

El uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas

Sandra Rojas Tolosa

rojastolosa@yahoo.com.ar

William Jiménez Gómez

williamajg@hotmail.com

Docentes Instituto Pedagógico Nacional

Estudiantes de Maestría en Docencia de las Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional

Grupo de Álgebra

Lyda Constanza Mora Mendieta

lmendieta@pedagogica.edu.co

Docente Universidad Pedagógica Nacional

Grupo de Álgebra

Introducción

El propósito fundamental de este escrito es presentar una revisión de los antecedentes de investigación relacionados con la resolución de problemas como medio para la caracterización e identificación del talento en matemáticas, y cómo se sitúa este tema de investigación en el marco de la Educación Matemática actual.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en su documento An Agenda for Action afirmó que en la identificación de los estudiantes con talento en matemáticas, la destreza más importante es la resolución de problemas (Castro, 2008), Lo cual se sustenta en que numerosas investigaciones que han buscado identificar características de talento matemático lo han hecho a través de la observación de conductas, desempeños, habilidades o estrategias utilizadas en la solución de problemas, bajo la hipótesis de que las matemáticas son eso, resolver problemas. En la construcción de nuestra tesis para optar al título de magister en Docencia de las Matemáticas, pretendiendo con ella construir un instrumento que nos permita determinar características de talento matemático cuando los estudiantes resuelven problemas de visualización, hemos iniciado con la revisión de antecedentes referidos al objetivo antes mencionado, lo que se constituye en el cuerpo de esta memoria y en la ubicación de la temática de investigación, adicionalmente se mostrará un problema relacionado con el poseso de visualización y las soluciones propuestas por algunos estudiantes con el fin de determinar si es posible percibir algunas características de talento matemático cuando se resuelven este tipo de problemas.

Planteamiento del problema

En el sistema educativo la diversidad se expresa de diferentes formas dentro de las cuales se encuentra: las diferencias entre centros educativos, entre los profesores (sus metodologías, intereses) y entre los estudiantes (motivaciones, desempeños, capacidades, etc.), asuntos que usualmente no se consideran en la planeación y desarrollo de actividades propias de las instituciones escolares, lo cual



puede evidenciarse en la proposición de currículos homogéneos, asunto desarrollado ampliamente por Gutiérrez y Maz (2004) presentado en un documento publicado por la UNESCO; amparados en este marco y enfocados en una de estas diferencias relacionadas a los estudiantes, que muestran capacidades matemáticas superiores a la media

Los trabajos de investigación sobre la inteligencia, la superdotación y el talento no son recientes, han sido estudiados desde el siglo veinte, pero no específicamente los de talento en matemáticas, estos se han desarrollado en una época más reciente (Castro 2008). Este suceso es una gran dificultad en la escuela puesto a que “los estudiantes más olvidados en términos de alcanzar su desarrollo potencial, son los estudiantes con talento en matemáticas”. (NCTM, 1980, p. 18 citado en Castro 2008). Los estudios relativos a niños con talento matemático no son muy numerosos, esto se debe a su desarrollo reciente, es importante apuntar que la mayoría de estos se centran en la resolución de problemas (Benavides, 2008; Ellerton, 1986; Heinze, 2005; Krutetskii, 1969). Los estudios sobre el talento matemático se agrupan en tres grandes focos: la caracterización del talento matemático, establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención (Castro 2008).

Nos centramos en la presencia de un factor de diversidad: el talento en matemáticas, en cómo se identifica, particularmente, a través de la resolución de problemas asociados con procesos de visualización si es posible.

Marco teórico

La atención a la diversidad, entendida como la pluralidad de ideas, intereses y comportamientos (Benavides, Maz, Castro y Blanco, 2004), es un campo amplio que puede abordarse desde diferentes perspectivas y focos, uno de éstos es la atención a la excepcionalidad definida como el desempeño académico, creativo o artístico por debajo o sobre la media; un caso particular de la excepcionalidad es el talento matemático definido como: “capacidad matemática que se sitúa significativamente por encima de la media” (Díaz, Feijoo, Fernández, Pasarín y Rodríguez, 2004, pág. 84).

