María Belén Giacomone

PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DEL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Trabajo Fin de Máster

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Dirigido por el Dr. Juan D. Godino

Granada, Julio 2015

Para citar,
Giacomone, B. (2015). *Perspectiva ontosemiótica del razonamiento diagramático en educación matemática. Implicaciones para la formación de profesores.* Trabajo Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/Tesis_master/TFM_BGiacomone.pdf)

Dedicatoria

A mi familia,

si por cada sonrisa de ustedes hubiese nacido una flor,
el mundo sería un inmenso jardín.

Agradecimientos

Agradezco profundamente al Dr. Juan D. Godino por aceptar ser mi tutor y orientarme en este trayecto importante de mi vida. Por su paciencia, comprensión y sabiduría; por darme ese empujón necesario para seguir adelante; por compartir sus conocimientos y darme un lugar para producir, discutir y progresar a la par suya.

A los profesores del Departamento de Matemática de la Universidad de Granada por sus grandes aportes en este período y a los colegas del grupo de Teoría y Metodología de la Investigación en Educación Matemática por haber colaborado en el desarrollo de esta investigación.

Al Departamento de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de La Plata por haber apoyado esta iniciativa.

A mis padres y hermanos, por darme fuerzas y ánimo en todo momento; a mis sobrinos por alegrarme los días con sus sonrisas. A Agustín, mi compañero, mi amigo y mi amor, por confiar en mi y acompañarme incondicionalmente todos los días de mi vida.

A toda mi familia y amigos que, a pesar de la distancia, hacen que mis días estén llenos de alegría.

Sin ustedes nada hubiese sido posible

RESUMEN

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas revelan la importancia del uso de representaciones visuales y diagramáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como también la gran complejidad de factores relacionados con ellas. En esta investigación, en una primera fase analizamos la diversidad de objetos y procesos implicados en la actividad matemática que se realiza con el apoyo de representaciones diagramáticas; interpretamos el razonamiento diagramático en términos ontosemióticos mediante el análisis de la resolución de un problema sobre fracciones, aplicando diversos procesos resolutivos que involucran el uso de diagramas. Asimismo, la aplicación del marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, ha permitido mostrar la relación entre los lenguajes diagramáticos-visuales y los lenguajes secuenciales presentes en la actividad matemática. Este análisis fundamenta la segunda fase de la investigación, en la cual iniciamos el diseño, implementación y evaluación de un proceso formativo para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de futuros profesores de matemáticas, destacando el papel de los lenguajes visuales y analíticos en la constitución de objetos matemático, así como las relaciones entre los objetos ostensivos y no ostensivos. A lo largo de este proceso hemos identificado ciertas dificultades en el reconocimiento y discriminación de los tipos de objetos y significados revelando la complejidad de las tareas propuestas.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) y del Grupo PAI, FQM-126 (Junta de Andalucía).

ÍNDICE

CAPÍTULO 3.

CAPITULO 4.

ANEXO.

Une théorie n'est pas la connaissance, elle permet la connaissance. Une théorie n'est pas une arrivée. C'est la possibilité d'un départ. Une théorie n'est pas une solution, c'est la possibilité de traiter un problème.

(Morin 1990, p. 310)

INTRODUCCIÓN GENERAL

El razonamiento diagramático, enmarcado por la teoría semiótica de Charles S. Peirce (1839-1914) y el uso de visualizaciones, están recibiendo una especial atención en diversas investigaciones en educación matemática (Bakker y Hoffman, 2005; Otte, 2006; Campos, 2007; Rivera, 2011). Para describir la actividad matemática, la aproximación semiótica introduce la noción de sistema semiótico "formado por el conjunto de signos, normas de producción de signos y estructuras de significado subyacentes" (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011, p. 247).

El propósito de nuestro trabajo es indagar sobre la posición ontosemiótica del razonamiento diagramático respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos que intervienen y que emergen de las prácticas matemáticas. Esperamos que la noción de configuración de objetos propuesta por el EOS, y la aplicación de los procesos duales de materialización - idealización, particularización - generalización, reificación - descomposición, personalización - institucionalización, representación - significación, al análisis de la actividad matemática, puedan complementar la visión aportada por el razonamiento diagramático en el papel de la visualización en el aprendizaje matemático. Asimismo, consideramos que el profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos que intervienen en la práctica matemática escolar. Debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2015b). Por tal motivo, pretendemos iniciar un diseño instruccional para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo en futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.

En el capítulo 1 se pone de manifiesto la problemática epistemológica, semiótica y educativa que gira en torno del razonamiento diagramático y la visualización, la cual ha motivado nuestra investigación; asimismo, se describen las herramientas teóricas que serán utilizadas para alcanzar nuestros objetivos y la metodología empleada. En el capítulo 2 se fundamentan aspectos propios de la visualización y el razonamiento diagramático; este desarrollo permitirá avanzar en la selección de tareas prototípicas de visualización y razonamiento diagramático y su análisis mediante la noción de configuración de objetos y procesos matemáticos, que orientan nuestra perspectiva a través del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). En el capítulo 3 describimos una experiencia de aula apoyada en el diseño de una acción formativa orientado a promover la reflexión en los profesores de matemáticas en formación sobre:

- las características de la visualización y del razonamiento diagramático y su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,
- reconocimiento de la diversidad de objetos y procesos implicados en tareas matemáticas realizadas mediante la aplicación de visualizaciones y razonamiento diagramático.

En el último capítulo se exponen las conclusiones de nuestra investigación, las limitaciones de la misma y las futuras vías de continuidad.

CAPÍTULO 1.

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. ÁREA PROBLEMÁTICA

Los diagramas, y en general el uso de visualizaciones y materiales manipulativos, desempeñan un papel importante en la construcción y comunicación de los distintos tipos de objetos matemáticos, y por lo tanto, su uso es fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En diversas investigaciones sobre el razonamiento diagramático, se asume que dichas materializaciones constituyen representaciones de los conceptos matemáticos y de las estructuras en las cuales se organizan. Duval (2006), señala la importancia de las diferentes representaciones y las transformaciones entre los registros de representación semiótica, considerándose fundamentales para la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Aunque se advierte que los objetos matemáticos no deben confundirse de sus posibles representaciones materiales, las relaciones entre dichos objetos siguen siendo conflictivas, tanto desde el punto de vista epistemológico como educativo (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2015a, p. 1).

Dentro de las perspectivas semióticas usadas en educación matemática para describir, analizar y comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje, destaca la aplicación de la semiótica peirceana, en particular, la caracterización del razonamiento diagramático y la abstracción hipostática, en donde el uso y manipulación de varios tipos de diagramas juegan un papel fundamental. Partiendo de presupuestos antropológicos y semióticos, el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos aborda una problemática similar aplicando herramientas conceptuales y metodológicas diferentes.

1.2. PROBLEMA ESPECÍFICO DE INVESTIGACIÓN

El problema que abordamos en esta investigación surge de la constatación de que algunos trabajos sobre el razonamiento diagramático, y en general sobre el uso de visualizaciones en educación matemática, no abordan de manera explícita, la naturaleza y diversidad de objetos matemáticos representados mediante los diagramas y demás visualizaciones. Los objetos matemáticos son considerados como abstractos mientras que los diagramas lo son como concretos o perceptibles, y se insiste en no confundirlos, pero las relaciones entre ambos tipos de objetos no son abordadas de manera explícita. No es de extrañar esta situación dado que clarificar los objetos abstractos y su relación con el mundo empírico es un problema filosófico y psicológico de primera magnitud que es abordado desde diversos paradigmas y marcos teóricos (Godino et al., 2015a).

De acuerdo a la problemática planteada, consideramos que existen posiciones empiristas ingenuas sobre el uso de artefactos manipulativos y visualizaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Consideramos que es necesario superar dichas posiciones y desvelar el entramado de objetos no ostensivos que intervienen en las prácticas matemáticas y que son imprescindibles para la solución de situaciones – problemas. Asimismo, este análisis plantea un reto para el formador de profesores; dada una tarea matemática, el profesor debe ser capaz de prever posibles soluciones de la misma, distinguiendo la secuencia de prácticas operativas y discursivas que el resolutor debe implementar en cada caso. También debe poder identificar la trama de objetos *ostensivos* (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) imbricados en las prácticas matemáticas, así como las relaciones potencialmente conflictivas entre los diversos tipos de lenguajes puestos en juego y los procesos matemáticos involucrados.

Este análisis epistémico y cognitivo es complejo y requiere el desarrollo de una competencia específica en los profesores, mediante intervenciones formativas específicas (Godino et al., 2015b).

1.3. OBJETIVOS

La manera de entender los diagramas tiene importantes consecuencias para la educación matemática; en este sentido nos proponemos a continuación dos objetivos.

O1: clarificar las relaciones entre las representaciones visuales, diagramáticas o de cualquier otro tipo, y los objetos matemáticos no ostensivos que les acompañan

> necesariamente. Esto supone indagar sobre la posición ontológica del razonamiento diagramático respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos que intervienen y que emergen de las prácticas matemáticas.

Entre los marcos semióticos analizados no hay una posición explícita y suficiente sobre la naturaleza del objeto matemático, tanto para describir como para comprender la práctica matemática. Creemos que la aplicación de la noción de configuración ontosemiótica puede enriquecer a estos marcos teóricos.

Esta problemática es clave ya que "cualquier teoría didáctica, en un momento u otro (a menos que voluntariamente quiera confinarse a sí misma en una posición ingenua), debe clarificar su posición ontológica y epistemológica" (Radford, 2008b, p. 221).

El reconocimiento explícito de los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas es una competencia que el profesor debe desarrollar y por lo tanto, consideramos que el formador de profesores debe diseñar procesos formativos orientados al desarrollo de dicha competencia. Para atender a esta cuestión, nos proponemos como segundo objetivo:

> O2: iniciar el diseño de una acción formativa para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de futuros profesores de matemáticas, destacando el papel de los lenguajes visuales y analíticos en la constitución de objetos matemático, así como las relaciones entre los objetos ostensivos y no ostensivos.

El logro del segundo objetivo esta direccionado al planteamiento de estrategias que permitan reflexionar sobre las características de la visualización, del razonamiento diagramático y su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, favorece el reconocimiento, por parte del profesor, de la diversidad de objetos y procesos implicados en tareas matemáticas realizadas mediante la aplicación de visualizaciones y razonamiento diagramático.

1.4. MARCO TEÓRICO

Para abordar la problemática planteada, consideramos el marco del enfoque ontosemiótico

(EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos desarrollado por Godino y cols. (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). El punto de partida del EOS es "la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado" (Godino et al., 2007, p. 129).

De acuerdo con Godino et al. (2007) es preciso estudiar con amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre las ideas matemáticas, el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas, para progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica.

A continuación sintetizamos, en primer lugar, la noción de *configuración ontosemiótica* de prácticas, objetos y procesos, que será la herramienta teórica para llevar a cabo el primer objetivo (O1). Es importante destacar que las prácticas matemáticas tienen un rol fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y por ellas se entiende a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartidas en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Asimismo, pueden ser conceptualizadas como "la combinación de una práctica operativa, a través de la cual se leen y producen los textos matemáticos y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre la práctica operativa" (Font, Godino y Gallardo, 2013, p. 104). Si son llevadas a cabo por una persona se considera un sistema de prácticas personales, mientras que si son compartidas en el seno de una institución, se trata de un sistema de prácticas institucionales. En el capítulo 2 usaremos estas herramientas teóricas para analizar el razonamiento diagramático que se despliega en la resolución de un problema sobre fracciones.

En segundo lugar, mencionamos el modelo de conocimiento didáctico matemático (CDM), propuesto por Godino (2009), que servirán de apoyo para afrontar el segundo objetivo (O2).

1.4.1. Configuraciones ontosemióticas

En el marco del EOS se postula que en las prácticas matemáticas intervienen seis tipos de objetos matemáticos primarios:

- lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.);
- situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios);
- conceptos: pueden ser introducidos mediante definiciones o descripciones (recta, punto, número, media, función);
- proposiciones (enunciados sobre conceptos);
- procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo);
- argumentos (enunciados usados para justificar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Las situaciones – problemas son la razón de ser de la actividad matemática escolar; el lenguaje es la parte ostensiva que representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la comunicación y acción en el trabajo matemático; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino que es relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; a su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas como sistemas conceptuales, teorías, etc. (Godino et al., 2007). Cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática se activa un conglomerado articulado por estos tipos de objetos matemáticos, los cuales son conectados entre si formando una configuración de objetos primarios.

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser contemplados desde cinco pares de puntos de vista duales (figura 1) (Font et al., 2013); a continuación se describen de manera sucinta y más adelante se aplican al caso del razonamiento diagramático.

1. *Ostensivo - no ostensivo*. El EOS concede un papel esencial a la ostensión en la práctica matemática los cuales son entendidos, como objetos que se pueden mostrar públicamente, visualmente o de algún otro modo perceptivo. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva, esto significa, que no son perceptibles por sí mismos. Cada objeto matemático (abstracto, ideal, general, inmaterial, no ostensivo) tiene una faceta ostensiva. Esta ostensión puede consistir en las inscripciones simbólicas, necesarias para representar los objetos, entendidos como un todo unitario, y poder "operar" con ellos en progresivos niveles de generalidad, o bien visualizaciones icónicas o diagramáticas que muestren la estructura del objeto, entendido de manera sistémica. Sin embargo, entre las facetas ostensiva y no ostensiva de los objetos matemáticos existen relaciones dialécticas delicadas.

2. *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994, p. 338). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

3. *Extensivo-intensivo*. En esta dualidad un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p. e., la función $y= 2x +1$) también puede verse como una clase más general (p. e., la familia de funciones $y= mx + b$). Esta dualidad centra la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.

4. Unitario-sistémico. Los objetos matemáticos participan en algunas circunstancias, como entidades unitarias (que se suponen conocidas previamente), y en otras, intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

5. *Expresión – contenido*. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos / epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis / descomposición – síntesis/reificación; materialización / concreción – idealización / abstracción; expresión/representación – significación.

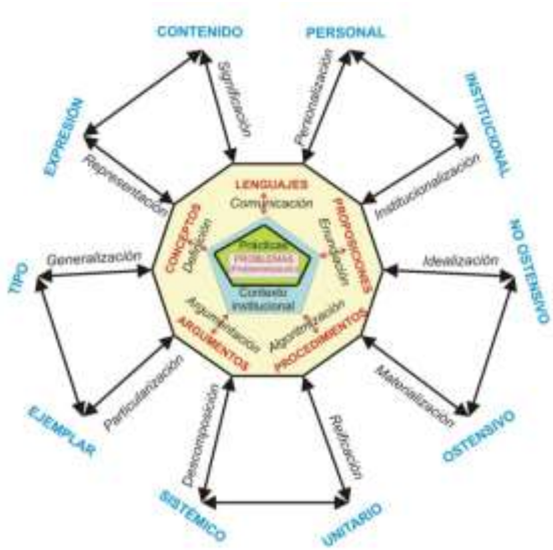


Figura 1. Configuración de objetos y procesos.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008) y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del "objeto matemático" usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

Un objeto abstracto (ideal o hipostático) es entendido en el EOS como una entidad, inmaterial (no ostensiva), general (intensiva), que se puede considerar de manera:

- unitaria (como regla), o sistémica (configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos),
- personal (mental), o institucional (sociocultural),
- antecedente (significante), o consecuente (significado) en una relación semiótica.

