir con otros sus experiencias y así mismo aprobar o no (con argumentos) las teorías de otros, etc.

Para que el profesor pueda potenciar estos elementos, la TSD propone las siguientes fases: acción, formulación, validación e institucionalización. En nuestra experiencia las desarrollamos a partir de una secuencia de actividades que procedemos a explicar.

<sup>1</sup> BROUSSEAU, Guy. (1986). "Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas".

La fase de acción consiste en la elaboración de conjeturas y estrategias con base en los conocimientos previos de los estudiantes, su interpretación de una situación y las condiciones que el medio permite sancionar o aceptar.

Para llevar a cabo esta fase, se diseñaron tres actividades: con la primera, se planteó y se presentó la situación fundamental a los estudiantes: Los bogotanos deben pagar a las empresas de servicios públicos cierto valor por el consumo en cada una de sus viviendas. Analice qué características importantes de los recibos son las que se tienen en cuenta para determinar el valor total a pagar y si el total registrado en las facturas es el que realmente se debe pagar. Luego, los estudiantes pensaron en las características que podrían influir en el cálculo de los totales por pagar, primero sin la presencia de las facturas. Algunos evocaron algunas características generales como los tipos de servicio, las formas de las facturas, colores, logotipos, nombres de los propietarios y dirección, entre otras.

En la siguiente actividad, haciendo énfasis en la factura de la energía, contrastaron sus hipótesis con los datos encontrados en las facturas, observaron que muchas de las características que habían contemplado, no incidirían en el cálculo del total a pagar, apareciendo así elementos como el estrato, el tipo de establecimiento (residencial, comercial, industrial), las unidades de medida para el consumo según el servicio y los subsidios dados.

En la tercera actividad de acción, se enfocó el trabajo hacia la factura de la energía, lo que llevó a los estudiantes a identificar características específicas en torno a la unidad de medida de consumo (Kwh.). En uno de los recibos que tenían como insumo, se encontraba la equivalencia del consumo de algunos electrodomésticos durante una hora en bombillos de 100 watts (W.) por lo que llevaron a cabo algoritmos de tipo multiplicativo para saber en realidad cuántos watts consumía cada uno.

La fase de formulación, se basa en la comunicación de las hipótesis de los estudiantes y la elaboración de códigos para la interacción con otros y desempeñar ambos roles: emisor y receptor. En esta medida, se realiza una actividad en la cual la situación específica planteada fue: Si se utiliza un horno eléctrico ininterrumpidamente durante una hora ¿Cuánto se debe pagar? A través del trabajo en pequeños grupos y de la socialización colectiva, se buscaba potenciar el desarrollo del lenguaje, la importancia de ver que el número en estos casos es la medida de la magnitud y no deben separarse.

Los estudiantes comenzaron a incluir en sus argumentos tanto verbales como escritos, las unidades de medida a las que se referían y al mismo tiempo se hacía evidente nuestro rol como apoyo en la construcción y uso del lenguaje matemático. En esta fase también surgió un modelo propuesto por los estudiantes para representar tubularmente el isomorfismo de medida aunque el trabajo con este instrumento se realizó a profundidad en actividades posteriores.

En cuanto a la fase de validación, se debe propiciar que los estudiantes determinen si lo realizado en las fases anteriores, es óptimo para dar respuesta a la situación fundamental, es así como deben argumentar sus procesos y validar o no, tanto los propios como los de sus compañeros.

La actividad con la cual se desarrolló, se basó en la representación tabular propuesta en la fase anterior facilitando el análisis del paso de un espacio de medida a otro validando procesos algorítmicos y de relación cuaternaria (de tipo funcional) entre medidas de magnitud de energía y tiempo, con unidades como: Kw., Kwh., J.<sup>2</sup>

Finalmente en la fase de institucionalización, es el docente quien establece el paso del saber personal al institucional haciendo explícita la temática abordada y dando respuesta a la situación. En nuestro trabajo con los estudiantes de séptimo se enfatizó en la representación tabular y en la existencia de un operador que no solo involucra lo operacional sino también lo dimensional.

---

<sup>2</sup> Entendiendo Kw: kilovatio; Kwh.: Kilovatio hora; J: julio.