En cuanto a la caracterización del talento matemático, algunos autores como Krutetskii (1996), Greenes (1981) y Karnes (1987), citados por Benavides (2008), determinaron en sus investigaciones ciertas características que presentan los estudiantes con este talento específico, ejemplos de éstas se presentan en el siguiente listado:

Krutetskii (1969 citado en Díaz et al., 2004; Denise, 2005)

- Percibir y emplear información matemática.
- Captar la estructura interna de los problemas; pensar con claridad.
- Economía al resolver un problema.
- Emplear símbolos con facilidad.
- Recordar información matemática general.
- Preferencia por formas de pensamiento visuales-espaciales o lógico-analíticas.

Karnes (1987 citado en Bermejo, 2003)

- Disfrute al resolviendo problemas.
 - Concentración en las tareas.
 - Trabajo de manera independiente.
 - Aburrimiento con tareas rutinarias.
 - Disfrute ante los retos intelectuales.
-

- Flexibilidad: habilidad para encontrar solución alternativa a los problemas (Touron 1998, citado en Díaz et al. 2004)

Greenes (1981 citado en Díaz et al., 2004)

- Formulación espontánea de problemas. Generación de preguntas sobre las situaciones propuestas que dan lugar a nuevos problemas.
- Flexibilidad en el manejo de datos. Tienden a usar una gran variedad de estrategias para resolver problemas.
- Habilidad para organizar datos en tablas o listas.
- Fluidez de ideas. Pensamiento divergente y capacidad para hacer asociaciones únicas.
- Habilidad para generalizar.
- Habilidad para la transferencia de ideas.
- Originalidad de interpretación.

Teniendo en cuenta que una de las características propias de los individuos talentosos reconocida por Krutestkii está relacionada con la visualización y que para la investigación que desarrolló desde 1955 hasta 1966 propuso grupos de problemas que tuviesen diferentes grados de visualización, transformaciones graduales de lo concreto a lo abstracto, desarrollo de secuencias, encontrar reglas generales utilizando la composición de números o figuras, entre otros (Denise, 2005); se hace necesario revisar algunos aspectos relacionados con la visualización que estén relacionados con la resolución de problemas.

Visualización

El término visualización se puede definir desde dos perspectivas diferentes: la psicológica y la matemática; a pesar de ser un término usado de manera muy coloquial sus características y su definición no es sencilla.

Visualización (desde la psicológica): habilidad de los sujetos para formar y manipular imágenes mentales (Ávalos y Carrión, 1998) definidas como “representaciones mentales que las personas hacen de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc.” (Gutiérrez, 1991, p. 44).

Visualización (desde las matemáticas): La habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora. Dicho diagrama sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema (Zimmermann, & Cunningham, 1991 citado en Ávalos y Carrión, 1998); es importante resaltar que no se habla de visualizar un diagrama sino un concepto o problema, lo que significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen visual, la habilidad visual depende de la efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas.

La actividad de visualización, según Bishop¹ (1989 citado en Gutiérrez, 1991), se desarrolla en dos tipos de procesos:

- Procesamiento visual: proceso de cambio de información abstracta en imágenes visuales o de imágenes visuales ya formadas, en otras.
- Interpretación de información figurativa: proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales.

1 Prospectiva desde las matemáticas



Por otro lado, la visualización está ligada a algunas habilidades de carácter psicomotriz o intelectual; en referencia a las de carácter intelectual se encuentran: habilidades de identificación visual, reconocimiento de posición y discriminación visual (Gutiérrez, 1991).

Metodología

Para la selección de los antecedentes que se presentan, en primer lugar se hizo una revisión de investigaciones que han abordado el problema de la identificación y el uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas que en lo posible hubiesen utilizado algunos problemas de visualización en los instrumentos.

En segundo lugar, se revisaron algunos trabajos enfocados en los procesos de visualización y asociados con las características de talento matemático en los que fuera posible identificar en las soluciones de los problemas presentados algunas características de talento en matemáticas. Adicionalmente, se seleccionó un problema propuesto en un cuestionario aplicado a aspirantes a participar en el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, para el primer semestre de 2009, marco de la investigación: “El club de matemáticas de la UPN : Un espacio para identificar talentos matemáticos”.(2008-2009); financiado por el Centro de Investigaciones de la UPN.