El proceso de abstracción mediante el cual emergen o se construyen los objetos abstractos conlleva el concurso de otros procesos cognitivos - epistémicos más básicos: generalización, idealización (entendida como desmaterialización), unitarización (reificación, cosificación), significación, representación.

Esta manera antropológica de entender la abstracción, esto es, la emergencia de objetos generales e inmateriales que constituyen las estructuras matemáticas, tiene importantes consecuencias para la educación matemática ya que el aprendizaje matemático debe tener lugar mediante la progresiva participación de los estudiantes en los juegos de lenguaje matemáticos realizados en el seno de comunidades de prácticas matemáticas (instituciones o grupos socioculturales). De esta manera, el diálogo y la interacción social cobran un papel clave, en contraposición a la mera manipulación y visualización de objetos ostensivos.

Se asume la visión antropológica de Wittgenstein según la cual los conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos no son otra cosa que proposiciones empíricas que han sido "cosificadas" socialmente como reglas. Sherry describe de manera clara y sintética esta concepción wittgeinsteiniana de los objetos matemáticos:

> Para que una proposición empírica se cosifique (harden) como una regla, debe haber un acuerdo abrumador entre las personas, no solo en sus observaciones, sino

> también en sus reacciones ante ellas. Este acuerdo refleja, presumiblemente, hechos biológicos y antropológicos sobre los seres humanos. Una proposición empírica que ha sido cosificada en una regla probablemente tiene valor práctico, implicando inferencias en el comercio, la arquitectura, etc. (Sherry, 2009, p. 66)

Las nociones de sistema de prácticas y configuración de objetos y procesos permiten abordar los análisis epistemológicos y cognitivos en didáctica de las matemáticas según el marco del EOS. En particular, siguiendo el trabajo de Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014, p. 170), permiten formular el problema *epistémico* (caracterización de los conocimientos institucionales) y *cognitivo* (conocimientos personales) en los siguientes términos:

- ¿Cuáles son las prácticas matemáticas institucionales, y las configuraciones de objetos y procesos activadas en dichas prácticas, necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas? (*Significado institucional de referencia*).

- ¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? (*Significado personal*).

- ¿Qué prácticas personales, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional? (*Competencia, conocimiento, comprensión del objeto por parte del sujeto*).

Una vez que se dispone de herramientas para abordar las cuestiones epistémicas y cognitivas se puede intentar responder cuestiones de diseño instruccional, relativas al proceso pretendido y a las reglas que condicionan su desarrollo:

- ¿Qué tipos de interacciones didácticas (entre las personas y los recursos) se deberían implementar en los procesos instruccionales que sean idóneas para promover los aprendizajes matemáticos?

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?

Estas cuestiones, que tienen un carácter *prospectivo* (previo a la puesta en marcha), se completan con otras que siguen a la implementación (carácter *retrospectivo*), que de manera genérica podrían enunciarse en los siguientes términos: ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación de un proceso de estudio matemático para mejorar el aprendizaje? Este análisis retrospectivo es común a toda ingeniería y, más en general, a todo proyecto educativo, que tienen un carácter cíclico: la mejora se basa tanto en la fundamentación teórica como en el contraste experimental (Godino et al., 2014).

1.4.2. Modelo de conocimientos didáctico – matemáticos (CDM) del profesor de matemáticas

Como ya hemos mencionado, el objetivo O2 está apoyado en el modelo de conocimiento del profesor de matemáticas descrito en Godino (2009) como "conocimiento didáctico - matemático" (CDM), el cual desarrolla otros modelos existentes, en particular el MKT (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), mediante la aplicación de las herramientas conceptuales y metodológicas propuesta por el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Este modelo permite orientar el diseño de acciones formativas y elaborar instrumentos de evaluación; establece que el profesor debe ser capaz de prever posibles soluciones de una tarea matemática, distinguiendo las posibles secuencias de prácticas operativas y discursivas que el resolutor podría implementar en cada caso. También debe poder identificar la trama de objetos *ostensivos* (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) imbricados en las prácticas matemáticas, así como las relaciones potencialmente conflictivas entre los diversos tipos de lenguajes movilizados y los procesos matemáticos involucrados.

Las facetas epistémica y cognitiva son claves en este modelo, el cual postula para ellas un punto de vista antropológico y semiótico: la matemática como actividad humana que adquiere significados (Godino, 2009, p. 21). Específicamente, el estudio que aquí presentamos se encuentra contenido en dichas componentes:

- la faceta epistémica: conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos);

- la faceta cognitiva: conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.

Es importante destacar que para proponer cambios fundamentados en un proceso instruccional, el EOS introduce la noción de idoneidad didáctica; dicha noción se concibe como un criterio global de pertinencia, cuyo principal indicador empírico es el grado de adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos o implementados.

Las nociones teóricas del EOS deben ser vistas como herramientas de análisis y reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, y pueden ser utilizadas por los propios profesores para indagar sobre su propia práctica.

Desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje, el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando los objetos y significados puestos en juego, con el fin de enriquecer su desempeño y contribuir al desarrollo de sus competencias profesionales. Aplicadas al caso del profesor de matemáticas estas competencias generales y específicas se pueden concretar en lo que podemos llamar competencia para realizar el "diseño y análisis didáctico", esto es, competencia para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para sintetizar el complejo de conocimientos aportados por la Didáctica de la Matemática, para el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012, p. 3-4).

1.5. METODOLOGÍA

Para alcanzar los objetivos planteados realizamos dos estudios combinados enmarcados en un enfoque cualitativo, ya que se pretende profundizar y ampliar el tema de estudio y obtener una riqueza interpretativa (Hernández Sampieri, Fernández-Collado y Baptista Lucio, 2010, p. 17).

Estudio 1. Esta primera parte de la investigación está basada en la búsqueda sistemática de fuentes documentales sobre visualización y razonamiento diagramático en educación matemática y su análisis en términos ontosemióticos. Dichas nociones serán interpretados como unas prácticas matemáticas específicas, operativas y discursivas, que se ponen en juego ante determinados tipos de tareas. En tales sistemas de prácticas intervienen y emergen unos objetos matemáticos específicos (lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que caracterizan este campo de actividad; las redes formadas por tales objetos y las relaciones entre los mismos constituyen configuraciones mediante las cuales se describen los sistemas de prácticas. Las conclusiones obtenidas motivaron el desarrollo del segundo estudio.

Estudio 2. Se describe el diseño de una acción formativa para el desarrollo de competencias de análisis epistémico y cognitivo. La implementación se lleva a cabo con futuros profesores de matemáticas que cursan el Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria. Dicho diseño, se inscribe dentro del enfoque metodológico del *diseño didáctico* (Kelly, Lesh y Baek, 2008) o *ingeniería didáctica* (Godino et al., 2013), en el cual se distinguen cuatro fases en la investigación: estudio preliminar, diseño instruccional, implementación y análisis de resultados.

Esta experiencia de aula se realiza en las condiciones habituales, dentro de la asignatura de Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas; por lo tanto se planifica un tiempo limitado para su desarrollo. En el capítulo 3 mostraremos el diseño concreto propuesto para este estudio, su interés, objetivos y desarrollo previsto.

CAPÍTULO 2.

INVESTIGACIONES SOBRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

2.1. VISUALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

De acuerdo con Zimmermann y Cunningham (1991), la visualización no es una invención reciente; diversos trabajos destacan la función y el uso de la visualización en la educación matemática. De manera general, estos autores, utilizan el término visualización para "describir el proceso de producción o uso de representaciones geométricas o gráficas, de conceptos, principios o problemas matemáticos, ya sean dibujados a mano o por recursos informáticos" (p. 1). "En matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para un fin, que es la comprensión" (p. 3).

Arcavi (2003) describe la visualización como:

> la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas. (p. 217)

Asimismo, este autor considera que la matemática, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles, no solo en el campo de la geometría. Mediante la visualización cualquier organización puede ser sinópticamente comprendida como una configuración, haciendo visible todo lo que no es accesible a la visión y aportando una aprehensión global de cualquier organización de relaciones (Duval, 2002).

La visualización al servicio de la resolución de problemas, puede desempeñar un papel central para "inspirar a toda una solución, más allá de lo meramente procedimental" (Arcavi, 2003, p. 224). Así mismo, puede acompañar a un desarrollo simbólico, ya que una imagen visual, en virtud de su concreción, puede ser "un factor esencial para la creación del sentimiento de evidencia e inmediatez " (Fischbein, 1987, p. 101).

Duval (2002), distingue entre visión y visualización. La visión es la percepción directa de un objeto espacial; la percepción visual necesita exploración mediante movimientos físicos, del sujeto que ve, o del objeto que se mira, porque nunca da una aprehensión completa del objeto. Entiende la visualización como representación semiótica de un objeto, una organización bidimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades. Mediante la visualización cualquier organización puede ser sinópticamente comprendida como una configuración haciendo visible todo lo que no es accesible a la visión y aportando una aprehensión global de cualquier organización de relaciones (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012, p. 111).

Reed (2010), argumenta que la visualización "trata de todas esas maneras en que fotos, imágenes visuales y metáforas espaciales influyen en nuestra manera de pensar" (p. 3); "ofrece un método de ver lo invisible" (Arcavi, 2003, p. 216). Este "ver" puede ser puramente mental y entonces involucra objetos no-ostensivos, o puede estar relacionado con una representación física y entonces ser objeto perceptible (Godino et al., 2012, p. 111).

Para Guzmán (2002) el proceso de visualización, está basado en gran parte, en la interacción con muchas personas, en la inmersión y la inculturación en el contexto histórico y social de las matemáticas. Por lo tanto "[visualizar] no es una visión inmediata de las relaciones, sino más bien una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación, que sólo podemos hacer cuando hemos aprendido a escribir adecuadamente el tipo de comunicación que nos ofrece" (p. 4).

En este trabajo sostenemos que el rol de la visualización en la actividad matemática escolar es complejo y por lo tanto no debe ser vista como una simple herramienta para justificar una práctica, ya que se ponen en juego objetos visuales "los cuales interaccionan no solo con las inscripciones simbólicas, sino también y principalmente con el entramado de objetos conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos que se ponen en juego en las correspondientes configuraciones" (Godino et al., 2012, p. 127).

Godino et al. (2012) analizan la noción de visualización aplicando las herramientas del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS) y proponen distinguir entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Fijan la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica los cuales son considerados como visuales si ponen en juego la percepción visual. Aunque las representaciones simbólicas (lengua natural o lenguajes formales) consisten en inscripciones visibles, no consideran dichas inscripciones como propiamente visuales, sino como analíticas o sentenciales. Los lenguajes secuenciales (por ejemplo, lógicas simbólicas, lenguajes naturales) usan solo la relación de concatenación para representar relaciones entre objetos. Por el contrario en los diagramas se hace uso de relaciones espaciales para representar otras relaciones.

> La idea es que los lenguajes sentenciales están basados en señales acústicas que son secuenciales por naturaleza, y por ello deben tener una sintaxis compleja que lo compense para expresar ciertas relaciones - mientras que los diagramas, siendo bidimensionales, son capaces de mostrar algunas relaciones sin la intervención de una sintaxis compleja. (Shin y Lemon, 2008, sec. 3)

Estos tipos de lenguajes son analizados en diversas investigaciones. Skemp (1993), por ejemplo, distingue entre tipos de lenguajes visuales y verbales considerando que para la representación de los conceptos matemáticos estos lenguajes pueden darse en forma conjunta. Por lenguaje verbal, entiende el uso de palabras, en forma oral o escrita; por lenguaje visual, al uso de gráficos y dibujos, pero también se refiere a aquellos estímulos perceptibles que dan la idea de una figura. "Los símbolos visuales se ejemplifican con claridad por medio de diagramas de todas clases, en particular figuras geométricas" (Skemp, 1993, p. 100) y el lenguaje algebraico, referido a la notación matemática, es interpretado como una taquigrafía verbal, "que puede leerse en voz alta, o comunicarse incluso sin tomar una forma visual" (p. 101). En su trabajo describe el lenguaje visual en oposición al verbal – algebraico y analiza tanto los diversos contextos en los que se utilizan como las complementariedades entre ambos. Rivera (2011, p. 6) recoge estas ideas (tabla 1).

Tabla 1

Comparación entre lenguajes

VISUAL	VERBAL – ALGEBRAICO
Posee propiedades espaciales abstractas como la forma y la posición	Posee propiedades abstractas que son independientes de la configuración espacial como el número
Es más difícil de comunicar	Es más fácil de comunicar
Puede representar un pensamiento de forma más personal	Puede representar un pensamiento más socializado
Es integrativo (muestra la estructura)	Es analítico (muestra el detalle)
Es simultáneo	Es secuencial
Es intuitivo	Es lógico

Guzmán identifica distintos tipos de visualización de acuerdo al grado de correspondencia entre la situación matemática y la forma concreta de representación: isomorfa, homeomorfa, analógica y diagramática. La diagramática es considerada como un tipo de visualización, en la cual "nuestros objetos mentales y sus relaciones mutuas, relativas a los aspectos que son de interés para nosotros, son representados por diagramas que constituyen una ayuda útil en nuestros procesos de pensamiento" (Guzmán, 2002, p. 8).

2.2. DIAGRAMAS

2.2.1. Clasificación de los signos

Un punto esencial para el aprendizaje de las matemáticas, refiere al problema del significado de los signos utilizados en matemáticas (Dörfler, 2000). Considerando la semiótica como la teoría de los signos, el problema radica en que existen diferentes tradiciones en semiótica que derivan de una gran variedad de disciplinas con intereses específicos, como la filosofía, lingüística, psicología, etc. (Hoffmann, 2003; Bakker y Hoffmann, 2005).

Para Peirce, “un signo es algo que al conocerlo nos hace conocer algo más” (CP 8.332); sin embargo, el signo no existe si no actúa en una relación tríadica con su objeto. Por lo tanto, cualquier acción del signo implica una relación conectada por: el signo, su objeto y su interpretante (figura 2); estos tres elementos están explícitos en la definición que hace Peirce de signo:

> un signo, o *representamen* es algo que está por algo para alguien. Se dirige a alguien, es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o tal vez un signo más desarrollado. Ese signo que crea es lo que llamo el interpretante del primer signo. El signo significa algo, su objeto. (CP 2.228)

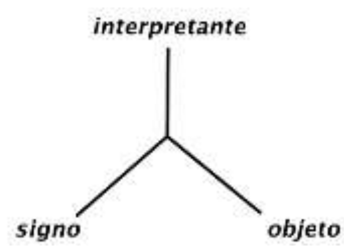


Figura 2. Proceso semiótico

Bakker y Hoffamann (2005) consideran este interpretante como una reacción a un signo o, el efecto en la actuación, sentir y pensar; en otras palabras, "el significado" del signo (p. 336). “Lo que Peirce quiere decir exactamente como interpretante es difícil de precisar. Es algo como una mente, un acto mental, un estado mental, o una característica o cualidad de la mente; de cualquier modo el interpretante es inexcusablemente mental” (Burch, 2010, p. 9).