La evaluación se llevo a cabo durante el desarrollo de la secuencia de actividades por medio del análisis de registros escritos de los estudiantes, nuestras observaciones de sus exteriorizaciones verbales, discusiones a nivel grupal y colectivo; con lo anterior, nos referimos a lo conceptual y lo procedimental. Además de aspectos actitudinales como asistencia, cumplimiento en la asignación de trabajos extraclase y respeto hacia la clase y sus compañeros.

### Conclusiones

Teniendo en cuenta que no se ha culminado el proceso, las conclusiones que presentamos a continuación se harán de lo elaborado hasta el momento por parte de los estudiantes y el profesor.

#### Estudiantes:

Partieron del reconocimiento de características importantes para la facturación como el estrato y el tipo de domicilio (residencial-comercial) pero no asociaban las unidades de medida para el consumo. Sin embargo, más adelante fueron identificadas y utilizadas para establecer el consumo de los electrodomésticos en bombillos buscando la relación con los vatios; establecieron relaciones cuaternarias llevando a cabo algoritmos multiplicativos aunque dejando de lado la magnitud de medida.

la luz se mide en kw. kilowattios x h, kwit por mes  
 los kwit x mes tienen el valor de \$260.96 promedio  
 El subsidio nos ayuda a que el recibiendo no sea barato  
 El subsidio tiene un valor de (0-180 kwit mes) (15%) - \$4.971

Ya en la formulación, establecieron la equivalencia del Kw. en w. y al operar tuvieron en cuenta las medidas tanto en lo verbal como lo escrito. Además se empezó a incorporar el lenguaje y simbolismo matemático adecuados a la temática (isomorfismos de medida para llegar a la noción de función), que fue una de las dificultades a las que se enfrentaron.

2500 W      1000 W  
                  500 W

$2 \text{ kw} + \frac{1}{2} \text{ kw} =$   
 $2 \text{ kw} + 0.5 \text{ kw} = 2.5 \text{ kw}.$

	W	KW	kwit
Julios	256	1.000	315
	1.3/5 = 1000+		Bombillo

Al finalizar la fase de validación, llegaron a relaciones cuaternarias (de tipo funcional) entre magnitudes de distinta naturaleza que destacan el operador funcional aunque aún no lo reconocen explícitamente.

	1 W	1 KWh	1 kWh
1	1 J/s	1000 J/s	3600 J/s
2	2 J/s	2000 J/s	7.200 J/s

$1 \text{ kWh} = \frac{1000 \text{ J}}{1 \text{ seg}} \cdot 3600 \text{ seg} = 3600.000 \text{ J}$

*Profesor:*

Aunque Brousseau (1986) hace explícitas las características de cada fase, en cada una de ellas se hace necesario tener en cuenta aspectos relacionados con las demás, por ejemplo, el institucionalizar elementos en la fase de formulación.

Hemos aprendido que nuestro rol como profesoras debe ser acorde a las características de la fase que se esté implementando, pues de no ser así puede entorpecerse el proceso con una intervención inoportuna o con la omisión de acompañamiento donde pueda ser necesario.

Prever las variables didácticas como el tiempo, la organización del aula, el tipo de registro y el banco de preguntas incide en el cumplimiento de los objetivos específicos ya que no nos lleva a improvisar sino a tomar decisiones adecuadas que permiten orientar a los estudiantes en la construcción del conocimiento, pese a la diversidad de procesos y ambiente del aula.

En cuanto a la evaluación, en el último Foro nacional de educación: "Evaluar es Valorar" (MEN, 2008) se define como un proceso inmerso dentro del proceso enseñanza-aprendizaje que no se limita a la recolección de información sino que trasciende y realmente inicia con el análisis de los datos recolectados. Por ello privilegiamos el qué evaluar, donde atendemos al establecimiento de niveles y criterios que se dirigen a la temática desarrollada teniendo en cuenta las componentes del conocimiento (conceptual, procedimental y actitudinal); cómo evaluar, donde analizamos los instrumentos y técnicas para la recolección de datos como registros escritos tanto nuestros como de los estudiantes, observaciones, video-grabaciones y fotografías; y finalmente el para qué evaluar, con el propósito de identificar fortalezas y dificultades de los estudiantes llevado a cabo un proceso enseñanza-aprendizaje continuo y coherente.

## Referencias

- BROUSSEAU, Guy. (1986). "Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas". Universidad de Burdeos. En la revista, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115, 1986.
- VERGNAUD, Gerard. (1991). "El niño, las matemáticas y la realidad". Editorial Trillas.
- MEN (2008). Foro Educativo Nacional: Evaluar es valorar.