Análisis de Resultados

Sobre lo documental

A nivel mundial la investigación en Educación Matemática se ha ocupado de estudiar se la resolución de problemas desde diversos enfoques. Se ha tratado de dar respuesta a preguntas, en el ámbito que nos compete se han cuestionado, por ejemplo por: ¿qué características de talento matemático se pueden identificar en la solución de problemas?; los niños que son identificados como niños con talento o superdotados mediante un test de aptitud general o de inteligencia, ¿manifiestan cualidades que están ligadas al talento matemático?; ¿existe relación entre las puntuaciones obtenidas por los niños en un test de aptitud general, como el test de Raven, y el rendimiento en resolución de problemas en un campo de conocimiento específico de la matemática?; ¿Qué validez tiene un test de problemas perteneciente al campo conceptual en un campo específico como test diagnóstico de aptitud en niños con talento? (Ver, por ejemplo, Benavides, 2008)

En relación con la primera pregunta han sido varios los investigadores que se han dado en la tarea de contribuir a su solución. Algunos han sido:

Ellerton (1986 citado en Benavides, 2008) realizó un estudio en el que propuso a estudiantes de 11 a 13 años de edad que inventaran y resolvieran problemas que fuesen complicados de resolver por un compañero. Comparó las características de los problemas matemáticos planteados por ocho niños que manifestaban características de talento con ocho niños menos capaces. Obtuvo como resultados que los niños más capaces plantean problemas de mayor complejidad de cálculo, con sistemas de números más complejos y con mayor número de operaciones que sus compañeros. Afirma que el planteamiento de problemas es una herramienta útil para estudiar el talento matemático.

Heinze (2005 citado en Benavides, 2008) compara las estrategias que emplean los estudiantes superdotados en la resolución de un problema con las que emplearon estudiantes de una clase normal. Concluyó que los primeros emplean estrategias complejas, en mayor proporción y con más regularidad que los segundos, es decir, reconocen con mayor rapidez las estructuras y trabajan de manera más sistemática y estructurada los problemas. Adicionalmente, concluye que en comparación con los estudiantes “normales”, los alumnos con talento matemático necesitan, de

manera significativa, menos tiempo en solucionar los problemas y tienen una gran habilidad para verbalizar, explicar y verificar sus soluciones.

Maryorie Benavides Simon (2008) en su tesis doctoral, titulada: “Caracterización de sujetos con talento matemático en resolución de problemas de estructura multiplicativa”, realizó una investigación con 60 estudiantes de dos comunas de Santiago de Chile, cuyas edades oscilan entre 11 y fueron seleccionados a través de los resultados obtenidos en el Test de Raven y la nominación de sus profesores para ser organizados en dos grupos: los que obtuvieron un puntaje superior a 75 y los que obtuvieron por debajo

Luego se aplicó un cuestionario de problemas matemáticos de estructura multiplicativa (PEM) que desempeñó la función de test de aptitud matemática diseñado y validado. Los problemas fueron seleccionados de investigaciones anteriores realizadas por Castro (1995), Villarraga (2002), Span y Overtoon (1986), esto con el fin de validar el cuestionario teniendo en cuenta dos tipos de valides: la primera de contenido que se enfoca en que los ítems del test son una muestra del universo del contenido que se pretende evaluar, esta parte del trabajo se apoyó desde la consulta a colegas (expertos); la segunda forma: validez de constructo que verifica en qué medida el test es congruente con la teoría, esta parte se sustentó enmarcando y haciendo referencias a investigaciones internacionales sobre el tema en cuestión. Dicho cuestionario (PEM) se compone de doce problemas. Adicional a los resultados obtenidos en los test (Raven y PEM) se realizó una entrevista a los estudiantes con el fin de completar la información.