Para Peirce, los signos se clasifican según la relación que mantengan con su objeto. Esto significa, en el contexto de “la división más fundamental de los signos, en íconos, índices y símbolos” (CP 2.275), que a su vez, coinciden con las relaciones de similitud, contigüidad y convención.

Los iconos mantienen una relación de similitud con el objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo: pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc.

> Cada imagen es esencialmente una representación de ese tipo. Así es cada diagrama, incluso aunque no haya ninguna semejanza sensorial entre éste y su objeto, sino solamente una analogía entre las relaciones de las partes de cada uno. Particularmente digno de notificación son los iconos en los que la semejanza es ayudada por las normas convencionales. (CP 2.279)

Por lo tanto, “algunos iconos tienen *semejanza estructural* con sus objetos, mientras que otros tienen *semejanza pictórica”* (Legg, 2008, p. 208).

Los índices tienen una relación de contigüidad con el objeto que representan respecto a la realidad, ya sea de carácter causal o intencional. Por ejemplo una huella (índice de alguien que pasó por ahí), un rayo (es índice de tormenta), etc.

Los símbolos son signos que están relacionados con su objeto a través de una relación puramente convencional. Representan al objeto designado en virtud de un hábito o regla que es independiente de cualquier cualidad física, o de contigüidad contextual con el objeto. Por ejemplo: palabras, logotipos, escudos de armas, señales de tráfico.

Para Peirce todo nuestro pensamiento se realiza en los signos de algún tipo u otro, ya sea imaginado o en la realidad percibida, “sin embargo, para transmitir el significado de un signo, hay que transformarlo en algo perceptible” (Otte, 2006, p. 13).

2.2.2. Características de los diagramas

En las investigaciones analizadas en el campo de la educación matemática se proponen diferentes concepciones sobre el uso de diagramas. Arcavi lo incluye como un recurso visual más que articula con la visualización; pero según la literatura sobre razonamiento diagramático, los diagramas, entendidos en el marco de la semiótica peirceana (Dörfler, 2005; Bakker y Hoffmann, 2005; Rivera, 2011), constituyen un recurso esencial del razonamiento matemático, así como en otros campos y disciplinas científicas (Shin y Lemon, 2008).

Encontramos que dichas investigaciones presentan una doble concepción sobre la noción de diagrama. Una concepción amplia en la que casi cualquier tipo de inscripción que hace uso del posicionamiento espacial en dos o tres dimensiones (derecha, izquierda; delante, detrás; arriba, abajo; inclusión, intersección, separación; acumulación, …) es un diagrama (figuras geométricas; gráficos cartesianos; matrices; grafos; mapas conceptuales; organigramas; croquis y mapas, …). Otra concepción más restringida requiere poder realizar con dichas representaciones determinadas transformaciones, combinaciones y construcciones según ciertas reglas sintácticas y semánticas específicas. Las partes constituyentes de un diagrama pueden ser cualquier tipo de inscripción como letras, numerales, signos especiales o figuras geométricas.

Peirce (CP 4.418) define los diagramas como un signo, que es predominantemente un icono de las relaciones, el cual debe llevarse a cabo en un sistema coherente de representaciones basado en una única y sencilla idea básica. Conforme a esta sintaxis, a partir de la creación, y por medio de la observación de ese diagrama, es posible sintetizar y mostrar las relaciones entre los elementos que antes parecían no tener ninguna conexión necesaria (Batt, 2007, p. 246-247). Por lo tanto, un diagrama es un signo complejo que incluye iconos, índices y símbolos. Campos (2007) recoge esta idea peirceana, de que somos capaces de representar "este mundo puramente hipotético" (también llamado "ojo de la mente") a partir de signos; de manera más precisa, "debemos representar un mundo matemático puramente hipotético por medio de lo que Peirce llama un diagrama". "Un dibujo o modelo se puede emplear para ayudar a la imaginación, pero la cosa esencial a realizar es el acto de imaginar" (Peirce, NEM 4:219). Un diagrama, entonces, es un signo que representa en nuestras mentes objetos y relaciones que conforman a nuestra hipótesis (Campos, 2007, p. 474).

Peirce incluye en la noción de diagrama a las fórmulas algebraicas ya que las entiende como iconos de relaciones entre sus elementos constituyentes. Las fórmulas algebraicas pueden ser manipuladas, "y mediante la observación de los efectos de tal manipulación se descubren propiedades" (CP 3.363). Precisamente, una característica que distingue a los iconos es que mediante la observación directa del mismo se pueden descubrir otras verdades relativas al objeto distintas de las que son suficientes para determinar su construcción. Esta capacidad de revelar verdades no esperadas es precisamente en lo que radica la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo que su carácter icónico-diagramático es el que prevalece. Así, por ejemplo, la expresión $y = x^2 - 2x + 1$, es una parábola; la mera expresión informa de las propiedades esenciales de dicho objeto matemático. Sin embargo, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas de manera aislada, no son iconos, sino índices: cada letra es un índice de una cantidad. Por el contrario, los signos +, =, /, etc., son símbolos en el sentido de Peirce. "En las expresiones algebraicas encontramos, por tanto, ejemplo de la imbricación de los tres tipos de signos en la escritura matemática: las letras funcionan como índices, los signos de las operaciones, igualdad, desigualdad, etc. son símbolos, mientras las expresiones como un todo funcionan como un icono" (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 47).

Las figuras geométricas, como los cuadrados también son diagramas porque encarnan esas mismas relaciones que el objeto que representa, (relaciones entre sus lados y ángulos, conllevan inscripciones simbólicas por convención, etc.). Goodman (1976, p. 170) argumenta que “la mera presencia o ausencia de letras o figuras no hace la diferencia. Lo que importa en un diagrama, como con la cara de un instrumento, es como lo leemos”; en un sentido wittgensteniano, lo importante es observar el sentido con el que se utilizan los diagramas. La diversidad de diagramas reflejan la amplia gama de usos, por ejemplo, los que demuestran pruebas matemáticas, los que ilustran los pasos de ensamblaje de objetos, los que describen los sistemas físicos, los que organizan e interpretan datos, los que representan identidades corporativas, y los que representan la solución de problemas (Novick, 2006, p.1827). En un intento de comprender mejor esta importante colección de objetos, Novick propone una amplia clasificación de diferentes diagramas y distingue tres aspectos del uso experto de diagramas para el razonamiento y la resolución de problemas (Novick, 2006, p. 1828).

Investigaciones recientes (Bakker y Hoffmann, 2005; Novick, 2006; Rivera, 2011) demuestran empíricamente que en educación matemática, para poder desarrollar conceptos, los estudiantes necesitan aprender a razonar con diagramas.

2.3. CARACTERÍSTICAS DEL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

> "Lo primero que descubrí fue que todo razonamiento matemático es diagramático y que todo razonamiento necesario es razonamiento matemático, no importa lo simple que puede ser" (Peirce, NEM 4:47).

Peirce relaciona el razonamiento con la experimentación: "Euclides, habiendo construido un diagrama de acuerdo a una prescripción, dibuja una línea adicional, con lo cual su mente observa nuevas relaciones que no se encuentran entre aquello prescrito" (CP 6.568). No es suficiente con observar; es necesario poner en práctica un plan de acción. Pero el punto más importante del arte "consiste en la introducción de abstracciones convenientes. Con esto quiero decir, una transformación tal de nuestros diagramas, que los caracteres de un diagrama puedan aparecer en otro como cosas" (CP 5.162). En este sentido, el razonamiento diagramático "es una herramienta para generar conocimiento" (CP 4.571).

Para Hoffmann (2011) la función principal del razonamiento diagramático es facilitar los procesos de pensamiento, individuales o sociales, en situaciones que son demasiado complejas para ser afrontadas exclusivamente por medios cognitivos internos. Tal facilitación debe ser posible, dadas ciertas características del razonamiento diagramático, que le permitan al sujeto "la toma de decisiones y la gestión de conflictos por medio de representaciones externas, en la resolución individual y colaborativa de problemas" (p. 193).

Dörfler (2003, p. 41) identifica algunas de las características de los diagramas y el razonamiento diagramático:

- las inscripciones diagramáticas tienen una estructura consistente en una disposición espacial específica de sus partes y elementos y relaciones espaciales entre ellos;
- dada esta estructura diagramática, se realizan operaciones guiadas por reglas sobre y con las inscripciones mediante transformación, composición, descomposición y combinación de las mismas (cálculos en aritmética y álgebra, construcciones en geometría, derivaciones en lógica formal);

- otro tipo de reglas convencionales gobiernan la aplicación e interpretación del diagrama dentro y fuera de las matemáticas, esto es, lo que se puede considerar que diagrama designa o modeliza;
- las inscripciones diagramáticas tienen un carácter genérico que permite la construcción de ejemplares arbitrarios del mismo tipo de diagrama;
- el razonamiento diagramático es una manipulación de diagramas basada en reglas, inventiva y constructiva, para investigar sus propiedades y relaciones;
- el razonamiento diagramático no es mecánico o puramente algorítmico, más bien es imaginativo y creativo;
- en el razonamiento diagramático el foco está en las inscripciones diagramáticas cualquiera que pueda ser su significado referencial. Los objetos del razonamiento diagramático son los propios diagramas y sus propiedades previamente establecidas;
- el razonamiento diagramático eficiente y exitoso presupone una experiencia intensa y extensa con la manipulación de diagramas. Un amplio "inventario" de diagramas, sus propiedades y relaciones apoya y ocasiona el uso creativo e inventivo de diagramas.

El razonamiento diagramático implica tres pasos (Bakker y Hoffmann, 2005, p. 340): en primer lugar, construir uno o varios diagramas mediante un sistema de representación; en segundo lugar, experimentar con los diagramas; y en tercer lugar, observar los resultados de la experimentación y reflexionar sobre ellos. Cualquier experimentación con un diagrama se ejecuta dentro de un sistema de representación "y es una regla o hábito" situado dentro de una práctica. A partir de esa experimentación y observación, Peirce destaca que se pueden "descubrir relaciones inadvertidas y ocultas entre las partes de un diagrama" (CP 3.363). En este sentido, Rivera, destaca que:

> con la ayuda del razonamiento diagramático, el foco cambia hacia la detección, construcción y establecimiento de regularidades y relaciones invariantes que eventualmente toman la forma de conceptos y teoremas que son en sí mismos diagramas en algún otro formato. (Rivera, 2011, p. 229)

2.4. REGISTRO DE REPRESENTACIÓN Y DIAGRAMAS

Duval (2006) atribuye un papel esencial no solo al uso de diferentes sistemas de representación semiótica (SRS) para el trabajo matemático, sino al tratamiento de los signos dentro de cada sistema de representación, como así también, a la conversión entre diferentes SRS:

> El papel que los signos juegan en matemáticas no es ser sustituidos por otros objetos sino por otros signos. Lo que importa no es la representación sino sus transformaciones. Contrariamente a otras áreas del conocimiento científico, los signos y la transformación de los signos y las representaciones semióticas son el corazón de la actividad matemática. (p. 107)

Dörfler (2005), reconoce que los diagramas pueden constituir un registro de representación autónomo para representar y producir conocimiento matemático en ciertos campos específicos, pero no es completo. Necesita ser complementado por el lenguaje conceptual-verbal para expresar nociones como continuidad y diferenciabilidad; imposibilidad de existencia de determinados objetos; o situaciones de uso de los cuantificadores “para todo”, “cada uno” y “existe”.

Las relaciones entre los objetos físicos, los diagramas y demás visualizaciones usadas en el práctica matemática y los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) son conflictivas. Duval (2006, p. 129) concibe el objeto matemático como “el invariante de un conjunto de fenómenos o el invariante de alguna multiplicidad de posibles representaciones”, e insiste en no confundir el objeto matemático con sus diversas representaciones. Esto le lleva a plantear la *paradoja cognitiva* del aprendizaje matemático:

> El problema crucial de la comprensión matemática para los aprendices, en cualquier nivel del currículo, surge del conflicto cognitivo entre estos dos requerimientos opuestos: cómo pueden distinguir el objeto representado de la representación

> semiótica usada si no pueden tener acceso al objeto matemático sino por medio de las representaciones semióticas. (Duval, 2006, p. 107)

Shin y Lemon señalan un problema con relación al uso de diagramas en el paso de lo particular a lo general:

> Una cuestión central, si no el problema central, es el *problema de la generalidad*. El diagrama que aparece en una demostración de Euclides proporciona un ejemplar único del tipo de configuraciones geométricas a las que se refiere la demostración. No obstante las propiedades que parecen cumplirse en el diagrama son tomadas como que se cumplen en *todas* las configuraciones del tipo dado. ¿Qué justifica este salto de lo particular a lo general? (Shin y Lemon, 2008, sec. 4.1)

2.5. DIAGRAMAS Y OBJETOS ABSTRACTOS

Otros autores (Bakker y Hoffmann, 2005), siguiendo a Peirce, además de asignar un papel central a las operaciones realizables sobre inscripciones diagramáticas, asumen una concepción de los objetos matemáticos condensada en la abstracción hipostática, según la cual una cierta característica de un conjunto de objetos es considerada como un nuevo objeto; se asigna un nombre a un predicado concreto creándose de ese modo un objeto abstracto. “En matemáticas, una colección es una abstracción hipostática. Y los números cardinales son abstracciones hipostáticas derivados del predicado de una colección” (Peirce, CP 5.535).

Pensar en los objetos matemáticos como cualidades de colecciones de objetos, o invariantes de un conjunto de fenómenos o representaciones, que son convertidas en nuevos objetos (abstractos) por el mero hecho de ser nombradas con términos específicos es adoptar una posición no exenta de problemas filosóficos, cognitivos, y por tanto, educativos. Supone no tener en cuenta la revolución lingüística que aportó Wittgenstein sobre la actividad matemática y el producto resultante de dicha actividad.

En Godino et al. (2015), se analiza la perspectiva antropológica adoptada por Sherry (2009) sobre el papel de los diagramas en la argumentación matemática, la cual es diferente a la semiótica Peirceana. En el marco de Peirce, los diagramas son un medio indispensable en el proceso de abstracción hipostática. En cambio, Sherry analiza el papel de los diagramas en el razonamiento matemático (geométrico y numérico - algebraico) sin recurrir a la introducción de objetos abstractos, apoyándose en una perspectiva Wittgeinsteiniana sobre la matemática. “Reconocer que un diagrama es uno más entre otros objetos físicos es el paso crucial para comprender el papel de los diagramas en la argumentación matemática” (Sherry, 2009, p. 65). La posición de este autor se basa en observar la manera en cómo las matemáticas se aplican a los objetos concretos. La experiencia con diagramas, debe proporcionar a los estudiantes la oportunidad de ver la relación mutuamente determinante entre la construcción de una regla inferencial y el desarrollo del conocimiento matemático. Se trata de evitar el recurso a los conceptos abstractos concebidos de manera empírico-realista (abstracción hipostática) para entenderlo como reglas gramaticales, consensuadas socialmente, sobre el uso de los lenguajes mediante los cuales describimos nuestros mundos (material o inmaterial). “He enfatizado que el razonamiento diagramático recapitula hábitos del razonamiento matemático aplicado. Bajo esta visión, los diagramas no son representaciones de objetos abstractos, sino simplemente objetos físicos que a veces se usan para representar otros objetos físicos” (Sherry, 2009, p. 67).

2.6. CONFIGURACIONES ONTOSEMIÓTICAS IMPLICADAS EN EL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

Detrás del razonamiento diagramático, del uso de visualizaciones y manipulativos para facilitar el aprendizaje matemático, existe la adopción implícita de una posición empírico - realista sobre la naturaleza de las matemáticas, que no concede el papel esencial al lenguaje y la interacción social en la emergencia de los objetos matemáticos. En cierta manera se supone que el objeto matemático “se ve”, se abstrae de manera hipostática de cualidades empíricas de las colecciones de cosas. Frente a esta posición proveniente de la epistemología y semiótica Peirceana se encuentra la concepción antropológica de las matemáticas según la cual los conceptos y proposiciones matemáticas se deben entender, no como abstracciones hipostáticas de cualidades perceptibles, sino como *regulaciones* de las prácticas operativas y discursivas realizadas por las personas para describir y actuar en el mundo social y empírico en el que vivimos.

En trabajos previos de Godino y cols. se viene desarrollando una técnica de análisis semiótico de las prácticas matemáticas mediante la cual se trata de desvelar la trama de objetos matemáticos que se ponen en juego en dichas prácticas. Así, en Godino (2002) se realiza una primera aproximación a dicha técnica analizando una lección de un libro de texto sobre la mediana y en Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) se analizan las respuestas de un niño a una tarea relacionada con el aprendizaje de la decena.

En esta sección se muestra una versión del análisis semiótico que consideramos más operativa y eficaz para analizar el papel del lenguaje diagramático en la práctica matemática. Utilizamos esta técnica para desvelar los tipos de prácticas, objetos y procesos[1] que se ponen en juego en la resolución de un problema sobre fracciones aplicando tres procedimientos que involucran el uso de razonamiento diagramático. Se tratará de mostrar que acompañando al lenguaje visual – diagramático es necesario el concurso del lenguaje secuencial – analítico, y que junto a los objetos ostensivos, consustanciales con ambos tipos de lenguajes, está siempre presente una configuración de objetos abstractos que participan de la práctica matemática. Así mismo, mostraremos que la resolución del problema implica la realización de procesos de particularización de objetos abstractos previamente compartidos y procesos de materialización (construcción y manipulación de diagramas).

2.6.1. Análisis de una tarea prototípica de visualización y razonamiento diagramático

En esta sección analizamos el enunciado y resolución de la siguiente tarea aplicando nociones del EOS:

> *Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol. ¿Qué porcentaje de alcohol lleva un Martini?*

[1] Solo mencionamos los procesos de significación y de particularización.

2.6.1.1. *Resolución 1: Uso de un diagrama de áreas para representar las fracciones*

La secuencia de diagramas de áreas que se muestra en la figura 3 es explicativa del proceso de resolución para alguien que conozca las convenciones asumidas, así como los conceptos y procedimientos implicados. Sin embargo, la justificación y explicación de la solución requiere realizar una secuencia de prácticas discursivas y operativas, como la que se muestra a continuación.

1) La cantidad unitaria de Martini se representa mediante un cuadrado, (figura 3A).
2) El cuadrado se divide en 6 partes iguales verticalmente, (figura 3B).
3) La fracción de ginebra son los 5/6 del cuadrado unidad, (figura 3B, color rojo).
4) La fracción de vermut son 1/6 de dicho cuadrado, (figura 3B, color blanco).
5) El rectángulo blanco que representa la cantidad de vermut se divide en 6 partes iguales de las cuales 1 parte corresponde a la cantidad de alcohol (1/6 de 6), (figura 2C).
6) La cantidad de alcohol de la ginebra se representa por las dos barras azules de la figura 3D, (2/5 de 5).
7) Las cantidades de alcohol en la ginebra y el vermut se deben expresar en la misma unidad de medida, para lo cual los dos rectángulos azules que representan la cantidad de alcohol en la ginebra se debe dividir horizontalmente en 6 partes iguales (figura 3E).
8) La cantidad total de alcohol en el Martini serán 12 + 1 = 13 cuadraditos (figura 3E).
9) La cantidad total de Martini representada por el cuadrado inicial se debe medir también con la misma unidad que se mide las cantidades de alcohol, para lo cual se prolongan las seis líneas horizontales (figura 3F).
10) La fracción de alcohol del Martini será 13/36 (figura 3F).
11) Puesto que la proporción (tanto por uno) de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.

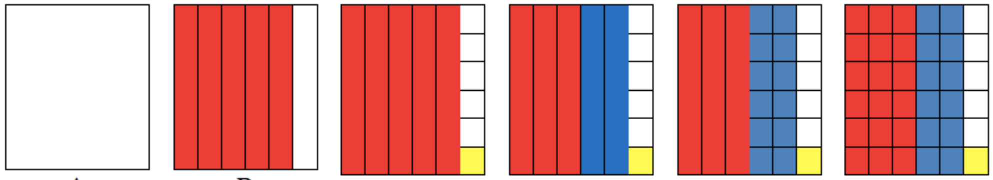


Figura 3. Diagramas de áreas para resolver el problema del Martini

En términos de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval se comienza pasando del registro secuencial de la lengua natural (enunciado de la tarea) al registro gráfico (diagramas de áreas); dentro de este registro se realizan determinados tratamientos para finalmente pasar de nuevo al registro secuencial: *La fracción de alcohol del Martini es 13/36*. Pero como se muestra en la secuencia de prácticas 1) a 9) el registro secuencial acompaña necesariamente al registro gráfico. Así mismo, las prácticas operativas y discursivas puestas en acción están guiadas por la trama de objetos y procesos *no ostensivos* que desvelamos en la tabla 2. En la tercera columna de dicha tabla indicamos el papel (rol o función) que desempeña cada práctica en el proceso resolutivo así como su intencionalidad.

Tabla 2

Configuración de objetos y significados

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
	Enunciado	
Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut.	*Concepto:* Un todo unitario de volumen. *Procedimiento*: Composición de un todo unitario a partir de partes iguales.	Describe la composición del Martini.
Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol.	*Concepto:* fracción como parte de un todo unitario que se divide en partes iguales de las cuales se individualiza una parte. Se particulariza para el caso de la composición fraccionaria de la ginebra (2/5) y el vermut (1/6).	Fija la fracción de alcohol en la ginebra y el vermut como dato.
¿Qué porcentaje de alcohol lleva un Martini?	*Conceptos*: Todo unitario; fracción, parte de un todo dividido en partes iguales; porcentaje.	Enuncia la cuestión problemática de la tarea.
	Resolución	
1) La cantidad unitaria de Martini se representa mediante un	Concepto: cantidad unitaria.	Particularizar y materializar el concepto de cantidad

cuadrado, (figura 3A).		unitaria.
2) El cuadrado se divide en 6 partes iguales verticalmente, (figura 3B).	Procedimiento: división de la unidad en partes iguales.	Acción requerida para representar de manera ostensiva (diagramática) la composición del Martini en la siguiente práctica, teniendo en cuenta el enunciado.
3) La fracción de ginebra son los 5/6 del cuadrado unidad. (figura 3B, color rojo).	Concepto: fracción como parte de un todo dividido en partes iguales. Convención: la fracción se expresa de dos maneras equivalentes, con un diagrama aritmético (5/6) y un diagrama gráfico.	Expresar fraccionariamente la cantidad de ginebra en el Martini.
4) La fracción de vermut son 1/6 de dicho cuadrado (figura 3B, color blanco).	Concepto: fracción como parte de un todo dividido en partes iguales. Convención: la fracción se expresa de dos maneras equivalentes, con un diagrama aritmético (1/6) y un diagrama gráfico.	Expresar fraccionariamente la cantidad de vermut en el Martini.
5) El rectángulo blanco que representa la cantidad de vermut se divide en 6 partes iguales de las cuales 1 parte corresponde a la cantidad de alcohol (1/6 de 6) (figura 3C).	Procedimiento: división de una unidad en partes iguales. Concepto: fracción como operador.	Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol en el vermut.
6) La cantidad de alcohol de la ginebra se representa por las dos barras azules de la figura 3D (2/5 de 5).	Concepto: fracción como operador.	Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol en la ginebra.
7) Las cantidades de alcohol en la ginebra y el vermut se deben expresar en la misma unidad de medida, para lo cual los dos rectángulos azules que representan la cantidad de alcohol en la ginebra se debe dividir horizontalmente en 6 partes iguales (figura 3E).	Concepto: unidad de medida; medida. Procedimiento: medir un área con una unidad dada.	Hacer posible la medida de todas las cantidades con una misma unidad. Se trata de usar la aritmética natural.
8) La cantidad total de alcohol en el Martini serán 12 + 1 = 13 cuadraditos (figura 3E).	Concepto: magnitud volumen (sumable). Procedimientos: conteo y adición.	Medir la cantidad de alcohol del Martini con números naturales (13 unidades)
9) La cantidad total de Martini representada por el cuadrado inicial se debe medir también con la misma unidad que se mide las cantidades	Procedimiento: medir un área con una unidad dada. Concepto: producto cartesiano de números naturales.	Hacer posible la medida de todas las cantidades con una misma unidad. Se trata de usar la aritmética natural.

de alcohol, para lo cual se prolongan las seis líneas horizontales (figura 3F).		
10) La fracción de alcohol del Martini será 13/36 (figura 3F).	Concepto: fracción como parte de un todo. Proposición: La fracción del alcohol en el Martini es 13/36. Argumentación: está formada por la secuencia de pasos 1) a 10), apoyada en el uso de los diagramas aritméticos y de áreas y del lenguaje secuencial natural.	Respuesta fraccionaria a la cuestión planteada.
11) Puesto que la proporción (tanto por uno) de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.	Conceptos: número racional; proporcionalidad; fracción; aproximación decimal y porcentual. Procedimientos: obtención de la expresión decimal mediante el cociente del numerador y denominar; paso a la expresión porcentual.	Respuesta al problema y su justificación en términos de expresión porcentual.

Además de los procesos indicados en la tabla 1 el sujeto que resuelve el problema basando su razonamiento en el uso de diagramas de áreas realiza procesos de *materialización* de los conceptos y operaciones con fracciones implicadas en el enunciado y de *composición* de los resultados parciales que va obteniendo. La solución la encuentra finalmente mediante un procedimiento aritmético de conteo de las fracciones unitarias que ha representado en el último diagrama mediante un proceso de *idealización* (la razón del número de cuadraditos azules al número total de cuadraditos es la fracción de alcohol del Martini).

Resulta importante destacar que el análisis de cada una de las prácticas individualizadas en esta tabla, como en las siguientes, se puede hacer más detallado. Por ejemplo, en la primera unidad del enunciado, la aplicación sistemática de la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos nos lleva a reconocer que el sujeto que lee el enunciado debe hacer un proceso de interpretación (semiosis o atribución de significado) del diagrama (figura 3), identificando el "concepto de fracción" entendido aquí desde un punto de vista institucional como una regla socialmente convenida: una totalidad unitaria se descompone en partes iguales y se individualiza una o varias de dichas partes. Luego debe realizar un proceso de particularización al caso: el todo unitario se divide en 5 partes iguales y se consideran aparte 2.

2.6.1.2. *Resolución 2: Uso de un diagrama jerárquico*

El diagrama en árbol de la figura 4 es explicativo del proceso de resolución para alguien que conozca las convenciones asumidas, así como los conceptos y procedimientos implicados. Sin embargo, la justificación y explicación de la solución requiere realizar una secuencia de prácticas discursivas y operativas, como la que se muestra a continuación.

1) El diagrama construido en la figura 4 expresa en el primer nivel la descomposición de una cantidad unitaria de volumen de Martini en dos partes, ginebra y vermut, indicando en cada conector la fracción correspondiente.

2) En el segundo nivel se expresa la descomposición de las partes de ginebra y vermut, que ahora son consideradas como cantidades unitarias, en dos partes, alcohol y no alcohol, indicando en cada conector la fracción correspondiente.

3) La fracción de alcohol de la ginebra son los 2/5 de la cantidad de ginebra; como esa cantidad es los 5/6 de la cantidad de Martini, la fracción de alcohol en el Martini procedente de la ginebra será la “fracción de la fracción”, esto es,

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

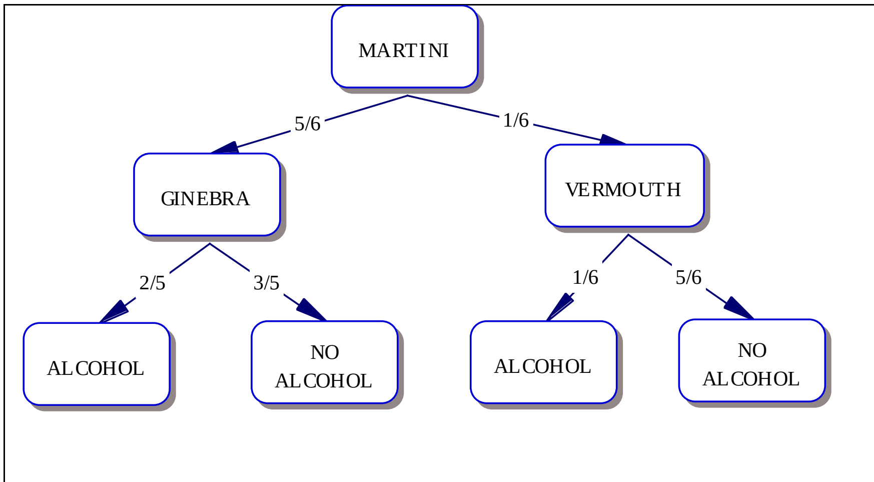
4) La fracción de alcohol del vermut son los 1/6 de la cantidad de vermut; como esa cantidad es 1/6 de la cantidad de Martini, la fracción de alcohol en el Martini procedente del vermut será la “fracción de la fracción”, esto es,

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

5) La fracción total de alcohol en el Martini serán la suma de las fracciones de alcohol procedentes de la ginebra y del vermut, esto es,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$$

6) Dado que la fracción de alcohol del Martini es 13/36 $\approx$ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.



Fracción de alcohol:

$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{13}{36}$$

36,11%

Figura 4. Solución de la tarea usando un diagrama en árbol

La tabla 3 incluye la configuración de objetos y procesos puestos en juego en la solución del problema mediante el uso de diagrama jerárquico de la figura 4.