Los resultados más relevantes de la investigación son:

- En el ámbito escolar no se puede tomar el talento como un concepto monolítico, desde el punto de vista de la resolución de problemas; los sujetos con talento no constituyen una población homogénea, sus actitudes ante las tareas son diferentes.
- La elaboración de instrumentos basados en la resolución de problemas, tal como el PEM (Problemas de Estructura Multiplicativa), son un buen instrumento de identificación de niños talentosos en matemáticas, respecto a instrumentos formales, como el Test de Raven, ya que se lograron identificar mayores diferencias entre el grupo de estudiantes seleccionados como talentosos, de aquellos que no.
- El rendimiento en un test de resolución de problemas centrado en un campo específico de conocimiento matemático marca más diferencia entre los sujetos que habían sido seccionados previamente con el test de Raven de aquellos que no lo superaron, el rendimiento fue evaluado en los procesos que llevó a la solución de un problema, lo que deja detectar algunas características de talento citadas por algunos autores como Greenes (1981), Touron (1998).

Por último, la autora, sugiere algunas problemáticas de interés en la investigación de los sujetos con talento en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, algunos de éstos son:

- Dentro de una evaluación- diagnóstica, enseñanza - preescriptiva, la continuación natural es poner en práctica el modelo y elaborar actividades adecuadas para las necesidades educativas de los alumnos observados en el proceso, especialmente tareas que ayuden a superar las dificultades detectadas y los errores cometidos.
 - El modelo desarrollado en la tesis puede ser aplicado a otros campos conceptuales de la matemática, lo que conlleva a repetir el proceso con sujetos con talento previamente seleccionados mediante un test de inteligencia (Benavides, 2008, p. 277).
-



Un ejemplo

El siguiente problema fue seleccionado de los problemas propuestos a aspirantes a participar en el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, para el primer semestre de 2009 y que hace parte de una investigación cuyo propósito es identificar las características de talento en matemáticas de los niñas y niños que participan en el club. Este problema está basado en la prueba de XVI Olimpiada Colombiana de Matemáticas (Nivel Superior) y en las pruebas PISA 2003.

1. TORRES. El dibujo de la figura 1 se llama un “*mapa de torre*” los números en cada casilla del mapa indican la cantidad de cubos que están puestos en cada una de las posiciones. La Figura 2 muestra la torre (compuestos de cubos) y la Figura 3 muestra el plano de la torre vista de frente, es decir, la “*vista frontal*”.



Figura 1

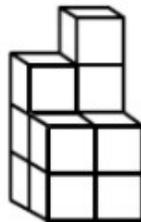


Figura 2

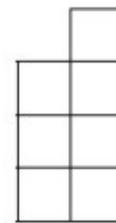
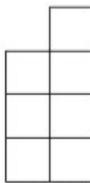


Figura 3

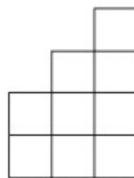
a) ¿Cuál de los siguientes planos es la vista frontal de la torre cuyo mapa se muestra en la Figura 4?



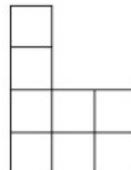
Figura 4



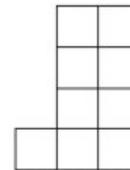
a.



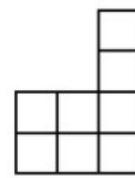
b.



c.



d.



e.

La Figura 5 muestra el plano de una torre vista de frente (vista frontal)



Figura 5

- b) Dibuja un mapa de torre que corresponda con la vista frontal de la Figura 5. ¿es único? Explica.
 c) ¿Cuántos cubos tiene la torre que corresponde a la vista dada? ¿por qué?

Se mostrará en este análisis la respuesta dada por un estudiante al numeral b.

Estudiante. 1



El estudiante da como solución al problema cinco mapas que corresponden a cuatro columnas (se entendió como columnas también a aquellas que están compuestas por cero cubos) y hace un comentario alusivo a la posibilidad de una cantidad mayor de mapas posible; una conjetura es que después de pasar por dichas representaciones pasa a generalizar la respuesta afirmando que no es único, diciendo: “no es único porque si nos muestran la figura plana nosotros podemos determinar qué cantidad puede haber atrás o adelante sabiendo que en la primera columna podemos colocar un número menor que 3 o 3 y en la segunda un número menor que 1 o 1”. De manera intuitiva el estudiante encuentra que el número de respuestas es infinito, una interpretación de sus palabras se presenta en el siguiente esquema (mapa de la figura 5).