Tabla 3

Configuración de objetos y significados

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos: conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
	Enunciado *(igual al anterior)*	
	Resolución	
1) El diagrama construido en la figura 4 expresa en el primer nivel la descomposición de una cantidad unitaria de volumen de Martini en dos partes, ginebra y vermut, indicando en cada conector la fracción correspondiente.	Conceptos: primer nivel de un diagrama, conector, cantidad unitaria y fracción. Procedimiento: descomposición de un todo en partes iguales. Convenio de representación: las fracciones sobre los conectores refieren a la relación fraccionaria entre las cantidades conectadas.	Expresar en forma diagramática y fraccionaria la cantidad de ginebra y vermut en el Martini.
2) En el segundo nivel se expresa la descomposición de las partes de ginebra y vermut, que ahora son consideradas como cantidades unitarias, en dos partes, alcohol y no alcohol, indicando en cada conector la fracción correspondiente.	Ídem práctica 1)	Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol presente en la ginebra y en el vermut.
3) La fracción de alcohol de la	Conceptos: multiplicación de	Expresar fraccionariamente la

ginebra son los 2/5 de la cantidad de ginebra; como esa cantidad es los 5/6 de la cantidad de Martini, la fracción de alcohol en el Martini procedente de la ginebra será la "fracción de la fracción", esto es, $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$	fracciones (fracción de una fracción); cantidad unitaria. Procedimientos: multiplicación de fracciones; cambio de unidad al pasar del primer al segundo nivel del diagrama (el volumen de ginebra y vermut son ahora consideradas como nuevas unidades que se fraccionan).	cantidad de alcohol en el Martini que proviene de la ginebra.
4) La fracción de alcohol del vermut son los 1/6 de la cantidad de vermut; como esa cantidad es 1/6 de la cantidad de Martini, la fracción de alcohol en el Martini procedente del vermut será la "fracción de la fracción", esto es, $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$	Ídem práctica 3)	Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol en el Martini que proviene del vermut.
5) La fracción total de alcohol en el Martini serán la suma de las fracciones de alcohol procedentes de la ginebra y del vermut, esto es, $\frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$	Conceptos: suma de fracciones. Procedimientos: suma de fracciones con diferente denominador. Proposición: la fracción de alcohol en el Martini es 13/36. Argumentación: está formada por la secuencia de pasos 1) a 5), apoyada en el uso de los diagramas aritmético y jerárquico y del lenguaje secuencial natural.	Respuesta fraccionaria al problema.
6) Dado que la fracción de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.	Conceptos: número racional; fracción; aproximación decimal y porcentual. Procedimientos: obtención de la expresión decimal mediante el cociente del numerador y denominar; paso a la expresión porcentual.	Respuesta al problema y su justificación en términos de expresión porcentual.

En las dos primeras unidades de la resolución 2, el sujeto debe realizar un proceso de descomposición del sistema de elementos que componen el diagrama (figura 4), distinguiendo en el mismo: tres niveles jerárquicos, las unidades que constituyen el todo unitario en cada nivel, los conectores, las fracciones y operaciones con fracciones que deben realizarse. También debe realizar un proceso de composición de los cálculos parciales realizados en cada rama del árbol para obtener la fracción del alcohol del Martini y de materialización de los cálculos en la expresión diagramática - aritmética,

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{13}{36}$$

El resto de las prácticas discursivas y operativas realizadas, necesariamente apoyadas en el uso del lenguaje secuencial – natural, son imprescindibles para establecer la conexión entre ambos tipos de diagramas y explicar que en las condiciones del problema la fracción de alcohol del Martini es 13/36.

En el diagrama jerárquico se muestra de manera icónica la estructura del sistema de prácticas que hay que realizar para resolver el problema. La fracción de fracción (multiplicación de fracciones) se refleja en la composición de los dos niveles inferiores del diagrama (arriba, abajo) mientras que la suma de fracciones resultantes queda reflejada en la disposición lateral de las dos ramas (izquierda, derecha).

De acuerdo al tipo de diagrama que se ponga en uso para la resolución de la tarea, se movilizan diferentes significados del concepto de fracción: en el diagrama de áreas (figura 3), la fracción interviene como operador de una cantidad de área mientras que en el diagrama en árbol (figura 4), la fracción es la razón entre las partes de un todo genérico que se divide en partes iguales y las partes que se individualizan. Distinguimos que el procedimiento basado en diagramas en áreas tienes rasgos de menor generalidad que el jerárquico.

2.6.1.3 *Resolución 3: Aritmética fraccionaria*

El problema se puede resolver también sin usar diagramas de tipo gráfico, aunque el uso de la expresión fraccionaria, (que en la semiótica de Peirce es también un diagrama) es inevitable. La siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas establece la justificación y explicación de que la fracción de alcohol en el Martini es 13/36.

1) La fracción de ginebra que contiene el coctel es 5/6, porque la unidad de volumen de Martini se ha dividido en 6 partes iguales y 5 corresponden a la ginebra.
2) Por igual razón la de vermut será 1/6.
3) El alcohol contenido en la ginebra es una fracción de la fracción de ginebra, en este caso, 2/5 de 5/6.

4) O sea, $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$
5) El alcohol contenido en el vermut es una fracción de la fracción de vermut, en este caso, 1/6 de 1/6.
6) O sea, $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
7) La fracción de alcohol en el Martini será la suma de las fracciones de alcohol aportado por la ginebra y por el vermut.
8) Esto es, $\frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$
9) Dado que la fracción de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.

En la tabla 4 incluimos la configuración de objetos y procesos que se ponen en juego en la solución del problema mediante aritmética fraccionaria.

Tabla 4

Configuración de objetos y significados

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos: conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
	Enunciado *(igual al anterior)*	
1) La fracción de ginebra que contiene el coctel es 5/6, porque la unidad de volumen de Martini se ha dividido en 6 partes iguales y 5 corresponden a la ginebra.	Concepto: fracción, como parte de un todo. Proposición: la fracción de ginebra en el coctel es 5/6. Argumento: porque el Martini se ha dividido en 6 partes iguales y 5 corresponden a la ginebra.	Expresar en forma fraccionaria la cantidad de ginebra presente en el Martini a partir de los datos del problema.
2) Por igual razón la fracción de vermut será 1/6.	Ídem práctica 1)	Expresar en forma fraccionaria la cantidad de vermut presente en el Martini a partir de los datos del problema.
3) El alcohol contenido en la ginebra es una fracción de la fracción de ginebra, en este caso, 2/5 de 5/6.	Concepto: fracción de una fracción (multiplicación de fracciones).	Establecer la relación de alcohol presente en la ginebra para justificar la práctica 4.
4) O sea, $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$	Proposición: La fracción de alcohol en la ginebra es 1/3. Argumento: porque el nuevo todo unitario (5/6) se divide en 5 partes iguales y se toman 2. Procedimiento: multiplicación de	Expresar en forma fraccionaria la cantidad de alcohol presente en la ginebra.

	fracciones; simplificación de fracciones. Conceptos: número racional; fracción irreducible.	
5) El alcohol contenido en el vermut es una fracción de la fracción de vermut, en este caso, 1/6 de 1/6.	Ídem práctica 3)	Establecer la relación de alcohol presente en el vermut para justificar la práctica 6).
6) O sea, $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$	Ídem práctica 4)	Expresar en forma fraccionaria la cantidad de alcohol presente en el vermut.
7) La fracción de alcohol en el Martini será la suma de las fracciones de alcohol aportado por la ginebra y por el vermut.	Concepto: suma de fracciones.	Interpretar los datos obtenidos en las prácticas anteriores, en términos de la respuesta fraccionaria a tarea, para justificar la práctica 8).
8) Esto es, $\frac{1}{3} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$	Proposición: la fracción de alcohol del Martini es 13/36. Argumento: Ese es el resultado de la suma de las fracciones obtenido aplicando el procedimiento correspondiente (suma de fracciones de diferente denominador).	Respuesta fraccionaria al problema.
9) Dado que la fracción de alcohol del Martini es 13/36 $\approx$ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.	Conceptos: número racional; fracción; aproximación decimal y porcentual. Procedimientos: obtención de la expresión decimal mediante el cociente del numerador y denominar; paso a la expresión porcentual.	Respuesta al problema y su justificación en términos de expresión porcentual.

Consideramos que la solución aritmética fraccionaria es más dependiente del lenguaje secuencial, tal como se pone de manifiesto en las prácticas 1), 2), 3), 5) y 7). Atribuyendo características espaciales a las representaciones fraccionarias y a las transformaciones que se realizan con ellas (el número que está abajo divide, el que está arriba multiplica; se multiplican los denominadores que están abajo y los numeradores que están arriba), la solución aritmética fraccionaria también pone en juego razonamiento diagramático como se muestra en las prácticas 4), 6) y 8).

2.6.2. Poder heurístico de las resoluciones: particularización versus generalización

Además de las soluciones estudiadas en los apartados anteriores, se pueden elaborar otras que implican el uso de distintos grados y modalidades de visualización, o soluciones mixtas que combinan las resoluciones diagramáticas con la aritmética fraccionaria. Como ejemplo, proponemos una variante de la solución aritmética fraccionaria.

1) Supongamos que preparamos 36 litros de Martini.
2) La cantidad de ginebra será $({}^{5}/_{6})$ 36 = 30.
3) La cantidad de vermut, 36 - 30 = 6.
4) La cantidad de alcohol en la ginebra será, $({}^{2}/_{5})$ 30 = 12.
5) La cantidad de alcohol del vermut, $({}^{1}/_{6})$ 6 = 1.
6) La cantidad total de alcohol del Martini será, 12 +1 = 13.
7) Luego la fracción de alcohol en el Martini será de ${}^{13}/_{36}$.

La expresión de las fracciones incorpora un elemento visual nuevo, ya que la disposición del numerador y del denominador indica el papel diferente que desempeña cada uno en la práctica matemática. Con excepción de esta nueva situación, el resto de las prácticas matemáticas se apoyan en el lenguaje secuencial natural. El razonamiento está basado, no obstante, en la participación esencial del concepto de fracción como operador y como relación parte - todo.

Una variante del enunciado de la tarea que requiere un cambio sustancial en la modalidad de diagramas utilizables es el siguiente:

> *Supongamos que el cóctel de Martini se puede preparar con distintas proporciones de ginebra y vermut. Deseamos elaborar una regla (fórmula) que permita determinar la fracción de alcohol del Martini para cada posible composición. Se supone que las fracciones de alcohol de la ginebra y del vermut no cambian (2/5 y 1/6, respectivamente).*

En este caso se espera realizar la siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas apoyadas en el uso de diagramas algebraicos:

1) Supongamos que g/m indica la fracción de la ginebra en el Martini;
2) la fracción de vermut será (m-g)/m;
3) la fracción de alcohol del Martini será

$$A = \frac{2}{5} \times \frac{g}{m} + \frac{1}{6} \times \frac{(m-g)}{m} = \frac{7g+5m}{30m} = \frac{7}{30}\left(\frac{g}{m}\right) + \frac{1}{6}$$

Consideramos que la generalidad que se logra con los diagramas algebraicos no se puede conseguir con otro tipo de diagramas, lo que explica el uso tan extendido del razonamiento algebraico en la práctica matemática. Sin embargo, la explicación y consiguiente comprensión de los conceptos y procedimientos generales, requiere el concurso de otros diagramas (con mayor grado de visualización y particulares), en las etapas previas del aprendizaje matemático.

2.6.3. Sinergia entre los lenguajes diagramáticos y secuenciales

En este trabajo hemos mostrado que existe una estrecha imbricación entre los objetos que intervienen en la actividad matemática, específicamente entre,

- los lenguajes diagramáticos - visuales y los lenguajes secuenciales,
- los objetos ostensivos (materiales) y los no ostensivos (inmateriales),
- los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales).

El uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para lograr la justificación y explicación de las tareas matemáticas y las prácticas operativas y discursivas implicadas en su realización. En consecuencia, entre ambos tipos de lenguajes hay cooperación para llevar a cabo el trabajo matemático considerando que el componente diagramático-visual aporta “un papel clave en la comprensión de la naturaleza de la tarea y en el momento de formulación de conjeturas, mientras que el componente analítico lo será en el momento de generalización y justificación de las soluciones.

Dado el análisis que hemos realizado, pusimos en evidencia que los medios de expresión son “artefactos” empíricos que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos, cuya naturaleza conceptual, proposicional, procedimental y argumentativa constituyen la esencia de la actividad matemática realizada, junto con el apoyo de los objetos ostensivos. También hemos desvelado algunos procesos de particularización, generalización; descomposición, composición; materialización, idealización que se ponen en juego en el proceso demostrativo – explicativo realizado.

Nuestro análisis concuerda y apoya la posición de Sherry sobre el uso de diagramas en el trabajo matemático: lo que importa más que construir un diagrama preciso es el conocimiento matemático implicado, el cual no está visible por ningún sitio; no está en los propios diagramas. “Cuando los estudiantes son incapaces de reconocer el conocimiento no es por deficiencias en los diagramas construidos sino en su incapacidad para comprender el sistema de relaciones conceptuales relevantes” (Sherry, 2009, p. 68). Este autor resume en dos aspectos el papel de los diagramas en el razonamiento matemático:

> En primer lugar, un diagrama sirve de fundamento para sintetizar una regla matemática a partir de conceptos y reglas de inferencia existentes. El segundo papel de un diagrama geométrico es garantizar posteriores inferencias en virtud de sus características empíricas simples. (p. 69)

El diagrama apoya o hace posible el necesario proceso de particularización de la regla general; hace intervenir al objeto conceptual para participar en una práctica de la que emergerá otro objeto conceptual nuevo (en nuestro ejemplo, la fracción que constituye la respuesta al problema planteado).

2.7. CONCLUSIONES

Este trabajo complementa a otros realizados previamente en el marco del EOS donde se analiza el papel de las representaciones en educación matemáticas y la potencial utilidad de tener en cuenta la trama de objetos no ostensivos implicados en el uso de tales representaciones (Font, Godino y Contreras, 2008). En este caso usamos también la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos para dialogar con las investigaciones realizadas sobre el razonamiento diagramático y el uso de visualizaciones.

Esta visión ontosemiótica de las prácticas matemáticas (antropológica y pragmatista) ayuda a tomar conciencia de que tales objetos inmateriales no proceden de un mundo inaccesible sino que son de este mundo social en que vivimos y están implicados en nuestra práctica cotidiana. Radford (2008a, p. 15), lo expresa a partir de las ideas de Voloshinov (1973):

> El signo es una creación entre los individuos, una creación dentro de un medio social. Por lo tanto el elemento en cuestión [el elemento al que un signo se referirá] primero debe adquirir importancia interindividual, y sólo entonces puede convertirse en un objeto para la formación de signos.

La visualización (en general la materialización) es útil y necesaria en la práctica matemática, sobre todo si tiene un carácter diagramático y refleja, por tanto, metafóricamente, las estructuras conceptuales matemáticas. Pero esta capa de objetos materiales no debe impedir ver la capa de objetos inmateriales que propiamente constituyen el sistema conceptual de las matemáticas institucionales. Ambas capas están entrelazadas y en cierto modo son inseparables. Entre los objetos ostensivos y no ostensivos existen relaciones dialécticas complejas ya que la actividad de producción y comunicación matemática no se puede realizar sin el concurso sinérgico entre ambos tipos de objetos.

El profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos que intervienen en la práctica matemática, apoyada en el uso de diversos sistemas de representación y siendo consciente de las relaciones sinérgicas entre los mismos. Debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización.

Consideramos que esta técnica puede estar al alcance de los profesores de matemáticas y puede ayudar a que tomen conciencia de la sinergia entre los diversos tipos de lenguajes y sus relaciones con los objetos y procesos matemáticos. Ello requerirá, no obstante, el diseño, implementación y evaluación de procesos formativos específicos. El inicio de una investigación experimental sobre formación de profesores, orientada al desarrollo de competencias de análisis epistémico y cognitivo de tareas matemáticas, que involucran visualización y razonamiento diagramático, es el objetivo del siguiente capítulo de este trabajo.

CAPITULO 3.

DISEÑO DE UNA ACCIÓN FORMATIVA DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo abordamos el segundo objetivo, planteado en el capítulo 1, para dar respuesta a la cuestión, ¿qué tipo de acciones formativas sería necesario implementar en la formación de profesores de matemática para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo?

Como se ha mencionado en el capítulo 1, este estudio se inscribe dentro del marco metodológico de la *ingeniería didáctica* entendida en el sentido generalizado propuesto por Godino y cols. (2013) y fue aplicado por el profesor del curso (Juan D. Godino) a 54 alumnos del Máster en Educación Secundaria (curso 2014-2015) de la Universidad de Granada como parte de la asignatura "Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas".

La fase de estudio preliminar ha sido abordada en el segundo capítulo, guiada por la noción de sistema de prácticas operativas y discursivas que se usan como referencia, para elaborar el significado pretendido en el proceso de instrucción.

Consideramos que la formación de profesores de matemáticas debe contemplar el desarrollo de competencias instrumentales específicas que les permitan realizar el tipos de análisis que hemos presentado en el capítulo 2.

En las siguientes secciones describiremos el diseño del proceso de instrucción, su implementación y algunos resultados obtenidos. Fundamentaremos aspectos específicos que podrían ser modificados en circunstancias similares y finalmente destacaremos el interés del estudio realizado y las implicaciones para la formación.

3.2. DISEÑO INSTRUCCIONAL

3.2.1. Descripción del diseño

En este apartado se describirá con detalle el proceso de instrucción en este estudio piloto; en el anexo I se presenta la unidad temática completa. Para la selección y diseño de situaciones-problemas, hemos considerado 2 tareas prototípicas de las cuales, la primera se llevó a cabo en el contexto de aula y la segunda se aplicó como instrumento de evaluación. Los estudiantes fueron iniciados con la lectura de un artículo, previamente al comienzo de la primera etapa, con el fin de que todos tuvieran un conocimiento inicial del tema. Asimismo, la lectura resulta un recurso fundamental que orienta el desarrollo de las tareas propuestas. Los contenidos didácticos – matemáticos abordados son: conocimientos implicados en la conceptualización y uso de diagramas y recursos manipulativos, que impliquen procesos de visualización y de razonamiento diagramático.

Para desarrollar esos contenidos, el diseño instruccional se orienta al logro de los siguientes objetivos:

- caracterizar la visualización y el razonamiento diagramático y analizar su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas;
- identificar y describir los objetos y procesos implicados en tareas matemáticas mediante visualización y razonamiento diagramático.

Se propone la siguiente metodología instruccional:

Primera etapa – Trabajo de aula –

1. **Lectura y discusión del artículo**

   Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T., Contreras, A. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Trabajo en revisión)

2. **Trabajando en equipos de 3 o 4 estudiantes realizar las siguientes actividades**

   2.1. Resolver la tarea 1 incluida en el Anexo I.

   2.2. Identificar los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución, distinguiendo los lenguajes visuales y analítico, así como los objetos matemáticos no ostensivos implicados.

3. **Presentación y discusión de resultados**

Segunda etapa – Evaluación –

4. **Resolver la tarea 2, incluida en el Anexo I, de forma individual y entregarla en la fecha indicada**

En este proceso de estudio, se tiene en consideración los siguientes momentos didácticos:

- presentación de las consignas,
- exploración personal,
- trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida,
- presentación y discusión,
- institucionalización por el profesor, explicitando los conocimientos pretendidos.

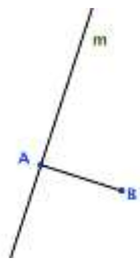
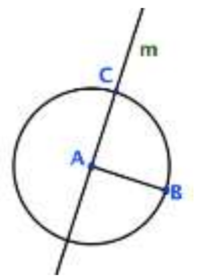
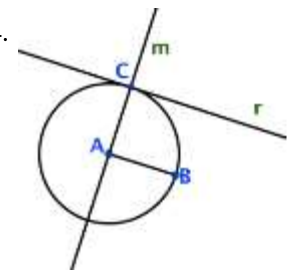
3.2.2. Análisis a priori

El análisis a priori consistirá en la formulación de soluciones esperadas para cada una de las tareas; asimismo se tendrá en cuenta el reconocimiento de objetos matemáticos puestos en juego en la solución y los tipos de lenguaje involucrados. El mismo fue realizado conjuntamente en el seno del equipo de investigación.

A continuación se muestra la Tarea 1 diseñada para el proceso de instrucción y su respectivo análisis a priori.

Tarea 1. Construcción de un cuadrado con GeoGebra

La secuencia de pasos indicados en la figura 5 es el procedimiento seguido por un estudiante para construir un cuadrado con Geogebra.

1. 	2. 	3. 	4. 
a) Represento un segmento AB.	b) Trazo una recta *m* perpendicular al segmento AB por el punto A.	c) Trazo una circunferencia de centro A y radio AB. d) Llamo C al punto de intersección entre la circunferencia trazada y la recta *m*.	e) Trazo una recta *r* paralela al segmento AB haciendo que pase por el punto C.

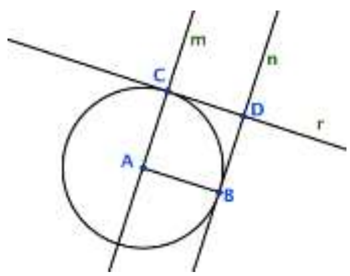
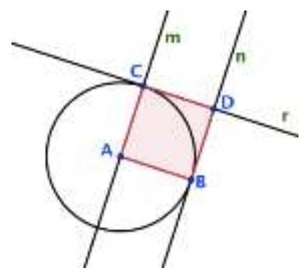
5. 	6. 
f) Trazo una recta perpendicular al segmento AB por el punto B. g) Llamo D al punto de intersección de la recta *n* y la recta *r*.	k) El cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

Figura 5. Procedimiento de construcción

A) Justifica que, en efecto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

La justificación matemática de que la figura ABCD es un cuadrado requiere explicitar determinados pasos que conforman la práctica matemática, en la cual se movilizan objetos *ostensivos* (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). El resolutor toma decisiones para garantizar la eficacia de la práctica, en su resolución o para su comunicación. Así, en el contexto de la formación inicial de docentes de Educación Secundaria, se espera una secuencia de prácticas operativas y discursivas en la parte A), como la que se muestra a continuación.

1) Con el término cuadrado designamos a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes y sus cuatro ángulos interiores rectos.
2) El ángulo en A es recto porque la recta AC se ha trazado perpendicular a AB.
3) El lado AC es congruente con AB porque es el radio de la circunferencia con centro A y radio AB.
4) r y m son perpendiculares porque r es paralela a AB y m es perpendicular a AB. Por tanto, el ángulo en C es recto.
5) El ángulo en D es recto porque r y n son perpendiculares.
6) El lado CD es congruente con AB porque r y AB son paralelas (segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas son iguales).
7) DB es congruente con AC porque m y n son paralelas.
8) Luego los cuatro lados de ABCD con congruentes y los cuatro ángulos son rectos.

Consideramos necesario reconocer que existen definiciones alternativas de cuadrado, las cuales pueden se utilizadas en la práctica 1. A continuación, exponemos 5 posibles definiciones:

- Región del plano delimitada por una línea poligonal cerrada formada por cuatro segmentos congruentes y sus ángulos interiores son rectos (o también que son congruentes).
- Paralelogramo cuyos cuatro lados son congruentes y sus cuatro ángulos interiores rectos.
- Rectángulo cuyos lados son congruentes.
- Rombo cuyos ángulos interiores son rectos.
- Polígono de cuatro lados cuyas diagonales son iguales, perpendiculares y se cortan en el punto medio.

B) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la construcción y justificación del cuadrado con el Geogebra. (Enumera la secuencia de prácticas que se realizan para resolver la tarea, los objetos implicados y sus significados)

Las respuestas esperadas en esta parte de la tarea, las presentamos en la tabla 5 mostrando en la primera columna, los medios de expresión de los objetos matemáticos a partir de las prácticas textualizadas; en la segunda columna mostramos los objetos matemáticos no ostensivos, los cuales constituyen el contenido (o significado) de las palabras o expresiones que conforman las prácticas.

Dada la complejidad de este tipo de tareas, no hemos incluido en el diseño instruccional un análisis más completo de la trama de funciones semióticas implicadas en el sistema de prácticas, tanto de tipo referencial (un objeto refiere a otro objeto) como operacional (uso pragmático de los objetos), como el ejemplo que hemos analizado en el capítulo 2.
Asimismo, es preciso señalar que en todo el proceso explicativo – demostrativo analítico los procesos de *particularización* (concreción de los conceptos a las figuras particulares) y *generalización* (las figuras concretas son representantes de la clase de figuras semejantes) están presentes.

Tabla 5

Configuración de objetos y significados

OBJETOS OSTENSIVOS **(Medios de expresión)**	**OBJETOS NO OSTENSIVOS (SIGNIFICADOS)** **(Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**
	Procedimiento del estudiante
a) Represento un segmento AB	Conceptos: segmento (general); puntos extremos de un segmento. Procedimiento: trazado de un segmento con Geogebra Particularización: segmento fijo delimitado por los puntos A y B.
b) Trazo una recta *m* perpendicular al segmento AB por el punto A.	Conceptos: línea recta; punto de un segmento; recta perpendicular a un segmento por un punto; ángulo recto. Procedimiento: trazado de una recta perpendicular a un segmento por uno de sus extremos con el Geogebra. Proposición: dos rectas perpendiculares cuatro ángulos rectos. Particularización: caso de las figuras dadas.
c) Trazo una circunferencia de centro A y radio AB.	Conceptos: circunferencia, centro y radio. Procedimiento: trazado de una circunferencia con Geogebra. Proposición: todos los radios de una circunferencia son congruentes. Particularización: (ídem)
d) Llamo C al punto de intersección entre la circunferencia trazada y la recta *m*	Concepto: intersección de circunferencia y recta.

e) Trazo una recta *r* paralela al segmento AB haciendo que pase por el punto C.	Concepto: recta paralela a un segmento que pasa por un punto dado. Procedimiento: trazado de una recta paralela a un segmento con Geogebra. Proposición: si una recta es paralela a otra y ésta es perpendicular a una tercera la primera y la tercera son perpendiculares.
f) Trazo una recta perpendicular al segmento AB por el punto B.	(ÍDEM b)
g) Llamo D al punto de intersección de la recta *n* y la recta *r*.	Concepto: punto de intersección de dos rectas.
h) El cuadrilátero ABCD es un cuadrado	Proposición: ABCD es un cuadrado.
Justificación	
1) Con el término cuadrado designamos a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes y sus cuatro ángulos interiores rectos.	Conceptos: cuadrado, cuadrilátero, lados congruentes, ángulos interiores de un polígono y ángulo recto.
2) El ángulo A es recto porque la recta AC se ha trazado perpendicular a AB.	Proposición: El ángulo A es recto. Argumentación: por la definición de rectas perpendiculares. Particular – general: las figuras del diagrama refieren a “cualquier figura” que cumpla las condiciones.
3) El lado AC es congruente con AB porque es el radio de la circunferencia con centro A y radio AB.	Concepto: congruencia de segmentos; circunferencia, centro y radio. Proposición: AC es congruente con AB. Argumentación: justificación de la proposición basada en que un radio de una circunferencia es congruente con cualquier otro. Particular – general: (ídem)
4) r y m son perpendiculares porque r es paralela a AB y m es perpendicular a AB. Por tanto, el ángulo en C es recto.	Proposición 1: r y m son perpendiculares. Argumento 1: porque r es paralela a AB y m es perpendicular a AB. Proposición 2: el ángulo en C es recto. Argumento 2: por la definición de rectas perpendiculares.
5) El ángulo en D es recto porque r y n son perpendiculares.	Proposición: el ángulo en D es recto. Argumento: por sus lados son perpendiculares.
6) El lado CD es congruente con AB porque r y AB son paralelas.	Proposición: CD es congruente con AB. Argumento: porque segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son congruentes.
7) DB es congruente con AC porque m y n son paralelas.	Proposición: DB es congruente con AC. Argumento: porque segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son congruentes.
8) Luego los cuatro lados de ABCD con congruentes y los cuatro ángulos son rectos.	Proposición: tesis que se quería demostrar. Justificación: secuencia de pasos 1) a 7).

El análisis incluido en la tabla 5 corresponde al sistema de prácticas realizadas para resolver la tarea por un sujeto epistémico y constituye, por tanto, un análisis de tipo institucional. El análisis de las respuestas concretas dadas por estudiantes caracterizaría el significado personal atribuido (análisis cognitivo). La tabla 5 muestra en particular que existe una estrecha imbricación entre los lenguajes diagramáticos y secuenciales, los objetos ostensivos y no ostensivos y los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales).

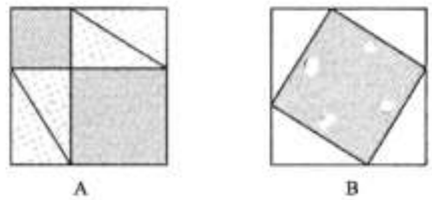
Nuestro análisis ha revelado que el uso de diagramas apoya la formulación de conjeturas, pero la intuición y visualización debe completarse con el reconocimiento de la trama de objetos matemáticos no ostensivos implicados en la deducción de las proposiciones geométricas. Así mismo, el uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) el desarrollo de las prácticas y el progreso en la tarea. Es preciso observar como ya hemos mencionado, que los medios de expresión son "artefactos" (Lasa, Wilhelmi y Belletich, 2014) que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos, que dotan de significado a la actividad matemática concretada en los objetos ostensivos.

Consideramos que el profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos, sistemas de representación y sus relaciones sinérgicas en la práctica matemática escolar. Además, debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización.

A continuación se muestra la Tarea 2 implementada como instrumento de evaluación del proceso de instrucción y su respectivo análisis a priori.

Tarea 2. Teorema de Pitágoras

> *A) ¿Qué relación existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B?* Describir el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican la respuesta.



En la práctica matemática se movilizan objetos *ostensivos* (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). El resolutor toma decisiones para garantizar la eficacia de la práctica, en su resolución o para su comunicación. La resolución esperada de la tarea imbrica lenguajes natural, diagramático y algebraico, según estándares de idoneidad (epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica). Así, en la formación inicial de docentes de secundaria, se espera la siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas en la tarea *A*):

1) Se supone que las figuras trazadas en A y B son cuadrados y triángulos rectángulos cuyos lados tienen como medidas de longitud las indeterminadas a, b, y c (figura 6).

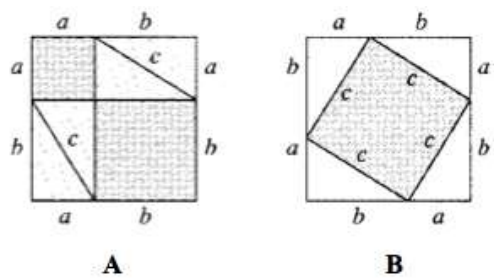


Figura 6. Hipótesis métricas necesarias

2) Los cuadriláteros formados por los segmentos exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud ($a + b$).
3) Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.
4) Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro triángulos iguales.
5) El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados a y b, respectivamente, $a^2+ b^2$.
6) El área sombreada en B es el área del cuadrado de lado c, c^2.

7) Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente (figura 7).

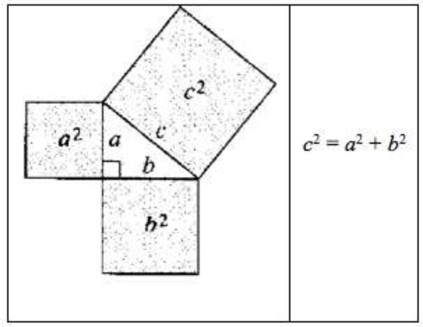


Figura 7. Determinación del Teorema de Pitágoras

8) Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$.

B) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la solución de la tarea. (Enumera la secuencia de prácticas que se realizan para resolver la tarea, los objetos implicados y sus significados)

Como síntesis de la respuesta esperada a la parte *B*), en la primera columna de la tabla 1, incluimos, de manera abreviada, las prácticas textualizadas 1) a 8) mencionadas con el correspondiente enunciado de la tarea. En la segunda columna mostramos los objetos matemáticos no ostensivos, los cuales constituyen el contenido (o significado) de las palabras o expresiones que conforman las prácticas.

Tabla 6

Conocimientos implicados en las prácticas

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos: conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos**
¿Qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B? …	Conceptos: área; suma y comparación de áreas; figura geométrica.
1) Aceptación de que las figuras trazadas en A y B son, respectivamente, cuadrados y triángulos rectángulos de lados indeterminados a, b, y c (figura 6).	Conceptos: figuras geométricas; cuadrado; triángulo rectángulo; lado; longitud; cantidad indeterminada.
2) Los cuadriláteros formados por los segmentos	Conceptos: cuadriláteros; figura geométrica;

exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud (a + b).	segmento exterior de una figura; congruencia de cuadrados; lados; comparación de longitud. Proposiciones: Los cuadrados exteriores (triángulos) son congruentes. Argumentos: Los cuadrados exteriores tienen el mismo lado ($a+b$); los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados.
3) Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.	Conceptos: triángulos rectángulos, congruencia, lados, comparación de lados. Proposiciones: Los triángulos son congruentes. Argumentos: los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados.
4) Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro triángulos iguales.	Concepto: áreas, comparación de áreas, adición de áreas. Proposición: dos áreas son iguales si representan la misma extensión de superficie, aunque las superficies tengan distinta forma.
5) El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados *a* y *b*, respectivamente, $a^2+ b^2$.	Concepto: áreas, adición de áreas, cuadrados, lados. Proposición y su justificación (basada en la aditividad del área y en el procedimiento de cálculo del área del cuadrado a partir de la longitud del lado)
6) El área sombreada en B es el área del cuadrado de lado c, c^2.	Concepto: cuadrado y su área. Procedimiento: cálculo del área del cuadrado a partir de su lado
7) Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente (figura 7).	Conceptos: cateto, hipotenusa y área de un triángulo rectángulo. Proposición: es posible establecer una relación entre las áreas de los cuadrados de lados el triángulo rectángulo ($c^2 = a^2 + b^2$) Argumento: gráfico a partir de los diagramas A y B.
8) Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$	Concepto: triángulo rectángulo. Proposición: Teorema de Pitágoras. Argumento: relación entre medidas de áreas de figuras geométricas y valores numéricos de longitud.

El análisis incluido en la tabla 6 corresponde al sistema de prácticas realizadas para resolver la tarea por un sujeto epistémico y constituye, por tanto, un análisis de tipo institucional. El análisis de las respuestas concretas dadas por estudiantes caracterizaría el significado personal atribuido (análisis cognitivo).

3.3. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

En este apartado describimos la implementación de cada trayectoria didáctica implementada, destacando aspectos relevantes en términos de idoneidad didáctica local de las facetas y componentes que caracterizan este proceso de estudio.

1) Etapa 1

La lectura propuesta juega un rol fundamental para el desarrollo idóneo del trabajo pretendido de los estudiantes. La misma contiene el marco teórico interpretativo y situaciones-problemas introductorias similares a las tareas que se proponen en este diseño y que servirán de guía para orientar las respuestas esperadas en las demás tareas. Dada su complejidad, se planificó que los alumnos comiencen esta etapa con una visión amplia de la temática propuesta; para ello, la lectura fue enviada con anticipación a todos los estudiantes del curso. Esta descripción es un indicador positivo de idoneidad epistémica.

Al inicio de clase, se presentaron los objetivos y la metodología de trabajo. Durante la primera sesión de clase, el profesor actuó de manera que los estudiantes se involucraran en el análisis de la lectura; se proponen situaciones de problematización y discusión profunda de las mismas. A partir de interacciones magistrales, se destacó el rol central de las entidades lingüísticas para indagar sobre la presencia y emergencia de los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos implicados en las prácticas operativas y discursivas realizadas, como así también, sobre el papel que desempeñan en la propia actividad matemática.

A partir del intercambio activo con los alumnos, se discutieron las distintas formas de resolver el problema presentado en el artículo, el papel de los lenguajes diagramáticos y secuencial y las relaciones complejas entre los objetos ostensivos y no ostensivos.

En la segunda sesión, el profesor entrega la tarea 1, explica las consignas y se les pide a los estudiantes que se organicen en grupos de trabajo. El tiempo destinado para la realización de la tarea es estipulado, ya que el profesor es consciente de la poca disponibilidad horaria de la asignatura.

Durante el desarrollo de la tarea (aproximadamente media sesión), el profesor recorre los grupos y realiza las intervenciones necesarias; su actuación está motivada por la identificación de conflictos y las observaciones de avances que van logrando los grupos, los cuales orientarán la puesta en común.

Pasada la media sesión de clase se procede a la puesta en común; el profesor utiliza como recurso para agilizar el intercambio una serie de diapositivas, mostrando el análisis a priori de la tarea en cuestión. El hecho de que las prácticas empleadas por cada grupo no sean únicas, moviliza un diálogo continuo comparando los significados que se ponen en juego y los resultados obtenidos. Estos son indicadores positivos de idoneidad interaccional alta.

2) Etapa 2

Se complementa el cierre de la actividad instructiva con la aplicación del instrumento de evaluación. Dado el poco tiempo destinado a esta actividad, por las condiciones naturales de clase, se les dio 15 días para la realización y entrega de la misma.

La tarea presenta una estructura similar a la anterior, por lo tanto, con el fin de que el análisis epistémico de todos los estudiantes se realizara sobre la misma secuencia de prácticas, se discutieron en el seno de la clase diversas maneras de abordar la justificación visual del teorema de Pitágoras, pedida en el inciso *A).* Los estudiantes propusieron prácticas que tenían sentido para ellos y a partir de las interacciones se adoptó la secuencia que se analizó en la sección anterior. Asimismo, se toma conciencia de la libertad que tiene cada alumno de identificar otras posibles prácticas que den respuesta al problema y que respondan a sus intereses.

De esta manera, se implementa una acción formativa para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de los futuros profesores de matemáticas, en la cual se tiene conciencia que el tiempo empleado no fue suficiente para la enseñanza pretendida. El diseño fue aplicado en las últimas sesiones de la asignatura; en este tiempo, los alumnos estaban realizando prácticas docentes. Consideramos que esto afectó el rendimiento y la motivación. Estas cuestiones atienden a un bajo grado de idoneidad mediacional-afectiva.

Desde un punto vista interaccional, las trayectorias didácticas permitieron identificar conflictos semióticos potenciales, los cuales se han podido detectar a priori; asimismo, durante el proceso de instrucción, la actuación docente permitió resolver los conflictos en la puesta en común. Las interacciones activas permitieron distinguir respuestas de los estudiantes y sirvieron al profesor de validación interna. Éstos son indicadores de una idoneidad interaccional alta.

El proceso de estudio implementado ha revelado dificultades que indican que la idoneidad cognitiva a posteriori del proceso de estudio no ha sido adecuada; se registraron confusiones comunes de los estudiantes en el análisis de los resultados. Asimismo, consideramos que “los estudiantes necesitan tener oportunidades frecuentes para formular, enfrentar y resolver problemas complejos que requieren mucho esfuerzo” (NCTM, 2000, p. 51). Esto nos lleva a pensar que sería necesario incluir una fase de discusión de los resultados de la evaluación mostrando ejemplos claros sobre los distintos tipos de objetos matemáticos implicados.

Las respuestas de los estudiantes obtenidas de la segunda etapa se analizaron y contrastaron con las respuestas pretendidas. En la siguiente sección se muestra algunos ejemplos prototípicos de respuestas y la interpretación de los resultados.

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que el diseño e implementación de procesos de estudio con alta idoneidad didáctica requiere el concurso de factores sobre los cuales el docente no tiene control, como es el caso del factor tiempo asignado al estudio, que en este caso, ha jugado en contra dada la poca disponibilidad horaria de la asignatura y de los tiempos de escritura del TFM.

3.4. INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este apartado presentamos ejemplos concretos de respuestas obtenidas a partir del instrumento de evaluación, (tarea 2 – anexo). Dichas respuestas permiten interpretar el grado de competencia de análisis epistémico - cognitivo que se logró como consecuencia del proceso formativo implementado.

Como se ha mencionado en la etapa de implementación, las prácticas operativas y discursivas realizadas en el inciso *A)* fueron acordadas a partir de la interacción entre los alumnos y el docente; sin embargo es preciso señalar que se han encontrado casos en los que han adoptado otros tipos de práctica. Algunas de éstas presentan inconsistencias en la resolución del problema y otras se encuentran bien fundamentadas.

Las respuestas que los futuros profesores dieron a la tarea, respecto de los tipos de prácticas objetos y procesos que se ponen en juego, señalan que exhiben ciertas dificultades para realizar este tipo de análisis. Dada la naturaleza interpretativa que adoptamos, no realizamos un análisis cuantitativo de los resultados, sino que exponemos a continuación algunas respuestas prototípicas que permiten iniciar una comprensión más profunda de la situación. Los ejemplos serán escritos tal como figuran en las respuestas de los alumnos.

1) *Noción de concepto*

La mayoría de los estudiantes alcanza un nivel concordante con los conceptos contemplados en el análisis a priori. Por ejemplo, si consideramos la práctica 1:

> "*Aceptación de que las figuras trazadas en A y B son, respectivamente, cuadrados y triángulos rectángulos de lados las indeterminadas a, b, y c (figura 2)"*

una respuesta óptima es la siguiente:

> *Conceptos: figura geométrica, cuadrado, triángulo rectángulo, lados, medida de longitud de lados.*

Sin embargo, encontramos casos que manifiestan una confusión con el significado del término. Por ejemplo, distinguimos dos casos.

> Caso 1. Frente a la práctica textualizada: *"Explica la relación que existe entr*e", una respuesta indica que *"relación entre varias cosas"* es un concepto.
>
> Caso 2. Frente a la práctica textualizada: "*En primer lugar identificamos mediante*

las primeras letras (…)”, una respuesta indica que *“identificar*” es un concepto.

2) *Noción de proposición*

Las respuestas revelan casos concretos en los que se muestran confusiones con la noción de proposición. Se la considera como un supuesto del que se parte, en vez de interpretarla como un enunciado sobre conceptos, que toma valores de verdad o falsedad. Ejemplos de respuestas tomadas de la práctica textualizada1) son los siguientes:

Caso 3. Proposición: *“se parte de que ya tienes las figuras”*
Caso 4. Proposición: *“partimos de que son cuadrados y triángulos”*

3) *Noción de procedimiento*

Observamos que los estudiantes son capaces de reconocer el procedimiento contemplado en el análisis a priori. Las confusiones que se observan están asociadas a una función explicativa o justificativa del uso que se pretende hacer de la práctica textualizada involucrada; un claro ejemplo de este caso lo observamos en la práctica enunciativa de la pregunta de la tarea: “*¿Qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B?*”, para la cual destacamos dos tipos de respuestas:

Caso 5. Procedimiento*: “Vamos a ver la relación entre las áreas de las figuras sombreadas mediante sus expresiones y las figuras interiores que intervienen”.*
Caso 6. Procedimiento*: “Se suman las áreas”*

4) *Noción de argumento*

Como mostraremos en los ejemplos siguientes, la noción de argumento resulta conflictiva. En general, no se utiliza para justificar o explicar una proposición o un procedimiento, sino que se refieren a explicaciones sobre la propia práctica textualizada. Este rasgo se hace muy presente cuando un estudiante utiliza la palabra justificación. Los siguientes casos ejemplifican esta problemática.

Caso 7. Frente a la práctica textualizada: *“En primer lugar identificamos mediante las primeras letras del alfabeto a los lados en cuestión a, b, c”,* una respuesta indica que: “*Para afrontar el problema es necesario identificar todos los elementos que intervienen para la resolución, para ello utilizamos las primeras letras del alfabeto”* es una justificación.

Caso 8. Frente a la primera práctica textualizada: *“Aceptamos el supuesto que las figuras trazadas en A y B son cuadrados y triángulos (...)*”, se indica como argumento: *“en las figuras A y B hay cuadrados y triángulos rectángulos”.*

La confrontación de este análisis con el análisis a priori permite identificar conflictos y guiar futuros procesos de instrucción. Asimismo, le permite a los futuros profesores tomar conciencia del entramado de objetos no ostensivo que intervienen y emergen necesariamente de las prácticas matemáticas como constructo social al que pertenecen.

La reconstrucción de la configuración de objetos y significados que se muestra en la tabla 6, para las distintas prácticas reconocidas en la resolución de la situación-problema, es necesaria para que el profesor decida sobre posibles institucionalizaciones de los conocimientos puestos en juego. El reconocimiento y gestión de los conocimientos en la realización de las tareas “requiere que el futuro profesor, tras la realización de las actividades, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución, y los significados que se les atribuye en el contexto específico” (Godino, 2013, p. 8).

El análisis se puede completar con la identificación de los procesos matemáticos intervinientes, especialmente para esta tarea, de particularización. A continuación, señalamos algunos conflictos identificados en las respuestas de la tarea 2.

5) *Noción de particularización*

Se observan algunas confusiones respecto al significado de esta noción, asignándole una función argumentativa.