...	...	a^{-1}	a^0	a^1	...	a^n	...
...	...	b^{-1}	b^0	b^1	...	b_n	...

Con $-1 < a_i < 4$, $-1 < b_i < 4$ e i en el conjunto de los números enteros

De lo que se pueden identificar las siguientes características:

- Múltiples soluciones, dado a que encuentra varias soluciones válidas.
- Visualización, usa el diagrama para dar solución a un problema y presenta los dos procesos de manipulación procesamiento visual e interpretación de información figurativo.
- Generalización pues encuentra un resultado general a partir de algunos ejemplos de manera verbal.
- Abstracción hace un cambio de representación del dibujo a la representación aritmética.
- Entiende la estructura interna del problema.

Conclusiones

La revisión de los documentos y el análisis del problema presentado permite confirmar la observación de Castro (2008): la resolución de problemas es una herramienta que permite identificar características de talento matemático.



Al parecer los problemas relacionados con la visualización permiten identificar algunas características de talento matemático, sin embargo no es una cantidad considerable, esto puede deberse al problema seleccionado o a las pocas investigaciones que estén enfocadas en esta línea dada la carencia de investigaciones sobre este aspecto encontradas en la búsqueda realizada, lo que permite afirmar que se hace necesario realizar una investigación que se situó de manera directa en el uso de problemas relacionados con el proceso de visualización para determinar características de talento matemático, teniendo en cuenta que importancia de la visualización en la actividad matemática.

Bibliografía

- Ávalos, A. y Carrión, V. (1998). Álgebra de funciones mediante procesos de visualización. En IX Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadores en Educación Matemática: Ciudad de México. Escuela Normal Superior de México. Extraído 29 de agosto del 2009 de <http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/memixsem.pdf#page=108>
 - 2. Benavides, M (2008). Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. Tesis de doctorado. Universidad de Granada, Granada, España.
 - Bermejo, R. (2003). Excepcionalidad: Los Superdotados. En: Junta de Extremadura (Ed.), I Congreso Regional “Las Necesidades Educativas Especiales: Situación actual y retos de futuro” (pp. 111-125). Mérida: Consejería de Educación Ciencia y Tecnología.
 - Cantoral, R., Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático: El caso de los polinomios interpoladores de Lagrange [Versión electrónica]. *Números*, 55, 3 – 22.
 - Castro, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En: XII Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática “Ventura Reyes Prósper” y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Extraído el 20 de Marzo de 2009 de <http://www.uv.es/puig/castroseiem2008.pdf>
 - Denise, G (2005). Aspectos do pensamento matemático na resolucao de problemas: uma apresentacao contextualizada da obra de Krutetskii. Tesis de Doctorado. Universidad Católica. San Pablo, Brasil.
 - Díaz, O., Feijoo, M., Fernández O., Pasarín, M. & Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en secundaria [Versión electrónica]. *Fáscia*, 11, 83-102. Extraído el 3 de Octubre de 2008 de http://www.dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2476416&orden=0.
 - Gutiérrez, A. (1992). Procesos y Habilidades en visualización Espacial. *Memorias del III Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría*, (pp. 44-59) Extraído el 10 de junio, 2009 de <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>
 - Gutiérrez, M. & Maz, A. (2004). Educación y Diversidad. En: M. Benavides, R. Blanco, E. Castro & A. Maz (Eds.), *La Educación de Niños con Talento en Iberoamérica*. (pp. 15 - 24) Extraído el 10 de marzo, 2009 de http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/educacion_ninos_talento_iberoamerica.pdf
 - MEN (2006). Orientaciones para la atención educativa a estudiantes con talentos o capacidades excepcionales. Extraído el 10 de Febrero, 2009 de <http://www.mineduacion.gov.co/1621/article-85589.html>
-