Caso 9. Frente a la práctica “*en ambas figuras el área de las zonas sombreadas se obtiene por sustracción de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos (...)”,* se identifica como proceso de particularización: “*las áreas de las zonas sombreadas se obtienen por sustracción”*.

3.5. UTILIDAD E IMPLICACIÓN EN LA FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES

Los resultados revelan la complejidad de las tareas propuestas; el diseño instruccional descrito, basado en el análisis de prácticas, objetos y procesos, supone un reto para los profesores en formación, resultando conflictiva la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados.

La actividad de resolución de problemas se complementa con el análisis epistémico – cognitivo provocada por las consignas: ¿Qué matemáticas se pone en juego en la resolución del problema? ¿Qué matemática ha puesto en juego el alumno? La respuesta a estas preguntas es apoyada mediante el uso de las herramientas teóricas del "enfoque ontosemiótico", concretadas en este caso en la noción de configuración de prácticas, objetos y procesos.

El tipo de análisis que hemos descrito en este capítulo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje. Se trata de diseñar e implementar situaciones didácticas para la formación de profesores cuyo objetivo central sea el meta-análisis (Jaworski, 2005) de un componente clave de la enseñanza: la actividad matemática entendida tanto desde el punto de vista institucional (o socio-epistémico) como personal (o cognitivo).

CAPITULO 4.

SÍNTESIS, LIMITACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo incluimos en el apartado siguiente una síntesis de las aportaciones obtenidas en esta investigación. Para ello se recuperan los dos objetivos planteados indicando el logro de los mismos. Además, mencionamos algunas limitaciones del trabajo con el fin de identificar futuras líneas de continuidad.

4.2. SÍNTESIS

En este trabajo nos hemos propuesto en primera instancia clarificar las relaciones entre las representaciones visuales, diagramáticas o de cualquier otro tipo, junto con los objetos matemáticos no ostensivos que les acompañan necesariamente (objetivo 1).

El capítulo 2 está orientado al logro de este objetivo. Con dicho fin, hemos interpretado las investigaciones encontradas en bases de datos sobre el uso de diagramas y razonamiento diagramático en educación matemática, concluyendo que existen posiciones empiristas un tanto ingenuas sobre el uso de artefactos manipulativos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. No obstante, logramos desarrollar una descripción sobre la posición ontológica de estas nociones.

El análisis ontosemiótico realizado complementa la visión aportada por el razonamiento diagramático en el papel de la visualización en el aprendizaje matemático y enriquece la postura sobre las nociones estudiadas. Para esto, hemos avanzado en el desarrollo de una técnica de análisis ontosemiótico que nos permitió desvelar la trama de objetos intervinientes en las prácticas matemáticas y mostrar cómo estas nociones pueden facilitar la descripción y comprensión de los sistemas semióticos implicados en la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos. Al final del capítulo 2 presentamos nuestras conclusiones sobre el primer estudio abordado.

La búsqueda de literatura revela que existe una amplia información sobre el uso de diagramas y razonamiento diagramático destacando su importancia en la educación matemática; sin embargo, apenas existen trabajos que aborden la temática propuesta desde la formación de profesores de matemática. Las investigaciones en educación matemática enfatizan la importancia del uso de la visualización para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje. Nuestro trabajo, que continúa la reflexión ontosemiótica iniciada en Godino et al. (2012), sugiere que junto con los objetos visuales participan una trama de objetos no visuales (conceptuales, procedimentales, argumentativos, …), de los cuales hay que tomar conciencia en los procesos de aprendizaje matemático. Es importante que tanto los estudiantes como los profesores no confundan las representaciones materiales y visuales con los propios objetos matemáticos. Esto plantea un reto para la formación de profesores la cual debe contemplar como un objetivo importante que los profesores de matemáticas discriminen la diversidad de objetos que intervienen en la actividad matemática y de las relaciones dialécticas entre los mismos.

Esta es la razón por la cual hemos iniciado el diseño e implementación de una acción formativa orientada al desarrollo de la competencia de análisis de los objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática (objetivo 2).

Como bien se ha sostenido en el desarrollo del capítulo 3, el reconocimiento explícito de los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas es una competencia que el profesor debe desarrollar y por lo tanto, consideramos que el formador de profesores debe diseñar procesos formativos orientados al desarrollo de dicha competencia.

El diseño implementado se puede entender como una estrategia para reflexionar sobre las características de la visualización, del razonamiento diagramático y su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, favorece el reconocimiento, por parte del profesor, de la diversidad de objetos y procesos implicados en tareas matemáticas realizadas mediante la aplicación de visualizaciones y razonamiento diagramático. El análisis de las tareas, junto con los distintos modos de abordarlas, es una acción necesaria para poder comprender las dificultades en el aprendizaje. De esta manera, el profesor de matemáticas puede obtener información para el diseño de sus propias tareas, como así también para la gestión de las mismas en el ambiente de clase.

4.3. LIMITACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Como hemos indicado, en el capítulo 2 de este trabajo se ha iniciado el estudio de las características del razonamiento diagramático y de su interpretación en términos del EOS. Este estudio no se puede dar por concluido siendo necesario, en particular, estudiar con más profundidad las relaciones entre el razonamiento diagramático, la teoría de los registros de representación semiótica (Duval, 1995) y su análisis mediante la noción de configuración ontosemiótica. Será cuestión de analizar la sinergia existente entre dichas herramientas y la posibilidad de avanzar en la complementariedad de los marcos teóricos teniendo en cuenta los resultados de trabajos recientes que ya han avanzado en esta dirección, como el iniciado por Pino-Fan, Guzmán, Duval y Font (2015). El análisis de las transformaciones entre registros, tratamientos y conversiones, es un aspecto clave de la teoría de los registros de representación semiótica que podría ser enriquecido mediante la consideración de la variedad de objetos y procesos matemáticos que se ponen en juego en dichas transformaciones.

En la fase siguiente de nuestra investigación, describimos un primer ciclo exploratorio de una investigación de diseño orientada al desarrollo de competencias de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas, usando tareas que involucran la visualización y el razonamiento diagramático. Como es propio de este tipo de investigaciones es necesario implementar nuevos ciclos que permitan mejorar el diseño, la implementación y la evaluación realizada en el primer ciclo. El análisis retrospectivo realizado en la primera fase aquí descrita revela la necesidad de ampliar el tiempo dedicado al proceso instructivo, incluyendo nuevas tareas de reflexión, seguidas de fases de negociación de significados, como también desarrollar nuevos instrumentos de evaluación del grado de logro de la competencia pretendida.

ANEXO: UNIDAD TEMÁTICA COMPLETA

UNIVERSIDAD DE GRANADA Departamento de Didáctica de la Matemática **Profesor: Juan D. Godino**	Curso de posgrado: **Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas** ***2014 - 2015***

PRÁCTICA 2: **Reflexión sobre las características del razonamiento visual y diagramático**

EQUIPO:

OBJETIVOS:

1) Reflexionar sobre las características de la Visualización y el Razonamiento Diagramático (VRD) y su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
2) Reconocer la diversidad de objetos y procesos implicados en tareas matemáticas propias de educación secundaria realizadas mediante la aplicación de visualizaciones y razonamiento diagramático.

CONTENIDO:

1) Conceptos de visualización, diagramas y razonamiento diagramático
2) Uso de diagramas, visualización y recursos manipulativos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
3) Conocimientos implicados en la visualización y el razonamiento diagramático.

METODOLOGÍA:

1) Lectura y discusión del artículo,

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T., Contreras, A. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Trabajo en revisión)

2) Trabajando en equipos de 3 o 4 estudiantes realizar las siguientes actividades:

2.1. Resolver la colección de tareas incluidas a continuación.

2.2. Identificar los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución, distinguiendo los lenguajes visuales y analítico, así como los objetos matemáticos no ostensivos implicados.

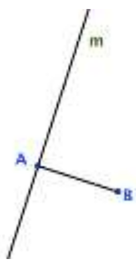
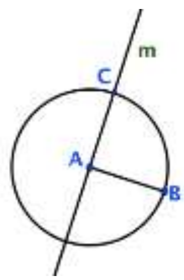
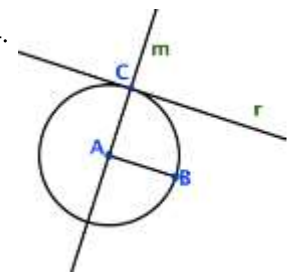
3) Presentación y discusión de resultados

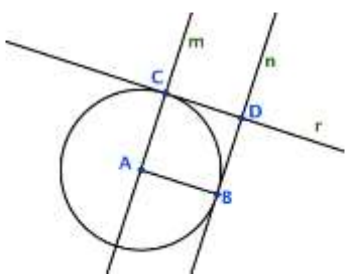
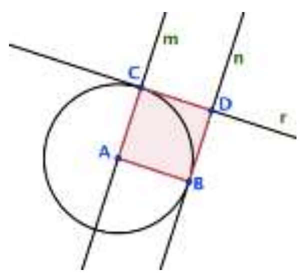
TAREAS SOBRE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

EQUIPO:

Tarea 1.

La secuencia de pasos indicados a continuación es el *procedimiento seguido por un estudiante* para construir un cuadrado con Geogebra.

1. 	2. 	3. 	4. 
a) Represento un segmento AB.	b) Trazo una recta *m* perpendicular al segmento AB por el punto A.	c) Trazo una circunferencia de centro A y radio AB. d) Llamo C al punto de intersección entre la circunferencia trazada y la recta *m*.	e) Trazo una recta *r* paralela al segmento AB haciendo que pase por el punto C.

5. 	6. 
f) Trazo una recta perpendicular al segmento AB por el punto B. g) Llamo D al punto de intersección de la recta *n* y la recta *r*.	k) El cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

A) Justifica que, en efecto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.
B) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en el procedimiento realizado por el estudiante del cuadrado con el Geogebra y la justificación que has elaborado.

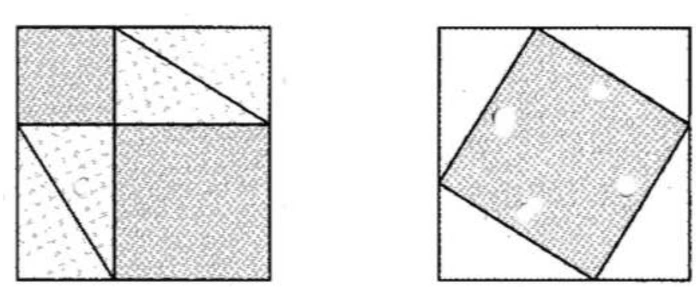
(Enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver la tarea y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias)

OBJETOS OSTENSIVOS (Medios de expresión)	OBJETOS NO OSTENSIVOS (SIGNIFICADOS) (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
Procedimiento del estudiante:	
a)	
b)…	
Justificación:	
1)	
2) …	

ESTUDIANTE:

Tarea 2.

A) *¿Qué relación existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B? Describir el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican la respuesta.*



A B

b) Identificar los conocimientos que se ponen en juego en la solución de la tarea.

(Enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver la tarea y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias)

OBJETOS OSTENSIVOS (Medios de expresión)	OBJETOS NO OSTENSIVOS (SIGNIFICADOS) (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
Enunciado:	
Resolución:	

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Bakker, A. y Hoffmann, M. H. G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 333-358.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4ta ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Batt, N. (2007). Diagrammatic thinking in literature and mathematics. *European Journal of English Studies, 11*(3), 241-249.

Burch, R. (2010). Charles Sanders Peirce. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Recuperado de http://plato.stanford.edu/entries/peirce/

Campos, D. (2007). Peirce on the role of poietic creation in mathematical reasoning. *Transactions of the Charles S. Peirce Society, 43*(3), 470-489.

Dörfler, W. (2000). Means for meaning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms* (pp. 99-131). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Dörfler, W. (2003). Diagrams as means and objects of mathematical reasoning. Developments in mathematics education in German-speaking countries. *Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics.*

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking. Affordances and constraints. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and sign-grounding mathematics education* (pp. 57-66). Nueva York: Springer.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). Ciudad de México: PME-NA: Cinvestav-IPN.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103-131.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. Dordecht: Reidel.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME 8, WG 16) (pp. 2810-2819), Ankara: Middle East Technical University.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 163-184.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2013). Why is the Learning of Elementary Arithmetic Concepts Difficult? Semiotic Tools for Understanding the Nature of Mathematical Objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247-265.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2015a). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. *Departamento de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Granada (en revisión).

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. (2015b). Diseño formativo para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas. *Departamento de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Granada (en revisión).

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2/3), 167-200.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 1-21.

Goodman, N. (1976). *Languages of art: An approach to a theory of symbols.* Cambridge, MA: Hackett.

Guzmán, M. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. En Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (ICTM). Hersonissos, Grecia. Recuperado de http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/ICTM2_Proceedings_Table_of_Contents.html

Hernández Sampieri, R., Fernández-Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ta ed.). México, DF: McGraw-Hill.

Hill H. C., Ball D. L. y Schilling S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Hoffmann, M. H. G. (2003). Peirce's diagrammatic reasoning as a solution of the learning paradox. En G. Debrock (Ed.), *Process pragmatism: Essays on a quiet philosophical revolution* (pp. 121-143). Amsterdam: Rodopi.

Hoffmann, M. (2005). Signs as means for discoveries: Peirce and his concepts of "Diagrammatic reasoning", "Theorematic deduction", "hypostatic abstraction", and "Theoric transformation". En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and sign: Grounding mathematics education* (pp. 45-56). Nueva York: Springer.

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 359-361.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.). (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* New York: Routledge.

Lasa, A., Wilhelmi, M. R. y Belletich, O. (2014). Una parcela para Laika. *Educaçao Matematica Pesquisa*, *16*(4), 1089-1110.

Morin, E. (1990). Science avec conscience. París: Fayard.

National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Council.

Novick, L. (2006). Understanding spatial diagram structure: An analysis of hierarchies, matrices, and networks. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *59*, 1826-1856.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 11-38.

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, *Vol. 2-6.* C. Hartshorne y P. Weiss (Eds.). Cambridge, MA: Harvard UP.

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce, Vol. 8*. A. W. Burks (Ed.). Cambridge, MA: Harvard UP.

Peirce, C. S. (1976). *The new elements of mathematics, Vol 4*. C. Eisele (Ed.). Atlantic Highlands, NJ: Humanities Press.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Duval, R. y Font, V. (2015). The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. *Proceedings of the 39 Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Recuperado de http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/04/RR_Guzman.pdf

Radford, L. (2008a). Diagrammatic thinking: Notes on Peirce's semiotics and epistemology. *PNA*, *3*(1), 1-18.

Radford, L. (2008b). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: sin publicar.

Reed, S. (2010). *Thinking visually*. Londres: Psychology Press.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.

Sherry, D. (2009). The role of diagrams in mathematical arguments. *Foundation of Science*, *14*, 59-74.

Shin, S-J. y Lemon, O. (2008). Diagrams. En E. N. Zalta (Ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Recuperado de http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/

Skemp, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, España: Morata.

Voloshinov, V. (1973). *Marxism and the philosophy of language.* Cambridge: Harvard University Press.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics. MAA Notes Series 19.* Washington, DC: Mathematical Association of America.